

Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

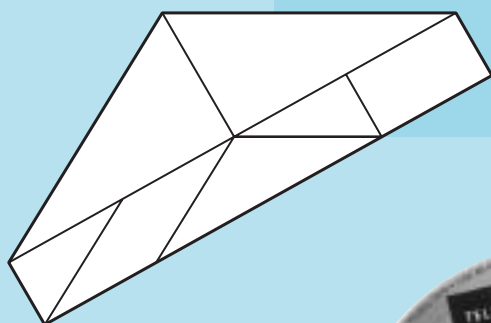
EUCLIDES

V a k b l a d v o o r d e w i s k u n d e l e r a a r

jaargang 74

1998-1999 juni

8



Over wiskunde

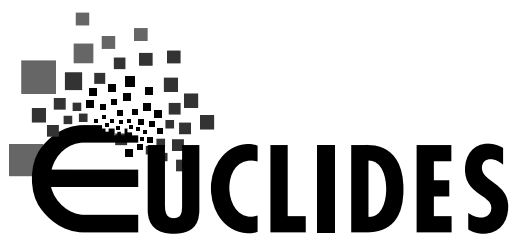
als vak

Eerste aankondiging

jaarvergadering/

studiedag NVvW





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Redactie

Dr. A.G. van Asch
Drs. R. Bosch
H.H. Daale
Drs. W.L.J. Doeve
Drs. J.H. de Geus
Drs. C.P. Hoogland *hoofdredacteur*
Ir. W.J.M. Laaper *secretaris*
W. Schaafsma
Ir. V.E. Schmidt *voorz./penningm.*
Mw. Y. Schuringa-Schogt *eindred.*
J. Sinnema
J. van 't Spijker
A. van der Wal

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem
e-mail: cph@xs4all.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.
Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Richtlijnen voor mededelingen:

- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.euronet.nl/~nvvw

Voorzitter

Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: mkommer@knoware.nl

Secretaris

W. Kuipers
Waalstraat 8
8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail:
wkuipers@worldonline.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bommel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: NVvW@euronet.nl

Contributie per ver. jaar: f 80,00
Studentleden: f 40,00
Leden van de VVWL: f 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: f 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: f 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: f 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor f 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891
e-mail lbozuwa@worldonline.nl

Adresgegevens auteurs

R. Bosch

Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

Wat en Waar is Wiskunde

M. Bruin
Postbus 1070
1200 BB Hilversum

P. Drijvers

Paddepoelseweg 9
6532 ZG Nijmegen

W. Doeve

Paardendreef 69
8391 BC Noordwolde (Fr.)

F. Keune

KU Nijmegen
Faculteit NWI
Postbus 9010
6500 GL Nijmegen

M. Kollenveld

Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk

Inhoud



255



267



284

254 Kees Hoogland
Van de redactietafel

255 Frans Keune
Wiskunde is ook een vak

258 Rob Bosch
**Getallen met een naam:
Catalangetallen**

261 Aankondiging studiereis

262 Kees Hoogland
**Wiskundeonderwijs: filter of
pomp?**

267 Max Heetebreij
**Wiskunde op het havo en het
vwo**

INTERVIEW

271 Marian Kollenveld
Van de bestuurstafl

NVvW

273 Jaarvergadering/
studiedag 1999

NVvW

274 Kattenajds en Statistiek

NVvW

275 Paul Drijvers
**Op hoeveel nullen eindigt
1998!?**

278 A-lympiade zaken

280 Jan Donkers
**De XXXIXe Internationale
Wiskunde Olympiade 1998**

283 Nationale Wiskunde Dagen
2000

AANKONDIGING

283 40 jaar geleden

284 'Wat en Waar is Wiskunde'
op cd-rom

AANKONDIGING

286 Recreatie

288 Kalender

Voor u ligt al weer het laatste nummer van deze jaargang. De examens zijn bijna afgerond en de diploma-uitreikingen zijn waarschijnlijk ook al achter de rug. Een relatief rustig jaar wat betreft de eindexamens. Alleen het havo examen wiskunde A werd regelmatig genoemd als een examen waar veel leerlingen over geklaagd hebben.

Examens

In het eerste nummer van de volgende jaargang treft u een uitgebreide bespreking aan van alle examens. Heeft u nog opmerkingen over de examens? Heeft u bijzondere zaken bij leerlingen geconstateerd? Daarbij denk ik dan niet alleen aan negatieve zaken, maar ook aan verrassende oplossingen van leerlingen of uw waardering voor originele opgaven. Schrijf uw bevindingen aan de redactie. In een examennummer mag de inbreng van de docenten die de examens hebben afgenomen, eigenlijk niet ontbreken. Uw stukjes zouden dan wel voor de zomervakantie bij de redactie binnen moeten zijn. De redactie rekent op u.

Jaarvergadering/studiedag

In dit nummer al weer de eerste aankondiging van de jaarvergadering/studiedag op 13 november 1999. Deze zal in het teken staan van ..., u raadt het al ..., praktische wiskunde. De tendens dat een stuk(je) van de wiskundelessen gewijd zullen gaan worden aan GWA, praktische opdrachten, profielwerkstukken en sectorwerkstukken lijkt zich ook in het VMBO door te gaan zetten. In de komende jaargang zal Euclides daaraan aandacht besteden, zowel in artikelen als door het geven van voorbeelden van (korte) praktische opdrachten. Heeft u aardige opdrachten: schroom niet ze in te zenden. Van docenten voor docenten!

Onderbouw havo en vwo

In dit nummer van Euclides treft u een drietal zeer uiteenlopende bijdragen aan over wat er op scholen zoal gedaan zou kunnen (of moeten) worden in de onderbouw van havo en vwo. Steeds duidelijker wordt dat het voor een goed wiskundeprogramma van zeer groot belang is dat er een doorgaande lijn komt van klas 1 tot en met havo 5 en vwo 6.

Soms lijken secties wel te vergeten dat het een keuze is van de sectie of van de school wat er precies gedaan moet worden in de onderbouw havo en vwo. Bij het nemen van beslissingen over zo'n lange lijn helpt het natuurlijk niet mee dat op scholen in toenemende mate een splitsing lijkt te ontstaan tussen onderbouwsectie en bovenbouwsectie. Ondanks deze belemmering is het beslist de moeite waard er eens een sectievergadering aan te wijden. De bijdragen in dit nummer kunnen u misschien helpen om een richting vast te stellen. Daarbij moet ook niet vergeten worden dat de bovenbouwprogramma's in de Tweede Fase bij gedetailleerde bestudering toch wel wat meer veranderingen kennen ten opzichte van het oude programma, dan op het eerste gezicht misschien gedacht wordt. Zo is bijvoorbeeld de rol van ruimte-metkunde in het bovenbouwprogramma vrijwel geheel verdwenen, om maar eens wat te noemen.

Ten slotte

Binnenkort kunt u gaan genieten van een ongetwijfeld zeer verdiende zomervakantie. Na de zomer begint het schooljaar 1999/2000 of wordt het 99/00 of 9/0 of -1/0? In ieder geval een schooljaar met een magische klank. De redactie wenst u een goede vakantie en hoopt u in het nieuwe jaar wederom van allerlei ontwikkelingen op de hoogte te houden.

Kees Hoogland

Wiskunde is ook een vak

Frans Keune

Inleiding

De wiskunde heeft een geheel eigen karakter. Dat is het resultaat van een proces van duizenden jaren. De toepasbaarheid van de wiskunde is er een gevolg van. Ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs van de laatste decennia komen neer op het verloochenen van het eigen karakter van de wiskunde. Dat heeft negatieve gevolgen voor het wetenschappelijk klimaat. Ik licht deze ontwikkelingen toe aan de hand van enkele veel gebruikte, maar verder willekeurig gekozen, schoolboeken. Om verbetering in de situatie te brengen, heb ik een plan opgesteld dat ik hier zal toelichten.

Meetkunde, vroeger en nu

Hoe sterk de schoolwiskunde de laatste decennia is veranderd blijkt heel duidelijk uit een vergelijking

de jaren vijftig, de tijd dat ik zelf met de wiskunde kennismaakte. In de inleiding van dit leerboek legt de auteur eerst uit dat het gaat over figuren die we in het dagelijks leven tegenkomen, zoals lijnen, driehoeken, cirkels enz. Vervolgens gaat hij in op de onvolkomenheden van bijvoorbeeld een langs een liniaal getrokken lijn, en hij schrijft: *‘Om dit nadeel te ontgaan, let men in de meetkunde niet op deze onvolkomenheden, maar men denkt zich een lijn, die recht is. Men houdt zich niet bezig met de vraag, of zo’n lijn wel praktisch te tekenen is; het al of niet ‘bestaan’ van zo’n lijn heeft met meetkunde niets uit te staan.’*

In dit leerboek wordt alleen in de inleiding gewag gemaakt van de realiteit, zij speelt verder geen rol. De meetkunde is niet de studie van realistische zaken en dus gaan we hier volgens Alders anders te werk: *‘Omdat men zich in de meetkunde*

dekken. Het middel dat we daarvoor in de meetkunde gebruiken, is de logische redenering.’

Of, zoals mijn vroegere wiskundeleraar het uitdrukte: waarnemen doe je in een ander leslokaal. Op bladzijde 38 van Alders’ boek wordt gedefinieerd wat een cirkel is. Het gaat als volgt:

‘Een cirkel is de meetkundige plaats van de punten, die op gelijke afstanden van eenzelfde punt liggen. Dit punt heet het middelpunt (m.p.) van de cirkel; de afstand van het m.p. tot een punt van de cirkel heet de straal. Volgens de bepaling zijn alle stralen gelijk.’

Op dezelfde bladzijde worden ook stellingen bewezen, zoals de stelling die zegt dat een middellijn van een cirkel groter is dan een koorde die niet door het middelpunt gaat. Het bewijs is eenvoudig en verhelderend tegelijk, ook al spreekt het resultaat vanzelf.

Vergelijken we dit met de nieuwste druk van *Moderne Wiskunde*²⁾, dan valt direct op dat daar een cirkel niet wordt gedefinieerd: hij is er al en je kunt hem tekenen met een passer. Het komt erop neer dat een cirkel dat is, wat je met je passer kunt tekenen. De paragraaf waarin dit staat heet ‘De passer’ en niet ‘De cirkel.’ Dat is typerend. Er staat op bladzijde 20:

15 Met een passer kun je cirkels tekenen. Maak je passer zover open dat de passerpunten 4 cm uit elkaar staan. Teken nu een cirkel in je schrift.

Hiernaast staat een cirkel met een straal van 1 cm. Het punt waarin je de passer prikte, heet het **middelpunt**. Het middelpunt wordt vaak aangeduid met de letter **M**.



van de leerboeken van vroeger en nu. Ik heb nog een exemplaar van *Vlakke Meetkunde*¹⁾ van Alders uit

bezig houdt met ‘denkbeeldige’ dingen, is het niet mogelijk door directe waarneming eigenschappen te ont-

Vervolgens worden er enige oefeningen gedaan in het gebruik van de passer. In het boek van Alders

wordt met wiskunde begonnen op de eerste bladzijde van het eerste hoofdstuk. Wat in Moderne Wiskunde gebeurt zou je kunnen zien als een motiverende inleiding. Echter hetgeen wordt ingeleid blijft verder achterwege. In Vlakke Meetkunde van Alders is het puur wiskunde: definities (bepalingen), stellingen en bewijzen. Wiskunde kun je ook toepassen. Dat zul je bij Alders niet tegenkomen. Je moet het zelf bedenken of anders er bij een ander vak als natuurkunde (in een ander leslokaal) achter komen. Motivatie en toepassen geven beide een band met de realiteit: de realiteit levert motivatie voor het ontwikkelen van wiskunde en het toepassen geschiedt in de realiteit. Wiskunde en natuurkunde zijn zeer verschillende vakken die elkaar prachtig aanvullen.

Realistische wiskunde

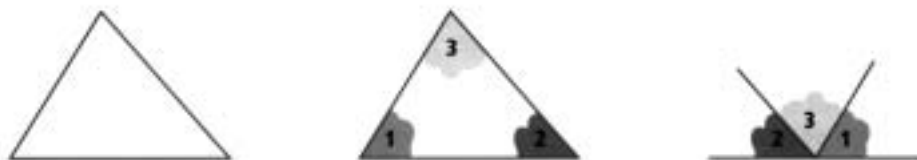
Met methoden als Moderne Wiskunde leert men geen wiskunde,

maar zoals dat heet realistische wiskunde. Je zou het ook rekenen kunnen noemen. Het gaat om realistische begrippen in plaats van abstracties. Ook het vinden van eigenschappen van deze begrippen betekent daardoor iets anders: dit gaat niet, zoals Alders dat noemt, met een logische redenering, maar door waarnemen. Door de aard van de begrippen in de realistische wiskunde is de noodzaak van de logische redenering verdwenen. Dat komt duidelijk naar voren als er een eigenschap moet worden afgeleid. In de realistische wiskunde is een driehoek niets anders dan een driehoekig figuur die je met potlood en liniaal op papier kunt tekenen. De eigenschap dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is, kun je afleiden door meten aan zo'n getekende driehoek met een gradenboog. Of je kunt de driehoek zeer realistisch te lijf gaan zoals dat in Moderne Wiskunde ³⁾ gebeurt op bladzijde 66:

Het lijkt op natuurkunde. Eigenlijk is het een karikatuur van de natuurkunde. In de echte natuurkunde wordt een natuurwet niet na één enkele simpele meting voor waar versleten. Verder is het ook vreemd dat al die regels in zo'n schoolboek steeds waar zijn. Waarom is de Stelling van Pythagoras nou waar? Hoe komt het dat met een beetje knippen en plakken met één enkele figuur eigenschappen worden gevonden die steeds maar waar blijken te zijn?

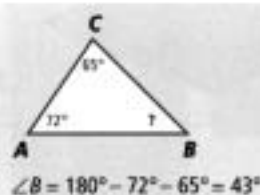
Zouden de auteurs er meer vanaf weten, maar vinden ze het niet nodig ons hun diepe inzichten te openbaren? Zoiets is er inderdaad aan de hand. Die eigenschappen corresponderen met stellingen uit de wiskunde en die zijn bewezen. De auteurs hebben vroeger die bewijzen op school gekregen en zijn er zo door gefascineerd geraakt dat ze later wiskunde zijn gaan studeren. Nu vinden deze auteurs het te moeilijk voor anderen en zeker voor de hedendaagse jeugd. Zeker, ook in hun tijd konden niet alle

15a Teken op een los blaadje een driehoek zoals hieronder en knip deze uit.



- b** Scheur er de drie hoeken af en leg ze tegen elkaar zoals hierboven. Als je het goed hebt gedaan, zie je dat de drie hoeken een gestrekte hoek maken.
- c** Hoeveel graden zijn de drie hoeken van je driehoek samen?

In een driehoek zijn de drie hoeken samen 180° . Als je van een driehoek twee hoeken weet, dan kun je de derde hoek berekenen.



Niet alleen de logica, maar ook de abstractie is verdwenen: het is immers realistisch. Dit gaat heel ver. Een eenvoudige opgave over de kostprijs van een walkman wordt verlichtigd met een foto van een walkman, zodat de leerling zich niet hoeft te vermoeien met het maken van een voorstelling van die walkman, die overigens totaal irrelevant is voor de opgave. Wel moet hij zijn rug teveel belasten met het heen en weer sjouwen van de veelkleurig geïllustreerde leerboeken en moeten ouders diep in de buidel tasten om deze boeken aan te schaffen. De illustraties ondersteunen het leerproces, heet dat in het jargon (van onderwijskundigen en uitgevers). Een ander symptoom van een verdwijnende abstractie is dat het zelden over getallen gaat, maar vrijwel altijd over aantallen guldens, meters, kilogrammen, appels, uren en nog veel meer. In een leerboek voor de brugklas gaat

Het is niet zo dat de nieuwe aanpak alleen maar een later beginnen met wiskunde betekent. Ook in klas 4 gaat het er realistisch aan toe. Exponentiële en logaritmische functies zijn geen wiskundige begrippen, maar worden gegeven door de knoppen voor deze functies op een al dan niet grafische rekenmachine.

Fundamentele eigenschappen van deze functies kun je dan aflezen door naar een paar uitkomsten te kijken. De rekenmachine is toegevoegd aan de alledaagse realiteit en eigenschappen van functies kunnen daardoor door waarnemen gevonden worden. Bij de grafische rekenmachine kun je nog meer waarnemen en dat maakt hem geschikt voor het verder uitbannen van de wiskunde. In de speciaal voor het studiehuis ontwikkelde methode Pascal ⁴⁾ heeft men dat goed begrepen: de grafiek van de cosinus is een verschoven grafiek

van de sinus, omdat je dat kunt zien op het scherm van je grafische rekenmachine. Mijn oratie van 21 april 1998 had als titel 'Naar de knoppen,' waarmee ik verwees naar dit soort van elimineren van wiskunde in het onderwijs. Logische redeneringen komen in de vernieuwde bovenbouw van het vwo weer terug, maar alleen in de zesde klas en dan alleen in het profiel Natuur en Techniek. Zoals een der auteurs van Moderne Wiskunde mij onlangs vertelde, wordt (pas) daar bewezen dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is.

Wat in het boek van Alders gebeurt, kun je moeilijk zien als aansluiten bij de leefwereld van het kind, zoals men dat noemt en hetgeen men als een groot voordeel ziet van het huidige onderwijs. Het valt me wel op dat de schrijvers heel weinig idee hebben van de leefwereld van tieners. In de brugklas een les (2), p.152) laten beginnen met

A black and white photograph of a collection of various consumer products, including food items like spaghetti sauce, pasta, and snacks, as well as household items like a toilet brush and a toilet paper roll. The products are arranged on a light-colored surface against a dark background.

Catalangetallen

De onderstaande opgave is een aardig combinatorisch probleem waarvan verschillende versies bestaan.

Voor een kassa staan $2n$ mensen te wachten om een kaartje te kopen voor een evenement. De prijs van een kaartje is f 2,50. De helft van de wachtenden heeft een rijksdaalder bij zich. De andere helft wil betalen met een muntstuk van 5 gulden. Als de verkoop begint heeft de kassa geen wisselgeld, daardoor kan het voorkomen dat de kassa niet terug kan geven van een bedrag van f 5,- (bijvoorbeeld als de eerste in de rij betaalt met een muntstuk van 5 gulden).

Hoeveel volgorden van de $2n$ wachtenden zijn er waar- bij dit teruggaveprobleem zich niet voordoet?

Een persoon met een rijksdaalder geven we aan met A en iemand met een muntstuk van 5 gulden met een B . Het totaal aantal permutaties van de n letters A en de n letters B is gelijk aan

$$\binom{2n}{n}$$

In een rij ontstaat een teruggaveprobleem als op enig moment het aantal B 's groter is dan het aantal A 's.

$A \quad B \quad A \quad A \quad B \quad B \quad B \quad \dots$

In deze rij ontstaat er voor het eerst een teruggaveprobleem op plaats 7. We tellen nu het aantal rijen met een teruggaveprobleem door een één-één-correspondentie aan te geven tussen de rijen met een teruggaveprobleem en de rijen met $n + 1$ A 's en $n - 1$ B 's.

In een rij met een teruggaveprobleem ontstaat het eerste probleem bij een B die wordt voorafgegaan door een gelijk aantal A 's en B 's, zeg van beide k . De B waar- bij het probleem ontstaat, staat dus op plaats $2k + 1$. Als we in de eerste $2k + 1$ termen van de rij de A 's en B 's verwisselen, ontstaat een rij met $n + 1$ A 's en $n - 1$ B 's.

A	B	A	A	B	B	B	$\dots$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
B	A	B	B	A	A	A	$\dots$

Iedere rij met een teruggaveprobleem correspondeert zo met een rij met $n + 1$ A 's en $n - 1$ B 's.

Omgekeerd hoort bij iedere rij met $n + 1$ A 's en $n - 1$ B 's een rij met een teruggaveprobleem.

Omdat het aantal A 's in zo'n rij groter is dan het aantal B 's, zal op een zekere plek het aantal A 's voor het eerst groter zijn dan het aantal B 's. Indien we tot en met de plek waar dat voor het eerst gebeurt de letters A en B weer verwisselen ontstaat een rij met teruggaveprobleem. Het aantal rijen met een teruggaveprobleem is dus even groot als het aantal rijen met $n + 1$ A 's en $n - 1$ B 's.

Dit aantal is

$$\binom{2n}{n-1}$$

Het aantal rijen zonder teruggaveprobleem is dus gelijk aan

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Het getal $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ heet het n -de Catalan- getal; genoemd naar Eugene Charles Catalan (1814-1894).

De rij Catalangetallen begint als volgt:

1, 2, 5, 14, 42, 139, 429, 1430, 4862, ...

De Catalangetallen komen in veel telproblemen voor. Euler kwam deze getallen tegen bij het tellen van het aantal mogelijkheden om n -hoeken in driehoeken te verdelen door niet snijdende diagonalen. Bij het tellen van het aantal binaire bomen duiken deze getallen ook weer op. Bij dit soort telproblemen speelt de volgende recurrente betrekking een belangrijke rol.

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + C_2 C_{n-3} + \dots + C_{n-3} C_2 + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0$$

Zo geldt bijvoorbeeld

$$C_5 = C_0 C_4 + C_1 C_3 + C_2 C_2 + C_3 C_1 + C_4 C_0 = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42$$

Rob Bosch

Literatuur

J.H. van Lint, J.W. Nienhuis **Discrete Wiskunde**
Graham, Knuth, Patashnik **Concrete Mathematics**

en dan een kleurenfoto tonen waaruit zonneklaar blijkt dat het bepaald geen feest gaat worden, zal niet voor ieder kind echt herkenbaar zijn. Als er dan ook nog vragen komen als

een kennisland worden, maar onder deze condities zal dat niet gebeuren.

Wat dan wel

Men moet vooral niet denken dat er een keuze is tussen enerzijds het hedendaagse wiskundeonderwijs en anderzijds het wiskundeonder-

1-1a Welke artikelen zal moeder speciaal voor Marieke's verjaardag gekocht hebben?

dan zijn we echt op kleuterniveau aangeland. Het is weliswaar een 'instap', maar juist daar is een goede aansluiting op de leefwereld op z'n plaats.

Gevolgen

De huidige opzet van het wiskundeonderwijs heeft voor iedereen gevolgen:

- * Zij die niet in het profiel Natuur en Techniek terecht komen zullen nooit weten wat wiskunde is. Het is een belangrijk onderdeel van onze cultuur waar zij een volledig verkeerd beeld van zullen hebben.
- * Zij die wiskunde gaan toepassen hebben weinig 'echte' wiskunde gezien en dat maakt het toepassen een stuk moeilijker. Er is een grote druk op het niveau van de vakken die de taal van de wiskunde gebruiken. Dat geldt niet alleen voor de schoolvakken, maar ook voor complete universitaire studies.
- * Zij die wiskunde gaan studeren hebben een laag ingangsniveau en hebben dan nog veel te leren. Logisch redeneren leert men het beste door het langzaam op te bouwen. Daar kan men beter jong mee beginnen. Het bepaalt zelfs ten dele tot welke van deze categorieën een leerling gaat behoren. Op basis van een verkeerd imago worden maar al te gemakkelijk verkeerde keuzen gemaakt. Nederland moet

Internationaal vergelijkend onderzoek

Vaak wordt mijn kritiek op het hedendaagse wiskundeonderwijs verworpen met de opmerking dat uit internationaal vergelijkend onderzoek zou blijken dat het Nederlandse wiskundeonderwijs tot het beste van de wereld behoort. Daarom vermeld ik hier enkele relevante feiten. Het wiskundedeel van de Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) van 1995 bestaat uit in totaal vier onderzoeken die betrekking hebben op:

- 1 rekenonderwijs in de groepen 7 en 8 van de basisschool;
- 2 rekenonderwijs in de klassen 1 en 2 van het voortgezet onderwijs;
- 3 rekenvaardigheid (mathematical literacy) bij schoolverlaters van het voortgezet onderwijs;
- 4 wiskundig inzicht (achievement in advanced mathematics) bij schoolverlaters met een exact pakket.

Nederland heeft aan de eerste drie van deze onderzoeken meegedaan en het is verheugend dat het daarbij zo goed gescoord heeft. Alleen uit het laatste onderzoek had kunnen blijken hoe het met het Nederlandse wiskundeonderwijs gesteld is. Nederland heeft ervoor gekozen om daar niet aan mee te doen. Het gemak waarmee sommigen dit alles door elkaar husselen om aan te tonen dat het Nederlandse wiskundeonderwijs zo goed is, is ronduit onthutsend.

wijs zoals dat vroeger was. Te vaak wordt geargumenteed dat het nu zo goed is, omdat het vroeger zo verkeerd was. Dat het ook anders kan blijkt uit een wiskundemethode als de Wageningse Methode die wiskunde en realiteit redelijk uit elkaar houdt. Door de Nijmeegse didactici Louis Maassen en Lode-wijk van Schalkwijk is enkele decennia geleden een aantrekkelijke meetkundemethode geschreven die jaren lang in de onderbouw van het Elzendaal College in Boxmeer is gebruikt en die nu met succes wordt benut om een groep leerlingen van het Stedelijk Gymnasium te Nijmegen voor wiskunde te interesseren. In de jaren zestig is door de Russische wiskundige I.M. Gel'fand tezamen met enkele anderen lesmateriaal ontwikkeld voor de Correspondentie-school in Moskou. Die was bedoeld voor leerlingen die in allerlei uithoeken van de Sovjet-Unie woonden waar niet voldoende wiskundig geschoolde leerkrachten voorhanden waren. Het was afstandsonderwijs waarbij de communicatie per post verliep. Dit materiaal is duidelijk ontwikkeld door mensen die in de wiskunde zelf goed thuis zijn. Het is aantrekkelijk, uitdagend en van een goed niveau. De creativiteit van de beroepswiskundige is ingezet om zoiets te bereiken. Deze boekjes (⁵), (⁶) en ⁷) worden nu in Amerika uitgebracht. Daar valt ook wel iets te verbeteren aan het wiskundeonderwijs. Een voorbeeld hieruit ⁷):

We have obtained an interesting inequality: for positive x (the right-hand part of the graph was considered) we always have

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Problems

1. Prove the inequality

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ for } x > 0 \quad (1)$$

directly.

2. Prove the inequality

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (2)$$

It expresses this fact: "The arithmetic mean of two positive numbers a and b is always greater than or equal to the geometric mean of these numbers."

Inequality 1 is a particular case of Inequality 2. For what a and b ?

3. The inequality $x + (1/x) \geq 2$ is used in solving the well-known problem of the "honest merchant." An honest merchant knew that the scales on which he was weighing his merchandise were inaccurate, because one beam was somewhat longer than the other (at that time they were still using scales as shown in Fig. 15). What was he to do? Cheating his customers would be dishonest, but he did not want to hurt himself either. The merchant decided that he would weigh out half the merchandise to each buyer on one scale and the second half on the other scale.

The question is: Did the merchant gain or lose, as a result?

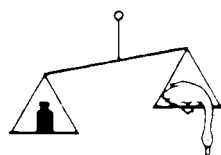


Fig. 15

Hoe verder

Onlangs heb ik bij de Stichting Axis om financiering gevraagd voor een plan dat als doel heeft het wiskundeonderwijs weer op het goede spoor te krijgen. De opzet is om professionele wiskundigen en schrijvers van les-teksten te laten samenwerken bij het ontwikkelen van nieuw materiaal dat geschikt is voor vwo-leerlingen. Dit nieuwe materiaal, dat de naam Ratio gaat krijgen,

zal de huidige methodes gedeeltelijk kunnen vervangen en op termijn mogelijk zelfs geheel. Het gaat om cursussen voor leerlingen van 10 tot 18 jaar, beginnend met voorbereidende cursussen voor leerlingen van de groepen 7 en 8 van de basisschool. In Nederland zijn lesprogramma's niet vastgelegd. Alleen de eisen voor de eindexamens staan vast. Scholen hebben de vrijheid de lessen naar eigen inzichten in te richten. Bij Ratio gaat het om een

combinatie van afstandsonderwijs en een lokale ondersteuning daarvan op de scholen zelf. De communicatie verloopt dan niet per post maar via Internet. Een bijkomend voordeel is dat het materiaal interactieve onderdelen kan bevatten. De technologie kan worden benut om dit met grote aantallen leerlingen te doen. Ook de inzet van leraren op de scholen zelf is daarbij van belang in verband met toetsing en begeleiding van leerlingen. De lessen zullen een uitdagend karakter moeten hebben. Problem solving en eigen onderzoek van leerlingen zullen deel kunnen uitmaken van de cursussen. De deelnemende leerlingen zullen een beduidend hoger niveau moeten kunnen bereiken dan hetgeen nu voor de eindexamens is vereist. Per school kan het verschillend worden georganiseerd: een klas kan meedoen, maar ook een deel van een klas. In dat laatste geval is het wel gewenst dat door een van de leraren de begeleiding van de leerlingen ter hand genomen wordt. Delen van de op de school gebruikte methode zouden dan voor de deelnemende leerlingen kunnen worden vervangen door de Ratio-lessen.

Het gaat mij dus om lessen in de geest van de Correspondentieschool, maar dan met inzet van moderne ICT-middelen. De wijze waarop het besturingsstelsel Linux voor PC's wordt ontwikkeld kan daarbij model staan voor de ontwikkeling van de lessen en cursussen. Iedereen kan bijdragen, maar er is wel een centrale regie.

Een Internetsite is het ideale middel om dat te realiseren. Er moet wel een instituutje worden gecreëerd waar wiskundigen, leraren en anderen samenwerken om dit allemaal vorm te geven en in goede banen te leiden.

Kortom

Het komt er op neer dat ik ander onderwijs wil, zeker voor de groep van leerlingen die de capaciteiten hebben voor onderwijs van een hoger niveau. De hoop is dat talent dan beter benut zal worden. De oplossing die ik voorstel leidt niet tot extra lessen en is daarom relatief goedkoop. Wel is er veel creativiteit nodig om geschikte lessen te ontwikkelen. Het gaat niet om 'wiskundelessen als vroeger,' maar om een geheel nieuw concept. Alleen een samenwerking van professionele wiskundigen en leraren op een centraal niveau biedt daarvoor perspectieven. De leraren op de scholen, die direct contact met de leerlingen hebben, blijven onontbeerlijk. Voor hen komt er dan de mogelijkheid bij om bijdragen te leveren aan de ontwikkeling van de cursussen. Graag zie ik de situatie ontstaan, waarin leraren behoren tot een brede gemeenschap van wiskundigen die zich als geheel verantwoordelijk voelt voor het wiskundeonderwijs. De kloof tussen beroepswiskundigen en ontwikkelaars van wiskundeonderwijs is veel te groot geworden.

Referenties

- 1 *C.J. Alders, Vlakke Meetkunde voor M.O. en V.H.O.*, P. Noordhoff, 1955
- 2 *Moderne Wiskunde*, deel 1a havo vwo, Wolters Noordhoff, 1998
- 3 *Moderne Wiskunde*, deel 1b havo vwo, Wolters Noordhoff, 1998
- 4 *Pascal*, VWO informatieboek, gemeenschappelijke onderwerpen, Thieme, 1998
- 5 *I.M. Gel'fand e.a., The Method of Coordinates*, Birkhäuser, 1990
- 6 *I.M. Gel'fand e.a., Algebra*, Birkhäuser, 1993
- 7 *I.M. Gel'fand e.a., Functions and Graphs*, Birkhäuser, 1996

Aankondiging STUDIEREIS

HUNGARIAN AND DUTCH APPROACHES IN MATHS TEACHING

Van maandag 27 september t/m zondag 3 oktober 1999 organiseert het Europees Platform voor het Nederlandse Onderwijs een studiebezoek aan Boedapest/Hongarije met bovengenoemd thema. Het seminar is bestemd voor wiskundedocenten die lesgeven in de bovenbouw van het HAVO en het VWO.

Vorig jaar werd er een seminar voor wiskundeleraren georganiseerd in Wenen, Bratislava en Boedapest. Uit de mondelinge reacties en verslagen kwam naar voren dat het Oostenrijkse en Slowaakse wiskundeonderwijs als traditioneel en weinig vernieuwend moest worden aangemerkt, maar dat bepaalde facetten van de Hongaarse schoolwiskunde zeer tot de verbeelding spreken. Met name wordt er veel waarde gehecht aan het oefenen in het maken van vraagstukken die geschikt zijn om te worden opgelost in wedstrijdverband zoals bijvoorbeeld de wiskunde-olympiade. Sommige scholen trainen leerlingen met wiskundeaanleg om aan schoolcompetities te kunnen deelnemen.

Tijdens het komende studiebezoek wordt ernaar gestreefd te komen tot een kennisuitwisseling. De Nederlandse docenten worden vertrouwd gemaakt met strategische spelletjes, waarmee bij leerlingen belangstelling voor de wiskunde kan worden opgewekt terwijl zij op hun beurt, aan Hongaarse leerlingen uit de bovenbouw, een les geven over een onderwerp uit het wiskunde A programma.

Naast dit programmapunt zullen er 'gewone' scholen bezocht worden om te zien hoe het wiskundeonderwijs zich aan de gemiddelde tot zwakkere leerling voltrekt. Verder wordt er een ongedwongen bijeenkomst met Hongaarse collega's belegd om ervaringen en ideeën uit te wisselen.

Om de deelnemers zo goed mogelijk op dit actieve seminar voor te bereiden wordt er begin september in Zwolle een bijeenkomst belegd onder leiding van Dr. Hans van Lint, oud-voorzitter van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren.

- inhoud* : voordrachten, strategische wiskunde o.l.v. de meest vooraanstaande wiskundige van Hongarije Lajos Posa, schoolbezoeken en gedachtenwisseling met collega's.
- vervoer* : vliegtuig naar Amsterdam-Boedapest vv.
- accommod.* : goed, in het hartje van Boedapest gelegen hotel, op basis van 2p-kamers en halfpension.
- reisleider* : Dr. Hans van Lint, oud-voorzitter NVvW.

Door een subsidietoekenning van het Europees Platform kan de reissom worden gereduceerd tot f 650,- per persoon.

Sluitingsdatum inschrijving: 10 september 1999

Bent u geïnteresseerd dan kunt u zich schriftelijk opgeven onder vermelding van uw naam en adres en die van uw school.

Wenst u nadere informatie dan belt u 072-5118502 tijdens kantooruren.

Correspondentie adres:

Het Europees Platform voor het Nederlands Onderwijs, t.a.v. drs. G. Werther, Nassauplein 8, 1815 GM Alkmaar.

Govert Werther, coördinator studiebezoeken/seminars Europees Platform

Wiskunde- onderwijs: filter of pomp

Kees Hoogland

Inleiding

Op dit moment zo vlak voor het jaar 2000 is er een unieke gelegenheid om na te denken over de invulling van het wiskundeprogramma in de onderbouw van havo en vwo. Ik zal toelichten waarom. Voor het vbo/mavo is in 1993 een nieuw examenprogramma wiskunde ingevoerd. Dit examenprogramma legt de nadruk op een praktische en toepasbare wiskunde, waarmee expliciet gewerkt wordt aan de gecijferdheid van de vbo/mavo-leerlingen. Op de internationale TIMSS-toetsen scoren de leerlingen hiermee zeer hoog. Voor havo en vwo staat de vernieuwde Tweede Fase op het programma. Kenmerken hiervan zijn een nadruk op technologische ondersteuning (grafische rekenmachine en allerlei software-producten) en onderzoeksopdrachten (praktische opdrachten). De uitvoerbaarheid van het programma voor de Tweede Fase kent nog wel allerlei haken en ogen: nieuwe inhoud, nieuwe manieren van werken, overlappendheid en weinig lessen. Jammer natuurlijk dat er zo weinig ruimte en faciliteiten zijn om dit programma goed en onderwijsbaar aan te pakken. Waar zit nu die unieke gelegenheid? Naar mijn idee zijn er inmiddels in de onderbouw van havo en vwo allerlei mogelijkheden om per

school het wiskundeonderwijs een eigen gezicht te geven. Er kan gewerkt worden aan een lange lijn van onderbouw naar bovenbouw havo/vwo.

Wiskunde voor 12 tot 16 jaar

Het is goed te beseffen dat het wiskundeonderwijs voor leerlingen van 12 tot 16 jaar nog helemaal niet zo oud is als wij denken.

Pas in het begin van de negentiende eeuw werd er wiskunde gegeven aan leerlingen van deze leeftijd. In eerste instantie lag daarbij de nadruk op de toepasbaarheid van de wiskunde. Er is altijd een grote belangstelling geweest voor de waarde die wiskunde kon hebben in allerlei beroepen: de wijnroeiërij, de handel, de zeevaart etcetera ¹⁾. Wiskundeonderwijs werd gezien als een pomp voor de economische vooruitgang van Nederland. Op het moment dat wiskunde uiteindelijk een regulier onderdeel van het onderwijs uitmaakte kwam er een omslag. Er ontstond een sterke nadruk op de vormende én selecterende waarde van deductief wiskundeonderwijs.

Er werd vooral het argument gebruikt dat formele wiskunde bijdroeg tot verstandig redeneren en tot verstandig denken en leren in het algemeen. Dat weerspiegelde ook de ideeën die er destijds leef-

den rond het leren van mensen in het algemeen.

Hierdoor verdween de praktische toepasbaarheid op de achtergrond. In plaats dat wiskundeonderwijs een pomp was voor het opleiden van grote groepen leerlingen met een praktische wiskundekennis werd wiskundeonderwijs een filter om leerlingen te kunnen selecteren.

Deze eeuw

Vanaf de jaren twintig is er stevast een grote invloed geweest van universitair wiskundigen op de inhoud van het wiskundeonderwijs.

In 1924 verschijnt van de hand van de commissie Beth een 'ontwerp van een leerplan voor het onderwijs in wiskunde, cosmographie op de HB scholen met vijfjarigen cursus'. Een samenvattende zin uit dat rapport is de volgende: 'Hoofddoel van het wiskundeonderwijs is het bijdragen tot de geestelijke vorming en ontwikkeling en neven-doel het aanbrengen van nuttige kennis'. De problemen die dat zou kunnen opleveren in het klaslokaal werden overgelaten aan de docent.

De mammoetwet

Ook bij de invoering van de mammoetwet spelen universitair wiskundigen een belangrijke rol. Er wordt gekozen voor een zeer structuralistische benadering van het wiskundeonderwijs. De verzamelingenleer moest een prominente rol gaan spelen.

Dit leidde ertoe dat in het begin van de jaren tachtig er een examenprogramma wiskunde was waarmee een groot deel van de leerlingen werd uitgefilterd. Slechts een gedeelte van de leerlingen deed examen in de wiskunde: circa 50% van de mavo-leerlingen, circa 50% van de havo-leerlingen en circa 70% van de vwo-leerlingen. Overi-

gens steevast met een groot percentage onvoldoendes.

Nog steeds heeft een groot gedeelte van de Nederlandse burgers een uitgesproken mening over wiskunde(onderwijs): 'Daar kon ik helemaal niets van'.

Helaas wordt deze opmerking niet alleen geuit door hen die geen examen wiskunde hebben gedaan tijdens hun middelbare school-tijd.

De laatste twintig jaar

De afgelopen twintig jaar is er wereldwijd, vooral gestimuleerd door bijvoorbeeld Freudenthal, een toenemende aandacht ontstaan voor de actieve en constructieve kant van de wiskunde: wis-

dels gemeengoed geworden via het realistisch reken/wiskundeonderwijs.

In het voortgezet onderwijs is dit terug te zien in Wiskunde A voor havo en vwo en in het nieuwe examenprogramma voor vbo/mavo. Inmiddels zijn de deelnamecijfers aan wiskunde A en B samen ongeveer: vwo 95%, havo 85% en vbo/mavo 80%.

Havo/vwo onderbouw

Op dit moment is de onderbouw voor havo en vwo sterk beïnvloed door het nieuwe examenprogramma voor vbo/mavo. Dit had direct tot gevolg dat er een aansluitingsprobleem ontstond met de wis-

1mhv.

Inmiddels is er op scholen een veel striktere scheiding ontstaan tussen havo/vwo enerzijds en vbo/mavo anderzijds.

De tweede generatie onderbouwboeken van de grote methoden kennen allemaal een deel 1HV. Als je deze boeken analyseert zie je dat er een evenwicht wordt gezocht tussen enerzijds een praktische en realistische wiskunde (voor de wiskunde A kiezers) en anderzijds een meer klassieke wiskunde, waarbij de nadruk ligt op patronen en structuren en op redeneren en wiskundig denken.

Ik geef een paar voorbeelden over patronen, over redeneren en over generaliseren:

P-6 Figuur A telt drie stippen. Elke stip is verbonden met beide andere. Daarvoor zijn drie lijnstukken nodig.

a Verbind in figuur B elke stip met de drie andere. Hoeveel lijnstukken moet je daarvoor tekenen?

b Verbind in figuur C elke stip met de vier andere. Hoeveel lijnstukken moet je nu tekenen?

c In figuur C vertrekken uit elke stip vier lijnstukken. Toch hoeft je geen 5×4 lijnstukken te tekenen. Waarom niet?

d Vul de tabel in.

aantal stippen	3	4	5	6	7
aantal lijnstukken	3	...	...	...	...

e Hoeveel lijnstukken moet je tekenen in een figuur met tien stippen?

f Geef een formule om het aantal lijnstukken uit te rekenen als je het aantal stippen weet.

Moderne Wiskunde 1a havo/vwo p.269

kunde is overal rondom ons heen en wiskundig denken moet ontwikkeld worden door wiskunde actief te bedrijven. Deze ontwikkeling is consistent met allerlei recent onderzoek naar de constructieve kant van het leren van mensen in het algemeen. In het basisonderwijs is dit inmid-

kunde B-programma's voor havo en vwo.

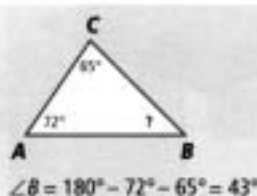
Toen de eerste generatie boeken voor de basisvorming (1993) werden geschreven zaten de meeste leerlingen nog in een heterogene mavo-havo-vwo-brugklas. De boeken van de grote methoden hadden toen allemaal als titel

Een opgave waarbij het redeneren op basis van patronen en structuren aan de orde komt, zonder dat er ruis ontstaat door algebraïsche notaties.

-

-

- In een driehoek zijn de drie hoeken samen 180° .**
Als je van een driehoek twee hoeken weet, dan kun je de derde hoek berekenen.



Een typisch voorbeeld hoe vanuit een concreet geval wordt overgegaan naar een aanschouwelijk algemeen geval en vervolgens naar een explicitering. Deze opgaven dwin-

gen de docent bijna tot een klassengesprek met vragen als: Is het altijd zo? Kun je opgave 14 en 15 voor elke driehoek gebruiken? et cetera. Jarenlange klassenervaring hebben

de auteurs een afbakening doen kiezen die voor grote groepen leerlingen te behappen is.

Moeder heeft inkopen gedaan want morgen is Marieke jarig. Op de foto zie je wat ze allemaal gekocht heeft.



- 1-1a** Welke artikelen zal moeder speciaal voor Marieke's verjaardag gekocht hebben?
- b** Marieke wil de boodschappen in twee groepen verdelen. Bedenk een manier om dit te doen.
- c** Het broertje van Marieke zegt: 'Er zijn artikelen die kunnen rollen en artikelen die dat niet kunnen.' Verdeel de boodschappen op deze manier.
- d** Je kunt ook naar de vorm van de artikelen kijken. Noem drie artikelen die ongeveer dezelfde vorm hebben.
- e** Zie je ook een artikel dat dezelfde vorm heeft als het doosje met zeep midden voor op de foto? Zo ja, welk artikel?

Moderne Wiskunde 1a havo/vwo p.152

Als je deze opgave bekijkt dan is het bijna wonderbaarlijk hoe je met zulke alledaagse zaken kunt werken aan het classificeren van ruimtelijke vormen en kunt komen tot generalisaties daarover. Een bekende vraag in de klas na deze opgave is dan bijvoorbeeld: 'Heeft een rijksdaalder eenzelfde vorm als een PVC-pijp?' De hersens pijnigen zich, de structuren worden gevormd.

Keuzes voor havo/vwo onderbouw

Het is goed zich te realiseren dat scholen en docenten geheel vrij zijn het wiskundeonderwijs in de onderbouw havo en vwo in te richten op een manier die aansluit bij hun visie op wiskundeonderwijs.

Uiteraard moeten de kerndoelen van de basisvorming gehaald worden. In de praktijk hebben havo-vwo-leerlingen hier niet zoveel moeite mee, ongeacht welke methode of welke keuzen er gemaakt zijn in de onderbouw. Laten we de keuzes maar eens toespitsen op de onderbouw van het vwo.

Het is duidelijk dat deze leerlingen meer kunnen dan de eerste generatie boeken voor de basisvorming bieden. De vraag is nu waar nu

extra aandacht aan besteed moet worden.

Er zijn verschillende mogelijkheden:

- Meer aandacht voor algebraïsche vaardigheden.
- Meer aandacht voor bewijzen en redeneren.
- Meer aandacht voor modelleren.
- Meer aandacht voor gebruik van technologische gereedschappen.

Algebraïsche vaardigheden

Sinds de mammoetwet lijkt algebraïsch handelen bijna synoniem met wiskundig denken. Duidelijk is dat een bepaalde vaardigheid in algebraïsch handelen essentieel is voor met name het analytisch oplossen van wiskundige problemen.

Het is een grote uitdaging om te bedenken welke algebraïsche vaardigheden in de toekomst nodig zijn, als allerlei computeralgebra voorhanden is. Binnen enkele jaren zal een eenvoudige rekenmachine de beschikking hebben over software voor computeralgebra.

De grote vraag zal zijn welke vaardigheden de leerlingen zal moeten beheersen om te begrijpen wat de machine doet en om vast te stellen wat de machine moet doen om het probleem dat voorhanden is op te lossen.

Bewijzen en redeneren

Aandacht voor redeneren en bewijzen is buitengewoon nuttig en mogelijk zeer motiverend voor een aantal van de leerlingen. Zorgvuldig zal moeten worden vastgesteld welke inhouden nog echt wiskundig denken bevorderen en welke inhouden slechts leiden tot betekenisloos reproduceren. De geschiedenis van het wiskundeonderwijs geeft hiervoor voldoende indicatie. Een voorbeeld uit de praktijk van de Franse school eind 1800, die leerlingen moest voorbereiden op het toelatingsexamen voor de KMA: ²⁾

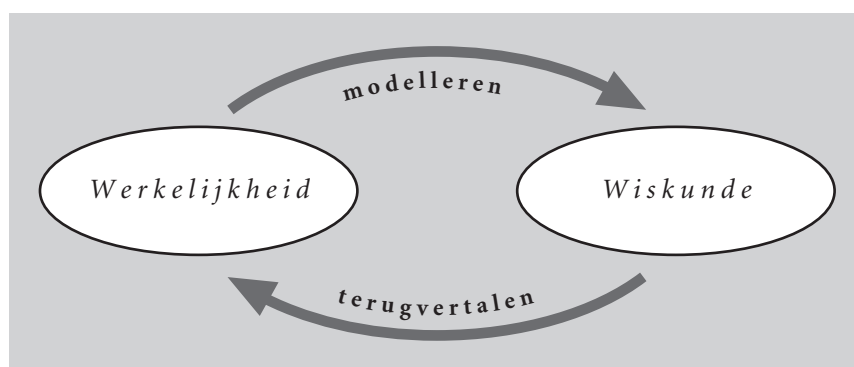
'De instituteur heeft zich een of twee secundanten ingehuurd. Aan een van dezen draagt hij op de knapen, die dit jaar hun examen moeten doen, in de mathesis te onderwijzen (...). Van 's morgens zes tot 's avonds tien, met zeer, zeer weinig uren vrijen tijd, (...), moet hij met die knapen onophoudelijk mathesis arbeiden (...) Een handboek (door de leraar van de akademie, waar 't examen moet worden afgelegd geschreven) moet woordelijk van buiten worden geleerd: begrepen of niet, 't moet erin, en door aanhoudend weder en wederom opzeggen van stellingen, bewijzen en formules, brengen de knapen het werkelijk zoover, dat de examinatoren in de waan komen, dat er een grondige

opleiding heeft plaatsgehad.²)

Een programma ontwerpen waarin redeneren en bewijzen aan de orde komt en dat niet werkt als een filter voor grote groepen leerlingen, zal voorwaar geen sinecure zijn.

Modelleren

Duidelijk is dat het wiskundig modelleren van problemen een belangrijke vaardigheid is voor leerlingen. Nederland als kennisland hangt aan elkaar van het modelleren van problemen naar een wiskundig model, het doorrekenen van het model en vervolgens het interpreteren van de uitkomsten en het terugvertalen naar de realiteit.



De leerlingen zullen overigens snel in de gaten hebben dat het grote geld te verdienen is in het modelleren en het terugvertalen. Het wiskundig doorrekenen zal over niet al te lange tijd grotendeels geautomatiseerd zijn. Moeten we dat de leerlingen vertellen of zullen we ze dat maar voorlopig verzwijgen?

Technologische gereedschappen

De opmars van de technologie is niet te stuiten. Leerlingen komen in ongelooflijk snel tempo in aanraking met allerlei wiskundige gereedschappen. Stel dat wij in het examenprogram-

ma verbieden dat er gebruik wordt gemaakt van een grafiekenprogramma of computeralgebra, dan zou het weleens een schok kunnen zijn dat een leerling in de schoolkrant zomaar tien websites publiceert waar online van computeralgebra gebruik gemaakt kan worden.

Ik noem er alvast eentje: de Math-Serv Calculus Toolkit³): mss.math.vanderbilt.edu/~pscrooke/toolkit.html

Zo zijn er wel meer gereedschappen te bedenken:

- Bekende spreadsheet-programma's die in een oogwenk een volledig statistiekhoofdstuk tot een futiliteit maken.
- Interactieve vlakke meetkunde-programma's die het bewijzen

van stellingen direct en overtuigend visualiseren.

- Ontwerpprogramma's die met grote precisie ruimtelijke constructies genereren.

Etcetera.

Uitdaging voor het wiskundeonderwijs

Wiskundeonderwijs binnen het voortgezet onderwijs heeft niet meer de vanzelfsprekende legitimatie die het de afgelopen 200 jaar heeft gehad. De selectiefunctie om leerlingen uit te filteren is minder vanzelfsprekend.

Wiskunde zou nog steeds een pomp kunnen zijn om steeds meer

leerlingen steeds meer wiskunde te leren.

De nadruk zou dan wel moeten liggen op modelleren, wiskundig denken vanuit problemen en het leren effectief en betekenisvol gebruiken van wiskundige en technologische gereedschappen.

Concreet zou de nadruk moeten liggen in de onderbouw op GWA/praktische opdrachten en het gebruik van ICT.

Een effectieve didactiek daarvoor is nog niet uitgekristalliseerd voorhanden. De komende jaren zal daaraan ongetwijfeld door velen, - schoolboekenschrijvers, ontwikkelaars en docenten - gewerkt worden. En idealiter ook door universitair wiskundigen die als geen ander weten welke richting het wiskundeonderwijs op moet gaan in de 21e eeuw.

1 Smid, H.J. (1997) **Een Onbekookte Nieuwigheid?** Delft University Press

2 ibidem, p. 65.

3 Met dank aan Jos Geerlings, Niels Stensencollege Utrecht.

Wiskunde op het havo en het vwo

Een interview met *Wim Doeve*.
Wim Doeve is docent wiskunde en redactielid van *Euclides*.

Wat is naar jouw mening het primaire nut van de wiskunde op het havo en vwo?

Wiskunde is in wezen een formeel abstract vak, niet een substantieel vak. Daarin verschilt het essentieel van alle andere schoolvakken. Alle andere schoolvakken zijn in de praktijk substantieel, het gaat daar om de inhoud, niet om de methode. Het formele karakter betekent meteen dat de themakeuze binnen de wiskunde, of de keuze van toepassingsgebieden, in beginsel arbitrair is. Het gaat erom dat je leert om vanuit gemaakte afspraken logisch en goed opgebouwd te denken, onafhankelijk van de inhoud, de substantie. De belangrijke rol in de wiskunde en in de samenleving van logisch argumenteren vanuit gemaakte afspraken, dat noemen wij definities en axioma's, is een recente culturele aanwinst van het denken. Die gaat maar zo'n tweeënhalf millennium terug. Het is een gedachtegoed dat je moet aanleren. Je wordt er misschien niet gelukkig van, maar aan de andere kant, in de wereld van vandaag kun je ook niet zonder. Geen ander schoolvak leert je zo formeel en fundamenteel redeneren. De bijdrage die dat levert aan de vorming van de leerlingen is dan ook de eni-



ge wezenlijke rechtvaardiging van de verplichte status van het vak, daarin ligt de legitimiteit van de wiskunde als verplicht schoolvak.

Zit de werkelijke betekenis hem niet méér in de toepassing, de toegepaste wiskunde?

De huidige nadruk op praktisch toegepaste wiskunde in het onderwijs is, denk ik, een reactie op de roep om een meer concreet herkenbare maatschappelijke relevantie van het vak. Zeg maar om nuttige wiskunde, net als het vroegere 'nuttig' rekenen. Het zou de interesse in het vak helpen verhogen, doordat het meer aansluit bij de belewingswereld van de leerling. En het zou helpen om de drempels van het vak te verlagen. Maar op school zitten daar veel haken en ogen aan.

Zoals?

Om te beginnen sluiten de toepassingen zelden aan bij je eigen bele-

wingswereld. In die zin hebben ze weinig nut. Heb jij bijvoorbeeld wel eens een glazenwasser zijn zakjap uit zijn achterzak zien trekken om met goniometrie te bepalen hoe hoog zijn ladder zou komen als hij hem onder een gegeven hoek en op een gegeven afstand van de muur zou neerzetten? Ik kan het een leerling moeilijk kwalijk nemen als die

dat gezocht vindt en zich misleid voelt. Is het nu echt zo boeiend om les na les een lange en diverse reeks problemen van dat soort tegen te komen? In tegendeel, vooral in de bovenbouw leidt de onwerkelijkheid van de vaak erg arbeidsintensieve toepassingen eerder tot desinteresse, en daardoor al snel tot een gebrek aan inspanning.

Waar zit hem dan het probleem met toepassingen van de wiskunde op school?

Ik denk dat er twee principiële problemen zijn. Ten eerste, echte toegepaste wiskunde is in werkelijkheid een pluspakket bovenop de abstracte wiskunde dat je niet moet onderschatten. Voordat je wat kunt moet je een scala van bouwstenen op behoorlijk niveau begrijpen en beheersen. Afhankelijk van de toepassing zijn dat zaken zoals algebra, analyse, lineaire algebra, kansrekening, statistiek, analytische meetkunde, of numerieke analyse. Maar bovenop die abstracte wiskundige denkwijze moet je bovendien in staat zijn om abstracte logische constructies van concept en model te ontwerpen. En ten slotte moet je in staat zijn om valide en betrouwbare koppelingen te leggen tussen dergelijke concepten en modellen enerzijds, en empirie en probleemstelling anderzijds. Als je dat laatste niet kunt, dan ben je immers niet in staat om de mogelijkheden,

beperkingen, en interpretaties van realistische toepassingen op hun juiste waarde te schatten. Dat is bij elkaar een moeilijke, maar waardevolle combinatie. Toegepaste wiskunde is zeker niet makkelijk of toegankelijk. En als je dat onderschat, dan wordt het al snel gekunsteld, oppervlakkig, triviaal en demotiverend, zoals het probleem van de glazenwasser.

Wat is het tweede probleem?

Wil je toegepaste wiskunde serieus nemen als vakgebied, dan is het nodig ruimte te maken voor het vereiste begrip en inzicht, voor de vereiste diepte en professionaliteit. Dat betekent dat het hele nu nog vereiste scala aan de huidige vaak oppervlakkige, rammelende en/of amateuristische toepassingen ingrijpend gesaneerd zou moeten worden. Maar juist omdat het in de wiskunde meer gaat om procedure dan om substantie is dat op zich niet erg. In een intrinsiek formeel vak heeft immers geen enkel substantieel onderwerp absolute waarde.

Je kunt dan, afhankelijk van het gekozen profiel, bijvoorbeeld denken aan hoogstens twee velden van toepassing die per eindexamencohort gewisseld worden. Dat houdt het vak dynamisch en aantrekkelijk. En het voorkomt operationele problemen die voortvloeien uit dezelfde jaarlijks terugkerende praktisch toegepaste bezigheden.

Wat betekent dat alles in de praktijk?

In elk geval, dat je vanaf de eerste klas tot en met het eindexamen althans één thema axiomatisch en deductief opbouwt. Dat de leerling voortdurend werkt aan kennis van, begrip van en inzicht in basisbegrippen en basisprincipes. En dat de leerling zich grondig bekwaamt in routine, onder meer in het algebraïsch fundament. Dat kan bovendien niet zonder grote preci-

sie in formuleren, noteren en deduceren. Precisie is een sine qua non voor goed begrip en inzicht. Maar wiskunde is niet alleen een exact vak, het is ook, meer dan enig ander schoolvak, cumulatief in opbouw. Dus is het belangrijk dat leemtes en lacunes door veel oefening, herhaling en aanvullende benaderingen – bijvoorbeeld analytisch, grafisch, numeriek – worden weggewerkt. Anders stort het bouwwerk vroeger of later in.

En waar zie je dan de toegepaste wiskunde?

Voor het overige, en dat zal voor de meeste leerlingen in de loop van hun schooltijd een relatief steeds belangrijker component van het vak worden, richt je je langs een beperkt aantal heldere lijnen op die fundamentele bouwstenen van de toegepaste wiskunde die relevant zijn voor dat leerlingencohort. En daarnaast schenk je voldoende aandacht aan de bijbehorende onderzoeksmethodologische scholing en training, de schakel tussen abstractie en empirie. Let wel, wat de wiskunde betreft gaat het om een systematisch inzicht in en ervaring met de wiskundige bouwstenen van de toepassing. Wiskunde is geen natuurkunde, economie of techniek.

Maar ook de geschiedenis van de wiskunde verdient aandacht, net als de rol en betekenis van de wiskunde in cultuur en techniek in onze en andere samenlevingen. Dergelijke vakken plaatsen zowel de abstracte en axiomatische lijn als de toegepaste wiskunde in perspectief. Ze zijn ook aanzienlijk waardevoller als ondersteuning van andere vakken, vervolgopleidingen en algemene ontwikkeling dan bijvoorbeeld parabolen en puntsymmetrieën.

Systematische en scherp afgebakende integratie van de symbolische algebra en de numerieke analyse in het onderwijs betekent dat

de theorie zich grondiger kan richten op een helder inzicht in, en goede routine op het gebied van, de basisbegrippen en basisprincipes. Complexere variaties die nu niet aan de orde kunnen komen door hun extra moeilijkheidsgraad of rekenintensiteit, hoeven door dergelijke software dan niet langer buiten de boot te vallen.

Zo'n aanpak zal verder leiden tot een behoefte aan specifieke toepassingsgerichte software. Vaak is de Nederlandstalige markt te klein voor de ontwikkeling van goede commerciële software voor het onderwijs. Maar waarom kunnen dan bijvoorbeeld de lerarenopleidingen niet geschikte buitenlandse software (laten) vertalen, of software-ontwikkeling stimuleren, bijvoorbeeld als langlopende projecten binnen een afstudeerrichting in de wiskunde en informatica. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zou hier een stimulerende rol moeten vervullen.

Aan wat voor velden van toepassing denk je verder voor je roulerende portefeuille?

Interessante en voor de leerling waardevolle gebieden zijn er te over, van wiskundige demografie tot actuariële wiskunde, van wiskundige economie tot sterrenkunde, van econometrie tot techniek, van logistiek tot statistiek, van architectuur tot bouwkunde, van mechanica tot muziek, enzovoort. Het een past beter bij het ene profiel, het andere bij een ander. Maar in wezen is de keuze arbitrair. Maar, toegepaste wiskunde is een zeer divers vakgebied. Het kent vele specialismen. Die vereisen bovendien stuk voor stuk een grondige en langdurige praktijkervaring voordat je enigszins terzake kundig bent. Het maken van evenwichtig en verantwoord lesmateriaal zal dus ook mede een professionele inbreng vereisen.

Dat is al met al een gedachtegang die ingaat tegen de huidige trend ...

De huidige tendens in het wiskunde-onderwijs is heel sterk gericht op een intuïtieve benadering van het vak en op een gevoel van direct nut. Anders dan logica is intuïtie is een gevoel, dat de mens door de evolutie eigen is. Maar als je kijkt naar de geschiedenis van de wiskunde, dan zie je dat intuïtie in het algemeen geen betrouwbare gids in de logica is. Pas in de laatste tweehonderd jaar heeft het vak zich daaraan echt ontworsteld. Zoals ik al zei, logisch deductief denken is een zeer recente cultureel-verworvenheid. Het is een bijzondere vorm van hersengebruik die je moet aanleren. Substitutie van intuïtie voor logica is dan ook bij uitstek niet de weg voor dat proces van acculturatie.

Draai je daarmee niet alles om?

Nee. Het is juist opvallend, dat de schoolwiskunde met de invoering van de Mammoetwet aansluiting probeerde te vinden bij de stand van zaken in wiskundig denken van het eind van de vorige eeuw. Dat was een sprong van bijna 100 jaar ten opzichte van het toen oude curriculum. Maar sindsdien heeft het schoolvak een onbegrijpelijke draai van π radialen gemaakt. Dat is juist de trendbreuk. Met de terugkeer van de nadrukkelijke benadering vanuit de intuïtie wordt een geleidelijke ontwikkeling van ruim 2500 jaar, vanaf Thales en Pythagoras, in systematisch logisch deductief denken als de wezenlijke grondslag van het vak opeens ontkend. Dat begrijp ik niet. Er zijn voldoende schoolvakken die een beroep op intuïtie doen. Als de wiskunde juist het eigene van zijn karakter loochent, dan verliest het zijn uniciteit, en daarmee zijn fundament en bestaansrecht als verplicht vak op school. Het is de hoogste tijd weer een evenwicht te vinden waarmee je de leerling voorbereid op de toekomst.

Als je er weer een meer abstract vak van maakt, dan maak je het niet leuker, denk ik.

Daar kan ik drie dingen op zeggen. Om te beginnen, leerplicht bestaat, omdat we als samenleving vinden dat er dingen zijn waarvan het, voor individu en maatschappij, nuttig is om daarop te studeren, en dan met name die zaken die de meesten niet uit zichzelf zullen aanpakken. Daar hoort een mate van abstract en deductief denken ook bij.

Verder, in zijn streven naar abstractie en eenvoud ligt juist de schoonheid en elegantie van het vak. Mits goed opgebouwd, kun je als leerling buitengewoon krachtige resultaten bereiken. Je leert een manier van denken, het vermogen bij een redenering of bij het oplossen van een probleem logica en systematische opbouw te ontwikkelen, wat het thema ook moge zijn. Goed beschouwd is wiskunde het enige vak waarvan je als leerling kunt zeggen dat je het eigenlijk helemaal zelf had kunnen bedenken. Na afspraken over een aantal basisbegrippen en basisprincipes hoeft je feitelijk haast nooit iets aan te nemen op goed gezag van je docent, want het zit logisch en systematisch in elkaar. Zo ontwikkel je ook een blijvend gevoel van eigen innerlijke kracht en vermogen. Empowerment heet dat in het Engels. Daarin ligt de echte maatschappelijke en persoonlijke betekenis van het schoolvak.

En ten slotte, wiskunde is uiteindelijk een denksport. Elke sport wordt vanzelf boeiend als je er goed in wordt. En dat kan bij wiskunde iedereen, zolang de opbouw maar niet hapert. Daar moet je wel veel voor trainen -- bij deze sport heet dat sommen maken. De spanning van de uitdaging, en het uitzicht op genieten bij het behalen van succes bij het oplossen van een denkprobleem, daarin zit het plezier. Leerboeken met veel relevante en irrele-

vante illustraties, in vierkleuren-druk, liever schaar en lijn dan passer en liniaal, leuk of interessant bedoelde maar onrealistische opgaven en opdrachten, enzovoort, dat zijn schijnoplossingen waarin ik niet geloof.

Je maakt het vak er in elk geval niet makkelijker op.

Mits goed opgebouwd juist wel. Het gaat mij niet om hoge niveaus die alleen maar voor een enkeling te bereiken zijn. Daarbij moet ik overigens wel toegeven dat ik voor de meeste leerlingen het huidige niveau in het grootste deel van de basisvorming niet bepaald hoog vind. Maar het maakt mij uiteindelijk in wezen niet echt uit hoeveel je wilt behandelen, of hoe ver of hoe snel je wilt gaan. Als je het vak maar goed opbouwt, volgens zijn eigen intrinsieke karakteristieken. Als je maar begrip en inzicht kweekt door geregelde terugkoppeling en stofintegratie, en als je maar routine opbouwt in het gebruik van basisbegrippen en basisprincipes, met de bijbehorende afspraken over taalgebruik en over schrijfwijze, de notatie. Nee, het is juist de moderne intuïtieve aanpak die bij veel leerlingen voor moeilijkheden zorgt.

Waarom?

Laat ik een voorbeeld geven. Er wordt tegenwoordig veel gesproken over de problematiek van de aansluiting tussen de onder- en bovenbouw. Maar als je het zo formuleert, dan suggereer je impliciet dat er sprake is van fundamentele verschillen tussen de onder- en bovenbouw. Bijvoorbeeld in stofinhoud, stofintegratie, benadering, abstractieniveau, moeilijkheidsgraad, tempo, onderwijsaanpak, en dergelijke. Maar dergelijke fundamentele verschillen zijn er niet. De problemen liggen in de 3^e klas dan ook niet in het verschiet, ze zijn daar al overduidelijk aanwezig, al vroeg in de 3^e

klas zelfs. Basisbegrippen en basisprincipes waarop het bouwwerk van de wiskunde is gebaseerd, worden dan al slecht herkend en begrepen. Ze zitten er bovendien te weinig in als een automatisme. De cumulatieve integratie en opbouw van het vak klikt daardoor onvoldoende. Daardoor gaat het in de loop van de tijd vanzelf steeds moeilijker. In plaats van plezier in het vak ontstaat er te gauw een gevoel van onzekerheid en machteloosheid, en daardoor soms ook moedeloosheid. Alleen de uitschietters onder de leerlingen overwinnen dat echt, en dát mag je wat mij betreft best elitair noemen. Een zesje is toch niet overtuigend? Het geloof in de intuïtie als grondslag van de schoolwiskunde en het geforceerde zoeken naar ‘nuttige’ wiskunde, de ontkenning van de essentiële aard van het vak wiskunde, hebben geleid tot een onderschatting van het belang van de bouwstenen en de cement, van de cumulatieve opbouw langs heldere lijnen, van precisie. En juist een gebrek aan inzicht in de betekenis van basisbegrippen en van de rol van basisprincipes, bijvoorbeeld bij de algebra, wrekt zich zodra er niet reproductief maar creatief gewerkt moet worden. Een dergelijke benadering ontnemt de leerling juist die middelen die nodig zijn om het vak actief en met zelfvertrouwen te beoefenen. Daar mis ik evenwicht in de opzet en inrichting van het vak.

Maar je loopt daarbij wel aan tegen de grenzen die de schoolboeken stellen.

Dat is waar. Een groot probleem is dat de boeken tegenwoordig de pretentie hebben een alomvattende ‘methode’ te willen zijn. Ze matigen zich steeds meer het gezag aan dat ze de hele vakinhoud en het hele leerproces kunnen en mogen beheersen en sturen. Door dat rigide keurslijf wordt het als docent

steeds moeilijker zelf nog sturing te geven aan je vak. Vroeger was de docent de methode en de kleur in de klas. Dat bood alle mogelijkheden om je qua inhoud en aanpak flexibel aan te passen aan pluriforme en veranderlijke omstandigheden in een klas. Maar nu eist het starre en uniforme schoolboek die rollen primair voor zich op. De meester wordt naar mijn mening te veel het hulpje van het medium. Dat is zeer ongewenst, en het fixeert het vak onnodig in zijn huidige vorm en aanpak.

En de leerling moet uit de omvangrijke teksten steeds meer van de stof zelf ontdekken en verwerken. Maar daarbij mis ik een fundamentele schakel, namelijk begrijpend leren lezen. Begrijpend wiskunde lezen moet je leren, elke punt en elke komma telt. De informatiedichtheid is hier onvergelykbaar veel hoger dan in enige andere vorm van het geschreven woord. Een wiskundeboek is geen roman. De praktijk tot op heden met zelfstandig werken, en vooral verwerken, stemt mij niet optimistisch. Een abstracter vak leent zich daar op school misschien ook wel minder voor.

De schoolboeken worden door die optiek om een ‘methode’ te willen zijn, bovendien ook steeds dikker en duurder. Het opzetten en uitbrengen van een serie leerboeken wordt steeds tijdrovender, arbeidsintensiever en kostbaarder. Inspeken op gewenste ontwikkelingen wordt daarmee moeilijker. Uitgeversconcentraties worden machtiger, en variatie in het aanbod wordt steeds minder en armer – we zijn eigenlijk al lang door de gevarengrens gezakt. De ontwikkeling van schoolboek naar ‘methode’ vormt daarmee een directe bedreiging voor het vak. Wat dat betreft heeft in mijn ogen de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een essentiële taak laten liggen. Je levert je vak toch niet zonder slag of stoot

over in de handen van het monopoliekapitaal, om het eens in klinkend jargon te zeggen.

Zie jij daar een oplossing?

Ja, de onvermijdelijke groei naar digikats, digitale modulaire katernen. Die kunnen ontspruiten aan de geest van willekeurig welke individuele auteur. Ze kunnen laagdrempelig, goedkoop en gevarieerd worden samengesteld, verbeterd en vervangen. Ze eisen geen uniforme globale methodische visie van vmbo tot en met vwo, van de eerste tot en met de laatste klas. Het is een systeem gekenmerkt door pluriformiteit, creativiteit en vrijheid. Het weerspiegelt het feit dat er meer wegen zijn die naar Rome leiden. De enige formele vereisten per katern zijn een duidelijk afgebakende modulaire opzet van het gekozen thema, met duidelijk aangegeven ingangseisen en eindniveau.

Het lijkt me een prachtige taak voor bijvoorbeeld de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren om een markt-site voor dergelijke katernen te (laten) organiseren. In de nabije toekomst kunnen docenten en leerlingen dan thuis of op school een steeds gevarieerder aanbod downloaden vanaf het internet. Ze bieden bij uitstek een middel om zowel de huidige armoede in het aanbod van schoolboeken als de te eenzijdige fixatie op de intuïtie als grondslag van wiskundig denken op school, te doorbreken. Ze zijn essentieel in het zoeken naar een nieuw evenwicht in het vak, uiteindelijk een zoektocht naar de werkelijke persoonlijke en maatschappelijke betekenis van de wiskunde als schoolvak.

Max Heetebrei

Als gevolg van toenemende tekorten op het gebied van de exacte en technische vakken is er ook een toenemende aandacht voor -de kwaliteit van- het onderwijs in die vakken. De NVvW is het aan haar stand verplicht om aan deze discussie een bijdrage te leveren. Daarom treft u hierbij een conceptnota aan over dit onderwerp, met een verzoek om reacties. Uw reacties zijn als altijd welkom bij de secretaris. De nota is nog niet compleet, het stuk over de ontwikkelingen in mbo en hbo ontbreekt nog.

DE KWALITEIT VAN HET REKEN/WISKUNDE-ONDERWIJS IN NEDERLAND, VAN BASISCHOOL NAAR UNIVERSITEIT: VRUCHT VAN BELEID?

In het volgende wordt een beeld geschetst van ontwikkelingen die de kwaliteit van het reken- en wiskunde-onderwijs mogelijk hebben beïnvloed. De treurigstemmende doorlopende lijn is dat er weliswaar inhoudelijke ontwikkelingen zijn (geweest) ter verbetering van de kwaliteit, maar dat het jarenlange bezuinigingsbeleid van de overheid, met als uitvloeisel veel achterstallig onderhoud bij docenten, en een enorm toegenomen werkdruk, elke succesvolle implementatie vooralsnog heeft gefrustreerd.

Vervolgens worden voorstellen voor verbetering gedaan.

1. Rekenen op de basisschool

Vroeger, en dat is dan de tijd voor de alomtegenwoordigheid van heel goedkope rekenmachines, was het van belang voor later dat je goed leerde hoofdrekenen en cijferen. Het reken-onderwijs was vooral mechanistisch, gericht op het -door veel oefening-

Van de bestuurstafel

foutloos kunnen uitvoeren van de standaardrekenregels over optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen. Natuurlijk waren er ook de zogenaamde 'Redactiesommen', voor de een een gruwel, voor de ander een uitdaging, maar die maakten maar een beperkt deel uit van het totale programma. Het is voor een leerling op dit moment niet meer zo belangrijk om erg geoefend te zijn in opgaven van het soort $12345,987 : 0,0345$. Belangrijker is om inzicht te hebben in 'orde van grootte' van een uitkomst en de structuur en volgorde van een berekening kunnen doorzien bij het oplossen van een rekenprobleem.

Dit zijn hogere doelen dan de doelen voor mechanistisch rekenen. Deze hogere doelen eisen ook een aangepaste didactiek. Binnen de rekendidactiek zijn de afgelopen jaren zogenaamde 'realistische' rekenmethoden ontwikkeld. Met een aangepaste didactiek, waarbij aandacht is voor verschillen in aanpakgedrag, meerdere oplossingsmethoden, en reflectie op het resultaat.

Wil zo'n vernieuwing slagen, dan moet kennis over die nieuwe didactiek ook in de hoofden van de leerkrachten terechtkomen. Uit een recent onderzoek naar de stand van zaken bij het rekenonderwijs werd helaas geconstateerd dat die nieuwe didactiek op veel scholen nog niet werd gevolgd, ondanks het feit dat men vaak wel een realistische methode gebruikte. Dan is de succeskans gering, en ben je als leerling beter af met de oude mechaniekjes. Dit geldt in het bijzonder voor meisjes, die beter presteren binnen veiligheid en structuur.

Het is duidelijk dat dit vernieuwde rekenonderwijs ook hogere eisen stelt aan de rekenvaardigheid van de leerkracht dan vroeger. De leerkracht moet op een hoger niveau kennis en inzicht in de structuur van de getallen hebben, en dat geldt vooral sterk op het terrein van het rekenen met breuken. Dan is het kennen van het kunstje, hoe het moet, niet voldoende.

De werkelijkheid is evenwel dat die rekenvaardigheid van de leerkrachten juist minder is dan vroeger. Het is inmiddels niet ongewoon dat behoorlijk wat eerstejaarsstudenten op de Pabo niet in staat zijn de Cito-rekentoets van groep 8 voldoende te maken, want ook Havo-leerlingen zonder wiskunde in hun pakket mogen worden toegelaten. Rekenvaardigheid, laat staan gecijferdheid, is geen eis bij toelating. Dat zou kunnen worden gecompenseerd door een stevige aanpak van het rekenen en de rekendidactiek in de opleiding, maar door bezuinigingen van de laatste jaren zijn veel rekendidactiek-docenten van de opleidingen verdwenen en is dat ook eerder minder geworden.

Wie verwacht dan nog een resultaat?

Aanbeveling:

- 1 Stel (wederom) wiskunde verplicht als toelatingseis voor de Pabo.
- 2 Verbeter de kwaliteit van het rekenonderwijs op de Pabo, en geef het het gewicht dat het toekomt.
- 3 Stel alle zittende leerkrachten van het basisonderwijs in staat om zich de voortgaande ontwikkelingen van de didactiek van het rekenen eigen te maken. En dan niet in de eigen tijd, maar binnen de reguliere baanomvang, en op structurele basis.

2. Rekenen in de basisvorming

Binnen het programma van de basisvorming is een doorlopende leerlijn voor rekenen beoogd, die voortbouwt op wat in de basisschool is geleerd. Helaas zijn de leraren in de basisvorming van het voortgezet onderwijs niet allemaal op de hoogte wat de vernieuwing van het rekenonderwijs inhoudt en wordt er vaak voortgebouwd op wat men vroeger zelf heeft geleerd. Daarnaast is het uitgangsniveau van groep 8 nogal wisselend, per school, en per leerling. Hier stuiten we op het eerste aansluitingsprobleem, er zullen er nog vele volgen.

Aanbeveling:

- 4 *Stel alle leerkrachten in de basisvorming van het voortgezet onderwijs in staat om zich de voortgaande ontwikkelingen van de didactiek van het rekenen eigen te maken. En dan niet in de eigen tijd, maar binnen de reguliere baanomvang, en op structurele basis.*

3. Wiskunde in de basisvorming

De doelen van wiskunde in de basisvorming liggen goeddeels in het verlengde van die van het realistisch rekenonderwijs. In de diverse domeinen, te weten: rekenen, algebra, meetkunde en informatieverwerking en statistiek is eveneens aandacht voor het proces, voor de aanpak, diverse oplossingsmogelijkheden, en reflectie op de resultaten. De leerlingen moeten verstandig en flexibel gebruik kunnen maken van hetgeen ze in de wiskundelessen leren. Dus minder reproductie, maar meer productief en creatief handelen van de leerling.

Een bepaald wiskundig probleem kan aanleiding zijn voor activiteiten op verschillend niveau van abstractie, afhankelijk van wat de leerling aankan. Zo is in principe de basisvorming qua programma wel gelijk voor elk schooltype, maar kan qua diepgang en abstractie in vbo nogal verschillen van vwo. Die verschillen kunnen niet alleen door de leerboeken worden aangebracht, de docent speelt hierbij een belangrijke rol. Dit stelt hoge eisen aan de docent, en andere dan vroeger.

Aanbeveling:

- 5 *Stel alle leerkrachten in de basisvorming van het voortgezet onderwijs in staat om zich de voortgaande ontwikkelingen van de didactiek van de basisvorming eigen te maken. En dan niet in de eigen tijd, maar binnen de reguliere baanomvang, en op structurele basis door middel van een vermindering van het maximum aantal te geven lessen in de normjaartaak.*

4. Doorlopende lijnen, onderbouw en bovenbouw

De docent in basisvorming en onderbouw moet zowel kennis hebben van het voorafgaande, als zicht hebben op hetgeen in de bovenbouw van de leerling gevraagd wordt aan kennis en vaardigheden.

Helaas is er door de bezuinigingen in het voortgezet onderwijs in toenemende mate een scheiding aangebracht tussen docenten in de onder- en de bovenbouw. De relatief dure bovenbouwdocent is in de onderbouw nauwelijks meer te vinden, de kennis over de veranderende bovenbouwstof dus ook. Het volgende aansluitingsprobleem is geboren, nu zelfs binnen de muren van de school. Vrucht van beleid...

Aan de andere kant van de scheiding tussen onder- en bovenbouw is de bovenbouwdocent ook vaak niet geheel en al op de hoogte van de recente ontwikkelingen in de basisvorming, zowel qua inhoud als qua didactiek. Ook het bovenbouwprogramma is de laatste jaren zelf nogal veranderd en zal dat in de nabije toekomst nog wel blijven doen.

Aanbeveling

- 6 *Maak het scholen weer financieel mogelijk dat de bevoegde en ervaren eerstegraadsdocent lesgeeft in de onderbouw.*

5. Doorlopende lijnen, bovenbouw en universiteit/hogeschool

De banden, die er ooit waren tussen het voortgezet onderwijs en de vervolgopleidingen, zijn de laatste jaren grotendeels doorgesneden. Ooit was de gecommiteerde bij het eindexamen een schakel tussen beide. Ooit hadden de leraren in de bovenbouw van vwo en gymnasium in

meerderheid een academische opleiding, ooit ook was het niet ongebruikelijk dat leraren promoveerden aan de universiteit (en daarvoor een financiële beloning kregen). Door de verminderde aantrekkelijkheid van het beroep is het aantal academici dat nog leraar wil worden aanmerkelijk verminderd, door de tot grote hoogten opgevoerde werkdruk is er voor de leraar met een academische opleiding geen reële ruimte om wetenschappelijk onderzoek te doen. Binnen de muren van de school is derhalve nog heel weinig actuele kennis over het vervolgonderwijs.

En als logisch gevolg is er binnen universiteiten en hogescholen ook heel weinig recente kennis over het wiskundeonderwijs op havo en vwo. Zo is bijvoorbeeld de invoering van wiskunde A en B in havo en vwo bij een aantal opleidingen jarenlang onopgemerkt gebleven. Met treurige gevolgen voor de eerstejaarsstudenten, die andere dingen hadden geleerd dan de docenten dachten. En dan roep je snel: ze kunnen dus helemaal niks meer!

Aanbeveling

- 7 *Maak het docenten in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs mogelijk om zicht te krijgen op de vervolgopleidingen.*
8 *Stel docenten in de bovenbouw v.o. in staat relevante ontwikkelingen van hun vak te volgen.*
9 *Laat leraren v.o. (tijdelijk) werken op de universiteit, dat werkt naar twee kanten. Laat docenten in de propedeuse ook (tijdelijk) werken in het v.o. Stimuleer een dubbele aanstelling: in w.o. en vwo.*
10 *Maak het leraren v.o. mogelijk om zich een beeld te vormen van de beroepspraktijk van de wiskundige, anders dan de leraar en professor!!!*

En dit alles dan niet in de eigen tijd, maar binnen de reguliere baanomvang, en op structurele basis d.m.v. een forse vermindering van het maximum aantal te geven lessen in de normjaartaak. Alleen dan kan de energie worden vrijgemaakt voor een kwalitatieve en inhoudelijke verbetering. Na twintig jaar bezuinigen in het onderwijs is de oogst zoals verwacht kon worden, een forse investering ter revitalisering van het onderwijs is nu geboden.

Marian Kollenveld

Jaarvergadering/ studiedag 1999

Themagedeelte studiedag
met als thema

Praktische wiskunde

Eerste uitnodiging

Eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 1999 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars op zaterdag 13 november 1999 in het gebouw van:

Het Nieuwe Lyceum
Jan Steenweg 38
3723 BV Bilthoven
tel: 030-2283060

Aanvang: 10:00 uur
Sluiting: 16:00 uur

Huishoudelijk gedeelte

- 1 Opening door de voorzitter mevr. drs. M. Kollenveld.
- 2 Jaarrede door de voorzitter.
- 3 Notulen van de jaarvergadering 1998 (zie Euclides 74-6 p. 236 e.v.).
- 4 Jaarverslagen (Zie Euclides 74-2 p. 58 e.v.).
- 5 Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie 2000-2001 en benoeming van een nieuwe kascommissie. Het bestuur stelt kandidaat: dhr. W. v.d. Berg en dhr. C. Garst.
- 6 Bestuursverkiezing in verband met het periodiek aftreden van dhr. S. Schaafsma, dhr. P. Kop en mw. H. Verhage. Deze kandidaten stellen zich opnieuw herkiesbaar en het bestuur stelt hen opnieuw kandidaat. Voor een vertegenwoordiging vanuit het HBO stelt het bestuur voor om te kandideren: mw. M. Kamminga te Leeuwarden. *)
- 7 Bestuursoverdracht

Vervolg huishoudelijk gedeelte

- 8 Rondvraag
- 9 Sluiting

* Tot achtentwintig dagen na het verschijnen van deze oproep kunnen eveneens andere leden van de Vereniging door ten minste vijf leden schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur.

Themagedeelte studiedag met als thema 'Praktische wiskunde'

Na de studiedag van 1998 'Op zoek naar wiskunde' die als doel had ons een beeld te schetsen van de doorlopende lijn van onderzoekend bezig zijn van leerlingen in het wiskundeonderwijs, zitten sommigen van ons nu al daadwerkelijk midden in en anderen in de voorbereiding van dat onderzoeken-de onderwijs. Tijdens die studiedag bleek dat er onder de leden een grote belangstelling bestond voor de workshops die handelden over wiskunde en werkstukken. Daarom is het thema van deze studiedag in het verlengde daarvan gekozen.

In welke stroom van het onderwijs je ook werkzaam bent, als docent moet je je leerlingen in een onderzoek leiden en begeleiden. Er worden weliswaar verschillende namen gehanteerd, zo worden onderzoeken binnen het vmbo sectorwerkstukken genoemd en binnen het havo/vwo heten ze praktische opdrachten en profielwerkstukken, maar inhoudelijk zijn ze niet zoveel verschillend.

Als docent wordt van je verwacht dat je een bron bent die borrelt van onderwerpen en ideeën voor je leerlingen. Het gaat er nu dus om onderwerpen te vinden voor deze onderzoeken, onderwerpen die leerlingen aanspreken en die praktisch zijn.

Praktisch van twee kanten bekeken, vanuit de docent, - Hoe loopt dit in mijn lespraktijk?, Zijn alle ideeën wel praktisch uitvoerbaar? -, en praktisch vanuit de realistische wiskunde - Zijn de onderzoeksonderwerpen aan de praktijk ontsproten? -

Vandaar het motto van de studiedag: 'Praktische wiskunde'

Er zal tijdens de studiedag vooral ook aandacht besteed worden aan de

zoektocht naar onderwerpen en al uitgewerkte ideeën van praktische opdrachten en werkstukken. Wat mag je verwachten van leerlingen als ze een bepaald onderwerp kiezen? Hoe komen ze aan hun informatie? Staat deze informatie dicht bij hen? Spreekt het ze aan? Kunnen ze er wat mee? Of moet je als docent hier nog een verstaalslag tussen maken? Welke randvoorwaarden zijn er?

In sectorwerkstukken en profielwerkstukken kan wiskunde een onderdeel zijn. Hoe maak je zowel leerlingen als niet-wiskunde-collega's duidelijk dat wiskunde een essentieel onderdeel is en bijna bij elk onderzoek aanwezig is en vertegenwoordigd moet zijn? Hoe promoot je hierin je vak zonder de leerlingen af te schrikken? Er worden door boekenschrijvers en instituten al enkele voorbeelden van sectorwerkstukken en profielwerkstukken gemaakt, met voorbeelden van beoordeling, begeleiding, organisatie en handleiding. Als blikwisseling worden er ook wiskundigen, die in hun dagelijkse praktijk voortdurend wiskunde toepassen op allerlei onderwerpen die ieder van ons raken, uitgenodigd om te dienen als inspiratie.

Om aan de verzameldrift van de meeste docenten onder ons naar kant en klare werkstukken te voldoen, proberen we een uitwisseling op gang te brengen. Op de studiedag wordt ingegaan op allerlei belangrijke aspecten van praktische wiskunde en de vele vragen over het gebruik op school. Naast workshops voor het vo en mbo worden ook dit jaar speciale workshops voor het hbo georganiseerd. In het volgende nummer van Euclides kunt u gedetailleerd lezen wat u kunt verwachten op 13 november 1999.

*Marianne Lambriex
namens de voorbereidingsgroep.*

Kattenaids en Statistiek

Het eerste deel van de Zebra-reeks beschrijft de toepassing van statistiek bij het onderzoek naar kattenaids. Hoe worden steekproefgegevens verwerkt? Hoe worden hypotheses getoetst? Met behulp van statistiek kan op basis van steekproefgegevens worden getoetst of kattenaids misschien vaker bij zwervkatten dan bij huiskatten voorkomt. De gebruikte statistische technieken zijn ook toepasbaar in tal van andere, vergelijkbare situaties. Hierdoor geeft dit boek ook algemeen inzicht in de vraag hoe uitspraken worden gefundeerd op experimentele gegevens.

De heldere wijze waarop de statistische technieken worden behandeld maakt dat dit deel een geschikte inleiding is voor iedereen met belangstelling voor de toepassing van statistiek. Het boek veronderstelt enige kennis van het vaas-model bij het berekenen van kansen, de binomiale verdeling en de normale verdeling.

De auteurs zijn Jan van den Broek, statisticus bij de faculteit Diergeneeskunde te Utrecht, en Peter Kop, docent wiskunde aan het St. Gregoriuscollege te Utrecht.

De Zebra-reeks is ontstaan naar het idee van Jan Breeman, in leven bestuurslid van de NVvW, en met hart en ziel betrokken bij het wiskundeonderwijs. De boekjes zijn in eerste instantie

bedoeld om leerlingen van de hoogste klassen van het vwo kennis te laten maken met onderwerpen uit de wiskunde, die buiten de standaardleerstof vallen, maar wel zeer de moeite waard zijn.

Daarnaast zijn ze ook bestemd voor een breder publiek van allen die belangstelling hebben voor wiskunde en wiskundige toepassingen in andere disciplines.

De boekjes worden steeds geschreven in een unieke samenwerking van docenten vwo met vakdeskundigen uit hogeschool en universiteit.



Op hoeveel nullen eindigt 1998!?

Paul Drijvers

Inleiding

Onlangs is op het Liemers College in Zevenaar een experiment uitgevoerd, waarbij de leerlingen van een vwo-5 klas de beschikking kregen over een symbolische rekenmachine. Zo'n symbolische rekenmachine is een grafische rekenmachine, die is uitgebreid met een computeralgebra-programma, waardoor het apparaat onder andere exact kan differentiëren en vergelijkingen algebraïsch oplost. Meer over dit experiment kunt u vinden in [1] en [2]. De lespakketten waaruit de leerlingen tijdens dit experiment bij wiskunde B werkten, bevatten ook enkele onderzoeksoopdrachten. Alhoewel ze niet echt praktisch zijn, zijn ze misschien geschikt als 'praktische opdracht': prikkelend, geschikt voor gebruik van ICT, ruimte voor onderzoek, en aanleiding tot redeneren. In dit artikel beschrijf ik hoe de leerlingen bij één van deze opdrachten tot aardige resultaten kwamen.

De opdracht

Het idee voor deze opdracht is afkomstig van Trouche (zie [3]).

De tekst die de leerlingen krijgen, begint als volgt:

Sommige faculteitsgetallen, zoals bijvoorbeeld 6!, eindigen op een nul. Andere, neem bijvoorbeeld 12!, eindigen op twee nullen. In deze opdracht ga je onderzoeken hoe het aantal nullen aan het einde van $n!$ afhangt van n . Als uiteindelijk resultaat zul je weten op hoeveel nullen 1998! eindigt.

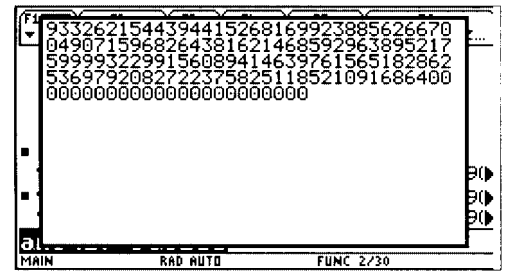
Na wat aanwijzingen met betrekking tot de samenwerking en het verlangde eindproduct, volgen enkele deelvragen, die de leerling in de richting van de twee slotvragen leiden:

- 6 Op hoeveel nullen eindigt 1998!?
- 7 Voor gevorderden: probeer een functie te definiëren die voor elke n op te geven waarde van n onmiddellijk het aantal nullen op het einde van $n!$ geeft.

Oriëntatie

De meeste leerlingen berekenen enkele faculteitsgetallen met de symbolische rekenmachine. Wanneer 100! in beeld komt (zie figuur 1),

zien de meesten in dat het tellen van de nullen op het scherm toch wel vervelend wordt ... De telmethode voldoet dus niet.



Figuur 1: 100! op de TI-92

Tellen werkt bovendien niet, omdat de rekenmachine 1998! te groot vindt om uit te rekenen. (Dat heeft te maken met de beperkte omvang van het geheugen van de SR; een programma als Derive berekent 1998! wel en ontbindt de uitkomst ook in factoren.)

In dit stadium had ik verwacht, dat de leerlingen het factor-commando zouden gebruiken om bijvoorbeeld 100! in factoren te laten ontbinden. Het aantal factoren 5 bepaalt immers het aantal nullen aan het einde. Dit gebeurt echter niet. Misschien vraagt dit op dit moment te veel inzicht in het probleem?

Eerste poging en conflict

Tijd voor een iets systematischer aanpak. Op verschillende plaatsen ontstaan nu tabellen die de bevindingen op een rij zetten. Veel leerlingen denken al snel het patroon door te hebben: bij elk vijfvoud komt er een nul bij. Geen probleem dus, 1998! eindigt dus op 399 nullen. Maar dan ontstaat een probleem: hoe zit het dan met 100!? Daarvan hebben de meeste leerlingen geconstateerd dat dat getal op 24 nullen eindigt, en niet op 20. Er klopt dus iets niet Anderen ontdekken het conflict wanneer 25! is gepasseerd, bijvoorbeeld bij 30! (zie figuur 2).

n	x (aantal nullen)
5	1×5 1
10	2×5 2
15	3×5 3
20	4×5 4
25	5×5 $5+1=6$
30	6×5 $6+1=7$

Figuur 2: Bevindingen samenvatten in een tabel

Oplossing

Dit is de fase die het langste duurt en het meeste denkwerk vereist. Geleidelijk aan ontdekken de leerlingen dat 25 twee factoren 5 heeft, waardoor het aantal nullen bij de sprong van 24! naar 25! niet met 1 maar met 2 toeneemt.

Dat de 'sprong' bij 25 zich herhaalt bij 50, 75, 100 et cetera, is niet zo moeilijk. Het duurt nog wel even voor iedereen zich realiseert dat veelvouden van 125 weer een extra nul geven, enzovoorts. Het procédé wordt langzamerhand duidelijk.

Een complicatie hierbij is het afkappen: hoewel 25 bijna 4 keer in 99 past, geeft het maar 3 extra nullen in 99!

Alhoewel veel leerlingen het snappen, vinden ze het moeilijk om een duidelijke verklaring voor dit patroon op te schrijven, wat wel gevraagd werd. In figuur 3 staat een van de geslaagdere formuleringen.

getal gonst door de klas. Wie het niet weet, gaat dus op zoek naar de fout, tot de gewenste uitkomst is gevonden.

Een variant op deze methode is het herhaald delen door 5, dat Carolien toepast. Ze zegt: 'Je kunt net zo goed naar 1995! kijken, dat maakt voor de nullen niet uit.'

Dan schrijft ze op:

$$\frac{1995}{5} = 399, \frac{399}{5} = 79.8,$$

$$\frac{79}{5} = 15.8 \text{ en } \frac{15}{5} = 3,$$

dus dat geeft

$$399 + 79 + 15 + 3 = 496 \text{ nullen.}$$

Opvallend is dat ze 1998 vóór het delen door 5 afkapt op een vijfvoud, terwijl ze dat later pas na het delen doet. Zelf vindt ze deze aanpak wat te informeel, want in haar verslag is er niets van terug te vinden.

en Jelle, houden erg van programmeren. Ze maken dan ook een programma in de basic-achtige programmeertaal van de symbolische rekenmachine. Het algoritme bestaat uit het delen door machten van 5, zolang die nog in het oorspronkelijke getal passen. Ze krijgen het programma goed werkend. Omdat dit tweetal deze les aan de beurt is om ten behoeve van het experiment gefilmd te worden, wordt het scherm van hun symbolische rekenmachine geprojecteerd. Bij-effect hiervan is, dat alle leerlingen kunnen zien wat Jasper en Jelle doen. De klasgenoten zijn vol ontzag over het ingewikkeld ogende programma dat de heren produceren.

Dat ontzag neemt wat af wanneer blijkt dat Dennis en Niels een elegantere oplossing hebben. Ze definiëren een functie, die de uitkomsten van de delingen door de machten van 5 steeds afkapt en bij elkaar optelt (zie figuur 4).

In het functievoorschrift van y_1 wordt het ingevoerde getal x gedeeld door 5^k . De uitkomsten worden afgekapt ('floor') en opgeteld. Het enige probleem hierbij vormt de bovengrens van de sommatie. In eerste instantie vulden Dennis en Niels hiervoor oneindig in ('Dat is zeker genoeg'), maar dat gaf een syntaxfout. Vervolgens kozen ze 20 als bovengrens. Dat werkte wel, maar 'slechts' tot $x = 5^{20}$ begrepen ze. Waar het eigenlijk om gaat, is hoelang 5^k kleiner blijft dan x . De twee jongens wisten niet meer hoe ze de vergelijking $5^k = x$ met de hand moesten oplossen. Eigenlijk hoeven ze dat ook helemaal niet te kunnen, aangezien ze met een machine werken die dat uitstekend voor ze kan doen. Vreemd genoeg dachten ze daar niet aan. Ze probeerden als bovengrens $x^{1/5}$, die iets aan de ruime kant is, zodat de procedure onnodig traag wordt. Met enige hulp van de docent komen ze tot de

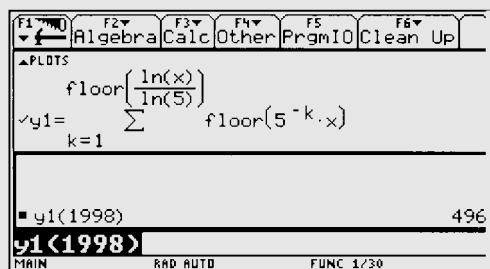
Als je $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10 (5 \cdot 2) = 1 \text{ nul}$
Bij elke vijfvoud komt er 1 nul bij want dan krijg je een 5-voud maal een 2-voud en dat is een 10-voud (5^1)
Maar bij 25 krijg je $4 \cdot 25 = 100$ dat is 2 nullen erbij dus 1 extra
Bij elke 25-voud heb je dat (5^2)

Figuur 3: Een van de betere verklaringen

Nu de procedure doorzien is, wordt ze door de meeste leerlingen toegepast op $n = 1998$. De meest gebruikte methode is delen door machten van 5, tot dat niet meer kan. Dat geeft 496 nullen, en dat

Automatisering

De laatste vraag van de opdracht, vraag 7, heeft betrekking op het automatiseren van de ontdekte procedure. Twee leerlingen, Jasper



Figuur 4: Een procedurele oplossing

oplossing $k = \frac{\ln(x)}{\ln(5)}$, die dan eveneens moet worden afgekap. Een mooie en inventieve aanpak van het probleem!

Afronding

Nadat de leerlingen twee lessen (en eventueel thuis tussen deze lessen in) aan deze opdracht hebben gewerkt, hebben ze in tweetallen een verslag ingeleverd. Dat is door de docent beoordeeld. Hoewel het voor de leerling iets minder makkelijk is na te gaan waarop het cijfer gebaseerd is dan bij een gewoon proefwerk, heb ik geen klachten over de cijfers gehoord. De volgende les zijn de verslagen met behulp van transparanten besproken, zodat alle leerlingen een overzicht hebben van de bevindingen, en bovendien zicht krijgen op de manier waarop hun klasgenoten zo'n verslag gemaakt hebben. Dat helpt ze hopelijk om hun eigen verslag een volgende keer beter vorm te geven.

Conclusie

In mijn ogen was deze opdracht een succes. De leerlingen hebben er erg enthousiast aan gewerkt. Er zijn mooie verslagen gemaakt en er hebben veel wiskundige activiteiten plaatsgevonden. Maar waarom liep deze opdracht goed? Dat weet ik niet zeker, maar ik vermoed dat er van die grote

faculteitsgetallen toch een zekere fascinatie uitgaat. Ik zag op het einde een leerling tot zijn tevredenheid berekenen dat 7100000000000! op 1774999999996 nullen eindigt. Niet dat het nuttig is om dat te weten, maar het idee dat je het getal zelf niet kunt uitrekenen en toch iets weet over de laatste 1774999999996 cijfers ervan, dat spreekt misschien toch een aantal leerlingen aan. De symbolische rekenmachine is ook een motiverende factor, denk ik. Het apparaat kan goed met grote getallen overweg, en de kracht van de machine wordt door veel leerlingen gewaardeerd. In de evaluatie van het experiment noemden verschillende leerlingen deze opdracht als voorbeeld van een opgave die ze zonder symbolische rekenmachine niet hadden kunnen maken. Dat is wellicht wat overdreven; duidelijk is dat ze wel veel profijt van de machine hadden doordat ze daarmee faculteitsgetallen exact konden berekenen, waardoor het patroon duidelijk werd. De machine kon hypothesen ontzenuwen, en functioneerde als programmeeromgeving en als machine waarin functies worden gedefinieerd. Laat ik besluiten met de opmerking dat bij deze opdracht in plaats van de symbolische rekenmachine natuurlijk ook een computeralgebra-programma als Derive of Maple gebruikt had kunnen worden. Dat biedt voordelen als het de bedoeling is dat het eindverslag getypt wordt ingeleverd en ook wiskundige resultaten moet bevat-

ten. Voordeel van het gebruik van de symbolische rekenmachine is de logistiek: de klas hoeft niet in een computerlokaal te zitten, en de leerlingen kunnen in de studieruimte of thuis ook aan de opdracht verder werken.

Literatuur

- 1 Drijvers, P. (1999)
De symbolische rekenmachine in de klas
De Nieuwe Wiskrant, 18-3
- 2 Drijvers, P. (1998)
De symbolische rekenmachine in de wiskundeles
Utrecht: Freudenthal Instituut/ISOR
ISBN 90-6709-028
Verkrijgbaar voor f 20,- via het Freudenthal Instituut, tel. 030 - 2611611
- 3 Trouche, L. (1998)
Faire des mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques
Montpellier: IREM de Montpellier

Noot

Dit artikel komt voort uit een onderzoek (projectnummer 97.1.4.1), dat is gefinancierd uit het budget dat het ministerie van OC&W jaarlijks beschikbaar stelt aan de LPC ten behoeve van het Kortlopend Onderwijsonderzoek, dat uitgevoerd wordt op verzoek van het onderwijsveld.

A-lympiade zaken

10 jaar A-lympiade

Naar aanleiding van het tweede lustrum van de Wiskunde A-lympiade verscheen onlangs het boekje '10 jaar Wiskunde A-lympiade - de opstap naar de tweede fase'. In dit boek zijn onder meer alle voorronde- en finale opgaven opgenomen. Verder treft u, naast een inleidend hoofdstuk, hoofdstukken aan over het beoordelen van werkstukken, de A-lympiade in Denemarken, ervaringen van 'finale' scholen, de grote lijn in praktische opdrachten en het ontwerpen van A-lympiade opdrachten. Het boek is schriftelijk te bestellen bij:

Ank van der Heiden
Freudenthal Instituut
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht
fax 030 2660430
Bestelnummer: 83
Prijs: f 35,- (ex. verzendkosten)

Voorronde 1999/2000

In het schooljaar 1999/2000 vindt alweer voor de elfde keer de Wiskunde A-lympiade plaats. De voorronde vindt plaats op vrijdag 26 november 1999.

Deze wedstrijd is bedoeld voor leerlingen uit 5 havo of 5/6 vwo met wiskunde A in hun pakket (of leerlingen die een M-profiel volgen), die het leuk vinden om in teamverband (drie of vier leerlingen) een uitdagend probleem aan te pakken. De wedstrijd bestaat uit

een voorronde op de scholen en een finaleweekend op de Veluwe. Het open karakter van de opdracht maakt dat de team een complete weg af moeten leggen van probleemstelling via strategiebepaling, oplossing en argumentatie naar presentatie van de gevonden oplossing.

Het eindresultaat is een werkstuk waarin al deze aspecten terug te vinden moeten zijn.

Bij de voorronde op de eigen school wordt 's ochtend om 9.00 uur de opdracht uitgereikt, waarna de teams tot 16.00 uur de tijd hebben om het werkstuk te voltooien. Door de beste werkstukken (van maximaal 3 teams) in te zenden, kan een school meedingen naar een van de twaalf finaleplaatsen.

De vaardigheden die bij de Wiskunde A-lympiade getest worden, spelen een essentiële rol in de nieuwe tweede fase, met name bij de praktische opdrachten en de profielwerkstukken.

Vorig jaar deden naast de 1002 Nederlandse teams van 113 scholen ook 80 teams van 45 Deense scholen en 20 teams van 2 scholen op Curaçao mee aan de voorronde van de A-lympiade. Voor de komende voorronde is de verwachting dat Zuid Afrika met enkele teams mee zal doen.

Meer informatie over de Wiskunde A-lympiade kunt u vinden op: <http://www.fi.uu.nl/Alympiade>
Aan het begin van het nieuwe schooljaar ontvangen alle scholen voor voortgezet onderwijs een aanmeldingsformulier voor de A-lympiade.

De Wiskunde A-lympiade wordt georganiseerd door het Freudenthal Instituut onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde. De A-lympiade wordt mede mogelijk gemaakt door een bijdrage van Texas Instruments.

WWW-lympiade

De WWW-lympiade is vergelijkbaar met de A-lympiade, maar de opgave wordt via Internet aangeboden en de leerlingen mogen een week aan de opdracht werken, in plaats van een dag. Bij de uitvoering van de opdracht speelt het internet een essentiële rol, bijvoorbeeld doordat er een simulatie uitgevoerd moet worden. Het komend cursusjaar kan de WWW-lympiade opdracht in de week van 7 t/m 11 februari 2000 uitgevoerd worden. Meer informatie over de WWW-lympiade (waaronder de opdrachten van voorgaande jaren) is te vinden via de homepage van de A-lympiade of rechtstreeks via: <http://www.fi.uu.nl/wwwlympiade>

10 jaar wiskunde A-lympiade

DE OPSTAP NAAR DE TWEEDE FASE



De XXXIXe Internationale Wiskunde Olympiade 1998

Jan Donkers

Inleiding

In 1998 werd de 39e Internationale Wiskunde Olympiade gehouden van 10 tot 21 juli in Taipei, Taiwan. Er waren 419 deelnemers uit 76 landen. De Nederlandse ploeg bestond uit de volgende leerlingen:

Herbert Beltman (16), Markelo
Fokko van de Bult (17), Oegstgeest
Maxim Hendriks (18), Oegstgeest
Hermen Jan Hupkes (17), Rijnsburg
Gertjan Kok (17), Rijswijk
Willem Jan Palenstijn (18), Oegstgeest

De wedstrijd vond plaats op 15 en 16 juli in Taipei. De deelnemers kregen op beide dagen 4,5 uur voor drie opgaven. De maximale score per opgave is 7 punten. De jury beloonde 37 deelnemers met een gouden medaille (31 t/m 42 punten), 66 met een zilveren (24 t/m 30 punten) en 102 met een bronzen (14 t/m 23 punten).

En 56 deelnemers ontvingen een eervolle vermelding (degenen die buiten de prijzen vallen maar wel voor tenminste één opgave de maximale score van 7 punten hebben behaald krijgen een eervolle vermelding).

Er was slechts één leerling, afkomstig uit Iran, met de maximale score van 42 punten.

In het officiële landenklassement

kwam Iran op de eerste plaats met 211 punten, gevolgd door Bulgarije met 195 en Hongarije en de Verenigde Staten ieder met 186 punten.

Nederland kwam ex aequo met Mexico op de 44e plaats met 62 punten.

Tijdens de slotbijeenkomst nodigde de vertegenwoordiger van Roemenië alle landen uit in 1999 aanwezig te zijn bij de 40e Olympiade in Boekarest.

De Nederlandse ploeg

Hadden we het vorige jaar twee zilveren medailles, dit jaar moesten we ons tevreden stellen met één. Fokko behaalde evenals het vorige jaar weer een zilveren medaille. De scores van de Nederlandse deelnemers waren als volgt:

	Opgaven						Totaal
	1	2	3	4	5	6	
Herbert	3	3	2	3	0	0	11
Fokko	3	7	4	7	7	0	28
Maxim	2	0	1	1	0	0	4
Hermen Jan	0	0	2	0	0	0	2
Gertjan	2	0	1	3	0	0	6
Willem Jan	6	2	2	1	0	0	11
<i>Totaal</i>	16	12	12	15	7	0	62

Ook dit jaar werd de ploeg begeleid door Jan Donkers en Sander van Rijnsouw, beiden werkzaam aan de Technische Universiteit in Eindhoven.

Hoe is de Nederlandse ploeg tot stand gekomen?

Uit de 2605 deelnemers aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1997 (afkomstig van 247 scholen) werden de 123 beste toegelaten tot de tweede ronde die in september 1997 gehouden werd aan de Technische Universiteit in Eindhoven.

De beste twintig van de tweede ronde kregen een uitnodiging om deel te nemen aan de training voor de Internationale Wiskunde Olympiade. De training, die evenals voorgaande jaren werd verzorgd door J. Donkers, begon met een trainingsweekend in november 1997 en werd vervolgd door middel van lesbrieven en enkele trainingdagen aan de T.U.Eindhoven. Ten slotte was er in de eerste week van juni nog een vijfdaags trainingskamp. Direct na het laatste kamp werd de samenstelling van de ploeg bekend gemaakt.

De trainingskampen worden ieder jaar gehouden in de jeugdhierberg in Valkenswaard. Een belangrijk deel van de trainingsactiviteiten tijdens deze kampen en van de

organisatie is in handen van oud olympiade-winnaars. Dit jaar waren dat: Ronald van Luijk (student, UU), Wim Oudshoorn (AIO, RUG) en Sander van Rijnsouw (AIO, TUE). Voor de leden van de ploeg was er in de eerste week van juli nog een kort

trainingskamp van twee dagen aan de T.U.Eindhoven.

De selectie van de opgaven

Ook dit jaar hadden de verschillende landen weer ruim 100 opgaven ingestuurd. De vraagstukkencommissie had daaruit een 'shortlist' van 28 opgaven geselecteerd; 8 over meetkunde, 3 over ongelijkheden, 2 over recursie, 8 over getaltheorie en 7 over combinatoriek. Ieder jaar weer hebben we veel te weinig tijd om ons goed in de geselecteerde opgaven te verdiepen. Het blijkt ook ieder jaar weer lastiger om na te gaan of een geselecteerde opgave niet al eerder is gepubliceerd. Toen we dit jaar tenslotte de 6 wedstrijdopgaven hadden geselecteerd en iedereen bezig was met de vertaling daarvan in de eigen landstaal, ontdekte iemand dat een van de opgaven bijzonder veel overeenkomst vertoonde met een opgave van de Leningrad-olympiade 1991 en de oplossingsmethode was praktisch dezelfde. (Deze opgave was niet ingestuurd door Rusland of een van de oude Sovjet-staten.) Veel commotie en opnieuw discussies om die opgave te schrappen en te vervangen door een andere. Voor de nieuwsgierigen en puzzelaars onder u volgt hier de geschrapte opgave.

Een éénpersoonsspel wordt gespeeld op een rechthoekig bord van $m \times n$ eenheidsvierkanten, in het vervolg velden genoemd, waarbij mn stenen worden gebruikt, die aan een zijde wit en aan de andere zijde zwart zijn. In de begintoestand staat op ieder veld een steen met de witte zijde naar boven, behalve bij één hoekveld, daar ligt de steen met de zwarte zijde naar boven. Bij iedere zet mag men één steen, die met de zwarte zijde naar boven ligt, wegnemen, maar moet men dan de stenen in de buurvelden (van het

veld waaruit men de steen verwijderd) omkeren. Twee velden heten elkaars buur indien ze een zijde gemeenschappelijk hebben. Bepaal alle paren (m, n) van positieve gehele getallen zó dat alle stenen van het bord kunnen worden verwijderd.

Dit jaar bleken de opgaven iets moeilijker te zijn dan het vorige jaar. De gemiddelde score was dit jaar 14,43, die van het vorige jaar was 16,06.

Hieronder volgt de scorematrix:

SCORE MATRIX

Opgave	Score								Totaal studenten	Gemiddelde score
	0	1	2	3	4	5	6	7		
1	89	16	115	41	27	23	5	103	419	3,18
2	213	19	26	6	5	4	5	141	419	2,69
3	91	117	152	20	3	1	5	30	419	1,76
4	125	47	14	38	20	10	23	142	419	3,46
5	183	16	38	22	9	5	6	139	418	2,92
6	340	29	6	10	7	1	2	24	419	0,42

Rondom de olympiade

Helaas hadden de Chinezen van het vaste land de uitnodiging van Taiwan om deel te nemen aan de olympiade niet aanvaard. (De Taiwanese hadden de uitnodiging verstuurd op briefpapier met briefhoofd 'Republic of China' en dat was in Bejing ('Peoples Republic of China') in het verkeerde keelgat geschoten.)

De ploegen logeerden op de campus van de National Taiwan Normal University. Het was gedurende de olympiade zeer warm, ongeveer 35°C. Het onderkomen was sober, geen matrassen, dus dat was wel even wennen, maar de ruimten waren goed voorzien van airco. Er waren verschillende interessante excursies. Zo bezochten we het Taipei Astronomical Museum, het Information Science Technology Museum, de Chiang

Kai-shek Memorial Hall, de Dr. Sun Yat-sen Memorial Hall en het Shinkong Observatory. Heel bijzonder was het bezoek aan het National Palace Museum waar we een deel van de uitgebreide en rijke Chinese kunstcollecties konden bewonderen.

Bij thuiskomst op Schiphol, 's ochtends om 7 uur, werden we met spandoeken verwelkomd. Daarna volgde een grandioos ontbijt met het gehele gezelschap van leerlingen, ouders, familieleden en vrienden, bij een van de ouders thuis.

Hierna volgen nog de opgaven. Ze zijn eerder verschenen in het leerlingentijdschrift Pythagoras. Deze opgaven waren ingestuurd door de volgende landen: het Verenigd Koninkrijk, Oekraïne, Wit-Rusland, Luxemburg, India en Bulgarije.

De resultaten van deze olympiade kunt u ook vinden op webpagina: <http://imo.math.ntnu.edu.tw/> Veel informatie over wiskundeolympiaden en ook andere olympiaden is te vinden via de webpagina: <http://olympiads.win.tue.nl/imo/>



Verbroedering met andere ploegen

39e Internationale Wiskunde Olympiade

Eerste dag

Taipei, 15 juli 1998

Opgave 1

In de convexe vierhoek $ABCD$ snijden de diagonalen AC en BD elkaar loodrecht en zijn de tegenoverliggende zijden AB en DC niet evenwijdig. Stel dat het snijpunt P van de middelloodlijnen van AB en DC binnen $ABCD$ ligt.

Bewijs dat $ABCD$ een koordenvierhoek is dan en slechts dan als de oppervlakten van de driehoeken ABP en CDP gelijk zijn.

Opgave 2

Bij een wedstrijd zijn er a deelnemers en b juryleden, waarbij b een oneven geheel getal is en $b \geq 3$. Ieder jurylid geeft iedere deelnemer een beoordeling in de vorm van 'geslaagd' of 'gezakt'. Stel k is een getal zodanig dat voor ieder tweetal juryleden hun oordelen voor ten hoogste k deelnemers overeenstemmen.

Bewijs dat $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$

Opgave 3

Laat voor ieder positief geheel getal n , $d(n)$ het aantal zijn van de positieve delers van n (waarbij 1 en n zelf zijn inbegrepen).

Bepaal alle positieve gehele getallen k , waarvoor geldt dat

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

voor zekere n .

Beschikbare tijd: 4,5 uur.

Voor iedere opgave maximaal 7 punten.

Tweede dag

Taipei, 16 juli 1998

Opgave 4

Bepaal alle paren (a, b) van positieve gehele getallen zodanig dat $ab^2 + b + 7$ een deler is van $a^2b + a + b$.

Opgave 5

Zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC . De ingeschreven cirkel van ABC raakt de zijden BC , CA en AB in respectievelijk K , L en M . De lijn door B evenwijdig aan MK snijdt de lijnen LM en LK in respectievelijk R en S .

Bewijs dat $\angle RIS$ een scherpe hoek is.

Opgave 6

Beschouw alle functies f van de verzameling $\mathbb{N}$ van alle positieve gehele getallen in zichzelf, die voldoen aan

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2, \text{ voor alle } s \text{ en } t \text{ in } \mathbb{N}.$$

Bepaal de kleinste mogelijke waarde van $f(1998)$.

Beschikbare tijd: 4,5 uur.

Voor iedere opgave maximaal 7 punten.

Nationale Wiskunde Dagen 2000

Op 4 en 5 februari 2000 worden voor de zesde keer de Nationale Wiskunde Dagen gehouden in Congrescentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout.

Kosten: f 565,— all in.

Deelname aan de NWD kan door de school betaald worden uit nascholings- en professionaliseringsgelden.

De thema's voor deze NWD zijn (wijzigingen voorbehouden):

- wiskunde om de wiskunde
- wiskunde, verkeer en waterstaat
- wiskunde wedstrijden
- wiskunde en aardwetenschappen
- wiskunde en kunst
- wiskunde en verwantschappen

Begin september wordt de programmaproject met aanmeldingsformulier naar de scholen gestuurd. Bovendien ontvangen de deelnemers van de afgelopen NWD een folder op naam op hun huisadres. Nam u in februari jongstleden niet deel aan de NWD, maar wilt u wel graag een folder op naam ontvangen, schrijf dan een briefje met uw adresgegevens naar

NWD,
t.a.v. Ank van der Heiden
Freudenthal Instituut
Tiberdreef 4
3561 GG
Utrecht

Per e-mail
(nwd@fi.uu.nl)
of fax
(030 2660430)
kan ook.



40 jaar geleden

1147

Van $\triangle ABC$ gaan de hoogtelijn CD , de hoekdeellijn AF en de zwaartelijn BE door één punt S . Construeer de driehoek, als AD en DB gegeven zijn.

R. Kooistra

1148

In $\triangle ABC$ is de rechte van Euler evenwijdig met BC . Bewijs de betrekking: $2a^2 + b^2 + c^2 = 12R^2$

J.A. Dieperink

1151

Van $\triangle ABC$ is gegeven:

$$b^3 + c^3 = 3b^2c \quad \text{en} \quad a(a+c) = c(b+c).$$

Bereken de hoeken zonder gebruik van logaritmentafel.

J.C. van Rhijn

1152

Gegeven $\triangle ABC$ met $AC = BC = 1$, $\angle A = \alpha$ en $\angle C = \gamma$.

1^o Bewijs dat de basis c een wortel is van de vergelijking:

$$x^3 - 3x - 2 \cos 3\alpha = 0. \quad (1)$$

2^o Leid daaruit af:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

3^o Bepaal goniometrisch de wortels van (1) en bewijs daarmee de identiteit:

$$\sin(\alpha - 30^\circ) + \sin(\alpha + 90^\circ) - \sin(\alpha + 30^\circ) = 0.$$

R. Kooistra

Opgaven uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 46 (1958-1959)

‘Wat en Waar is Wiskunde’ op cd-rom

‘Wat en Waar is Wiskunde’ is nu ook op cd-rom beschikbaar. De televisieserie voor het eerste leerjaar is interactief gemaakt. U hoeft niet meer heen-en-weer te spoelen op die ene videorecorder voor de klas. De leerlingen kunnen zelf opdrachten maken en een fragment bekijken zo vaak ze willen.

Van lineair naar interactief

De televisieserie ‘Wat en waar is wiskunde’ is er als video voor de eerste drie leerjaren. De opbouw in de programma’s is in de vorm van een kort verhaaltje, situaties zoals die in de praktijk van alle dag voorkomen, met daarbij grafische bewerkingen, die de wiskundige principes en begrippen laten zien. De programma’s duren ieder tien minuten. Veel en snelle informatie. Jongeren uit de zap-cultuur zijn aan dit moordende tempo gewend. Om de wiskunde beter te kunnen onthouden en begrijpen is er een cd-rom ontwikkeld waarop de beelden gecombineerd zijn met opdrachten en vragen. Zo dwingt de leerlingen tot een actieve leerhouding en blijft de aantrekkingskracht van snelle beelden behouden.

Individueel te gebruiken

Ook het onderwijs in de basisvorming vraagt steeds meer zelfstan-

digheid van de leerlingen. Zelfwerkzaamheid is meer dan alleen de leerlingen het bos insturen met de opdracht om het nu zelf maar eens te doen, het vraagt ook om begeleiding. Naast het zelf aan het werk zijn in het boek biedt de cd-rom voor leerlingen die gebaat zijn bij een andere benadering van de lesstof, een uitkomst. Veel leerlingen hebben een leerstijl die meer visueel dan auditief is. Een begrip als ‘kijklijn’ wordt in beeld en met tekst gepresenteerd. Zij kunnen nu zelf op onderzoek gaan naar de wiskunde in het dagelijks leven.

Gebruiken bij het boek

De cd-rom bevat een half uur beeldmateriaal en 120 opdrachten op twee niveaus: vbo/mavo en havo/vwo. De acht onderwerpen sluiten aan bij de leerstof in het eerste leerjaar: kijken, ruimtelijke figu-

ren, symmetrie en regelmaat, verhoudingen, vuistregels, tabellen en grafieken, hoeken en plaatsbepalen. Per onderwerp zijn er tien opdrachten, waarmee de leerling zelf op zoek gaat naar het goede antwoord in het beeldmateriaal. Elk onderdeel is met een toets af te sluiten. De cd-rom kan in het hele eerste leerjaar gebruikt worden. Ieder onderwerp vraagt niet meer dan één lesuur.



Naast het gebruik in de les, kan er met de cd-rom huiswerk gemaakt worden, omdat iedere leerling beschikt over een eigen cd-rom. Dit om allerhande organisa-

torische problemen te voorkomen. In veel gezinnen is al een multimedia-pc aanwezig, en voor de leerlingen die thuis die mogelijkheid niet hebben kan er mogelijk op school tijd en ruimte vrijgemaakt worden in het computerlokaal.

Welke opdrachten?

Op het scherm staat de vraag. Daarnaast zijn de beelden net als op de video aan en uit te zetten, heen-en-weer te spoelen en te bekijken. Er wordt een bewering gedaan. Welk beeld geeft het goede antwoord? Kies door aan te klikken. Uitleg opvragen is mogelijk. Als de vraag fout is, krijgt de leerling beelden te zien die helpen om het goede antwoord wel te vinden.



Alle begrippen zijn terug te vinden en op te vragen in een register.

Er zijn tien verschillende opdrachtvormen. Een paar voorbeelden: zoek uit vier plaatjes het goede bij de gestelde vraag; een of twee fragmenten worden getoond bij een meerkeuzevraag. Zoek in een videofragment en klik als het goede antwoord langs komt; zet de plaatjes in de goede volgorde; zet de juiste begrippen bij de plaatjes. Bij het maken van een werkstuk worden de verschillende mogelijkheden door elkaar gebruikt. Zoek de tekst en de beelden bij elkaar en print het resultaat uit.

Een voorbeeld

Een binnenvaartschip vaart over de Lek. De schipper kijkt vanuit het stuurhuis uit het raam. De havenpolitie vaart langs. Kan de schipper de boot zien? De uitleg bij dit fragment is in de vorm van een grafische bewerking, waarin de kijkhoek van de schipper getekend is vanuit het oog, over de lading heen. Deze opdracht illustreert het begrip kijkhoek, kijklijn en natuurlijk dode hoek.

In het register is het begrip 'dode hoek' op te vragen. Ook hier wordt het begrip met beelden geïllustreerd. Het begrip 'dode hoek' komt op een andere manier, in een andere context ook nog aan de orde. De cipier zit in z'n wachttorens in de gevangenis. Wat kan hij wel en wat kan hij niet zien? Ook de plek achter de liftschacht? Of zit daar zijn dode hoek?

Demo's

In het voorjaar zijn alle scholen voortgezet onderwijs aangeschreven. Ook bij u op school ligt er ergens een demo-cd-rom. Hierop staan twee wiskunde opdrachten. Op de regionale bijeenkomsten van de Vereniging bleek dat lang niet alle docenten hiervan op de

hoogte waren. Vraag eens na bij de ICT-coördinator. Docenten die de demo wel hadden bekeken waren



enthousiast. Met name voor de vbo-leerling is dit een goede manier om de begrippen eens op een andere manier gepresenteerd te zien.

Setje voor 5 vakken

De cd-rom's worden niet los verkocht en zijn alleen in een set van vijf te bestellen. Samen met: aardrijkskunde, biologie, Engels en geschiedenis. De prijs per set bedraagt f 50,00 en is bedoeld voor individueel gebruik van de leerling. De sets zijn vanaf de eerste week in augustus te leveren. Als u besluit na het zien van de demo dat dit een verrijking is in de wiskundeles, moet u uw collega's van de andere vier vakken meekrijgen. Een andere oplossing is om de set door de ouders aan te laten schaffen bij het boekenfonds.

De cd-rom is te gebruiken op een multimedia-pc. De minimale systeemeisen zijn: Pentium 200 MHz, 32 Mb intern geheugen, schermresolutie 800 × 600 met hoge kleuren, Windows 95, geluids- en videokaart (2 Mb), 12 speed cd-rom.

Voor meer informatie:
035-6293140 of
0900-1344 (44ct./min).

Opgave 694

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

Recreatie

Op roosterpapier met een loodrecht assenstelsel geldt voor de Stelling van Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$.

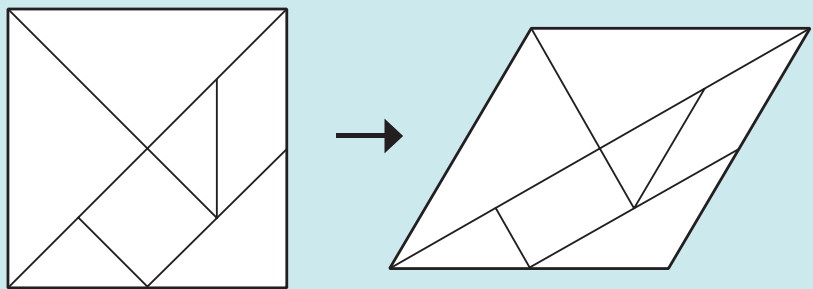
Een Pythagoreisch drietal is dan bijvoorbeeld 3-4-5, want $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Hoe gaat dit op isometrisch papier, waarbij de assen een hoek van 60 graden met elkaar maken?

De Stelling van Pythagoras wordt dan $a^2 + b^2 - ab = c^2$.

Voorbeelden van drietallen op isometrisch papier zijn dan 1-1-1, 3-8-7, 5-8-7, 16-21-19 en 19-99-91.

De deelnemers aan de Kangoeroe Wiskundewedstrijd 1999 ontvingen een tangrapuzzeltje. Hoe ziet dit eruit op isometrisch papier?



In 1942 schreven de wiskundigen Fu Traing Wang en Chuan-Chih Hsiung in *American Mathematical Monthly* het artikel 'A Theorem on the Tangram'.

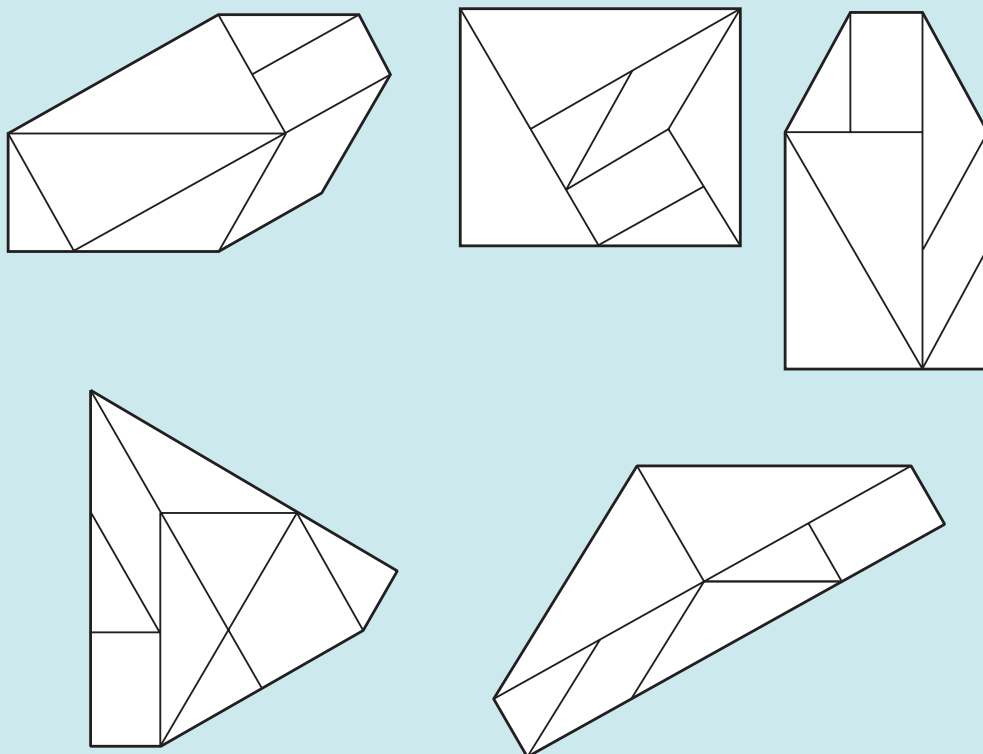
Hierin bewezen zij dat er 13 verschillende convexe figuren te maken zijn met het (rechthoekig) tangram-spelletje. Uiteraard mag men de puzzelstukjes draaien en spiegelen (de onderkant boven). Het gaat in dit geval om verschillende figuren, want soms kan een figuur op meerdere manieren gemaakt worden. Verder moet men alle 7 stukjes gebruiken, geen gaten maken en zijde tegen zijde leggen.

Hoeveel verschillende convexe figuren zijn er te maken met het isometrisch tangram?

Op de bladzijde hiernaast vindt u alvast een paar voorbeelden.

Als u de oplossing vindt en binnen TWEE maanden instuurt, ontvangt u 5 punten voor de ladderwedstrijd.

Oplossing 691



Van 5 getallen, die samen alle tien cijfers 0 t/m 9 bevatten, was deelbaarheid door 2 t/m 14 gegeven.

Alle inzenders vonden door redeneren of met behulp van de computer de unieke oplossing

16 - 39 - 50 - 72 - 84

Verschillende inzenders merkten op dat sommige deelbaarheidseisen weggelaten konden worden, om nog steeds deze unieke oplossing te krijgen. Aardig was dat niemand dezelfde voorwaarden wegliep. Er stond inderdaad overbodige informatie in de opgave, maar in deze vorm vond ik hem het leukst.

Dat de opgave niet moeilijk was en in de smaak viel blijkt ook uit de inzendingen van zeven nieuwe deelnemers aan deze ladderwedstrijd. Welkom en veel puzzelplezier!

Hierboven staan nog enkele voorbeelden van convexe figuren, die te maken zijn met de 7 puzzelstukjes van het isometrisch tangram.

Recreatie

Met 67 punten is winnaar van een boekenbon van f 50,-:

Leo H. van den Raadt
Raadhuisplein 8
2101 HB Heemstede

Heel hartelijk gefeliciteerd!

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in komend schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Voor of op die datum dienen uw mededelingen bij de hoofdredacteur te zijn. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
1	02-09-99	08-07-99
2	14-10-99	02-09-99
3	25-11-99	14-10-99

Data nieuwe schooljaar
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur:
cph@xs4all.nl

Zomeruniversiteit wiskundedidactiek
do. 15 juli - wo. 21 juli 1999
Louvain/Leuven, België
<http://ramses.umh.ac.be/noel/univete/Univetenl.htm>
Zie ook blz. 205

Symposium Teachers Teaching with Technology (T³)
di. 24 aug - do. 26 aug '99
Oostende, België
<http://khbo.be/iwt/SYMPOSIUM2>

Vakantiecursus CWI TU Eindhoven
do. 26 aug. 1999: 11.00 - 16.00
vr. 27 aug. 1999: 10.00 - 15.00
CWI Amsterdam
vr. 3 sept. 1999: 15.30 - 20.30
za. 4 sept. 1999: 10.00 - 15.00
Zie aankondiging blz. 232

Studiereis Boedapest ma. 27 sept. - zo. 3 okt. 1999
Europees Platform voor het Nederlandse onderwijs
Zie aankondiging blz. 261

APS-conferentie Tweede fase: Praktijkervaringen met praktische opdrachten
woensdag 6 oktober 1999
Infopunt wiskundeonderwijs
APS: 030 - 2856722
Nadere informatie volgt

Studiedag: Praktische opdrachten voor alle exacte vakken
donderdag 7 oktober '99
VeEx en BEeN, Utrecht
info: veex@wxs.nl
Nadere informatie volgt

Scholierenmanifestaties Stichting Wetenschap en Techniek
ma. 11 oktober - vr. 15 oktober 1999
Voor leerlingen 3e en 4e klas havo/vwo.
Folders zijn inmiddels op de scholen.

Voorronde wiskunde A-lympiade
Vrijdag 26 november '99
Freudenthal Instituut
030 2611611
alympiade@fi.uu.nl
www.fi.uu.nl/Alympiade
Zie aankondiging blz. 278

Nationale Wiskunde Dagen
vr. 4 en za. 5 februari 2000
Freudenthal Instituut
030 2611611
nwd@fi.uu.nl
www.fi.uu.nl/nwd
Zie aankondiging blz. 283

WWW-lympiade
ma. 7 feb. - vr. 11 feb. 2000
Freudenthal Instituut
www.fi.uu.nl/wwwwlympiade
Zie aankondiging blz. 278

9th International Congress on Mathematical Education (ICME)
31/6/00 - 6/8/00
Tokyo, Japan
www.ma.kagu.sut.ac.jp/~icme9/

Internetsites voor wiskundedocenten:

NVvW website
Bezoek regelmatig de website van de NVvW.
Boordevol actuele informatie
www.euronet.nl/~nvvw

Archief Wiskunde-brief
skyline.www.cistron.nl/wiskunde/brief/wb_main.htm

Zonsverduistering 11 augustus 1999
www.astro.uu.nl/~wwwzenit/eclipsweb

Wiskunde A-lympiade
www.fi.uu.nl/alympiade

Internet WWW-lympiade
www.fi.uu.nl/wwwwlympiade

Symposium Teachers Teaching with Technology (T³)
<http://khbo.be/iwt/SYMPOSIUM2>

Computeralgebra online
mss.math.vanderbilt.edu/~pscrooke/toolkit.html

Interessante websites België
users.skynet.be/sky85946/bewoner.dma.be/gricha/

Suggesties voor interessante sites of interessante free-ware voor wiskundedocenten graag zenden aan Kees Hoogland
e-mail: cph@xs4all.nl

Drie korte cursussen voor wiskunde-docenten door de TU Delft

Praktische opdrachten voor wiskunde in de bovenbouw van havo en vwo

door *mw drs A. Verweij*

drie dinsdagmiddagen van 15.00 tot 18.00 uur, op 14 september 1999, 14 december 1999 en 21 maart 2000.

Kosten: f 300,-

Achtergronden van de Discrete Dynamische Modellen in het vwo-profiel Economie & Maatschappij

door *prof. dr. J.M. Aarts* en *mw. drs. A. Verweij*,

twee dinsdagmiddagen van 15.00 uur tot 18.00 uur, op 2 november en 23 november 1999.

Kosten: f 200,-

Simuleren met de computer bij Kansrekening in de bovenbouw van havo en vwo

door *ir. J.J.I.M. van Kan* en *mw. drs. A. Verweij*,

één dinsdagmiddag van 15.00 uur tot 18.00 uur, op 18 januari 2000.

Kosten: f 100,-

Informatie en inschrijving:

Secretariaat van de Werkenheid

Algemene Wiskunde, Faculteit ITS, TU Delft,

Mekelweg 4, 2628 CD Delft,

tel. 015-2787221, fax 015-2787245,

e-mail groupaw@twi.tudelft.nl

Nieuwe Wiskunde Tweede Fase-Vakgerichte nascholing 1999-2000

Het Freudenthal Instituut en het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht bieden het komend cursusjaar de volgende cursussen aan:

- Achtergronden van de meetkunde in de nieuwe vwo-wiskunde (najaar '99)
- Achtergronden van de analyse in de nieuwe vwo-wiskunde (najaar '99)
- De historische achtergrond van de vwo-wiskunde (voorjaar 2000)
- ICT in het wiskunde-onderwijs (voorjaar 2000)

Alle cursussen bestaan uit 5 bijeenkomsten van 3 uur. De prijs per cursus is f 645,- (bij aanmelding voor 15 juli) resp. f 695,- (bij aanmelding na 15 juli).

Nedere informatie is te vinden via de homepage van het Freudenthal Instituut: <http://www.fi.uu.nl/nl> of te verkrijgen bij Els de Vries, tel. 030 253 1456, fax 030-251 8394, e-mail nascholing@math.uu.nl

Conferentie Leren in Circuits

Werkvorm voor zelfstandig leren in het voortgezet onderwijs

Wat is het Circuitmodel? Hoe werkt het? Welke mogelijkheden biedt het Circuitmodel mij?

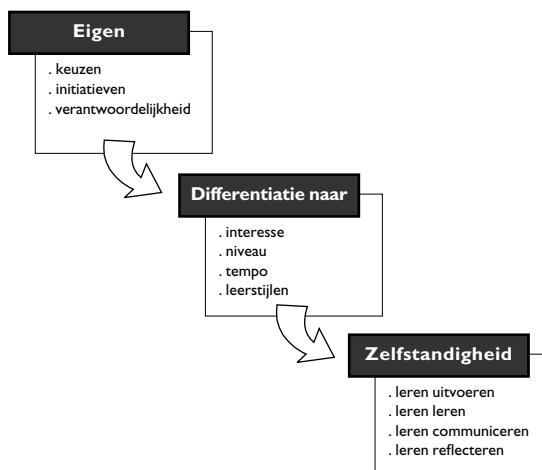
Op woensdag 13 oktober 1999 wordt door het APS de conferentie Leren in Circuits gehouden. Tijdens deze conferentie komen praktijkvoorbeelden aan de orde van circuitmodules die zijn ontwikkeld door docenten in het voortgezet onderwijs.

Op deze dag zijn vier verschillende vakgebieden vertegenwoordigd:

Aardrijkskunde & Geschiedenis
Talen
Wiskunde
Natuurkunde/scheikunde
&
biologie

In workshops leert u aan de hand van een stappenplan hoe u een circuit ontwikkelt en aan welke voorwaarden circuits moeten voldoen.

Circuits bieden:



Kosten van deelname aan de conferentie bedragen f 395,- p.p.. Voor meer informatie en inschrijving: raadpleeg de APS-website, www.aps.nl, schrijf of bel: APS, t.a.v. Sanne Pasveer, Postbus 85475, 3508 AL Utrecht, tel.: 030 2856 877, e-mail: s.pasveer@aps.nl



1999

een *fijne* vakantie

en een *frisse* start

in het *nieuwe* schooljaar

_____ met _____



7^e editie

Netwerk

2^e editie

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Tel: (050) 522 63 11

**Wolters
Noordhoff**