oktober 2000 ~ nr 2 ~ jaargang 76

Ghanees wiskundeonderwijs

EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

2

OKTOBER 2000 JAARGANG 76

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Veldzichtstraat 24, 3731 GH De Bilt
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

• goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
• platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
• illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie

Contributie per verenigingsjaar: *f* 80,00
Studentleden: *f* 40,00
Leden van de VWWL: *f* 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: *f* 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: *f* 85,00 per jaar.
Voor instituten en scholen: *f* 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor *f* 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@worldonline.nl
of F. Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-673468

INHOUD

[Van de redactietafel]

NVvW Lustrumcongres 2000

Thema

Wiskundeonderwijs over de grens

met drie subthema's

... over de **lands**grenzen

... over de **vak**grenzen

... over de **tijds**grenzen

op 17 en 18 november 2000

Zie het speciale nulnummer van Euclides voor het programma.

Een congres dat u niet mag missen!

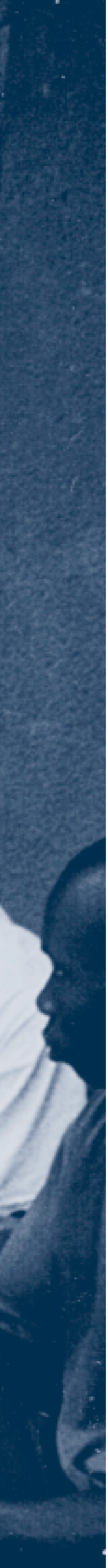
Aanmelden voor en informatie over het congres is nog steeds mogelijk bij:
F.J. Osseweijer
Lindelaan 79
3319 XJ Dordrecht
tel (078) 616 05 76

Verder in dit nummer

Als u bij uw jaarlijkse contributie de vijf gulden extra overmaakt voor het Wereldwiskunde Fonds, dan kunt u in dit nummer lezen hoe goed dat besteed wordt. Ook daar zou 18 miljard extra voor het onderwijs geen overbodige luxe zijn, denk ik dan altijd maar.
Verder is er aandacht voor de normering bij de nieuwe examens van de Tweede Fase voor havo en vwo.
Ook de ontwikkelingen in het hbo verdienen de aandacht. De daar gesignaleerde tendenzen spelen ook een rol in het mbo en zijn daarmee dus van belang voor zowel het onderwijs op havo als in het vmbo.
Tenslotte is er een artikel over probleemaanpak in de wiskundeles. Ook een artikel met relevantie voor alle niveaus en klassen.

Kees Hoogland

Het Wereldwiskunde Fonds



en wiskunde in Ghana

[Petra Bos]

In het onderstaande artikel geeft Petra Bos een indruk van het onderwijs in Ghana. Tot voor kort was Petra aldaar werkzaam in het wiskundeonderwijs. In die functie heeft ze, zoals anderen voor haar, gebruik gemaakt van de mogelijkheid een projectaanvraag in te dienen bij het Wereldwiskunde Fonds. Behalve boeken heeft ze ondersteuning gevraagd en gekregen in de vorm van visueel lesmateriaal. Ook daarvan brengt ze verslag uit.

Ghana

Ghana is een land in West-Afrika. Het land is ongeveer zes keer zo groot als Nederland en heeft 18 miljoen inwoners. In 1958 werd Ghana onafhankelijk van Engeland en na een paar onrustige jaren heerst er nu rust met een ‘democratisch’ gekozen president J.J. Rawlings. Binnenkort zijn er weer nieuwe verkiezingen. Het is afwachten hoe die zullen gaan verlopen. Sinds de onafhankelijkheid is het onderwijs langzaam vooruit gegaan, waardoor het land zelf zich ook steeds beter is gaan ontwikkelen.

Onderwijs in Ghana

In Ghana is er tot op heden nog geen leerplicht, dus leerlingen gaan alleen naar school als de ouders het nodig vinden en het kunnen betalen. Er is nu echter een programma gestart (FCUBE = Free Compulsary Universal Basic Education) dat er voor moet zorgen, dat vanaf 2002 of 2003 ieder kind naar school zal gaan en dat het onderwijsniveau omhoog gaat. Als gevolg van het ontbreken van de leerplicht komt het namelijk voor dat er binnen het middelbaar onderwijs kostbare lestijd besteed moet worden aan zaken die in wezen thuis horen in het basisonderwijs.

Het basisonderwijs (Primary School) begint ook in Ghana op vierjarige leeftijd en duurt 6 jaar (P1 tot P6). Hierbij tellen de eindejaars-examens, samengesteld door de docenten zelf, als toegang tot het vervolgonderwijs. De voertaal is de eerste 3 jaar de lokale taal (waarvan er 60 verschillende zijn in Ghana) en daarna wordt in het Engels les gegeven. De examens zijn ook in het Engels gesteld. Na het basisonderwijs wordt alleen nog maar in het Engels les gegeven en zijn alle boeken ook in het Engels.
De Junior Secondary School (JSS) duurt drie jaar en is te vergelijken met de eerste drie jaar van het middelbaar onderwijs in Nederland. Deze JSS wordt afgesloten met een landelijk examen. Het gemiddelde van de diplomacijfers bepaalt op welke Senior Secondary School (SSS) je kunt worden toegelaten. Iedere SSS heeft zijn eigen toelatingseisen, al wordt daar niet altijd even consequent mee omgesprongen want vriendjespolitiek heerst erg sterk in Ghana. SSS is te vergelijken met de laatste drie jaar van het middelbaar onderwijs in Nederland. De SSS wordt wederom afgesloten met een landelijk examen (GSCE). Dit GSCE wordt gemaakt door de West African Examination Council in samenwerking met de Universiteit van Cambridge.
Voor de overgang naar ieder volgend leerjaar wordt gebruik gemaakt van eindejaars-examens die door de

docenten zelf gemaakt worden en alle stof die het afgelopen schooljaar behandeld is, tot onderwerp hebben. Aan het eind van elk trimester wordt ook een examen afgenomen over alle stof van dat trimester, eveneens gemaakt door de docent zelf. Het lesniveau is te vergelijken met het vwo-niveau in Nederland. Helaas is dit ook het enige niveau waarop lesgegeven wordt. Hierdoor is het voor een 'mavo-leerling' erg lastig om voor deze examens een voldoende te halen.

Het onderwijs op hbo- en universitair niveau is redelijk goed. Omdat er maar weinig universiteiten in Ghana zijn, brengt studeren vaak extra kosten met zich mee vanwege de onmogelijkheid om als student nog thuis te wonen. Los daarvan is het onderwijs op dit niveau kostbaar. Al met al zijn er maar weinig mensen in Ghana voor wie dit is weggelegd.

LASSEC

Zelf heb ik gewerkt aan Lassia Senior Secondary School (LASSEC). Deze school is in 1995 als particuliere school opgezet als onderdeel van een missiepost. In 1998 heeft de overheid de school overgenomen. LASSEC is een kostschool, zoals vele in Ghana. Eén van de redenen dat er kostscholen zijn is gelegen in het afstandsprobleem, gecombineerd met een gebrekkig openbaarvervoersysteem. Een andere reden is dat, als de leerlingen na school weer naar huis gaan, ze vaak thuis of op het land moeten helpen met karweitjes. Als ze dan 's avonds hun huiswerk zouden willen doen, dan lukt dat vaak niet omdat er geen licht of rustig plekje is om te werken.
LASSEC is in de korte tijd van zijn bestaan al opgeklommen tot derde beste school in de regio. Op dit moment is het zelfs de beste school voor meisjes. De scholen die boven LASSEC staan zijn jongensscholen; LASSEC is gemengd, dus voor meisjes is LASSEC de eerste mogelijkheid om goed onderwijs te krijgen. Het is jammer genoeg in Ghana nog steeds zo dat jongens voorrang hebben op onderwijs ten opzichte van meisjes. Het was dus ook een extra stimulans voor de meisjes om te zien dat mijn vrouwelijke science-collega en ik in de exacte vakken les gaven.
Op LASSEC bestond de wiskundesectie uit mijn mannelijke Ghanese collega en ikzelf. We moesten dan ook samen alle lessen draaien die er gegeven werden, wat er op neer kwam dat we elk 30 lesuren per week hadden. Op een kostschool is dat vaak niet het enige. Wij startten ook een wiskundeclub en hielden deze draaiende. Het leuke van die wiskundeclub was wel, dat je daarin wat meer extra wiskunde kon doen en dus ook eens wat kon uitproberen als het ging om bijvoorbeeld groepswerk of een nieuw onderwerp.

Wiskundeonderwijs in Ghana

Wiskunde is een erg belangrijk onderdeel van het onderwijs in Ghana. Het is zelfs zo dat je geen diploma

krijgt als je wiskunde en Engels niet hebt gehaald. Het wiskundeonderwijs is nog erg traditioneel. De boeken zijn vaak nog erg ouderwets en theoretisch. Er wordt wel uitleg gegeven maar op een redelijk complexe manier en de oefeningen bevatten veel herhaling. Er is gelukkig wel wat opbouw in de boeken, zodat er niet meteen bij het moeilijkste begonnen gaat worden. De rekenmachine mag in sommige gevallen worden gebruikt, al zijn de boeken daar nog niet op aangepast. De boeken werken nog met de tabellenboekjes. Zo moeten logaritmen nog met de tabellen uitgerekend worden en dat is erg verwarrend en lastig voor de leerlingen. De nadruk ligt op algebra. Doordat de klassen zo groot zijn (40 leerlingen minimaal), de boeken niet al te duidelijk zijn en andere lesmaterialen ontbreken, komt de docent al snel in de verleiding om alleen maar klassikaal les te geven. Dit is dus ook wat er gebeurt in Ghana: leerlingen zitten in de klas, de docent dicteert en schrijft op het bord, de leerling kopieert alles in zijn schrift en vraagt niets.

Zelfstandig wiskunde ontdekken

Het is dan ook de uitdaging om dat patroon te doorbreken. Als docent heb ik geprobeerd om wat groepswerk in te bouwen in de lessen met de bedoeling dat de leerlingen leerden om zelf over een probleemaanpak na te denken in plaats van mij alles te laten voorkauwen. Groepswerk is erg leerzaam, maar niet altijd uit te voeren op de school, de klassen zijn te groot en er is geen ruimte om groepen te creëren. Tevens is er in de syllabus geen tijd vrijgelaten voor extra werk of groepswerk. De syllabus is al te groot voor wat er in een jaar gedaan moet worden. Het kwam er dus op neer dat groepswerk en dergelijke buiten de normale lesuren om geregeld moest worden. Hierbij was het van belang dat de leerlingen gemotiveerd waren om nieuwe dingen te proberen. Een van de eerste dingen die ik met leerlingen heb gedaan, om ze te laten wennen aan groepswerk, is opgaven van de wiskundekalender 1999 in verschillende groepjes laten uitwerken. Het leek eerst op een spel ‘probeer maar wat de mogelijkheden zijn’, maar aan het einde bleek het toch om wiskunde te gaan en om het vinden van verschillende oplossingen voor een probleem. Na deze kennismaking met groepswerk waren de leerlingen al wat enthousiaster en kon er op een later tijdstip bijvoorbeeld een statistisch onderzoek gedaan worden, waarbij er ook een verslag moest worden geschreven.

Wereldwiskunde Fonds en LASSEC

Aangezien ik nog wel meer ideeën had, maar de materialen niet altijd eenvoudig te maken waren, kwam de donatie van het Wereldwiskunde Fonds op het juiste moment. Met een deel van het geld heb ik materiaal gekocht dat het wiskundeonderwijs zou kunnen ondersteunen. Zo is er materiaal aangeschaft voor uitleg over breuken (de bekende houten blokjes met onderverdeling in tienden en honderden), Lokon (materiaal om 3D figuren mee te creëren) en 3D-vormen die gemeten kunnen worden en gevuld kunnen worden.
In dit kader past hier wellicht ook een vermelding van het feit dat één van de firma’s (te weten de firma Jegro uit Bolsward) die het materiaal leverde, bereid bleek een gedeelte van de transportkosten van het materiaal naar Ghana voor haar rekening te nemen.
Met de rest van het geld heb ik boeken gekocht die een aanvulling geven op de lessen en extra voorbeelden bevatten over hoe een opgave uitgewerkt kan worden. Deze boeken geven de leerling inzicht in het feit dat er vaak meer dan een mogelijkheid is om het antwoord te vinden. Tevens geven deze boeken de docenten de kans om ook eens op een andere manier te werk te gaan en meer naslagwerk te hebben. En een laatste deel van het geld is besteed aan de aanschaf van batterijen voor de grafische rekenmachines die ik al van Texas Instruments (via Anne van Streun) gedoneerd had gekregen. Helaas mogen deze rekenmachines nog niet tijdens het examen gebruikt worden. Ze zijn er dus wel, maar worden alleen tijdens de extra lessen gebruikt.

Visuele hulpmiddelen zijn erg van belang, met name omdat het 3D-inzicht erg slecht is. Omdat ik zelf al weg was toen de laatste materialen aankwamen, heb ik mijn collega gevraagd om een beschrijving te geven van wat er met het materiaal gedaan is tot op heden. Een citaat uit haar reactie tot besluit van dit artikel:

Bijna onmiddellijk na de ontvangst van de materialen zijn ze gebruikt en ze geven een fantastisch resultaat. Studenten bestuderen de geometrische vormen, de oppervlakte, het volume, maken uitslagen en een 2D-schaduw-weergave van het 3D-figuur in extra lessen waarbij deze materialen gebruikt worden. In plaats van te proberen een voorstelling te maken van een 3D-figuur die is getekend op een 2D-schoolbord, kunnen ze het betreffende lichaam nu echt vasthouden en bestuderen. De studenten werden in groepjes verdeeld en ze wisselden telkens van tafel. Op elke tafel lag één lichaam (zoals een kubus, piramide, kegel of cilinder) en de studenten werd gevraagd te meten en berekenen hoe groot de oppervlakte en het volume waren. Volumes konden worden gecontroleerd door het lichaam te vullen met water en dan het water over te gieten in een maatbeker. De studenten worden aangemoedigd de door hen gemaakte fouten te bestuderen. Deze nieuwe materialen zijn van zeer grote waarde voor de wiskundesectie (en kunnen ook voor scheikunde/natuurkunde gebruikt worden). Voor een docent is er niets mooiers dan wanneer je ziet dat een student opbloeit, omdat hij begrijpt wat er bedoeld wordt. Tijdens de wiskundepractica vorige week leek de hele ruimte ‘op te lichten van begrip’ en wiskunde leek een beetje meer werkelijkheid voor de leerlingen. Dank u wel!’

Analysis I

H. Amann & J. Escher

H. Amann & J. Escher

Analysis I

Birkhäuser Verlag, Basel, 1998

445 blz., prijs DM 48,00, ISBN 3-7643-5974-9

Toen ik in de vijfde klas van de HBS aan mijn wiskundeleraar vroeg wat een studie wiskunde eigenlijk inhield, leende hij me een collegedictaat uit. Met verbazing las ik daarin dat voor de optelrelatie + onder andere geldt dat $n + v(m) = v(n + m)$. Mijn verbazing gold niet zozeer deze eigenschap als zodanig maar veeleer het feit dat deze eigenschap bewezen moest worden en ook daadwerkelijk bewezen werd!
Dit was mijn eerste en tevens doorslaggevende kennismaking met het vakgebied. Na mijn studie wiskunde ben ik in het voortgezet onderwijs gaan werken.

Deze herinnering schoot door mijn hoofd toen ik de openingsregels van het voorwoord van het onderhavige, Duitstalige boek las:

'Ein Hauptanliegen der Mathematikausbildung ist die Schulung der Fähigkeit, logisch zu denken und complexe Zusammenhänge zu analysieren und zu verstehen. Eine solche Analyse erfordert das Erkennen und Herausarbeiten möglichst einfacher Grundstrukturen, welche einer Vielzahl äusserlich verschiedener Problemstellungen gemein sind.'

Deze visie op het onderwijzen van wiskunde hebben beide auteurs uitgewerkt in een drie delen tellende inleiding in de analyse. Analysis I is het eerste deel. Het is gebaseerd op colleges die zij in de afgelopen 26 (!) jaar hebben gegeven aan de universiteiten van Bochum, Kiel, Zürich, Basel en Kassel.
In een vijftal hoofdstukken met de (vertaalde) titels Grondslagen, Convergentie, Continue functies, Differentiaalrekening met één variabele en Functierijen wordt een solide fundament van de analyse gelegd.

Het hoofdstuk Grondslagen behandelt voornamelijk de getallenstelsels. In het hoofdstuk Convergentie wordt de intuïtieve voorstelling van een verdichtingspunt van een convergente getallenrij geformaliseerd. Enkele convergentiecriteria worden ontwikkeld. De (existentie)-stelling van Bolzano-Weierstrass wordt bewezen. Na de introductie van Cauchy-rijen komt de constructie van reële getallen volgens Cantor uitvoerig aan de orde. Machtrijen besluiten het hoofdstuk. Het hoofdstuk over Continue functies is zeer abstract. De topologische achtergronden van de Analyse komen uitgebreid aan de orde, culminerend in de (algemene) tussenwaardestelling: continue beelden van samenhangende verzamelingen zijn samenhangend. In de laatste paragraaf wordt de exponentiële functie $z \to e^z$ uitvoerig bestudeerd, onder andere in samenhang met logaritmische en trigonometrische functies. Het volgende hoofdstuk, Differentiaalrekening, is heel praktisch en concreet. Hoe kun je een gecompliceerde grafiek lokaal benaderen door een rechte lijn. Differentiëren dus. De middelwaardestelling wordt geponeerd. Als toepassing hiervan worden de bekende regels van l'Hospital bewezen. Dan komen hogere orde benaderingen aan de beurt. Kan een continue functie lokaal door polynomen, dus door een Taylorreeks-ontwikkeling, worden benaderd? In de laatste paragraaf komt het benaderen van nulpunten van functies aan de orde: de iteratiemethode van Newton. In het laatste, vijfde hoofdstuk komen functieruimtes aan de orde: vectorruimtes met functies van een zeker type als elementen. Met de trigonometrische versie van de approximatiestelling van Weierstrass, die garandeert dat elke reële continue functie uniform door polynomen te approximeren is, eindigt Analysis I.

Van meet af aan wordt elk begrip zo algemeen mogelijk gedefinieerd opdat het ook later bij een voortgezette studie van een deelgebied van de wiskunde of van een wiskundige toepassing kan worden gebruikt. Er wordt geen kunstmatige scheiding aangebracht tussen de theorie van één variabele en van meer variabelen.
Zo heet bijvoorbeeld in een metrische ruimte de getallenrij (x_n) convergent met limiet a als iedere omgeving van a bijna alle elementen van (x_n) bevat. Dan komen de rekenregels aan de orde. Er wordt bewezen dat $(x_n + y_n)$ convergent is met limiet $a + b$ (als (y_n) convergent is met limiet b) en dat $(\alpha \cdot x_n)$ convergent is met limiet $\alpha \cdot a$.
Als zo'n convergente rij nu wordt geïnterpreteerd als een vector in een vectorruimte, dan blijken diezelfde rekenregels ook als volgt kunnen worden geformuleerd: de afbeelding

[S.H. de Zoete]

$(x_n) \rightarrow a$ is lineair in de (deel)vectorruimte van convergente rijen (x_n).
Dit is zomaar een voorbeeld van een 'möglichst einfache Grundstruktur', van een eenvoudig grondbegrip dat twee verschillende probleemstellingen met elkaar in verband brengt. Het boek bevat meer van zulke dwarsverbanden. De schrijvers maken zodoende duidelijk dat, ondanks de thans wel meer dan 50 te onderscheiden deelgebieden van de wiskunde, wiskunde wezenlijk één geheel is, één wetenschap van patronen en structuren.

Dat de auteurs niet alleen in de breedte weten te schrijven, maar ook diepgravendheid niet schuwen moge blijken uit de volgende opsomming van onderwerpen die in paragraaf IV.2 aan de orde komen. Deze paragraaf handelt over de middelwaardestelling. In krap 15 pagina's komen achtereenvolgens aan de orde: lokale en globale extremen, noodzakelijke voorwaarde voor lokale extremen, stelling van Rolle, (eerste) middelwaardestelling, karakterisering van monotone en constante functies (met behulp van de afgeleide), voorwaarde waaronder een differentieerbare functie injectief is, cyclometrische functies en hun afgeleide, (strikt) convexe en concave functies, ongelijkheden van Young, van Hölder en van Minkowski, (tweede) middelwaardestelling en regels van l'Hospital.

Elke paragraaf wordt besloten met een flink aantal oefenopgaven. Antwoorden ontbreken (helaas). Een enkele hint moet de lezer op het spoor van een oplossing zetten. Nu eens dient een opgave om de in de paragraaf behandelde theorie toe te passen (Toon aan dat $x \rightarrow |[x + 0{,}5] - x|$ continu is). Dan weer gaat de theorievorming in de opgaven verder (Bewijs de verdichtingsstelling van Cauchy). Ook zijn er opgaven die terug in de tijd gaan (Laat zien dat de rij (x_n), die recursief gedefinieerd wordt door $x_{n+1} := (x_n + a/x_n)/2$, monotoon dalend convergeert naar $\sqrt{a}$. Deze manier wordt Babylonisch worteltrekken genoemd). Ik trof zelfs een 'hypermoderne' opgave aan, gewijd aan het Franse spoorwegnet waar de snelste verbinding tussen twee plaatsen vaak via Parijs loopt! (Bewijs dat δ een metriek op C definieert, de zogenoemde SNCF-metriek, als

$$\delta(z, w) := \begin{cases} |z - w| & \text{als} \quad z = \lambda w \\ |z| + |w| & \text{anders} \end{cases}).$$

Voortgekomen uit een collegedictaat, bedoeld voor eerstejaars studenten, leent het boek zich ook goed voor zelfstudie. De vele voorbeelden en oefenopgaven ondersteunen de begripsvorming. Bewijzen worden, indien nodig, ruimhartig verstrekt. In mijn eigen collegedictaten werden bewijzen nog wel eens afgedaan met 'evident' of, nog erger, 'zonneklaar'! Docenten wiskunde kunnen er, denk ik, ook hun voordeel mee doen als ze snel willen weten hoe iets ook alweer zat. Een uitgebreid register staat hen daarbij ten dienste. Zelfs een index van symbolen is achterin opgenomen.

Als één van mijn leerlingen in vwo-6 zou vragen wat een studie wiskunde nu eigenlijk inhoudt, zou ik hem/haar in dit boek laten bladeren. Ik koester de hoop dat hij/zij dan iets van de 'Klarheit, Transparanz und Konzentration auf das Wesentliche' die de auteurs hebben nagestreefd, zal opmerken.
En, wie weet, zal het bewijs in hoofdstuk I dat $n + v(m) = v(n + m)$ hem/haar net zo verbazen als mij indertijd!

De afgeleide van de inhoud is de oppervlakte

[Leon van den Broek]

Bol en kubus

Een bol met straal r heeft inhoud $\frac{4}{3}\pi r^3$ en oppervlakte $4\pi r^2$. De oppervlakte is de afgeleide van de inhoud.
Een kubus met ribbe r heeft inhoud r^3 en oppervlakte $6r^2$. De oppervlakte is niet de afgeleide van de inhoud. Vreemd? Dit artikel legt uit wat er aan de hand is.
De afgeleide van de inhoud van de kubus is wel degelijk de oppervlakte! Neem maar als variabele de halve ribbe x (de afstand van het middelpunt van de kubus tot een grensvlak). Die heeft bij de kubus de rol die de straal bij de bol heeft. Dan is de inhoud van de kubus $8x^3$ en de oppervlakte $24x^2$. Inderdaad is de oppervlakte de afgeleide van de inhoud.

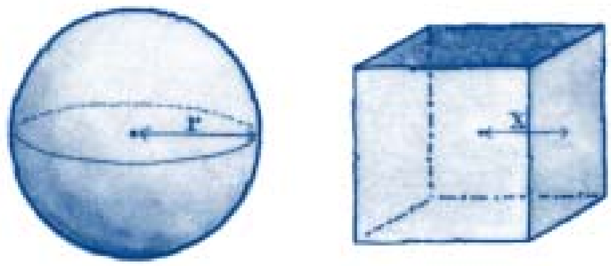
Waarom er zo'n mooie betrekking tussen inhoud en oppervlakte is

Dat kun je op twee manieren begrijpen.

1 Door de inhoud te zien als de som (of integraal) van een nest schillen.

2 Door de oppervlakte te zien als het verschil (of afgeleide) van twee inhouden.

Dit zijn de twee hoofditems van het pakketje *Som & Verschil, Afstand & Snelheid* voor de Tweede Fase wiskunde-B van het Freudenthal Instituut [1].
Beide manieren werken we uit voor de kubus.

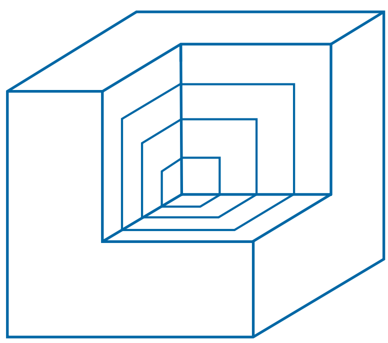


figuur 1

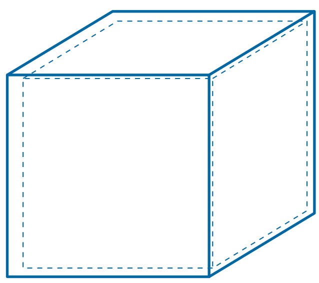
1) De inhoud als limiet van een Riemannsom

Verdeel de massieve kubus met halve ribbe x in een nest van concentrische kubuswanden van dikte Δt. In figuur 2 krijg je een kijkje in het inwendige van de kubus.
De inhoud van de kubus is dan de som van de inhouden van de schillen en die zijn kleiner dan de buitenoppervlakte maal Δt (de bovenschatting) en groter dan zijn binnenoppervlakte maal Δt (de onderschatting). Zodoende ligt de inhoud van de kubus tussen een bovensom en een ondersom. Je kunt gemakkelijk nagaan dat het verschil tussen beide sommen gelijk is aan de oppervlakte van de kubus maal Δt en dat verschil nadert dus tot 0 als Δt tot 0 nadert.
Bijgevolg bestaan de limieten van de bovensom en de ondersom en die zijn beide $\int_0^x Opp(t)\mathrm{d}t$.

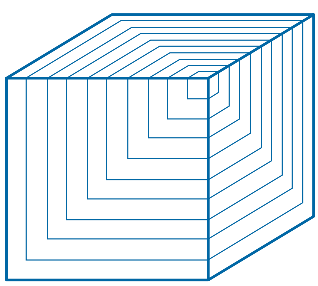
2



3



4



2) De oppervlakte als differentiaalquotiënt

Neem daartoe het verschil van de twee kubussen met halve ribbe x en met halve ribbe $x + \Delta x$ (met $\Delta x > 0$). Als we de kubussen zo plaatsen dat ze hetzelfde middelpunt hebben, is het verschil een kubuswand van dikte Δx. De inhoud $\Delta Inh(x)$ daarvan is kleiner dan de buitenoppervlakte van de wand maal Δx en groter dan de binnenoppervlakte maal Δx.

Dus: $Opp(x) \cdot \Delta x \le \Delta Inh(x) \le Opp(x + \Delta x) \cdot \Delta x$.

Dus: $Opp(x) \le \dfrac{\Delta Inh(x)}{\Delta x} \le Opp(x + \Delta x)$.

Door Δx tot 0 te laten naderen, krijgen we:

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Inh(x) = Opp(x)$.

Met de ribbe r als variabele gaan we als volgt te werk. We plaatsen de kubussen zo, dat ze een hoekpunt gemeenschappelijk hebben (figuur 4).
Dan bestaat het verschil uit drie aansluitende vierkante plakken met dikte Δr (de kubus groeit nu niet aan zes maar aan drie kanten). Op dezelfde manier als hiervoor vinden we dan:

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} Inh(r) = Opp(r)$ waarbij $Opp(r)$ nu de oppervlakte is van drie grensvlakken.

In het platte vlak

In dimensie 2 is het allemaal eenvoudiger: *'de afgeleide van de oppervlakte is de omtrek'*. Eigenlijk is deze mededeling een loze kreet, zolang er niet gezegd is naar *welke* variabele gedifferentieerd wordt.
We bekijken een zekere vlakke figuur (bijvoorbeeld een cirkel) of liever alle figuren die gelijkvormig zijn met die ene figuur (alle cirkels). Het gaat dus om de *vorm* van de figuur, en niet om één exemplaar van die vorm. Een van de afmetingen kiezen we als variabele (bij de vorm 'cirkel' bijvoorbeeld de straal, of de diameter, of de zijde van het ingeschreven vierkant, of ...). De oppervlakte A en de omtrek P zijn beide een functie van die variabele. We differentiëren naar die variabele. In het voorbeeld van de cirkel met als variabele de straal r is de afgeleide naar r van $A = \pi r^2$ de omtrek $P = 2\pi r$.

Als tweede voorbeeld nemen we een regelmatige n-hoek.
Als we de zijde z als variabele nemen, geldt:

$A = \frac{1}{4} n z^2 \cdot \cot\left(\frac{180}{n}\right)$ en $P = nz$. Dus geldt niet: $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z} = P$.

Als we de straal R van de omgeschreven cirkel als variabele nemen, geldt:

$A = \frac{1}{2} n R^2 \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)$ en $P = 2nR \cdot \sin\left(\frac{180}{n}\right)$.

Weer geldt niet: $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}R} = P$.

Als we de straal r van de ingeschreven cirkel als variable nemen, geldt:

$A = nr^2 \cdot \tan\left(\frac{180}{n}\right)$ en $P = 2nr \cdot \tan\left(\frac{180}{n}\right)$.

Nu geldt wel: $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} = P$.

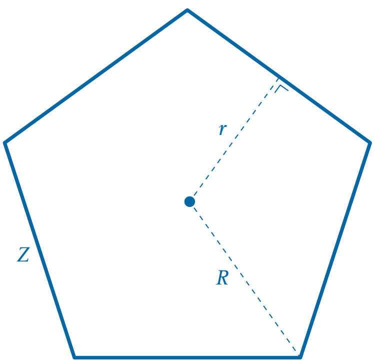
Kennelijk moeten we bij een regelmatige n-hoek de straal van de ingeschreven cirkel als variabele nemen. Iets dergelijks geldt algemeen.

Stelling

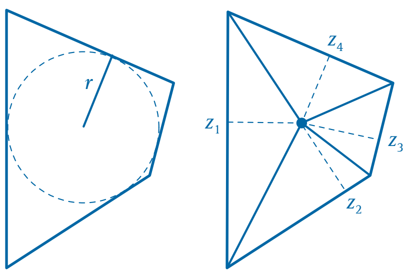
Stel dat een veelhoek V een ingeschreven cirkel heeft (dat is een cirkel die aan alle zijden raakt), zeg met straal r. We bekijken de oppervlakte A en de omtrek P van de veelhoek, beide als functie van r.

Dan geldt: $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} = P$.

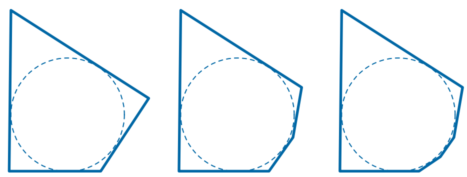
5



6



7



Bewijs

Zeg dat V n hoekpunten heeft. Neem díe veelhoek V_1, gelijkvormig met V, waarvan de ingeschreven cirkel straal 1 heeft. Noem de zijden van V_1: $z_1, z_2, ..., z_n$. Verdeel V_1 in n driehoeken met top het middelpunt van de ingeschreven cirkel en als bases de zijden z_1 tot en met z_n. Dan is de oppervlakte A_1 van V_1:

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot z_1 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot z_2 + ... + \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot z_n = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2 + ... + z_n)$$

en dit is de helft van de omtrek P_1. De veelhoek V waarvan de afmetingen r keer zo groot zijn als van V_1, heeft oppervlakte $A = r^2 \cdot A_1 = r^2 \cdot \tfrac{1}{2}P_1$ en $P = r \cdot P_1$.

Inderdaad geldt: $\dfrac{dA}{dr} = P$.

Bijzondere gevallen

In figuur 7 staat een rij veelhoeken met dezelfde ingeschreven cirkel. Aan de kant rechtsonder van de veelhoek neemt het aantal hoekpunten toe. Voor elk van deze veelhoeken is de afgeleide van de oppervlakte naar r (de straal van de ingeschreven cirkel) gelijk aan de omtrek. Dat geldt dan ook voor het limietgeval, waarbij een deel van de omtrek is overgegaan in een boog van de ingeschreven cirkel. In figuur 8 staat een vijfpuntige ster, waarvan alle (doorgetrokken) zijden raken aan een cirkel, zeg met straal r. Ook voor deze vorm geldt dat de afgeleide van de oppervlakte (naar r) gelijk is aan de omtrek. Dit kan aangetoond worden met een zelfde soort redenering als hierboven.

Algemeen

We bekijken een zekere vlakke vorm. De lengte van een van de zijden (of van een diagonaal, of van een ander vast lijnstuk in de vorm) noemen we a. De oppervlakte A en de omtrek P bekijken we beide als functie van a.

In het algemeen zullen $\dfrac{dA}{da}$ en P niet gelijk zijn.

De verhouding $\dfrac{dA}{da} : P$ noemen we f. We zoeken een lijnstuk in de vorm van lengte $c = f \cdot a$; dat wordt onze variabele. Er geldt:

$$\frac{dA}{dc} = \frac{dA}{da} \cdot \frac{1}{f} = f \cdot P \cdot \frac{1}{f} = P$$

Als je dus A en P beide als functie van c beschouwt, is de afgeleide van de oppervlakte gelijk aan de omtrek. En zo'n lijnstuk van lengte c is er altijd te vinden. Conclusie: bij elke vorm is de afgeleide van de oppervlakte de omtrek, als je maar naar de geschikte variabele differentieert! In het algemeen zal deze variabele gekunsteld zijn.

Voorbeeld

Rechthoeken waarvan de zijden zich verhouden als 2 : 3. Zeg dat de zijden p en $1\tfrac{1}{2}p$ zijn. Dan is $A = 1\tfrac{1}{2}p^2$ en $P = 5p$.
Kies c gelijk aan $\tfrac{3}{5}$ maal de korte zijde, dus $c = \tfrac{3}{5}p$.
Dan is $A = \tfrac{25}{6}c^2$ en $P = \tfrac{25}{3}c$.

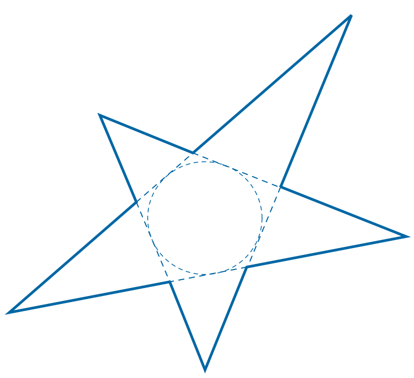
Inderdaad geldt: $\dfrac{dA}{dc} = P$.

Voor rechthoeken van a bij b moet je A en P opvatten als functie van een lijnstuk van lengte c met

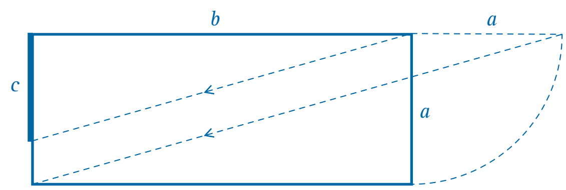
$$c = \frac{ab}{a + b}.$$

In figuur 9 is zo'n lijnstuk geconstrueerd.

8



9



In drie dimensies

Het verhaal in twee dimensies laat zich geheel vertalen naar drie dimensies. Ik vermeld de resultaten.
Als een ruimtelijke vorm een ingeschreven bol heeft, zeg met straal r, en we bekijken de inhoud I en de oppervlakte A als functies van r, dan geldt: $\dfrac{dI}{dr} = A$.

Een vorm waarbij een deel van het oppervlak op de ingeschreven bol zelf ligt, kun je zien als een limietgeval. Ook daarvoor geldt de stelling.

Fraaie voorbeelden van zulke vormen zijn:
- de bol,
- de vijf platonische veelvlakken,
- het ruitentwaalfvlak,
- een cilinder waarvan de hoogte gelijk is aan de diameter,
- een half-kegel-half-bol (kegel en bol raken elkaar; aan de ene kant van de raakcirkel nemen we de kegel, aan de andere kant het boloppervlak),
- een regelmatige n-zijdige piramide,
- een dysphenoïde (zie het artikel *Envelop met inhoud*, Euclides, 72-5),
- de ruitentwaalfsfeer (zie het artikel *De ruitentwaalfsfeer*, Euclides, 74-7),
- de Keplerster (figuur 11); in analogie met de tweedimensionale stervorm: als de straal van de ingeschreven cirkel r is, is de oppervlakte $36r^2\sqrt{3}$ en de inhoud $12r^3\sqrt{3}$.

Voor elk veelvlak geldt dat de afgeleide van de inhoud gelijk is aan de oppervlakte, als je inhoud en oppervlakte maar bekijkt als functie van de *geschikte* variabele.

Voorbeeld

Neem een cilinder met grondstraal r en hoogte $k \cdot r$.
De inhoud is $I = \pi k r^3$, en de oppervlakte is

$A = 2\pi(k + 1)r^2$.

Als $k \neq 2$, is de cilinder te hoog of te laag om een ingeschreven bol te hebben (zie figuur 12); $\dfrac{dI}{dr} \neq A$.

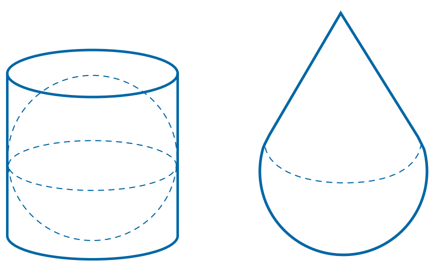
Kies als variabele: $c = \dfrac{3k}{2(k+1)} \cdot r$.

Dan is $I = \pi \cdot \dfrac{8(k+1)^3}{27k^2} \cdot c^3$ en $A = 2\pi \cdot \dfrac{4(k+1)^3}{9k^2} \cdot c^2$

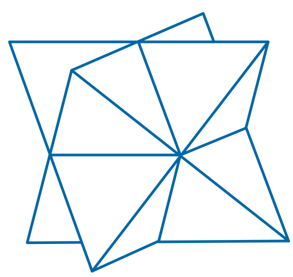
En nu geldt wel: $\dfrac{dI}{dc} = A$.

Noot:
[1] *Te verkrijgen bij Freudenthal Instituut te Utrecht, tel. 030 - 2611611, prijs ƒ 15,-.*

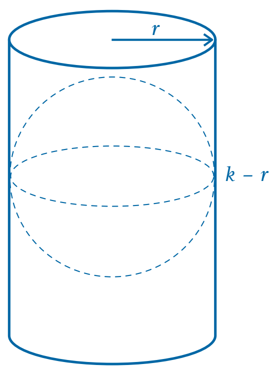
10



11



12



Grafische rekenmachine en examens

[Kees Lagerwaard, Ger Limpens, Gerard Stroomer]

Het gebruik van de grafische rekenmachine bij het examen zal ook gevolgen hebben voor de normeringsvoorschriften. Examenmedewerkers van het Cito doen verslag van een workshop hierover gehouden tijdens de regionale bijeenkomsten van de NVvW in het voorjaar.

Inleiding

Bij de regionale studiebijeenkomsten van de NVvW kon men afgelopen voorjaar onder andere intekenen op een workshop die als volgt in Euclides stond aangekondigd:

'Grafische rekenmachines en examens
Examenmedewerkers Cito
In deze workshop zullen we proberen zicht te krijgen op nieuwe werkwijzen met behulp van de grafische rekenmachine en de gevolgen daarvan voor de examens. Wat dienen leerlingen op te schrijven over hoe ze hun GR (grafische rekenmachine) hebben gebruikt? En hoe kent de corrector aan de hand van het correctievoorschrift de juiste (deel)scores toe?
Aan de hand van bijvoorbeeld oude examenopgaven van wiskunde A en B van havo en vwo zal worden besproken wat de mogelijkheden zijn om te komen tot een handzame, nieuwe opzet van correctievoorschriften van examens. Bedoeling is dat de workshop zowel voor deelnemers als begeleiders leerzaam is.'

Van te voren was ons, Cito-examenmedewerkers, door de organisatoren gevraagd om een dergelijke activiteit te organiseren. Men veronderstelde dat er wel belangstelling voor dit onderwerp zou zijn. Dat bleek inderdaad het geval. In Leiden, Eindhoven en Zwolle was er meer dan voldoende interesse: in Zwolle zelfs zodanig dat het in een laat stadium verstandig bleek de workshop twee keer, bij de middag- én bij de vooravondgroepen, te laten plaatsvinden. Tijdens zowel als na afloop lieten diverse bezoekers weten deze activiteit als zinvol te ervaren. Een en ander heeft er toe geleid dat we in onderstaand artikel verslag van het geheel doen, in de hoop dat ook degenen die niet in de gelegenheid waren deel te nemen aan de workshops, hun voordeel kunnen doen met de aldaar opgedane ervaringen.

Het programma

Het programma behelsde de volgende aspecten:
- het verstrekken van achtergrondinformatie
- de probleemstelling 'GR en het Centraal Examen'
- het maken van antwoordmodellen bij (reeds bestaande) examenopgaven.

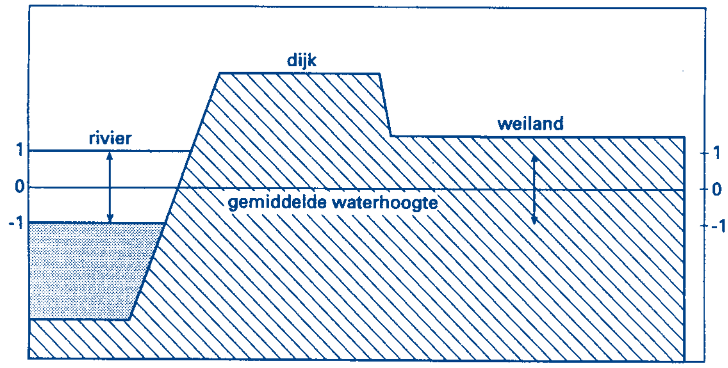
Tussendoor kwamen uiteraard ook nog andere aspecten aan de orde. In dit artikel zullen deze zaken ook zijdelings passeren.

Het verstrekken van achtergrondinformatie

In november 1999 heeft de CEVO aan alle scholen een pakket brieven (de 'novemberbrieven') gestuurd met de bedoeling allerlei zaken rond de centrale examens, al dan niet in verband met de Tweede Fase, op een rijtje te zetten. Zo was er een brief waarin helder gemaakt werd welke Grafische Rekenmachines er nu precies zijn toegestaan en bij welke vakken de Grafische Rekenmachine al dan niet gebruikt mag worden op het C.E. Met name de passage over het niet toestaan van het gebruik van de GR bij biologie, economie en de bedrijfseconomische vakken riep ook tijdens de workshop diverse heftige reacties op. Er waren verschillende docenten die, hoewel men het er over eens was dat de maatregel formeel geen gevolgen heeft voor het vak wiskunde, aangaven dat ook wiskunde

Waterhoogte

model



Veranderingen van de waterhoogte in de rivier hebben gevolgen voor de hoogte van het grondwater in het weiland achter de dijk. Het doorgeven van de schommelingen van de waterdruk in de rivier via het grondwater naar het weiland en het opzuigen en weer afstaan van water door het dijklichaam zelf, spelen daarbij een rol.
Het grondwater volgt de veranderingen met enige vertraging.
Van dit verschijnsel wordt nu een sterk vereenvoudigd wiskundig model gemaakt.

Stel $H_R = \sin \frac{\pi}{6} t$

$H_W = \sin \frac{\pi}{6} (t-1)$

waarbij: H_R = waterhoogte rivier in m
H_W = hoogte grondwater weiland in m
t = tijd in maanden

Om de afhankelijkheid van de hoogte van het grondwater en de waterhoogte in de rivier te onderzoeken kun je het volgende doen:

- Leid met behulp van de grafieken van H_R en H_W af in welk tijdsinterval tussen $t = 0$ en $t = 12$ het grondwater stijgt, terwijl het water in de rivier dan juist aan het dalen is;
- Maak een nauwkeurige schatting van de momenten tussen $t = 0$ en $t = 12$ waarop het water in de rivier even hoog staat als het grondwater in het weiland.

6p 1 □ Voer dit onderzoek uit. Licht je werkwijze toe.

1

wel een praktisch gevolg hiervan zal ondervinden, daar de maatregel de zaken voor leerlingen zeker niet helderder maakt en het gebruik van de GR jammer genoeg minder universeel wordt dan in eerdere instantie gedacht was. Men uitte dan ook in meerderheid de wens dat de CEVO de betreffende beperking van het GR-gebruik op zo kort mogelijke termijn weer in zal trekken en een enkeling riep het bestuur van de NVvW op de CEVO van deze wens op de hoogte te stellen.
Verder bleek het zinvol het GR-voorbeeld dat vermeld werd in de zogenaamde novemberbrieven die gericht waren aan de vakleraren wiskunde, verder toe te lichten. Bedoeling van de passage rond het merk FANTASY is geweest een voorbeeld te geven van een *leerlingenantwoord* dat, gegeven het antwoordmodel, voldoende gedetailleerd is om met alle deelscores bij de voorbeeldvraag bedeeld te worden. Achterliggende gedachte was een leerling ervan te overtuigen bij beantwoording een toelichting op te schrijven op grond waarvan de corrector de gedachtengang/werkwijze van de leerling kan beoordelen.
Ook is er sinds oktober 1999 het Nomenclatuurrapport dat op initiatief van de NVvW tot stand is gekomen. Hoewel het rapport geen officiële status heeft, is het toch van groot belang om, als docent, op de hoogte te zijn van de diverse begrippen die hierin aan de orde gesteld worden. Voor de GR zijn onder andere de volgende termen relevant: ‘Bereken’, ‘Los op’, ‘Onderzoek’ en ‘Teken de grafiek’. Het Nomenclatuurrapport, via de website van de NVvW (http://www.nvvw.nl) op eenvoudige wijze te downloaden, maakt helder waar bij deze termen de GR een rol speelt.

De probleemstelling ‘GR en het Centraal Examen’

Aan de hand van de volgende stellingen ontspon zich bij iedere workshop een levendige discussie.
1. Een leerling dient zijn antwoord van een toelichting te voorzien.
2. Als een leerling alleen als toelichting geeft dat hij zijn grafische rekenmachine gebruikt heeft, dan vinden we dat wel dubieus.
3. Een leerling die niet meer dan bovenstaande toelichting geeft en het goede antwoord vindt, heeft ongetwijfeld een correct denkproces doorlopen, tenminste als het een vraag betrof waarbij het antwoord niet voor de hand ligt: een dergelijke leerling verdient dus alle punten.

Lange mensen

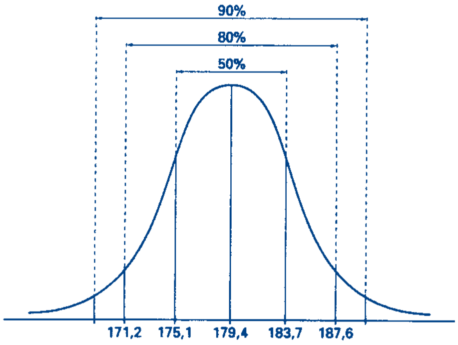
In Nederland worden de mensen steeds langer. Deze ontwikkeling loopt al sinds de Tweede Wereldoorlog. De Nederlandse bevolking behoort tot de langste ter wereld.

Neem aan dat de lengte van vrouwen normaal verdeeld is met gemiddelde 165,1 cm en standaardafwijking 6,5 cm.
Ontwerpers van dameskleding stemmen hun producten vaak af op 90% van de populatie.
Ze houden geen rekening met de 5% kleinste en 5% grootste vrouwen.

4p 1 ☐ Vanaf welke lengte behoort een vrouw tot de 5% langste vrouwen?

Ook de lengte van mannen blijkt normaal verdeeld, gezien figuur 1.

figuur 1



4p 2 ☐ Bereken de standaardafwijking van de lengte van mannen.

2

4. Een leerling die zijn grafische rekenmachine gebruikt, doet er goed aan tussenstappen te vermelden om deelpunten te sprokkelen, dit om te vermijden dat een dergelijk antwoord slechts met 'alles' of 'niets' beoordeeld kan worden.
5. Daar waar de grafische rekenmachine redelijkerwijs ingezet kan worden, dient een antwoordmodel bij een examen zoveel mogelijk te voorzien in de deelpuntenstructuur.
6. Een antwoordmodel kan zich niet baseren op één bestaand type grafische rekenmachine: gebruikers van andere types zouden zich terecht benadeeld voelen.

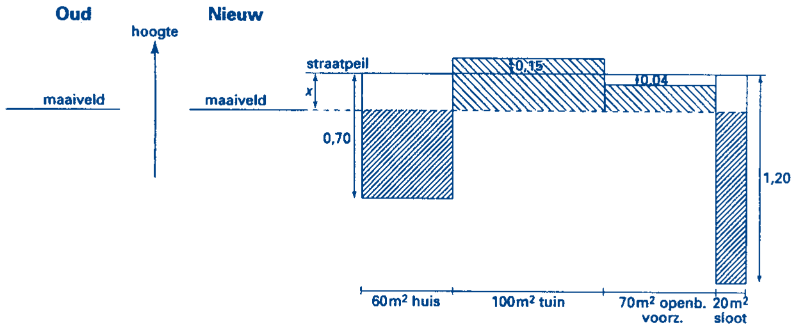
Met name de derde stelling was kennelijk zodanig dat er behoorlijk uiteenlopende standpunten door de deelnemers naar voren werden gebracht. Er waren docenten die de betreffende stelling absoluut niet onderschreven waar anderen zich, in het licht van het Centraal Examen, diens bedoeling en het belang dat er voor de leerling mee samenhangt, konden vinden in de strekking ervan. Duidelijk was in ieder geval dat iedere deelnemer er van doordrongen was dat een leerling tijdens het C.E. in zijn eigen belang er goed aan doet op toegankelijke en doorgrondbare wijze kond te doen van zijn tussenstapshandelingen en niet te volstaan met het geven van enkel een eindantwoord, ook al is de vraag niet altijd zodanig dat een redenering expliciet vereist wordt.
In dit kader is het trouwens zinvol te verwijzen naar de vakspecifieke regel 3.6 zoals die sinds jaren in de correctievoorschriften bij de examens wiskunde is opgenomen:
'Indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend, tenzij in het antwoordmodel anders is aangegeven.'
Wiskunde-examens waarbij leerlingen nu reeds van een GR gebruik mogen maken (2^{e}-fase-examens havo en havo-A-oude stijl bijvoorbeeld) kennen nog een aparte verwijzing naar deze regel 3.6 in de vorm van de volgende toevoeging bij de vakspecifieke regel:
'De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de Grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen doen de leerlingen er verslag van hoe zij de GR gebruiken.'

De serie stellingen werd afgesloten met de volgende vraag:
'Hoe maak je een antwoordmodel waar een gebruiker van een willekeurige toegestane grafische rekenmachine op heldere en eenduidige wijze mee beoordeeld kan worden, indien we er van uitgaan dat

Zuinig met grond

Wanneer op een terrein een nieuwbouwwijk komt, moet er veel grond worden verplaatst. De grond die weggegraven wordt op de plaats waar een huis komt of een sloot, wordt zo mogelijk weer gebruikt voor het ophogen van het terrein op plaatsen waar een tuin komt of waar openbare voorzieningen ontstaan. Het nieuwe straatpeil ligt meestal hoger dan het maaiveld, de hoogte van het oorspronkelijke terrein. In onderstaande figuur zijn de oude en de nieuwe situatie schematisch weergegeven.

figuur 2



In figuur 2 is te zien dat onder het huis de grond is weggegraven tot een diepte van 0,70 m onder straatpeil, dat de tuinhoogte 0,15 m boven straatpeil is, dat de openbare voorzieningen (gemiddeld) 0,04 cm onder straatpeil liggen en dat de sloot 1,20 m diep is. Het oude maaiveld ligt lager dan het nieuwe straatpeil.

De weggegraven grond is rechts gearceerd ▨, het ophogen is links gearceerd ▧.

We noemen de hoogte van het nieuwe straatpeil boven het oude maaiveld x.

Bij $x = 0{,}15$ m zal de hoeveelheid weggegraven grond niet gelijk zijn aan de hoeveelheid grond die nodig is voor het ophogen. Er zal dan dus grond moeten worden aangevoerd of afgevoerd.

5p **10** ☐ Onderzoek hoeveel m³ grond er dan moet worden aangevoerd of afgevoerd.

5p **12** ☐ Bereken hoe groot x moet zijn als er sprake is van minimaal grondverzet.

3

de gebruiker zijn tussenstappen aan het papier toevertrouwt?'
Deze vraag vormde de instap voor het volgende onderdeel van de workshop.

Het maken van antwoordmodellen bij (reeds bestaande) examenopgaven

Om de deelnemers zelf ook aan de slag te krijgen -het was per slot van rekening een workshop- deelden we na afloop van de discussie over de bovenstaande stellingen een serie opgaven uit. De opgaven waren afkomstig uit de diverse voor de centrale examens wiskunde vervaardigde syllabi. Het betrof de opgaven '*Waterhoogte*' en '*Opslagruimte*' uit de syllabus Wiskunde B-havo, de opgave '*Doping*' uit de syllabus wiskunde B-vwo, de opgaven '*Lange mensen*', '*Zuinig met grond*', '*Metrolijncapaciteit*' (in 2 versies: voor havo-A1,2 respectievelijk vwo-A1,2) uit de syllabus Wiskunde-A. Ook was er een opgave gebaseerd op '*Buffels in Amerika*' uit de opdrachtenbundel Discrete Dynamische Modellen van het Freudenthal Instituut. [1]
In iedere opgave zat ten minste een vraag waarbij het gebruik van de GR voor de hand liggend dan wel zelfs noodzakelijk was. Iedere deelnemer aan de workshop werd gevraagd een van deze opgaven te kiezen en de betreffende GR-vraag te voorzien van een antwoordmodel dat paste in de uitgangspunten die even van te voren de revue gepasseerd waren. Het moest, met andere woorden, een antwoordmodel zijn, dat zoveel mogelijk op éénpuntsbasis, machine-onafhankelijk een antwoordstructuur bevatte waarmee leerlingenwerk beoordeeld zou kunnen worden.

Bij de opgave '*Waterhoogte*' (zie figuur 1) is te constateren dat vragen die meervoudige opdrachten bevatten, ook door docenten niet altijd even nauwkeurig worden beantwoord. Bij de betreffende vraag werden in wezen twee verschillende aspecten aan de orde gesteld. De ingeleverde antwoordopzetten bevatten vaker slechts één van beide aspecten. Verder is te constateren dat er ook hier heel divers over de opzet van een antwoordmodel wordt gedacht. Een enkele docent schrijft een en ander heel precies uit, waar een ander alleen in algemene bewoordingen een mogelijke structuur van een antwoord beschrijft.

Bij de opgave '*Opslagruimte*' zien we, als we de na afloop ingeleverde opzetten van een antwoordmodel met elkaar vergelijken, een punt dat ongetwijfeld voor problemen gaat zorgen in de nabije toekomst. Bij deze

opgave is er sprake van een functie met het volgende voorschrift:
$V = 30h + 15\sqrt{16 - 10h + h^2}$ waarvan met behulp van differentiëren de h-waarde moet worden bepaald waarbij V minimaal is. Hoewel de vraagstelling hier heel duidelijk het aspect 'differentiëren' vermeldt, wordt er door meer dan een workshopdeelnemer een antwoordopzet gegeven waarbij er niet op algebraïsche wijze gedifferentieerd wordt, maar *alleen* gebruik gemaakt wordt van de
GR-techniek 'numeriek differentiëren'. Het lijkt ons helder dat een antwoord dat niet de uitgeschreven afgeleide functie

$\frac{dV}{dh} = 30 + \frac{15(2h - 10)}{2\sqrt{16 - 10h + h^2}}$ of een vergelijkbare

uitdrukking bevat nooit in aanmerking kan komen voor alle punten bij een vraag die uitdrukkelijk spreekt over 'met behulp van differentiëren'.

De antwoordopzetten van de opgave *'Lange mensen'* (zie figuur 2) waarbij twee vragen over een normale verdeling gesteld worden, zijn leerzaam in zoverre dat we er uit kunnen aflezen dat in ieder geval docenten de minder voor de hand liggende aspecten van de GR ook behoorlijk onder de knie hebben. De vraag om, aan de hand van enkele waarden van de stochast en bijbehorende percentages, de standaardafwijking te bepalen wordt onder andere van een antwoord voorzien waarbij gebruik gemaakt wordt van een onbekende in de normale verdelingsfunctie. Bij deze techniek wordt het klassieke 'terugrekenen' van de standaardnormale Z-waarde naar de onbekende σ door middel van het algebraïsch oplossen van een vergelijking vermeden. Of leerlingen dat ook zullen doen, is uiteraard nog de vraag.

De opgave *'Zuinig met grond'* (zie figuur 3) deed ons door de antwoordopzetten nogmaals beseffen dat we zeker niet kunnen volstaan met het geven van slechts een variant als meer varianten min of meer even voor de hand liggend zijn. Zowel een algebraïsche oplossing, een grafische, als een op tabellen gebaseerde oplossing waren hier in de ogen van de verschillende workshopdeelnemers plausibel. Ook vroeg een enkele deelnemer aandacht voor het aspect 'verstandig afronden'. Daar dit bij het vak wiskunde in wezen geen formeel omschreven einddoel of eindterm is, lijkt het ons, bij nader inzien ook, nog steeds niet een aspect dat in een correctievoorschrift moet worden meegenomen, indien er tenminste geen gerichte vraag over is geweest.

In de opgave *'Metrolijncapaciteit'*, variant vwo-A1,2, werden twee vragen aangewezen als GR-getinte onderdelen. Bij de eerste vraag werd van een gebroken rationale functie, binnen een min of meer realistische context, gevraagd te onderzoeken of deze functie op een zeker indirect in de context gedefinieerd domein monotoon stijgend was. Onderzoek met behulp van de GR geeft dan, zo denken wij, heel wat sneller helderheid dan een onderzoek met behulp van differentiëren. Uiteraard is het toegestaan bij een dergelijke vraagstelling te kiezen voor de 'klassiekere' aanpak maar men dient zich te realiseren dat die benadering dan wel vrij karig beloond wordt als een andere, toegestane aanpak veel sneller resultaat oplevert. De GR is nu eenmaal een krachtig onderzoeksinstrument en leerlingen zullen, daar waar ze er op een of andere wijze toegestaan voordeel van hebben, zich er bewust van moeten zijn dit hulpmiddel ten volle te benutten.

Achteraf

Hoewel de opgaven al (grotendeels) bij ieder van de deelnemers bekend waren, en de syllabi voorzien in het geven van de antwoordmodellen, hebben ook wij in de laatste paar jaar bij het maken van eindexamenconcepten een ietwat gewijzigde optiek ten aanzien van het gebruik van de GR gekregen. De in de syllabi opgenomen antwoordmodellen waren, met andere woorden, toe aan een actualisering. Deze vernieuwde antwoordmodellen zijn de deelnemers als tegenprestatie ter hand gesteld zonder daarmee de pretentie te willen hebben de enig juiste antwoorden bij de betreffende vragen te kunnen geven.
Al met al kunnen we constateren dat het voor ons, Cito-medewerkers, een leerzame ervaring is geweest. We kunnen niet zorgvuldig genoeg zijn in onze vraagstelling en ook de antwoordmodellen horen onze uiterste aandacht te blijven krijgen. Het was voor ons in ieder geval weer een eye-opener om na afloop geconfronteerd te worden met onvermoede oplossingsmogelijkheden dan wel misvattingen die kennelijk op een of andere wijze door de vragen zelf tot stand werden gebracht.

Tot slot

Deelnemers gaven na afloop te kennen deze manier van werken rond antwoordmodellen en de GR op prijs te stellen. Ook voor ons geldt dat we de bijdragen van de deelnemers tijdens of na afloop van de workshop waarderen. In ieder geval bij deze nogmaals dank aan degenen die een dergelijke bijdrage geleverd hebben. Onder andere op grond van onze ervaringen hier en van de ervaringen rond de recente examens 2000 lijkt het nu reeds aan de orde een artikel aan te kondigen dat hopelijk in het komende najaar zal verschijnen waarin we iets dieper op de GR en de gevolgen daarvan voor het antwoordmodel zullen ingaan.

Noot:
[1] *Alle genoemde opgaven en de daarbij behorende GR-uitwerkingen kunnen worden gedownload via: http://www.nvvw.nl/download.htm*

advertentie EPN

op floppy in pdf-formaat bijgeleverd.

Zodanig verkleinen dat er een evenwichtige witrand om het kader zit.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Notulen van de vergadering van Wiskundeleraren op zaterdag 13 november 1999, gehouden in het gebouw van Het Nieuwe Lyceum te Bilthoven

Een dag van ontmoeting en uitwisseling van ervaringen. Reeds vroeg veel bedrijvigheid op de markt. De belangstelling geeft aan dat de markt niet valt weg te denken. De zaal is bij de aanvang van de huishoudelijke vergadering goed gevuld.

[Wim Kuipers]

Opening en jaarrede

De voorzitter Marian Kollenveld opent even over tienen de vergadering en verwelkomt de aanwezigen, in het bijzonder de ereleden. In haar jaarrede schetst ze een aantal ontwikkelingen met betrekking tot de basisvorming, de tweede fase, mbo en hbo en de betrokkenheid van het bestuur. Ze benadrukt dat het bestuur het van belang acht om de stem van de vereniging en daarmee die van de leraar voor de klas te laten klinken overal waar dat nuttig is voor de behartigen van de belangen van de leden en de kwaliteit van het wiskundeonderwijs in Nederland. Ze werkt deze missie verder uit en wijst op het belang van een goede communicatie met de leden. In het bijzonder verdient op dit punt onze website aandacht.
Zie voor de jaarrede: Euclides, jaargang 75, no. 4.

Notulen, e.d.

De notulen van de vorige jaarvergadering worden onder dank goedgekeurd. Het jaarverslag behoeft geen verduidelijking en vindt instemming.
De penningmeester geeft een korte toelichting op het financieel beheer. Geen van de aanwezigen heeft een vraag. De kascommissie bestaande uit de collega's H.G.M. Gerats en W. van den Berg hebben het werk van de penningmeester gecontroleerd en kunnen positief rapporteren. De voorzitster vraagt de vergadering de penningmeester te dechargeren. De vergadering onderstreept dit met applaus.
De kascommissie wordt bedankt. Voor het komende jaar zal de kascommissie bestaan uit de heren W. van den Berg en C. Garst.

De bestuursverkiezing

De bestuursleden Heleen Verhage, Peter Kop en Sjoerd Schaafsma worden herkozen.
Het nieuwe bestuurslid Metha Kamminga uit Leeuwarden wordt met applaus begroet. Zij vertegenwoordigt binnen het bestuur het hbo. De voorzitter zegt dankbaar te zijn dat ook deze afdeling een vertegenwoordiging heeft binnen het bestuur.

Studiedag

Marianne Lambriex kondigt de studiedag aan. Er is dit jaar gekozen voor het thema Praktische Wiskunde. In een tijd van praktische opdrachten, sectorwerkstukken en profielwerkstukken zal dit thema niemand verbazen.
De eerste lezing wordt verzorgd door Prof.dr.ir. G.S. Stelling. Zijn voordracht gaat over berekeningen aan rivieren. Hij laat zien hoe wiskundige modellen en berekeningen ten grondslag liggen aan praktische uitvoeringen zoals we ze allemaal kennen.
Drs. W. Kleijne, coördinerend inspecteur voortgezet onderwijs, gaat in zijn voordracht nader in op de evaluatie van de basisvorming voor wat in het bijzonder het vak wiskunde heeft opgeleverd. We zijn op de goede weg alhoewel er ten aanzien van een aantal items nog wel wat te verbeteren valt, bijvoorbeeld de mate waarin we vorm geven aan activerend leren.
Voorts geven de diverse werkgroepen ruime informatie over ontwikkelingen binnen het wiskundeonderwijs en de wijze waarop deze ontwikkelingen in methodisch en didactisch opzicht om een passende aanpak vragen.
Een leerzaam gedeelte van de jaarvergadering.

Slot

Het huishoudelijk gedeelte van de vergadering wordt om 15.50 uur voortgezet. Er wordt gevraagd naar documentatie van de workshops die men niet heeft kunnen bijwonen. Het bestuur zal zich op dit punt beraden.
Marian Kollenveld, de voorzitter, kan aan het eind van de dag de vergadering sluiten met dank uit te spreken aan allen die zich hebben in gespannen om de dag goed te doen verlopen.
Tevredenheid na een sfeervolle dag.

Jaarverslag
1 augustus 1999-31 juli 2000

[Wim Kuipers]

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld:
Mevr. drs. M.P. Kollenveld, *voorzitter*
W. Kuipers, *secretaris*
Drs. S. Garst, *penningmeester*

Overige leden:
Mevr. A.F.S. Aukema-Schepel
J. Hop
Mevr. M. Kamminga-van Hulsen
P.G.M. Kop
Mevr. drs. M.A. Lambriex-van der Heijden
S.H. Schaafsma
Mevr. drs. H.B.Verhage

Algemeen
Zoals uit het verslag zal blijken heeft het bestuur zich met een diversiteit aan zaken intensief bezig gehouden. Al deze zaken hebben betrekking op de zorg voor de inhoud van het wiskundeonderwijs, de positie van de leraar en de mogelijkheden van de leerling. Het overheidsbeleid heeft ons er in de achterliggende tijd meermalen toegebracht om aan de bel te trekken. Reeds nu mogen we zeggen dat de contacten met de overheidsinstanties, juist door een actieve aanpak van onze voorzitster, directer verlopen.
Het bestuur spant zich in om de verkregen informatie en de door haar ondernomen activiteiten via de website zo goed mogelijk aan de leden door te geven.

Basisvorming
Het bestuur neemt de resultaten van de evaluatie van de basisvorming serieus. In Euclides heeft Wim Kleijne, inspecteur voortgezet onderwijs, ons willen dienen met een toelichting op deze evaluatie waarbij het vakrapport over wiskunde eveneens aan de orde is geweest (zie Euclides, 75-3).
Het bestuur heeft met de inspecteur over de uitkomsten van het rapport gesproken. Het vak wiskunde komt na vijf jaar uitvoering nog te weinig uit de verf. Naast een aantal zaken die goed gaan, zouden de scholen nog eens nadrukkelijk moeten kijken naar het gebruik van de computers en het besteden van aandacht aan het proces van activerend leren.
Het bestuur is van mening dat de overheid bij het voorschrijven van kerndoelen en examenprogramma’s rekening dient te houden met de mogelijkheden van docenten en leerlingen zeker, voor wat betreft de werkbelasting en de werkdruk. Met de verantwoordelijken voor de nascholing is gesproken over een aantal actuele punten van aandacht in de scholing. Het bestuur heeft het voornemen om in samenwerking met leden en deskundigen te komen tot het formuleren van actuele didactische noties die van belang zijn voor de 1e en 2e fase.

Jaarvergadering
Het bestuur heeft zich in de keuze van het thema van de studiedag tijdens de jaarvergadering laten leiden door wat in het wiskundeonderwijs veel aandacht vraagt. Het thema ‘Praktische wiskunde’ sloot goed aan bij de bezigheden op de scholen als: praktische opdrachten, gwa, sectorwerkstukken, profielwerkstukken en de aandacht voor zelfstandig leren die procesmatig hier aan de orde komen.

Havo/vwo
Het bestuur is deze keer betrokken geweest bij het overleg om al dan niet definitief bepaalde onderwerpen uit het examenprogramma te schrappen. Met een andere organisatie voor voortgezet onderwijs, de Vakinhoudelijke Vereniging voor Voortgezet Onderwijs, heeft het bestuur de overheid meermalen gewezen op de soms onevenwichtige wijze van besluitvorming.
De werkgroep voor de 2e fase heeft de ontwikkeling nauwkeurig gevolgd. In een brief aan het ministerie heeft men zijn zorg uitgesproken over de grote verschillen in contacturen op de diverse scholen en de te verwachten verschillen in het niveau van de leerlingen op het eindexamen. Daarnaast hebben we onze verbazing uitgesproken over het besluit van het CEVO over het niet gebruiken van de grafische rekenmachine bij economie en biologie.
De door het bestuur ingestelde nomenclatuurcommissie heeft het rapport over de nomenclatuur in dit verslagjaar aan de CEVO aangeboden. Een ‘zekere’ standaardtaal is belangrijk bij de voorbereiding op het examen. We menen dat de het rapport in een behoefte voorziet.
Met het ministerie mochten we spreken over de kwaliteit van het wiskundeonderwijs en daarbij de actuele problematiek in een goed gesprek aan de orde stellen. Deze contacten zijn van belang.
De werkgroep havo/vwo houdt de hand aan de pols als het gaat om het signaleren van knelpunten en het daarbij adviseren van het bestuur om te komen tot het nemen van initiatieven.

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Vmbo

De invoering van het vmbo is in volle gang. Op initiatief van het bestuur heeft het SLO de stand van zaken in kaart gebracht met betrekking tot het schoolexamen voor het vak wiskunde. In het bijzonder is gevraagd om aandacht te schenken aan het examendossier.
Het resultaat is vastgelegd in het rapport Wiskunde in het examendossier. Op initiatief van het bestuur heeft het SLO een conferentie georganiseerd over hoogbegaafdheid en wiskunde in het voortgezet onderwijs. De resultaten van deze conferentie zullen nog besproken met een aantal deskundigen om te kunnen komen tot voorstellen ten aanzien van een aantal praktische handreikingen.
Het bestuur heeft in een gesprek met het ministerie aandacht gevraagd voor een duidelijk beleid als het gaat om de interpretatie van het examenprogramma in de toekomst. Ook hier dreigt, evenals bij de 2ᵉ fase, de werkdruk en werkbelasting een punt van aandacht te worden.
Het bestuur heeft bij Teleac/Not gevraagd om de productie van televisieprogramma's over het wiskundeonderwijs niet te stoppen. Juist deze programma's bieden de mogelijkheid om de lagere klassen te laten zien dat wiskunde iets te maken heeft met het dagelijkse leven.
In verband met de ontwikkelingen binnen het vmbo zal de werkgroep vmbo in de toekomst de knelpunten aan het bestuur meedelen. Overigens heeft de werkgroep versterking nodig.

Mbo/hbo

Voor deze afdeling kreeg de NVvW versterking van een werkgroep van hbo-wiskundedocenten. De werkgroep stelt zicht ten doel het belang van het wiskundeonderwijs als zelfstandig vak in het hbo te versterken en daarmee de positie van de docenten te bevestigen. Tevens heeft de werkgroep aandacht voor het formuleren van een didactiek van de computeralgebra.
Inmiddels heeft de werkgroep het bestuur advies gevraagd over een nota met betrekking tot bovengenoemde materie.

Regionale bijeenkomsten

Veel docenten hebben de workshops bezocht van de regionale bijeenkomsten in Zwolle, Eindhoven en Leiden. Ook hier heeft het bestuur inleiders uitgenodigd om over onderwerpen te spreken die direct iets te maken hebben met de praktijk in de klas. De ICT-ontwikkelingen kregen tijdens deze bijeenkomsten de nodige aandacht. De plenaire lezing ging over het meetkundeonderwijs in de basisschool en werd verzorgd door Ed de Moor.

Zebra

Het initiatief van het bestuur tot het verzorgen van deze reeks heeft voortgang kunnen vinden in de uitgave van nog twee deeltjes in deze reeks. Naast Kattenaids zijn nu verschenen Perspectief en Schatten. Het blijft de wens van het bestuur om deze deeltjes een plaats te geven in de lespraktijk.

Euclides

Door de zeer te waarderen inzet van de redactie mocht het vakblad ondersteuning geven aan docenten met betrekking tot zaken die te maken hebben met ontwikkelingen binnen het wiskundeonderwijs.
Het blijft noodzakelijk dat docenten hun ervaringen niet voor zichzelf houden maar met behulp van ons orgaan een actieve bijdrage leveren tot het uitwisselen van ervaringen.

Lustrum

In Euclides zijn de leden op de hoogte gehouden met de op handen zijnde activiteiten met betrekking tot het herdenken van het 75-jarig bestaan van de NVvW.
Een lustrumcongres en de uitgave van een jubileumboek maken het herdenken van dit feit zichtbaar. Dit congres (17 en 18 november 2000) wordt georganiseerd samen met de faculteit Wiskunde en Informatica van de Universiteit van Utrecht en de Hogeschool Utrecht. Het thema van het congres is: Wiskundeonderwijs over de grens. In augustus 2000 zal de congrescommissie het volledige programma van het congres in het 0-nummer van Euclides publiceren. De jaarvergadering van de Vereniging zal dit keer in het congres worden opgenomen. Tijdens het congres zal het jubileumboek worden aangeboden.
Naast deze activiteiten wil de Vereniging graag iets doen om leerlingen te betrekken bij de aandacht voor wiskunde in dit jaar van herdenken. Het project De Nationale Doorsnee is een landelijk statistiekproject voor en door alle leerlingen van de brugklas en tweede klas van het VO. Het doel is om op een leuke manier statistiek te presenteren. Veel werk is er in dit verslagjaar verricht om tot een verantwoorde presentatie van de plannen te komen.

Ten slotte

Het bestuur probeerde ook dit jaar vanuit haar verantwoordelijkheid volop aandacht te geven aan zaken die te maken hebben met de ontwikkelingen van het wiskundeonderwijs in al haar geledingen. Graag heeft ze dit willen doen in samenspraak met de leden, de overheid en andere organisaties.
Het bestuur is zich ervan bewust dat de communicatie met de leden haar de signalen moet geven waaraan ze noodzakelijke activiteiten kan ontlenen. De functie van het bestuur is om dienend bezig te zijn voor docenten en leerlingen.

1221. [1]) Gegeven is de kubus ABCD.EFGH met ribbe p.
Op het verlengde van de ribbe AE ligt het punt P zo, dat EP = AE; punt Q is het midden van AE.
a. Bewijs dat de lijnstukken PC en HF elkaar loodrecht middendoor delen.
b. Bewijs dat de lijnen PC en HF loodrecht staan op AG.
c. Bewijs dat het lijnstuk QF in het middelloodvlak van PC ligt.

1222. [1]) Van een recht prisma is het grondvlak ABC een gelijkzijdige driehoek met zijde $2p\sqrt{3}$.
De opstaande ribben zijn AD, BE en CF; AD = $3p$. De middens van AB, BC en CA zijn opvolgend P, Q en R.
a. Bereken de cosinus van de hoek van de lijnen DR en BC.
b. Bereken de inhoud van het viervlak PQDE.
c. Bereken de afstand van de kruisende lijnen EF en DP.

1223. [1]) Van ΔABC is gegeven: tg $\gamma = \frac{4}{3}$ en de straal van de omgeschreven cirkel is 5.
De hoogtelijn uit B is BD.
a. Bewijs: BD + AC = 8 cos α + 14 sin α.
b. Bereken de hoeken α en β voor het geval dat BD + AC maximaal is.

1224. [1]) Van ΔABC is gegeven: tg $\frac{1}{2}\alpha = 3$ tg $\frac{1}{2}\beta$.
a. Bewijs: $a - b = \frac{1}{2}c$.
b. Bewijs: $0° < \alpha - \beta < 60°$.
c. Bereken α, β en γ voor het geval dat $\alpha - \beta = 40°$.

---

[1]) Eindexamen H.B.S.-B, 1960.

Vraagstukken uit het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 48 (1960-1961)

Het nieuwe wiskunde in

[Jan Blankespoor]

De wiskunde in het hbo is in beweging. Er is een tendens tot 'ontmathematiseren'. Dit zeer tegen de zin van de wiskundedocent. Waar dat naar toe gaat is voor velen onduidelijk. Zeker is dat de wiskunde zal veranderen. Sommigen vrezen dat de wiskunde verdwijnt en ook nooit meer terugkomt. Anderen zien de wiskunde verdwijnen en uitgekleed op andere plaatsen in de opleiding terugkomen. Er zijn ook optimisten die de wiskunde in het hbo in de jaren 2000 een toonaangevende rol toedenken, maar dan wel in een andere verschijning. Een aantal van deze optimisten heeft zich verenigd in de werkgroep hbo van de NVvW. Wat is er aan de hand?

Historisch perspectief

Lange tijd heeft de wiskunde in het Hoger Beroeps Onderwijs een belangrijke plaats in het curriculum ingenomen, het meest in de sector techniek. Het waren ook bijna altijd eerstegraads wiskundedocenten die het vak gaven. Het scala van onderwerpen en de wijze waarop onderwezen werd verschilde per opleiding en per hogeschool. Omdat er geen centrale examinering in het hbo bestaat kon dat ook. Kent het hbo dan geen eindtermen? Jazeker, maar deze zijn doorgaans zo algemeen geformuleerd dat je er alle kanten mee op kan. Toch was iedereen, ook de studenten, er wel van overtuigd dat wiskunde belangrijk was. Immers, in de jaren zestig en zeventig is het theoretisch niveau in het hbo sterk verhoogd. Nederland begon een kennis-exporterend land te worden. Menig afgestudeerde HTS'er heeft daar het nodige aan bijgedragen. We zullen in het midden laten of het belang van de wiskunde hier en daar niet werd overschat. Wel is zeker dat veel studenten hun opleiding destijds hebben moeten beëindigen, juist omdat de wiskunde voor hen te moeilijk was. Misschien had het vak (en de docent) juist daardoor een hoge status.

Servicevak

Tot op de dag van vandaag beschouwt men de wiskunde in het hbo als een servicevak. Wiskunde staat daarbij in dienst van andere vakken met een theoretische component. Als het even kan moeten de onderwerpen die bij de wiskunde behandeld worden, liggen op het kritieke pad, dus vlak voordat ze die wiskunde nodig hebben bij andere vakken. Als dat, bewust of onbewust ('hebben jullie dat niet gehad bij wiskunde, dan?') niet zo is, behandelt de 'vakdocent' een stuk wiskunde op zijn manier: exemplarisch dus en

imago van de het hbo

uitsluitend gericht op direct gebruik. Er is echter op veel hbo-instellingen nauwelijks contact over didactiek en werkvorm tussen de wiskundedocenten en de vakdocenten, overigens tot beider tevredenheid. Ieder zijn vak, nietwaar!?
Sinds het eind van de jaren tachtig bestaat er in het hbo een behoorlijke keuze aan Nederlandstalige wiskundeboeken, veelal met toepassingsgerichte vraagstukken. Als werkvorm werd tot voor kort meestal de college-instructievorm gekozen. Daarbij gaat het vooral om het aanleren en trainen van vaardigheden. Het hele onderwijs was tot enkele jaren terug sterk gericht op reproductie. Er werd dan ook veel geoefend, het aantal contacturen was hoog. Theoretische bewijzen werden meestal omzeild onder het motto: Te moeilijk om te laten reproduceren.
Hiermee is, weliswaar wat zwart-wit, het wiskundeonderwijs in het hbo geschetst van de afgelopen decennia. Vanaf het begin van de jaren negentig is de verandering ingezet.

Projecten zijn leuk, maar vreten tijd

Veranderingen

Aanleidingen om het wiskundeonderwijs te veranderen bestonden er genoeg. Vanuit de overheid werd terecht gewezen op de lage propedeuserendementen, met name van havisten. Toen de bekostiging van hbo-instellingen mede van het studierendement afhankelijk werd gemaakt begonnen onderwijsdirecteuren zich af te vragen of er niet wat water in de wijn gedaan moest worden. Begin jaren negentig ontstond ook de vraag of een onderwijsprogramma wel voldoende ‘studeerbaar’ was. Daardoor kreeg het leerproces meer aandacht. De vraag: ‘hoe krijgt de docent de student zover dat hij zelfstandig gaat leren?’, werd op veel plaatsen gesteld. Uiteraard slaan deze opmerkingen niet alleen op de wiskunde. Maar gezien de selecterende rol die de wiskunde, vooral in de propedeuse had, kwam het vak, terecht of onterecht onder schot te liggen.
Ook van betekenis werden de visitatierapporten. Daarin werd duidelijk gesteld dat het onderwijs meer op de beroepspraktijk moest worden afgestemd. Het bedrijfsleven wilde minder studenten die vooral trucjes geleerd hadden, maar met hun bagage nauwelijks creatief en samen met anderen problemen hadden leren aanpakken. Daarentegen wilden de bedrijven studenten met een hoog gehalte aan sociale en communicatieve vaardigheden en vooral studenten die hebben leren leren. Het begrip leerstijl kreeg betekenis. Een reproductieve leerstijl, waar veel studenten zich voornamelijk van bedienden, werd in veel opleidingen omgebogen naar een meer toepassingsgerichte leerstijl. Andere vormen van onderwijs werden daartoe ingevoerd: projectonderwijs en probleemgestuurd onderwijs bijvoorbeeld. We zullen het nu niet uitvoerig hebben over de consequenties voor de student, hoewel deze groot zijn [1].
Maar dergelijke nieuwe werkvormen hebben ook grote gevolgen voor de inhoud van het curriculum. Complete onderwijsprogramma’s werden omgespit. Vakken werden samengevoegd tot projecten. Lesuren kwamen daardoor te vervallen. Lang niet alle onderwerpen van voorheen kunnen in projecten gestopt worden. Projecten zijn leuk maar vreten tijd. Deze tijd gaat veelal ten koste van de theoretische inhoud. Projecten veranderen voortdurend, vooral wanneer zij worden aangeleverd door bedrijven, die met een specifiek probleem zitten. Daardoor wordt de opgedane kennis en het verkregen inzicht afhankelijk van het project. Dat de eindtermen nog gehaald worden kan alleen omdat meer in competenties wordt gedacht en minder aan leerdoelen. Hiermee is niet gezegd dat een

afgestudeerde over geringere kwaliteiten beschikt dan in het traditionele ‘vakkensysteem’. Het is een totaal ander type geworden. Iemand die goed heeft leren communiceren, organiseren en rapporteren. Ook iemand die weet waar hij de kennis vandaan moet halen en hoe hij die zich zou moeten eigen maken, als dat nodig is (ja, dat is nodig: ‘een leven lang leren’ is voor een hoger opgeleide tegenwoordig normaal). Zeker is echter dat hij over minder feitelijke, parate kennis beschikt. Dat is op zich niet erg, kennis kun je altijd nog opdoen. Maar een nadeel van project- en probleemgestuurd onderwijs is dat de student duidelijk minder dan vroeger geleerd heeft met abstracte zaken om te gaan en daardoor minder geleerd heeft om inzicht te krijgen in theorieën.

Modelleren

En daarmee zijn we weer terug bij de wiskunde. In vrijwel alle vakken in hts-opleidingen en in veel vakken in het heao wordt uitgegaan van wiskundige modellen van de theorie. Het is niet hoogdravend om ervan uit te gaan dat ‘onze’ Nederlandse hbo-afgestudeerden vooral verdienstelijk zullen moeten zijn in het genereren van nieuwe ideeën maar dan wel gedragen door een goed inzicht in theoretische samenhang. Hier ligt dan ook een (nieuwe?) functie voor de wiskunde: het leren opstellen en analyseren van wiskundige modellen, voortkomend uit de theorie en de praktijk. Voor de wiskundedocent betekent dit dat hij zich zal moeten verdiepen in andere vakken met een theoriecomponent. En niet geïsoleerd, maar samen met de ‘vakdocenten’. Het betekent ook dat hij niet aan de kant moet staan bij de ontwikkeling en uitvoering van projecten. Soms zal het nodig zijn zich in te dringen bij de onderwijsontwikkelaars. Het is realistisch om te veronderstellen dat veel wiskundedocenten hier niet van harte op zitten te wachten. Hoewel, uit een zeer recente inventarisatie onder wiskundedocenten in het hbo blijkt dat velen betrokken zijn bij onderwijskundige vernieuwingen. Maar ook komt uit hetzelfde onderzoek naar voren dat velen het daardoor drukker hebben dan ooit.

Computeralgebra

Wanneer een wiskundedocent lijdzaam afwacht wat er van zijn vak en van zijn taken overblijft als om hem heen driftig wordt veranderd, ligt een wachtgeldregeling in het verschiet. Plezier in het werk houd je alleen als je ziet dat je onderwijs gewaardeerd wordt terwijl je weet dat je een zinvolle bijdrage levert aan de vorming van de student. De wiskundedocent zal daartoe zelf initiatieven moeten nemen. Zojuist is al aangegeven in welke richting hij dan moet zoeken. Maar door het accent te verleggen naar het leren omgaan met wiskundige modellen zal het imago van de wiskunde niet direct verbeteren. Een middel om het imago van de wiskunde in het hbo wel op te krikken is het effectief gebruik maken van de computer. Van alle moderne ICT-hulpmiddelen is voor de wiskundedocent de computeralgebra verreweg het belangrijkst.
De laatste jaren zijn pakketten als MAPLE en DERIVE binnen handbereik gekomen van het Hoger Onderwijs. De voorlopers zien dit als een welkome omwenteling in de wiskunde. De titel van de lezing, die prof.dr. F. Simons in januari 1999 voor wiskundedocenten in het hbo hield, was: ‘Wiskunde, als ondersteuning als het ècht nodig is’, met als strekking dat de computeralgebra in principe alle wiskundige vaardigheden van de gebruiker moet (kunnen) overnemen. Deze stelling moet bij menig vakbroeder als een steen in de vijver gevallen zijn. De discussie over het gebruik van de zakrekenmachine (‘ze rekenen 2 maal 3 ook met het tuig uit’) was nog niet eens helemaal afgerond. En over het gebruik van de GRM in het hbo moet het overleg zelfs nog beginnen.
En toch ziet men in de werkgroep ‘wiskunde in het hbo’ de computeralgebra, samen met andere ICT-toepassingen als hét middel om het imago van de wiskunde te verbeteren, mits de didactiek en de werkvorm daarop zijn aangepast. Om verantwoord computeralgebra in te voeren heeft de werkgroep een aantal uitgangspunten opgesteld.

Ze rekenen 2 maal 3 ook met het tuig uit

Didactische vernieuwingen

Met computeralgebra kun je zoveel meer dan ‘vroeger’, dat je kunt stellen dat het gebruiken van computeralgebra in het onderwijs een nieuwe onderwijsfilosofie veronderstelt. Dat slaat niet alleen op de werkvorm (ja, die is uiteraard anders), maar ook op de didactiek. De student moet sowieso voldoende kennis hebben van de wiskundige betekenis van begrippen, operaties, functies en instructies. Wanneer men computeralgebra als ‘black box’ denkt te kunnen gebruiken, loopt men heel snel vast, òf, nog erger, krijgt men volkomen waardeloze resultaten. En als een cursus computeralgebra wordt ontwikkeld als ‘knoppencursus’ leert de student niets. Prof. Simons zei in het reeds aangehaalde betoog terecht dat computeralgebra ‘intelligent knoppen drukken’ is. Met computeralgebra krijgt de wiskunde een aantal nieuwe (of vernieuwde) functies in het onderwijs. Deze functies zijn:

• *Het leren zorgvuldig te redeneren en te abstraheren*
Een computeralgebrapakket zoals MAPLE is erg syntaxgevoelig. Zo zal de invoer *ab* herkend worden als het symbool met de naam *ab* en niet als het produkt $a*b$. Daarentegen zal MAPLE, als je $a*b$ laat uitrekenen

keurig *ab* op het scherm brengen. De student zal veel zorgvuldiger met symbolen en operatoren moeten omgaan dan in de traditionele wiskunde.

• *Het leren onderzoekend te werk te gaan*

Computeralgebra leent zich goed voor parametrisering. In formules kun je parameters als symbolen laten opnemen. Je kunt heel goed onderzoeken wat de gevolgen zijn van variaties in parameters. Dit maakt het ook mogelijk om gemakkelijk gevoeligheidsanalyses uit te voeren. In combinatie met toepassingsgerichte vraagstukken, waar wiskundige modellen voor gemaakt kunnen worden kan zo'n gevoeligheidsanalyse een heel nuttig leerdoel zijn.

• *Het leren interpreteren en kritisch beoordelen van computerresultaten*

Het computerprogramma doet precies wat de gebruiker invoert, maar weet het programma ook wat de gebruiker wil? Bij elke instructie dient men dus vooraf een inschatting te maken van het resultaat. Uiteraard geldt dit ook voor een reeks instructies, die moet leiden tot het eindresultaat.

• *Het aanbrengen van een goed begrip van wiskundige concepten*

Met computeralgebra kan gemakkelijk interactief onderwijs worden ontwikkeld. Dit gecombineerd met animaties kan de student helpen in het begrijpen van wiskundige concepten.

• *Het leren verkrijgen van inzicht in numerieke aspecten*

Met computeralgebra kan ook numerieke wiskunde bedreven worden. Benaderingen van exacte oplossingen kunnen in elk aantal gewenste decimalen worden gegenereerd.

Een gevoeligheids-analyse kan een nuttig leerdoel zijn

• *Het leren schrijven van een rapport, c.q. het verzorgen van een presentatie*

Een programma als MAPLE is ook te gebruiken als tekstverwerker met een zeer gebruiksvriendelijke formule-editor. Dit biedt niet alleen mogelijkheden voor de docent, maar ook voor de student. Hij levert zijn opgaven niet meer in al dan niet onleesbaar handschrift aan, maar via een keurig verzorgd rapport, hetzij via de e-mail verstuurd aan de docent, hetzij tijdens een projectsessie gepresenteerd aan de projectcoach.

Bij de genoemde nieuwe functies horen didactische principes. Daar moet goed over nagedacht worden, er is nog heel weinig expertise. In de werkgroep 'wiskunde in het hbo' is het ontwikkelen van didactiek, afgestemd op het gebruik van computeralgebra een van de lopende projecten.

Verder is het van belang dat het gebruik van computer-algebra niet uitsluitend tijdens de wiskunde gebeurt. Bij vakken met een theorie-component levert het gebruik ervan dezelfde meerwaarde op, als bij de wiskunde zelf. De wiskundedocent kan daarbij als trekker fungeren. Zo kan hij zijn collega's op andere vakgebieden ervoor enthousiast proberen te maken, bijvoorbeeld met het organiseren van een cursus of te wijzen op de vele websites waar reeds met behulp van computeralgebra ontwikkeld onderwijsmateriaal op allerlei vakgebieden gedemonstreerd wordt. Ook daarin wil de werkgroep 'wiskunde in het hbo' behulpzaam zijn.

Expertisecentrum

De werkgroep 'wiskunde in het hbo' bestaat uit een aantal enthousiaste voortrekkers, althans zo zien zij zich wel. De werkgroep acht zichzelf representatief genoeg om (via het bestuur van de NVvW) naar buiten te treden met aanbevelingen met betrekking tot het wiskunde-onderwijs aan hogescholen. Momenteel wordt het hele hbo-veld qua wiskunde en wiskunde-docenten in kaart gebracht. Om het pionierswerk vol te kunnen houden wil de werkgroep een landelijk expertisecentrum oprichten van waaruit wiskunde-docenten uit het hbo kunnen worden geïnformeerd over onderwijskundige vernieuwingen op het gebied van de wiskunde. Expertise die verkregen is op hogescholen in Nederland en daarbuiten zal verzameld worden en daarna beschikbaar komen voor hogescholen die niet zelf 'het wiel willen uitvinden'. Of dat expertisecentrum er komt hangt onder andere af van financiële ondersteuning. Daarom wordt gezocht naar subsidiebronnen. Dat die er zijn, daar is men van overtuigd, en dat ze gevonden worden lijkt een kwestie van tijd. Hopelijk kan dat expertisecentrum er spoedig komen, want op veel hbo-opleidingen is dringend behoefte aan een imagoverbetering van de wiskunde. Moge ook dit verhaal als inspiratiebron dienen en een aanzet geven tot een beter imago.

Over de schrijver

Jan Blankespoor is docent aan de Technische Hogeschool Rijswijk en secretaris van de NVvW-werkgroep 'Wiskunde in het hbo'

Noot

[1] In een project dient de student zelfstandig, zonder docent dus, maar met andere leden van de projectgroep een efficiënt en effectief leerproces te ondergaan waarmee vooraf geformuleerde leerdoelen in meer of mindere mate worden gerealiseerd. De mate waarin leerdoelen worden gerealiseerd hangt af van de individuele bijdrage van de betreffende student. Alleen de student die vraagt, krijgt antwoord op zijn vraag.

Probleemoplossen met BetaPC

[Anita Duinkerken]

Bij het oplossen van wiskundige problemen is het aanpakgedrag van leerlingen van zeer groot belang.
Dat was altijd al zo, maar het wordt nog belangrijker nu leerlingen bijvoorbeeld ook praktische opdrachten moeten maken.
Om leerlingen te ondersteunen bij deze probleemaanpak is het computerprogramma BetaPC geschreven. In het kader van mijn afstuderen: “Onderzoek naar de bruikbaarheid en mogelijke effecten van het programma BetaPC” heb ik dat in de praktijk onderzocht.

Waarom BetaPC

De invoering van het studiehuis in het voortgezet onderwijs geeft aanleiding tot veranderingen in de manier van lesgeven. Een belangrijke verandering is de accentverschuiving van onderwijzen naar leren, met als doel de leerling actiever en zelfstandiger met de leerstof om te laten gaan. Hierbij komt meer nadruk te liggen op algemene vaardigheden; bij wiskunde worden probleem-oplosvaardigheden belangrijker. Deze krijgen bijvoorbeeld gestalte in de Praktische opdrachten. Doel van het leren oplossen van deze problemen is dat leerlingen leren wanneer en op welke wijze zij hun wiskundekennis effectief kunnen toepassen in de verschillende situaties.
In het kader van het leren oplossen van wiskundige problemen met een sterk toepassingskarakter, is BetaPC geschreven door het GION in samenwerking met de afdeling wiskundedidactiek van de Rijksuniversiteit Groningen. BetaPC gaat niet uit van dergelijke open opdrachten, maar geeft beperktere toepassingsopgaven waarbij de computer hulp biedt voor verschillende episodes in het oplossingsproces. Docenten stellen vast dat leerlingen in het studiehuis vaak veel moeite hebben om toepassingsopgaven in de wiskunde goed te analyseren. BetaPC voorziet in deze behoefte en helpt leerlingen om systematisch toepassingsopgaven in de wiskunde te leren oplossen, waarbij het programma gebruik maakt van fasen in het oplossingsproces als: verkennen, plan maken, controleren en conclusie trekken.

Oplossingsgedrag van leerlingen

Er is veel onderzoek verricht naar het oplossen van wiskundige problemen en het oplossingsgedrag van leerlingen. Er bestaan aanzienlijke verschillen in aanpak tussen geoefende en ongeoefende probleem-oplossers, en ook in de gevolgde oplossingsroutes. De geoefende probleemoplosser doorziet sneller het verband tussen de opgave aan de ene kant en de vakkennis met de te gebruiken methoden aan de andere kant. Bij de ongeoefende probleemoplosser komen voornamelijk de volgende punten naar voren:
Aan de inspectie van de opgave, het lezen en herlezen, besteden leerlingen weinig tijd, zodat allerlei relevante aspecten over het hoofd worden gezien. Veelal storten de leerlingen zich direct op een opdracht zonder een probleemanalyse vooraf te maken.
Na een korte inspectie kiezen leerlingen uit hun kennisbestand een specifieke oplossingsmethode, die in veel gevallen niet of niet helemaal van toepassing is. Leerlingen proberen zich te redden door bij elk type som één specifieke oplossingsmethode te onthouden.
Het overzicht over het geheel aan beschikbare wiskundige methoden ontbreekt, evenals het zicht op de samenhang tussen verschillende representaties (analytisch, numeriek, grafisch, verbaal) van dezelfde opgave.
Als leerlingen niet onmiddellijk een van toepassing geachte eigenschap of een algoritme herkennen, dan houden ze ermee op.

1

2

Oplossingsfasen van Schoenfeld

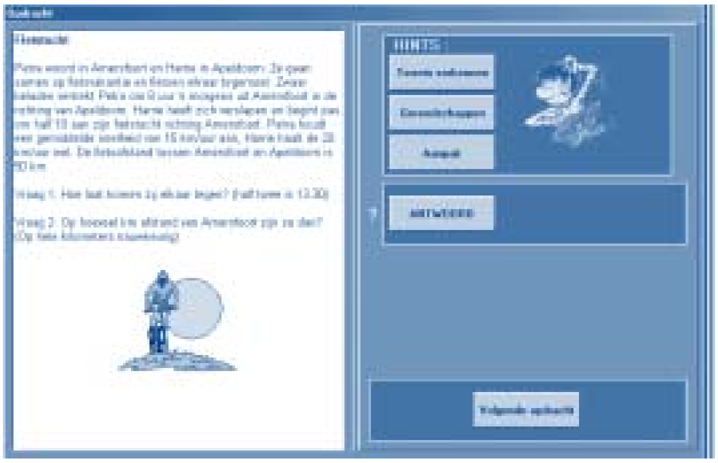
Een methode om na te gaan hoe leerlingen problemen aanpakken is het ‘hardop-denken-onderzoek’. Alles wat leerlingen doen en zeggen wordt opgenomen. Hiervan kunnen protocollen gemaakt worden waarin letterlijk staat wat er is gezegd en gedaan. Schoenfeld (1992) heeft veel van zulk hardop-denken-onderzoek uitgevoerd. Hij heeft in de oplossingsprocessen bepaalde categorieën aangebracht die hij fasen van het probleemoplossen noemt, namelijk: lezen, analyseren, onderzoeken, plannen, uitvoeren en controleren.
Deze fasen kunnen helpen bij het gericht zoeken naar de oplossing van een probleem, zonder dat het vinden van een oplossing gegarandeerd is (heuristisch).
Door de fasen van Schoenfeld kom je op een model van aanpak terecht waar binnen elke fase verschillende oplossingswijzen van leerlingen kunnen worden onderscheiden. De leerlingen kunnen door proberen tot een oplossing komen, maar ze kunnen ook met tabellen, grafieken of een vast oplossingsschema werken of door redeneren de contextopgaven oplossen.

Het programma BetaPC is een computerprogramma dat leerlingen ondersteunt om vanuit hun informele oplossingsaanpak tot eigen standaardoplossingen te komen. Met het programma worden toepassingsopgaven uit de wiskunde aangeboden en bij elke fase (Schoenfeld) van het oplossingsproces biedt het programma keuze uit hulp bij verschillende oplossingswijzen. De hulp die wordt geboden is steeds gericht op ondersteuning van de eigen oplossingsaanpak en bewustwording daarvan.
Het leren oplossen van problemen door middel van tips en hulp die het programma verstrekt moet er toe leiden dat leerlingen zich beter oriënteren op een vraagstelling, zich meer toeleggen op het maken van een plan en pas daarna beginnen met het oplossen.

Hoe werkt BetaPC

De huidige versie van het programma bevat 27 toepassingsopgaven, geschikt voor leerlingen van vwo/havo klas 4 of 5. Het programma bestaat uit een docent- en een leerlinggedeelte.
Voor de structuur van het leren probleemoplossen met BetaPC is aanvankelijk de structuur uit het βronnenβoek, βreinβrekers, βeta-netwerk: ‘βronnenβoek βreinβrekers’ gebruikt. Het βronnenβoek βreinβrekers is een boek gemaakt door docenten in het voortgezet onderwijs in een βeta-netwerk van de Rijksuniversiteit Groningen en is bestemd voor scholen die in de bovenbouw systematisch willen werken aan de ontwikkeling van probleem-oplosvaardigheden. Het boek levert materiaal, geschikte opgaven met vragen en een model voor de terugblik op het oplossen. Tevens geeft het boek een systematische probleemaanpak, die weer is gebaseerd op de fasen van Schoenfeld:

a verkennen van het probleem (lezen);
b voorkennis activeren (analyseren/ onderzoeken);
c oplossingsplan bedenken (plannen);
d uitvoering (uitvoeren);
e controle (controleren).



3

4

In het programma BetaPC zijn deze onderdelen en fasen vertaald naar de episodes:

1 Terrein verkennen
2 Gereedschappen
3 Aanpak
4 Feedback over de oplossing in het modelantwoord (een standaard oplossing om te laten zien hoe het kan).

De feedback bij punt 4 is alleen een optie wanneer de leerling de opgave drie keer fout heeft beantwoord.

Het werken in de klas

Aan de hand van een leerling die een opgave moet maken, zal ik de werking van BetaPC nader toelichten.

Figuur 1 Bij Hans op school is het programma BetaPC op de server gezet. De leerlingen kunnen alleen bij het leerlinggedeelte. Het docentprogramma en de programma-onderdelen waarin de gegevens van het gebruik door de leerlingen worden opgeslagen, zijn voor de leerlingen onzichtbaar. Hans gaat in de mediatheek met BetaPC aan de slag. Hij tikt in het openingsmenu zijn naam en code in en ziet daar de opgaven die zijn docent voor hem heeft geselecteerd.

Figuur 2 Hans heeft de opdracht om deze week de opgaven 11, 12 en 13 te maken.

Figuur 3 Hans selecteert opgave 11 en klikt op de button ‘maken’.
Hij krijgt de opgave over de fietstocht te zien.

Figuur 4 Hans leest de opgave maar half en weet niet goed hoe hij de opgave moet oplossen. Hij klikt de optie Gereedschappen aan en krijgt nu een aantal beweringen te zien. Hans leest dat hij een hint krijgt als hij de juiste bewering aanklikt om de opgave mee te kunnen oplossen. Hij klikt ‘je moet de formule voor snelheid weten’ aan en het programma geeft aan dat de bewering juist is. Hiervoor krijgt Hans een hint.

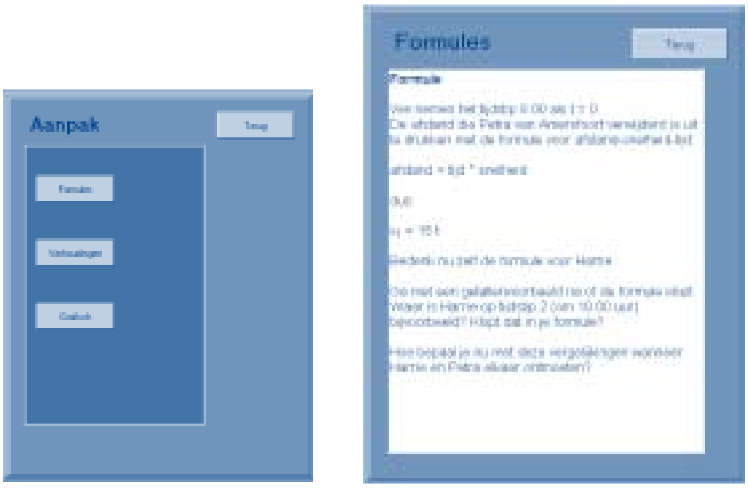
Figuur 5 Hans schrijft de formule over op zijn kladblaadje. Hij heeft echter nog geen idee hoe hij deze formule moet toepassen. Hans keert terug naar het naar de vorige pagina en klikt de optie ‘Aanpak’ aan. Hier ziet Hans dat hij kan kiezen uit verschillende oplossingswijzen. Omdat Hans al een formule heeft gekregen kiest hij voor de optie ‘Formules’. Het programma geeft hulp bij deze oplossingsmethode.

Figuur 6 Hans leest de hint en ziet nu hoe hij de formule moet gebruiken. Hij lost de opgave op en vult de antwoorden in onder de optie ‘Antwoord’. Het programma geeft aan dat het antwoord juist is.

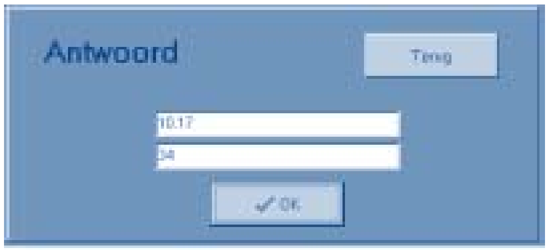
Figuur 7 In het docentgedeelte kan de docent op elk moment bekijken welke opgaven Hans heeft gemaakt. Het programma geeft de resultaten en het doorlopen pad van Hans weer.

Hoe je BetaPC op school kunt gebruiken

Er zijn diverse mogelijkheden om BetaPC te gebruiken in het reguliere wiskundeonderwijs.
BetaPC zou ingezet kunnen worden door middel van



5

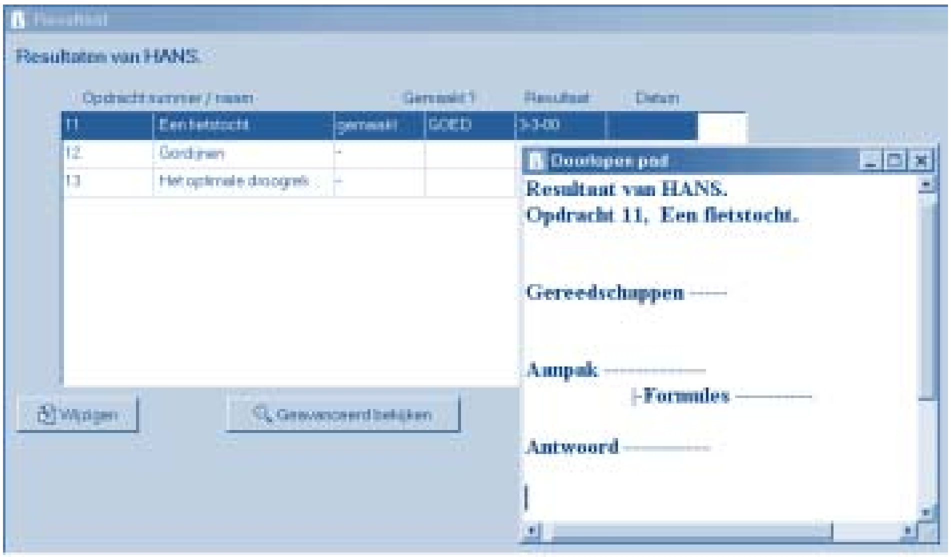


6

vier docentgebonden lessen en acht SLU's voor de leerlingen van 4-havao en 4-vwo. BetaPC kan dienen als oefening in het oplossen en verslag geven van opdrachten voorafgaande aan het maken van Praktische opdrachten.

Twee voorbeelden.
1. Een oriëntatieles: hoe werk je het gemakkelijkst met BetaPC en twaalf opgaven die leerlingen in duo's moeten maken. Van drie opgaven maken ze een verslag waarvoor ze een cijfer krijgen dat meetelt voor het rapport. Leerlingen houden een logboekje bij van hun zelfstandig werken (wanneer en hoe lang gewerkt, wie neemt de leiding bij welke opgave en aantekeningen over elke opgave: in hoeveel keer goed, welke hulp gebruikt en waarom). De docent kan de logboekgegevens eventueel controleren met de leerlingengegevens die het programma opslaat.
2. Een begeleidingsles: de docent gaat bij de groepjes leerlingen na of ze voldoende van de hulp gebruik maken (aan de hand van een uitdraai van de leerlingengegevens uit BetaPC). Leerlingen moeten bij zichzelf leren nagaan met welke episode(s) ze problemen hebben en daarbij hulp zoeken: snap ik het probleem niet, weet ik niet welke wiskundekennis ik moet gebruiken, weet ik de aanpak niet of maak ik rekenfouten.
Een les over verslag leren doen: hoe maak ik een goed en beknopt verslag. De docent laat leerlingen oude verslagen van wiskundeopdrachten sorteren van goed naar onvoldoende en bespreekt waarom verslagen goed of minder goed zijn. De docent geeft aan, aan welke eisen een verslag moet voldoen en neemt het verslag uit de leerlingenhandleiding als voorbeeld.
Een les evaluatie van het eigen verslag: is de opdracht ook voor derden duidelijk samengevat, is de aanpak beschreven en zijn de episodes vanuit je eigen ervaring beschreven of overgenomen uit het programma, is de leerweg en de gebruikte hulp weergegeven, is er een duidelijke conclusie getrokken.

De mogelijke effecten en toepasbaarheid van BetaPC
BetaPC is een computerprogramma dat leerlingen ondersteunt in hun eigen oplossingsaanpak en bewustwording daarvan. Deze benadering sluit aan bij het zogenaamde constructivisme, waarbij een leeromgeving expliciet moet aansluiten bij de voorkennis en de vertrouwde oplossingswijzen van leerlingen.
In het onderzoek naar de bruikbaarheid en mogelijke effecten van het programma BetaPC, is er dan ook nagegaan of zo'n programma gebaseerd op constructivistische onderwijsprincipes in de praktijk kan worden toegepast.
Voor het onderzoek zijn twee programma's gedefinieerd: enerzijds het computerprogramma BetaPC en anderzijds een papieren programma dat volgens directe instructie wordt gegeven. Dit papieren programma bestaat uit geschreven lesmateriaal met dezelfde probleemopgaven als BetaPC, maar hier ontbreken alle hints. Wel staan de antwoorden achterin.
In het schema van figuur 8 worden de verschillen en overeenkomsten van beide programma's vergeleken.
De lessen met het papieren programma verliepen volgens een min of meer vast patroon. De leerlingen werkten ongeveer 35 minuten aan de opgaven voor die les. De laatste 10 minuten gebruikte de docent om per opgave één standaardoplossing uit te werken. Meestal werd dit beperkt tot het bespreken van de opgave(n), waar de leerlingen veel moeite mee hadden. In de tijd dat de leerlingen zelfstandig werkten, liep de docent rond en gaf hier en daar, vaak naar aanleiding van een vraag, een hint.



Bij de lessen met BetaPC heeft de docent de eerste les een opgave klassikaal behandeld om zo de werking van BetaPC uit te leggen. De rest van de les en de andere lessen hebben de leerlingen zelfstandig gewerkt aan de opgaven voor die les. Hierbij mochten de leerlingen met elkaar overleggen, dit gebeurde voornamelijk in tweetallen. Tijdens de lessen heeft de docent per les twee leerlingen gevolgd. De leerlingen moesten hierbij een opgave maken door hardop te denken. Dit werd opgenomen met een cassetterecorder.

Probleemstelling

Bij het onderzoek is gekeken of BetaPC toepasbaar is in het onderwijs en werden de verschillen in effecten op leerlingen tussen de constructivistische versie en de directe instructie versie onderzocht. Hierbij stond de volgende probleemstelling centraal:

Kan een computerprogramma gebaseerd op constructivistische onderwijsprincipes in de praktijk door docenten worden toegepast?
Zijn er verschillen in effecten op leerlingen tussen een computerprogramma dat is vormgegeven volgens constructivistische onderwijsprincipes en een papieren programma dat volgens directe instructie wordt gegeven?

Conclusie

Tijdens het onderzoek zijn de volgende punten naar voren gekomen:
- Het gebruik van BetaPC leidt tot een betere probleemaanpak.
- Meisjes maken meer gebruik van hulp dan jongens.
- Zwakke leerlingen maken meer gebruik van hulp dan goede leerlingen.
- Zwakke leerlingen boeken door het gebruik van BetaPC meer vooruitgang met betrekking tot probleemaanpak dan goede leerlingen.

Uit het gehele onderzoek kunnen we concluderen dat er positieve verschillen in effecten op leerlingen zijn door het gebruik van het computerprogramma BetaPC in plaats van een papieren programma. De leerlingen hebben bij beide programma's dezelfde leerstof gedaan. Bij BetaPC konden leerlingen zelf hulp kiezen en in het papieren programma konden de leerlingen hulp krijgen van de docenten en het eindantwoord van elke opgave stond achter in het boek.

Discussie

We hebben BetaPC niet kunnen vergelijken met een ander computerprogramma. Daarom kan het effect van BetaPC (voor een deel) zijn toe te schrijven aan het motiverende van het werken met de computer. Maar uit het vooronderzoek weten we dat leerlingen die hulp gebruiken vaak doorgaan met de opgaven en de opgaven correct oplossen. Verder zien we in het onderzoek dat vooral zwakke leerlingen profiteren van BetaPC en het lijkt niet aannemelijk dat alleen deze leerlingen gemotiveerd raken door het werken met de computer.

Tot slot

Natuurlijk is dit nog maar een klein onderzoek en er zou nog op veel andere manieren onderzocht moet

Kenmerken	**Constructivistische versie (computerprogramma BetaPC)**	**Directe instructie versie (papieren programma)**
Aantal lessen	6 lessen in computerlokaal.	6 lessen in klaslokaal.
Rol van de docent	Docent laat leerlingen tijdens de les hun eigen oplossingswijzen vertellen en vergelijken. De leerlingen mogen overleggen. De docent begeleidt.	Docent bespreekt aan het eind van de les één standaardoplossingswijze. De leerlingen mogen niet overleggen. De docent stuurt.
Leerinhouden	27-tal toepassingsopgaven. De volgorde van de opgaven ligt vast.	27-tal toepassingsopgaven. De volgorde van de opgaven ligt vast.
Instructie	Geen instructie vooraf over systematisch oplossen, wel instructie over de werking van het programma aan de hand van een voorbeeldopgave.	Stapsgewijze instructie van een standaardoplossingswijze aan de hand van een voorbeeldopgave. 1. gegevens ordenen 2. opgave oplossen 3. controle van de oplossing
Oplossings-wijze	Leerlingen kiezen hun eigen oplossingswijze, maar krijgen door verschillende soorten hulp bij verschillende episodes aanwijzingen voor eventuele andere oplossingsmethoden.	Leerlingen kiezen hun eigen oplossingswijze, maar krijgen geen hulp en aanwijzingen voor eventuele andere oplossingsmethoden.
Type hulp	Vrije keuze van hulp. Voor verschillende episodes in het oplossingsproces hulp die past bij verschillende oplossingswijzen (tabel, grafiek, schets, formule, redeneren)	De docent loopt rond en geeft hulp in de vorm van correctieve instructie. De instructie is stap voor stap en volgt een standaardoplossingswijze.
Feedback	Goed/fout feedback en de mogelijkheid om verschillende oplossingsmogelijk-heden te bekijken.	Goed/fout feedback en bespreking van één oplossingswijze.

8

worden hoe het oplossingsgedrag van leerlingen verbeterd kan worden. Maar ook bij deze bescheiden opzet, kunnen we al enige resultaten zien. Als op deze manier leerlingen daadwerkelijk vooruitgang kunnen boeken bij het aanpakken van wiskundige problemen, dan is verder onderzoek en uitproberen in de les in ieder geval zeer de moeite waard.

Het programma **BetaPC** is een programma ontworpen voor het leren oplossen van contextopgaven uit vooral de wiskunde, maar ook natuurkunde. Het programma BetaPC is geschikt voor Windows 95/98/NT en kan op het computernetwerk van de school worden geïnstalleerd. Het programma kan bijvoorbeeld op een voor leerlingen toegankelijke drive gezet worden en de leerlingen kunnen vanaf de aangesloten pc's communiceren (lezen en schrijven) met BetaPC. Tevens is het programma geschikt voor losse pc's. Voor verdere informatie voor het aanschaffen van het programma en over BetaPC kan men contact opnemen met mevr. V. Mak van het GION in Groningen, tel. 050-3636631. De kosten van cd-rom met het programma BetaPC zijn *f* 25,00. Ook kan men het hele onderzoeksverhaal lezen in de afstudeerscriptie van Anita Duinkerken. Deze scriptie is te bestellen bij de afdeling Wiskundedidactiek van de Rijksuniversiteit Groningen, Marja Bos of Martha Witterholt, tel. 050-3637121.

Literatuur

A.A. Duinkerken, Onderzoek naar de bruikbaarheid en mogelijke effecten van het programma ßeta-pc: een studie uit POOC (Probleem Oplossen Op de Computer) project, Scriptie Rijksuniversiteit Groningen (IWI), 1999

E. Harskamp, A. van Streun, C. Suhre, Handwerk en technologie in wiskunde tweede fase onderwijs, Gion, Groningen, 1997

E. de Poel, Ontwikkeling van een softwareprogramma voor het leren oplossen van problemen in de wiskunde/scheikunde/natuurkunde, Scriptie Rijksuniversiteit Groningen (IWI), 1998

A.H. Schoenfeld, 'Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense making in Mathematics' in: D.A. Grouws, Handbook of Research on Mathematics Teaching, pag. 334-370, McMillan Publishing, New York, 1992

A. van Streun, Heuristisch wiskunde-onderwijs, Dissertatie Rijksuniversiteit Groningen, 1989
Wiskundedidactiek: βronnenβoek βreinβrekers (β-blokker). Rijksuniversiteit Groningen, 1997.

Inhoud van de 75e jaargang

Bijdragen

1999/2000

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus Valkenboslaan 262-A 2563 EB Den Haag

Tijden veranderen. Na 1998 en 1999 komt het jaar 2000. Pas onlangs ontdekte ik de volgende prentbriefkaart van uitgeverij Cityboek te Amsterdam. Op de achterkant staat de ontwerper: Fred Schoen. De kaart kreeg de titel mee: “How can just one year make such a difference?”

Ik vroeg me af of er vaker puzzeltjes op prentbriefkaarten hebben gestaan. Ik weet het niet. Tips zijn welkom!

Tijden veranderen. Kunt u nog worteltrekken met behulp van een staartdeling? Soms laat ik het weleens zien aan leerlingen. Ze vinden het raar, want ze zijn zo gewend aan intikken!

Tijden veranderen. Weet u de methode nog om een derdegraads vergelijking op te lossen? Is ook niet nodig: de grafische rekenmachine levert zó de antwoorden.
Vorig jaar, in mijn havo-4 klas, stond er zo’n vergelijking op het bord:

$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$

Op de positie van A, B en C stonden gehele positieve/negatieve getallen. Gelukkig vonden de leerlingen snel de drie verschillende geheeltallige, reële wortels. De grafiek stond trouwens ook al op het schermpje van hun GR!

Het lesuur daarna kreeg ik een vwo-3 klas. Toen ik even op de gang met een collega stond te praten, had één van de leerlingen met z’n hand x^3 en + weggeveegd. Op het bord stond nu

$Ax^2 + Bx + C = 0$

Omdat we tóch met de wortelformule bezig waren, mochten ze ‘voor straf’ deze vergelijking oplossen. En wat bleek: ook deze vergelijking had verschillende geheeltallige reële wortels!

Welke vergelijking stond er op het bord?

Als u binnen een maand de oplossing vindt en instuurt, ontvangt u vijf punten voor de doorlopende ladderwedstrijd.

Oplossing 701

Opgave 701 was een legpuzzel met zeer eenvoudige puzzelstukjes: slechts vierkanten! Eén vierkant van 1 bij 1, twee vierkanten van 2 bij 2 tot en met acht vierkanten van 8 bij 8 moesten gelegd worden tot een 36 bij 36 vierkant.
Dat dit zeer lastig was geeft het kleine aantal inzendingen aan. Desondanks zijn er meer dan 2000 verschillende oplossingen, zoals *Harm Bakker* (30 punten), Marum met zijn computer vond.

Hierbij de fraaie oplossing van *Ad Boons* (49 punten), Tilburg.

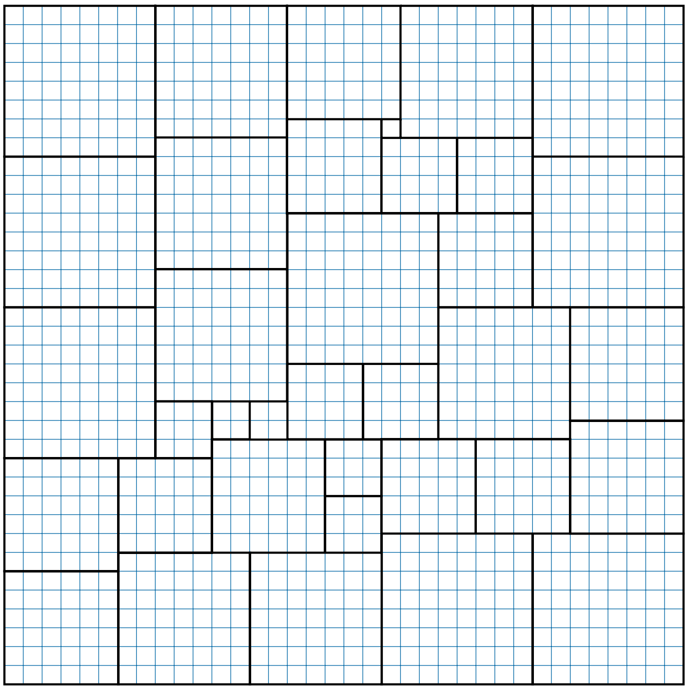
Door aan twee zijkanten negen vierkanten van 9 bij 9 te leggen, ontstaat een 45 bij 45 vierkant.

Voor de liefhebber blijkt dit probleem nog vele varianten te hebben.

Met de originele 36 vierkanten kun je ook rechthoeken van 24 bij 54 en van 27 bij 48 maken!

Je kunt ook met gelijkzijdige driehoeken werken. Eén driehoek met zijde 1, twee driehoeken met zijde 2 tot en met negen driehoeken met zijde 9 vormen tezamen een gelijkzijdige driehoek met zijde 45.

Of rechthoeken met zijdeverhouding 1 : 2? Neem één rechthoek van 1 bij 2, twee rechthoeken van 2 bij 4, drie rechthoeken van 3 bij 6 tot en met zeven rechthoeken van 7 bij 14. Met z'n allen vormen ze een 28 bij 56 rechthoek. Ongelooflijk, maar waar!



Met 54 punten is winnaar van een boekenbon van *f* 50,- :

Elias Buissant des Amorie
Molenweide 51
1902 CJ Castricum

Heel hartelijk gefeliciteerd!

Service pagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankeljke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.
Doorgeven kan ook via
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
3	25 november 2000	12 oktober 2000
4	06 januari 2001	16 november 2000
5	17 februari 2001	04 januari 2001
6	31 maart 2001	15 februari 2001
7	16 mei 2001	29 maart 2001
8	27 juni 2001	10 mei 2001

vr. 17 en za. 18 november 2000
NVvW-Lustrumcongres,
het 75-jarig bestaan van de Vereniging.
Zie vooral Euclides 75-0, p. 020.

vrijdag 24 november 2000
Voorronde Wiskunde A-lympiade en
Wiskunde B-dag

zaterdag 6 januari 2001
Wintersymposium Wiskundig Genootschap,
Amersfoort
Aankondiging volgt later.

vrijdag 19 januari 2001
1e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

di. 23 t/m za. 27 januari 2001
NOT2001 - Onderwijs 3-dimensionaal
Nationale Onderwijs Tentoonstelling, Jaarbeurs,
Utrecht

vr. 2 en za. 3 februari 2001
Nationale Wiskunde Dagen
Zie Euclides 75-8, p. 281.

donderdag 15 februari 2001
Gebruikersdag Netwerk

vrijdag 16 februari 2001
Gebruikersdag Moderne wiskunde

vrijdag 16 maart 2001
Kangoeroe 2001
Aankondiging volgt later.

donderdag 26 april 2001
Nationale conferentie ICT in het
wiskundeonderwijs
Organisatie APS en Freudenthal Instituut

woensdag 16 mei 2001
Examens vwo B (os), vwo B1 en vwo B12 (ns)
maandag 21 mei 2001
Examens mavo/vbo C/D
woensdag 23 mei 2001
Examens havo A (os), havo A12 (ns)
woensdag 30 mei 2001
Examens havo B (os), havo B1 en havo B12 (ns)
donderdag 31 mei 2001
Examens vwo A, vwo A1 en vwo A12 (ns)
(os=oude stijl; ns=nieuwe stijl)

woensdag 20 juni
Examens 2e tijdvak

zaterdag 26 mei 2001
Symposium Historische Kring Reken- en
Wiskunde Onderwijs (HKRWO)
Hogeschool Domstad, Utrecht
Aankondiging volgt later.

Voor internet-adressen zie de website van de NVvW:
http://www.nvvw.nl/Agenda2.html

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* Zebra-boekjes
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
Prijzen van de Zebra-boekjes:
Schoolabonnement: 6 exemplaren van 5 delen voor f 400,-
Individueel abonnement voor leden: f 75,-
Losse boekjes voor leden: f 16,50
Deze bedragen zijn inclusief verzendkosten.
Bestellen kan door het juiste bedrag over te maken op Postbanknummer 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van Zebra (1 t/m 5) of Zebra (6 t/m 10).
Zelf ophalen kan in de losse verkoop: ledenprijs op bijeenkomsten f 12,50; in de betere boekhandel f 16,75.

* Nomenclatuurrapport Tweede Fase havo vwo
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie, zie colofon.

* Wisforta - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.
ISBN 900165956X; prijs f 15,00; te bestellen in de boekhandel

advertentie casio
op film bijgeleverd.