Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 74
1998-1999 mrt./apr.
6

Introductie
Fourierreeksen
met Derive

Experiment symbolische
rekenmachine

Examenbesprekingen
in mei

(2) $f(x) = g(x)$

$$x\sqrt{x+3} = \frac{\sqrt{x+3}}{x}$$

$$x^2\sqrt{x+3} = \sqrt{x+3}.$$

$$\left(x^2(x+3)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x+3.$$

solve op TI-92. (F2 -> 1).

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem
e-mail: cph@xs4all.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.
  Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Richtlijnen voor mededelingen:

- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.euronet.nl/~nvvw

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: mkommer@knoware.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8
8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail:
wkuipers@worldonline.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: NVvW@euronet.nl

Contributie per ver. jaar: *ƒ* 80,00
Studentleden: *ƒ* 40,00
Leden van de VVWL: *ƒ* 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: *ƒ* 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: *ƒ* 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: *ƒ* 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor *ƒ* 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Adresgegevens auteurs

R. Bosch
Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

P. Drijvers
Paddepoelseweg 9
6532 ZG Nijmegen

J.W. Kommer
Dravik 3
2631 DN Nootdorp

W. Laaper
Waleweinlaan 116
5665 CL Geldrop

G. Limpens
Boomstede 465
3608 BH Maarssen

A. Lobregt
Uytenbosch 13
3743 JC Baarn

H. Pol
RUG vakdid. NW
Nijenborgh 4
9747 AG Groningen

H. Pot
Tournoysveld 67
3443 ER Woerden

W. Schaafsma
Wolbertsmate 3
8014 LG Zwolle

Inhoud

182 Kees Hoogland
Van de redactietafel

183 Alex J. Lobregt
De introductie van Fourierreeksen met behulp van Derive

186 Rob Bosch
Getallen met een naam: Mersennegetallen

187 **HKRWO-symposium 1999**
AANKONDIGING

188 Wim Laaper
Studiedag 1998 'Op zoek naar wiskunde'

191 Paul Drijvers
Experiment met de symbolische rekenmachine op College De Klop

197 Hessel Pot
Het cumulo-getal e in elke groeikromme

199 Marian Kollenveld
Van de bestuurstafel
NVvW

200 **Examenbesprekingen in mei 1999**
NVvW

202 Jan Willem Kommer
Harry Chambone, niet de Docent van het Jaar
INTERVIEW

204 Henk Pol
Netwerk β-blokker/ Studiestijgers

205 **Derde Europese Zomeruniversiteit**
AANKONDIGING

206 Ger Limpens
Overzicht Cito-uitgaven voor de tweede fase

208 **Boekbespreking**

209 **Zebra-boekjes**

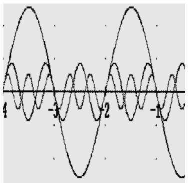
210 **Boekbespreking**

211 **40 jaar geleden**

212 Wim Schaafsma
Zwaartelijnen

214 **Recreatie**

216 **Kalender**


183


188


202

van de redactietafel

Twee tendensen lijken de laatste tijd in toenemende mate aan kracht te winnen binnen het wiskundeonderwijs. Op alle niveaus van vmbo tot havo/vwo, maar ook op mbo, hbo en universiteiten, komt er duidelijk *meer nadruk op technologische en digitale hulpmiddelen* en *een toenemende aandacht voor onderzoeksopdrachten (praktische opdrachten)*. Alhoewel al vele jaren lang wiskundedocenten zich hebben bezig gehouden met deze onderwerpen, maakten ze toch (nog) niet automatisch deel uit van het reguliere wiskundeonderwijs.

Technologie en digitalisering

Bij deze tendens spring het steeds geavanceerder worden van rekenmachines het meest in het oog. Binnenkort verschijnen er rekenmachines in het formaat van een gewone rekenmachine, die achteloos algebraïsch kunnen manipuleren en afgeleiden en primitieven kunnen weergeven. In die rekenmachines is gewoon wat software gestopt, die een afgeleide is van de computeralgebrapakketten, zoals Derive, Maple, Mathematica, et cetera.
In dit nummer treft u twee artikelen aan over het gebruik van zulke computeralgebrapakketten. Eén artikel over het gebruik in het hbo en één artikel over het gebruik in het voortgezet onderwijs.
Vooral in het voortgezet onderwijs zal het gebruik van computeralgebra een grote impact hebben op de discussie over welke algebraïsche vaardigheden in de toekomst nu precies wel en welke niet meer nodig zijn.

Onderzoeksopdrachten

Met name in de tweede fase havo/vwo zijn de onderzoeksopdrachten, of praktische opdrachten, op dit moment een veel besproken onderwerp binnen secties.
De examenregeling voor de tweede fase legt dwingend een behoorlijke weging op aan het uitvoeren van praktische opdrachten. De secties zijn op dit moment veelal aan het vaststellen op welke manier deze opdrachten een uitvoerbare plaats binnen het reguliere programma kunnen krijgen.
Een aantal praktische vuistregels lijken zo langzamerhand te ontstaan:
- Circa twee per schooljaar;
- De eerste opdracht(en) alleen laten meetellen voor de overgang en volgende pas voor het schoolexamen;
- Ook contacttijd reserveren voor het uitvoeren van deze opdrachten. Dit vooral om het proces in de hand te houden;
- Leerlingen goed aanleren in groepjes (met grootte van bijvoorbeeld drie) aan zo'n opdracht te werken. Dit vooral om te voorkomen dat een docent straks, als de tweede fase in alle klassen is ingevoerd, per jaar circa 2 keer 7 keer 28 werkstukken of presentaties moet beoordelen.

Onderbouw en VMBO

De geschetste tendensen vinden niet alleen plaats in de bovenbouw voor havo en vwo.
Ook in het vmbo en in de onderbouw van havo en vwo zal een toenemend gebruik van computers en geavanceerde rekenmachines plaats gaan vinden. Op het mbo worden tegenwoordig ook al grafische rekenmachines gebruikt. Deze machines zullen de komende jaren steeds goedkoper worden en als de prijs daalt tot rond de ƒ 50,– , zal ook gebruik in lagere klassen moeilijk tegen te houden zijn.

Conclusies voor het wiskundeonderwijs

Grofweg zijn er twee mogelijkheden om met deze tendensen om te gaan. Proberen tegen te houden, zodat er veel ruimte blijft voor de meer klassieke doelen van het wiskundeonderwijs. Of ze zo snel en zo goed mogelijk proberen te integreren en de doelen aanpassen aan deze ontwikkelingen. Voor het overleven van het wiskundeonderwijs is het laatste, naar mijn mening althans, onvermijdelijk.
Maar wie ben ik.

Kees Hoogland

De introductie van Fourierreeksen met behulp van Derive

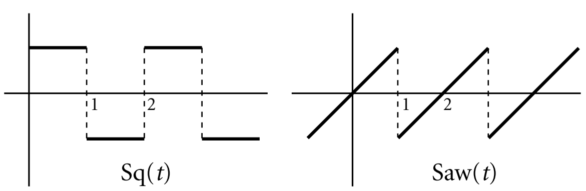
Alex J. Lobregt

Inleiding

Binnen het Hoger Technisch Onderwijs is nog steeds de discussie gaande over het gebruik van een computeralgebra. Dat er veel belangstelling is voor dit onderwerp bleek ook uit de grote opkomst tijdens een landelijke bijeenkomst op de Hogeschool van Utrecht in februari 1998, waar, op uitnodiging van Academic Service, over dit onderwerp werd gesproken.
En ook Roel van Asselt gaf in een artikel in Euclides 73-6 zijn mening over het gebruik van deze software pakketten. Zijn mening dat wiskunde, door het gebruik van een computeralgebra, in een isolement dreigt te raken, wordt zeker door mij niet gedeeld. Het moet toch niet al te moeilijk zijn collega's in de technische vakken te overtuigen van de mogelijkheden die een computeralgebra kan bieden.
Het gebruik van deze software is mijn inziens uitermate geschikt om studenten te verbazen en uit te dagen en ze op die manier te motiveren tot het bestuderen van achterliggende theorie.
Een goed voorbeeld ter illustratie lijkt mij de introductie van Fourierreeksen.

Fourier en de elektrotechniek

In de opleiding voor Elektrotechniek wordt gewerkt met functies als de Blokgolf $Sq(t)$ en de Zaagtand $Saw(t)$.



figuur 1

Deze functies laten zich goed benaderen door een zogenaamde Fourier-reeks:

$$F_N(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_N\cos(n\omega t) + b_N\sin(n\omega t) =$$

$$= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$$

De traditionele manier om de reeks te introduceren was het bewijs dat de Fourier-coëfficiënten a_n en b_n gelijk zijn aan:

$$a_n = \frac{2}{T}\cdot\int_T f(t)\cos(n\omega t)\,dt \quad \text{en}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\int_T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

Deze introductie van de Fourierreeksen stelt direct hoge eisen aan de rekenvaardigheden van studenten die dit vak volgen.
Studenten moeten dan goed thuis zijn in:
- de techniek van het integreren;
- berekeningen en notaties in complexe getallen;
- het gebruik van goniometrie;
- convergentiekenmerken.

Zelfs voor de meer dan gemiddelde hto-student bleek de combinatie van deze onderwerpen een struikelblok. Het gevolg was dat de lessen vaak bleven steken in langdurige rekenpartijen waardoor geen tijd meer beschikbaar was om een goed inzicht in de Fourierreeksen en de toepassingen daarvan te verkrijgen.
Sinds enige jaren is er aan de cursus Fourierreeksen en Fourierintegralen op de Hogeschool van Utrecht een Derive practicum verbonden.

Gebruik van Derive

Bij de eerste kennismaking werken de studenten met de built-in functie:

Fourier($f(t)$, t, a, b, n)

Hierbij is $f(t)$ een periodieke functie, t is de variabele, a en b zijn de onder- en bovengrens van een periode en n het aantal termen in de reeks.

Ik geef een voorbeeld.

We gaan uit van de functie:

$$Sq(t) = \begin{cases} 1 \text{ als } 0 < t < 1 \\ -1 \text{ als } 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{met periode 2}$$

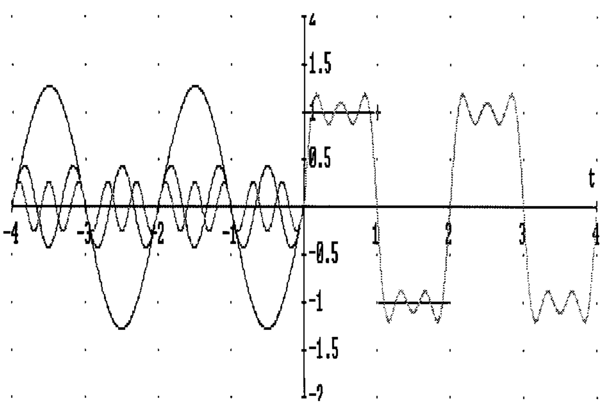
We willen 5 termen van de reeks en verder geldt $a = 0$ en $b = 2$.
In Derive kunnen we gebruik maken van de functie

$$\text{chi}(t_0, t, t_1) = \begin{cases} 1 \text{ als } t_0 < t < t_1 \\ 0 \text{ als } t < t_0 \text{ of } t > t_1 \end{cases}$$

Dan gaat het verder zo:
#1 Sq(t) := chi (0, t, 1) − chi (1, t, 2)
#2 Fourier(#1, t, 0, 2, 5) simplify

$$\frac{4\sin(5\pi t)}{5\pi} + \frac{4\sin(3\pi t)}{3\pi} + \frac{4\sin(\pi t)}{\pi} \qquad (\mathbf{1})$$

Derive stelt de studenten in staat de afzonderlijke harmonische termen en de som naast elkaar te tekenen, wat een uitstekend inzicht geeft in de opbouw van de Fourierreeks.



figuur 2

De studenten zijn daarna zeer gemotiveerd om zich in de theorie te verdiepen.
Het berekenen van de Fourier-coëfficiënten met Derive kost niet veel tijd, de berekeningen zijn foutloos en geven een goed inzicht in de resultaten:

$n \in$ integer(0, →)

$$\int_0^2 (\text{chi}(0, t, 1) - \text{chi}(1, t, 2)) \cos(n\pi t)dt = 0$$

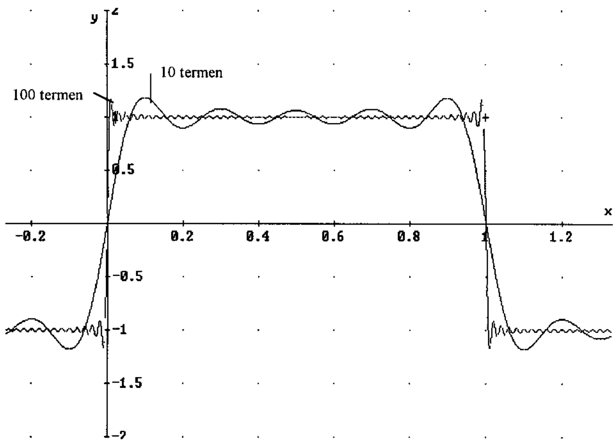
$$\int_0^2 (\text{chi}(0, t, 1) - \text{chi}(1, t, 2)) \sin(n\pi t)dt =$$

$$\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

Het resultaat $\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin(n\pi t)$ kan direkt worden vergeleken met de eerder gevonden reeks (**1**).

Convergentie en het Gibbs-Phenomenon

Natuurlijk onderzoeken studenten nu de convergentie. Ze noemen dat niet zo, maar ze zijn wel erg benieuwd hoe goed de benadering is bij 10 termen, 20 termen en meer. Tot hun verbazing verdwijnt dan de afwijking in de buurt van de sprong-discontinuïteit niet.



figuur 3

Enig onderzoek naar dit verschijnsel, dat bekend staat als het Gibbs-Phenomenon, viel altijd buiten de scoop van de cursus, maar nu gaan de studenten in een vraagstuk als volgt te werk.

Neem respectievelijk 10, 20 en 100 termen van de Fourierreeks van Sq(t) en bereken het extreem voor de kleinste positieve waarde van t.

$$\frac{d}{dt}\text{FOURIER}(\text{CHI}(0, t, 1) - \text{CHI}(1, t, 2), t, 0, 2, 10) = 0$$

$$4\cos(9\pi t) + 4\cos(7\pi t) + 4\cos(5\pi t) +$$
$$4\cos(3\pi t) + 4\cos(\pi t) = 0$$

Dit geeft $t = 0.1$ en het maximum is 1.18233
En zo verder:

termen	**oplossing**	**maximum**
10	$t = 0.1$	1.18233
20	$t = 0.05$	1.17981
100	$t = 0.001$	1.17901

Bij 100 termen geeft Derive als maximum 1,179013 dat wil zeggen een afwijking van ongeveer 0.179 op een sprong van 2. Ofwel een afwijking die 8,95 % is van de spronggrootte.

In vergelijking met het limiet geval

$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx \approx 1.17897$ is dit een goed resultaat.

De studenten voeren deze bewerkingen nu ook nog uit op een zaagtand met sprongen van 2π, en ontdekken dat de afwijking weer naar zo'n 9 % gaat. Dit bijzondere gedrag blijkt altijd weer een uitnodiging te zijn het Gibbs-Phenomenon verder te bestuderen.

Complexe schrijfwijze

Belangrijk, vooral voor een theoretische beschouwing van de Fourierreeksen, is de aanpak met behulp van complexe getallen. De Fourier-coëfficiënten a_n en b_n kunnen we samenvatten in:

$$\alpha_n = \tfrac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n) = \tfrac{1}{T}\int_T f(t)e^{-\mathrm{i}n\omega t}$$

en de Fourierreeks wordt dan: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{\mathrm{i}n\omega t}$

Deze korte en bondige schrijfwijze is voor de studenten niet bepaald doorzichtig, maar herleiden met Derive geeft:

$$F_5(t) = \sum_{n=-5}^{5} \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}n\pi t} =$$

$$\sum_{n=-5}^{-1}\frac{\mathrm{i}}{n\pi}((-1)^n - 1)e^{\mathrm{i}n\pi t} + \sum_{n=1}^{5}\frac{\mathrm{i}}{n\pi}((-1)^n - 1)\,e^{\mathrm{i}n\pi t} =$$

$$\frac{2\sin(5\pi t)}{5\pi} + \frac{2\sin(3\pi t)}{3\pi} + \frac{2\sin(\pi t)}{2\pi} +$$

$$\mathrm{i}\left(\frac{2\cos(5\pi t)}{5\pi t} + \frac{2\cos(3\pi t)}{3\pi t} + \frac{2\cos(\pi t)}{\pi t}\right) +$$

$$+\frac{2\sin(5\pi t)}{5\pi} + \frac{2\sin(3\pi t)}{3\pi} + \frac{2\sin(\pi t)}{\pi}$$

$$-\,\mathrm{i}\left(\frac{2\cos(5\pi t)}{5\pi t} + \frac{2\cos(3\pi t)}{3\pi t} + \frac{2\cos(\pi t)}{\pi t}\right)$$

Door optellen is reeks (**1**) weer gevonden.

Met gebruik van deze complexe schrijfwijze is het eenvoudig aan te tonen dat als $f(t)$ de Fouriercoëfficiënten α_n heeft, de coëfficiënten van $f(t-a)$ gelijk zijn aan

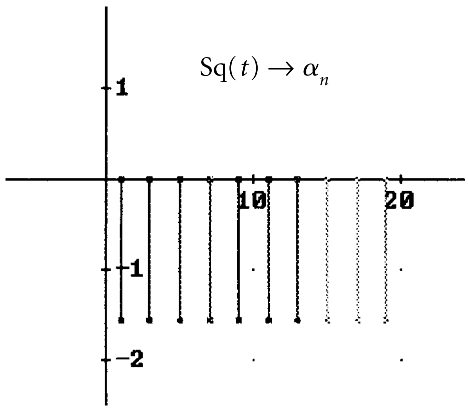
$$\beta_n = \alpha_n e^{-\mathrm{i}an\omega} \qquad (\mathbf{2})$$

De grafieken van $|\alpha_n|$ en arg (α_n), respectievelijk het

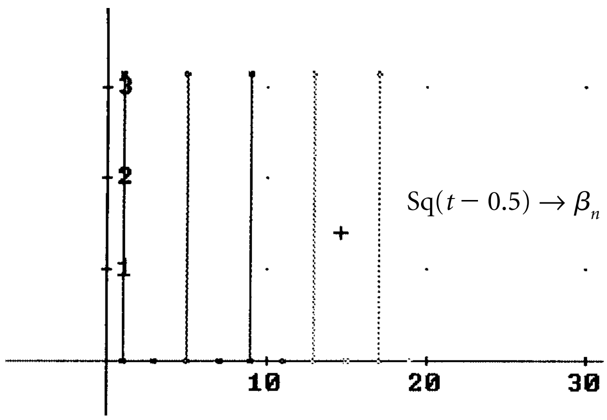
amplitudespectrum en het fasespectrum, tekenen de studenten behulp van de statements:

vector([[n, 0],[n, abs (α_n)]],n, a, b),
vector([[n, 0],[n, phase (α_n)]],n, a, b)

Hieronder ziet u het fasespectrum van Sq(t) en Sq($t - 0.5$)



figuur 4



figuur 5

Mersennegetallen

Een natuurlijk getal heet een *perfect* getal als het gelijk is aan de som van zijn positieve delers, uitgezonderd het getal zelf.
Het kleinste perfecte getal is 6:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

Het volgende perfecte getal is 28:

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

In boek IX van de Elementen bewees Euclides dat $2^{k-1}p$ perfect is als

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{k-1} = p$$

priem is.
Bijvoorbeeld:

$1 + 2 + 4 = 7$ is priem en dus is $2^2 \cdot 7 = 28$ perfect

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ is priem en dus is $2^4 \cdot 31 = 496$ perfect.

Na 6 en 28 is 496 het derde perfecte getal.
$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$

De somformule voor een eindige meetkundige reeks geeft

$$1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

zodat we de bewering van Euclides ook als volgt kunnen formuleren:

Als $2^k - 1$ priem is ($k > 1$) dan is $2^{k-1}(2^k - 1)$ een even perfect getal.

Euler toonde 2000 jaar later aan dat alle even perfecte getallen ook van deze vorm zijn.

Stelling 1 (Euler, Euclides)
Als $2^k - 1$ priem is ($k > 1$), dan is $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ perfect en alle even perfecte getallen zijn van deze vorm.

Tot op heden is het nog onbekend of er oneven perfecte getallen zijn.
Uit de stelling volgt dat het vinden van even perfecte getallen neerkomt op het vinden van priemgetallen van de vorm $2^k - 1$.
Het getal $2^k - 1$ is alleen maar priem als k priem is.
Als namelijk $k = ab$ dan

$$2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \ldots + 2^b + 1)$$

en omdat beide factoren in het rechterlid groter zijn dan 1 is $2^{ab} - 1$ samengesteld.

Een **Mersennegetal** M_k, genoemd naar de Franse monnik Marin Mersenne (1588-1648), is een getal van de vorm $2^k - 1$.
Als M_k priem is dan heet het getal een Mersennepriem.

We hebben gezien dat M_k alleen priem is als k priem is.
Het omgekeerde is niet waar; $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 98$ is niet priem terwijl $k = 11$ wel priem is.
In 1772 vond Euler dat $M_{31} = 2^{31} - 1 = 2147483647$ priem is. Tot die tijd waren slechts 7 Mersenne-priemgetallen bekend.

$p = 2$	$M_2 = 3$
$p = 3$	$M_3 = 7$
$p = 5$	$M_5 = 31$
$p = 7$	$M_7 = 127$
$p = 13$	$M_{13} = 8191$
$p = 17$	$M_{17} = 131071$
$p = 19$	$M_{19} = 524287$

In januari 1998 ontdekte Ronald Clarkson, een 19 jaar oude student van de California State University, in samenwerking met anderen, het Mersennepriem $M_{3021377}$.
Dit getal met 909.526 cijfers is het tot nu toe grootste bekende priemgetal. Met deze ontdekking is het totaal aantal bekende Mersenne-priemgetallen op 37 gekomen. Dit Mersennepriem geeft aanleiding tot een perfect getal van 1.819.050 cijfers.
Nog onbekend is of er oneindig veel Mersennepriems zijn.

Rob Bosch

Literatuur

A.H. Beiler **Recreation in the Theory of Numbers**
P. Ribenboim **The Little Book of Big Primes**

Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS)
http://www.mersenne.org/prime.htm

En ten slotte wordt de studenten gevraagd de grafieken te verklaren met behulp van formule (**2**).

Conclusie

Het gebruik van een computeralgebraprogramma als Derive verhoogt het plezier waarmee de studenten aan het onderwerp werken aanzienlijk.
Het heeft geleid tot een verandering in de opbouw en de inhoud van de leerstof. De nadruk ligt niet meer bij weinig inspirerende rekenpartijen maar meer bij begrip en relevante toepassingen.

Deze manier van werken heeft ook gevolgen voor de wijze waarop de studenten de cursus afsluiten. De afsluiting bestaat nu uit drie onderdelen:
- een mondelinge presentatie van onderzoeksresultaten;
- een schriftelijk verslag van het practicum;
- het afleggen van een schriftelijk tentamen dat hoofdzakelijk theoretische kennis vraagt.

De afweging bij deze aanpak is: kunnen we een verschuiving aanbrengen van vaardigheden naar inzicht? De ervaringen van de afgelopen jaren zijn naar mijn mening zeer positief te noemen.

Studiedag 1998 'Op zoek naar wiskunde'

Wim Laaper

Inleiding

Het wiskundeonderwijs zit midden in de veranderingen zowel in het mbo, vbo/mavo, havo/vwo en – als gevolg – ook in het vervolgonderwijs. Het gaat er nu om die veranderingen zinvol in ons onderwijs door te voeren. Centraal staat in ieder geval de actieve, zelfstandige en onderzoekende rol van de leerling. Het themagedeelte van de studiedag op zaterdag 14 november ging vooral over dit laatste aspect: het onderzoeken. Minder nadruk op het hanteren van kant en klare recepten in het wiskundeonderwijs is in alle plannen terug te vinden. Ook een grotere aandacht voor meer open probleemstellingen waarbij de leerlingen zelf onderzoeken welke wiskundige aanpak geschikt is. Wat kun je verwachten van de basisvorming aan onderzoeksvaardigheden? Zijn GWA-achtige activiteiten al voldoende in de praktijk van het onderwijs doorgedrongen? Hoe werkt het TWIN-team aan onderzoeksopdrachten in het mbo? En wat zijn de mogelijkheden aan praktische opdrachten in de tweede fase van het voortgezet onderwijs? Dit alles was op de studiedag uitgesmeerd over een twintigtal werkgroepen en twee plenaire lezingen.

De ochtendlezing

De eerste plenaire lezing werd gehouden door ir. Piet Lenstra, directeur van een architectenbureau dat een groot gedeelte van zijn omzet behaalt bij de nieuwbouw en verbouw van schoolgebouwen. Hij scholen. Het valt hem telkens weer op dat er vanuit de wiskundesecties weinig wensen voor wat betreft het ruimtegebruik worden geuit. Hij raadde de wiskundedocenten aan in voorkomende gevallen meer op de voorgrond te treden en bijvoorbeeld aan te geven hoeveel vierkante meter de oppervlakte van een wiskundelokaal zou moeten zijn. De lezing werd afgesloten met een aantal voorbeelden van recentelijk opgetrokken schoolgebouwen in Nederland. Daarbij kwam het concept van het studiehuis naar voren via diverse nissen en zelfstudieruimtes. Ook de mediatheek speelt een belangrijke rol in de bouwtekeningen. Lenstra ging ook in op de wijze waarop een bestaand schoolgebouw verbouwd zou kunnen worden tot een daadwerkelijk studiehuis.

Twee nieuwe bestuursleden: Marianne Lambriex en Jacob Hop

liet eerst een aantal voorbeelden zien van de rol van wiskunde (in het bijzonder ruimtemeetkunde) in de architectuur. Het maken van uitslagen van ruimtelijke figuren kwam in de praktijk nogal eens voor. Hij constateerde dat een en ander tegenwoordig vooral met de computer plaats vindt. Daardoor beheersen jonge tekenaars deze kunst zelf steeds minder.
Verder ging hij in op de gang van zaken bij bouwprojecten binnen

Een ochtendwerkgroep
Het TWIN-project in het mbo

In de ochtendsessie behandelde Tom Goris in een van de werkgroepen de geschiedenis van de periodieke functies in HEWET, HAWEX en TWIN. Het TWIN (Techniek-Wiskunde-Informatica-Natuurkunde)-project draait in het mbo op de afdelingen bouwkunde, werktuigbouwkunde en elektrotechniek. In ontwikkeld les-

materiaal pogen de TWIN-auteurs duidelijk te maken dat het mogelijk is de sinus van een tijd te berekenen door aan te geven dat tijd geassocieerd kan worden met de draaihoek die de krukas van een motor in een cirkelvormige beweging maakt. Dit voorbeeld fungeert bij dit onderwerp als denkmodel voor de studenten, niet alleen bij wiskunde, maar ook bij de praktijkvakken. Goris legde sterk de nadruk op de noodzaak zorgvuldig om te gaan met eenheden. Zo is bij $y = \sin 2t$ de factor 2 niet dimensieloos maar heeft als hoeksnelheid van een cirkelvormige beweging bijvoorbeeld als eenheid radialen per seconde als t in seconden is gegeven. Daardoor stelt $2t$ een hoek in radialen voor waarvan vervolgens de sinus kan worden berekend. In het verleden (HEWET en in mindere mate HAWEX) werd aan deze problematiek weinig aandacht besteed, zodat leerlingen altijd moeite hadden met 'de sinus van een tijd' in plaats van de sinus van een hoek.
In het TWIN-materiaal is hier aandacht aan besteed, niet alleen om aan te sluiten bij de praktijkvakken (in dit geval werktuigbouwkunde) maar ook om het gebruik van de sinusfunctie bij periodieke verschijnselen te verklaren (bijvoorbeeld elektrotechniek). Zit er onder elk periodiek verschijnsel een motortje?
De discussie na afloop spitste zich toe op de vraag of het gebruik van een enkel denkmodel (de krukas van een motor) wel aan zou sluiten bij wat in de basisvorming gebruikelijk is: juist veel verschillende contexten. Het fijne is dat de leerling altijd op dit denkmodel kan terugvallen.
Het is echter wel noodzakelijk om op termijn dit denkmodel ook los te kunnen laten.

De nieuwe voorzitter, Marian Kollenveld, aan het woord

De middaglezing Onderzoeks-opdrachten in de wiskunde

De tweede plenaire lezing werd 's middags verzorgd door Lambrecht Spijkerboer met assistentie van verschillende collega's van het APS. Lambrecht Spijkerboer had een leuk, interessant en bruikbaar verhaal en gaf met vouwblaadjes en grote, levensechte tetraëders een ware performance ondersteund door zijn assistenten. Hij wist meteen de hele zaal te bewegen hoeken van 45° en 60° te vouwen, een gelijkzijdige driehoek op die manier te maken en tenslotte de vouwoefening te eindigen met de opdracht van een A-viertje een mooi vliegertje te maken. Hij vergat niet ook even te wijzen op de opdracht te bewijzen dat het vouwsel echt precies een vlieger was. Hij kon er ook nog lekker aan rekenen wat hij liet zien op het scherm met de overheadprojector. In het rekenen deed ook nog een el-en-netje mee, leuk toch?
De firma LEKOPRO had voor aanvang van de lezing blijk gegeven van grote betrokkenheid door elke deelnemer te voorzien (gratis sponsoring) van vier kunststof Polydron-driehoekjes waarmee een tetraëdertje gemaakt kon worden. Met de viervlakjes ging de zaal inderdaad in groepjes onderzoeken of de drie-dimensionale ruimte helemaal met deze dingen gevuld kon worden.
Wat wilde Lambrecht Spijkerboer met vragen als 'Wat is het relatieve hoogteverschil tussen een vierzijdige piramide en een tetraëder met dezelfde ribben?'
Hij illustreerde hiermee aan wat voor eisen een onderzoeksopdracht zou moeten voldoen, wil deze goed bruikbaar zijn in het wiskundeonderwijs. Een aantal criteria zette hij op een rijtje:
- verbazing, nieuwsgierigheid opwekken

- meerdere methoden van aanpak mogelijk
- mogelijkheden bieden voor niveauverhoging en verdiepingsvragen
- herkenbare wiskunde
- geschikt voor samenwerking
- niet te gemakkelijk
- moet leiden tot een beoordeelbaar product.

Spijkerboer onderscheidde vier methoden voor het aanbieden van onderzoeksopdrachten:

Methode1	Voordoen - nadoen
Methode II	Aan de hand meevoeren
Methode III	Zelfontdekkend
Methode IV	Zoek het zelf uit

Zijn lezing was er op gericht duidelijk te maken dat de meest effectieve en zinvolle methode van aanpak een combinatie van II en III is. Deels geef je leerlingen structuur en vastigheid door ze aan de hand mee te voeren. Aan de andere kant laat je de leerling genoeg ruimte over om zelf in zo'n opdracht genoeg te onderzoeken en te ontdekken en zo zijn eigen niveau te vinden.

V.l.n.r. Harrie Broekman, Lambrecht Spijkerboer, Joke Daemen

Twee middagwerkgroepen Praktische opdrachten in de tweede fase

Deze groep werd geleid door Marja Bos. Zij werkt aan de RU Groningen en is docente in Emmen. Het ging over de vraag hoe praktische opdrachten in te richten bij het vak wiskunde. Zij liet de deelnemers op kleine stukje s overhead-transparanten een zorgpunt en een positief aspect van de tweede fase opschrijven en projecteerde ze naast elkaar op het scherm.
De meeste zorgen betroffen de werkdruk van de docent en de leerling, de organisatie, de begeleiding, beoordeling, diepgang en faciliteiten.
Als positieve kanten van praktische opdrachten kwamen 'zelf onderzoeken', aansluiting met de praktijk, bevordering van een actieve leerhouding en de 'leukigheidsfactor' uit de bus.
Vanuit het publiek werden er veel vragen gesteld en opmerkingen gemaakt over de wettelijke eisen betreffende praktische opdrachten. Duidelijk is dat lang niet alle scholen voor ogen hebben hoe praktische opdrachten in het reguliere programma een plaats zullen krijgen. Er wordt nog veel gedacht dat ze bovenop het normale programma komen in plaats van dat ze een onderdeel daarvan zijn. Een docent vertelde dat zijn schoolleiding de uren die hij niet meer voor de klas zou staan, zou invullen met onderbouwuren. Dat kan uiteraard niet. Kortom: er werden nogal wat 'beren op de weg van praktische opdrachten' gezien.
Het concept van praktische opdrachten leek door deelnemers van deze werkgroep niet erg ondersteund te worden. Grootste zorgpunt uiteindelijk: de werkdruk voor leerlingen.

Keuzeonderwerp 'en profil'

Deze werkgroep werd geleid door Jan van Maanen van RU Groningen. Hij vroeg de deelnemers welke thema's zich lenen voor het keuzeonderwerp in de zogenaamde zebrablokken van de tweede fase:

- schattingsproblemen
- functioneel programmeren
- complexe getallen in de elektrotechniek
- hyperbolische meetkunde
- magische vierkanten en houten puzzels
- dansen, pasjes, ritmes, muziek
- pi en e
- architectuur
- water
- Escher-prijsvraag
- een de logaritmische spiraal
- getaltheorie, irrationaliteit van e en pi
- medische praktijk

De volgende aandachtspunten werden door de deelnemers gesignaleerd: toetsing en afronding, wie maakt de keuze voor een onderwerp: leraar of leerling?, hebben de leerlingen allemaal hetzelfde onderwerp?, wie zorgt voor het materiaal?, wanneer doe je een zebra-blok, in klas 5 of in klas 6? Jan wist te melden dat volgend jaar uitgevers met materiaal zouden komen. Een model voor dit materiaal zou kunnen zijn: gestructureerde boekjes met ook veel open vragen. Hier zien we ook een pleidooi voor een aanpak zoals in de middaglezing door Lambrecht Spijkerboer is voorgesteld voor praktische opdrachten.

Experiment met de symbolische rekenmachine op College De Klop [1]

Paul Drijvers

Inleiding

In het najaar van 1997 heeft de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren de zogenaamde Adviescommissie Computeralgebra en Symbolische Rekenmachine ingesteld. Een van de leden van deze commissie was Henk Vink, wiskundedocent op College De Klop in Utrecht. Toen hij zich tijdens een vergadering liet ontvallen, dat hij wel eens zou willen ervaren hoe zijn leerlingen op een symbolische rekenmachine reageren, was een kort klassenexperiment snel gearrangeerd. Hieronder een impressie van de ervaringen van Henk en zijn leerlingen. Het rapport van de Adviescommissie is overigens in mei 1998 gepubliceerd. U vindt het op de web-site van de NVvW.

Situatie

Het experiment vond plaats in januari 1998 in een wiskunde B groep van vwo-5. De klas bestond uit 18 leerlingen, 11 jongens en 7 meisjes. Volgens Henk een redelijke groep, met uitschieters naar beide kanten. De sfeer was goed, het harde werken soms iets minder. Vrijwel alle leerlingen volgden ook wiskunde A. Bij dat vak hadden ze onlangs enige tijd een grafische rekenmachine gebruikt. Verder beschikten de leerlingen over ervaring met de computer. Voor wat betreft wiskunde is de aandacht dit schooljaar vooral uitgegaan naar werken met standaardfuncties en gebroken functies, oplossen van vergelijkingen, ruimtemeetkunde en goniometrie.

Het experiment

Door lesuitval stond het experiment enigszins onder druk. Het speelde zich af in één week en nam vier lesuren in beslag. De eerste twee daarvan zijn besteed aan het leren kennen van de symbolische rekenmachine, in dit geval de TI-92 van Texas Instruments. Dit gebeurde aan de hand van het pakketje ‘Practicum TI-92’,[2]) geschreven voor een experiment met studenten van de lerarenopleiding, zie ook ‘Oude liefde roest niet.’[3]).
De laatste twee lessen, een blokuur, hebben de leerlingen gewerkt aan een drietal door de docent geselecteerde examenopgaven. De docent heeft hierbij niet veel ondersteuning geboden. Na afloop hebben de leerlingen hun uitwerkingen ingeleverd.
In het vervolg lopen we deze drie opgaven langs en praten we na met de docent.

Havo 1994-I opgave 1

De eerste vraag (zie blz. 192) lossen de meeste leerlingen op door de vergelijking $f(x) = 0$ algebraïsch te laten oplossen. Door vervolgens in de grafiek af te lezen komt men tot het antwoord. Een minderheid gebruikt wat ‘primitievere’ methodes, zoals het numeriek benaderen van de nulpunten met een tabel of door over de grafiek te lopen. Deze laatste manier geeft een onnauwkeurig antwoord. Wat opvalt, is dat slechts één leerling de TI-92 niet gebruikt, terwijl de nulpunten toch direct uit de formule zijn af te lezen. Het gemak dient de mens...
Bij vraag 2 laten de meeste leerlingen het differentiëren over aan de machine. Die geeft de formule overigens anders weer dan in de opgave staat: $-4(x - 6)(x^2 - 6)$. Er zijn maar liefst vier leerlingen, die dit verschil niet opmerken, terwijl de anderen inzien dat de twee antwoorden met elkaar in overeenstemming zijn.
Bij vraag 3 ligt het differentiëren van f' voor de hand, waarna $f''(x) = 0$ kan worden opgelost. Geen probleem. Enkele leerlingen

EXAMEN HOGER ALGEMEEN VOORTGEZET ONDERWIJS IN 1994
WISKUNDE B
EERSTE TIJDVAK

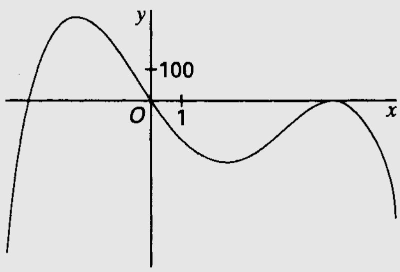
Opgave 1

In figuur 1 is een grafiek getekend van de functie f gegeven door

$f(x) = -x(4 + x)(6 - x)^2$.

Op de x-as en de y-as zijn de schaalverdelingen verschillend: de eenheid op de y-as is honderd maal zo klein getekend als op de x-as.

figuur 1



6p 1 □ Voor welke waarden van x is $f(x)$ negatief?

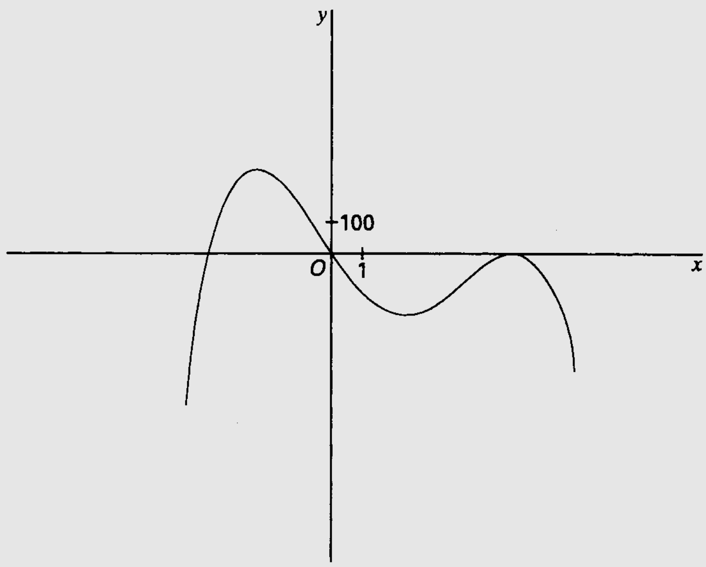
6p 2 □ Toon aan dat $f'(x) = -4(6 - x)(6 - x^2)$

Iemand heeft het vermoeden dat $O(0, 0)$ een buigpunt van de grafiek van f is.

5p 3 □ Onderzoek of dat vermoeden juist is.

Hieronder is nogmaals een grafiek van f getekend.
De functie g is gedefinieerd door $g(x) = f(2x)$.

7p 4 □ Leg uit hoe de grafiek van g uit de grafiek van f kan worden afgeleid en teken in onderstaande figuur de grafiek van g.



berekenen $f''(0)$ in plaats van het oplossen van de vergelijking, en dat kan natuurlijk ook.
Bij de laatste vraag zijn er zes leerlingen die de formule voor f opnieuw intypen en daarbij met de hand overal x door $2x$ vervangen. Vier anderen kiezen een mooiere oplossing:

$y_1(x) = -x(4 + x)(6 - x)$^2
$y_2(x) = y_1(2x)$

Door $f(x) \mid x = 2a$ in te voeren kan voor x $2a$ worden gesubstitueerd. Deze (in principe voor de hand liggende?) manier wordt door niemand gehanteerd.

Havo 1991-II opgave 3

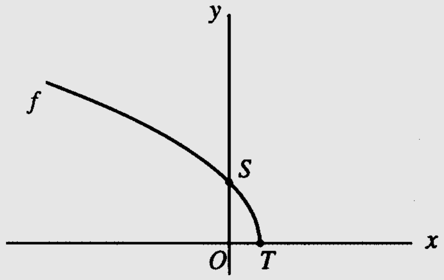
De vergelijking van de raaklijn in S (vraag 8) is natuurlijk een eitje als het differentiëren door de machine wordt uitgevoerd. Het overgrote deel van de leerlingen doet dat, en is snel klaar met deze vraag. De twee beste leerlingen differentiëren met de hand.
Bij vraag 9 kiest de meerderheid voor het laten oplossen van de vergelijking $f(x) = x$. Dat geeft overigens een numeriek resultaat, waar het exacte antwoord toch niet zo moeilijk is. Als de TI-92 een duwtje in de rug krijgt, door de vergelijking eerst te kwadrateren, lukt het wel, zoals blijkt uit figuur 1.

1991-II

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{1-2x}$.
In figuur 4 is de grafiek van f getekend.
De punten T en S zijn de snijpunten van de grafiek met de x- en y-as (zie figuur 4).

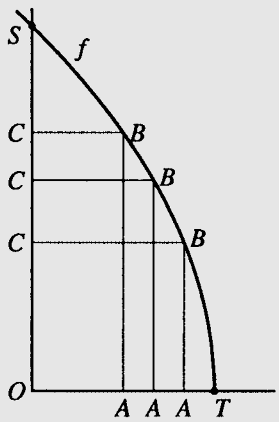
figuur 4



De raaklijn aan de grafiek van f in het punt S snijdt de x-as in R.

8 ❑ Bereken de x-coördinaat van R.

figuur 5

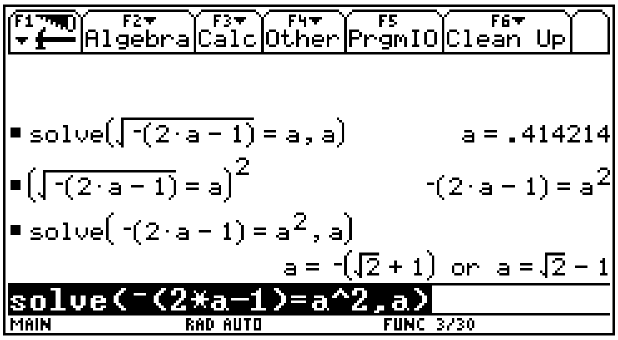


Het punt B doorloopt de grafiek van f tussen T en S; de punten A en C zijn steeds de projecties van B op respectievelijk de x-as en de y-as (zie figuur 5).
Als B niet met T of S samenvalt is $OABC$ een rechthoek. Die rechthoek verandert voortdurend van vorm. Er is één plaats voor B waarbij $OABC$ een *vierkant* is.

9 ❑ Bereken de coördinaten van die plaats.

Als B van T naar S beweegt over de grafiek van f, neemt de oppervlakte van $OABC$ eerst toe en later weer af. Iemand heeft het vermoeden dat de oppervlakte van $OABC$ maximaal is in het geval dat $OABC$ een vierkant is.

10 ❑ Onderzoek of dit vermoeden juist is.



figuur 1

Een meisje neemt een wat omslachtiger route. Ze voert in: $\sqrt{1-2a} = c \mid c = a.$ Dat leidt tot $\sqrt{1-2a} = a$, en dat lost ze dan met de TI-92 op.
De syntax van het solve-commando was geen probleem.
Een viertal leerlingen gebruikt bij deze vraag een 'grafische rekenmachine methode' door TABLE, TRACE en/of ZOOM te gebruiken. Misschien geïnspireerd door het experiment bij wiskunde A kort geleden?
De laatste vraag leidt tot verschillende antwoorden. Veel leerlingen bepalen de oppervlaktefunctie xy, en berekenen daarvan het maximum met behulp van het apparaat. Ook hier weer leerlingen die numerieke methoden gebruiken, een tweetal zonder succes omdat ze te grote stappen nemen, een ander tweetal wel succesvol dankzij betere verfijning.

Vwo 1997-II opgave 1

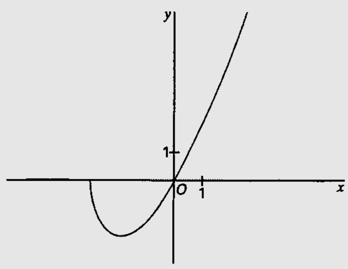
Het bereik van f wordt door de helft van de leerlingen bepaald door eerst het minimum te laten bereken. Een enkeling gaat tevens na dat de limiet van $f(x)$ oneindig is als x tot oneindig nadert. De andere helft kiest weer 'GR-methoden'. Kennelijk is het verschil tussen deze twee manieren van aanpak niet helder voor de leerlingen, en prefereren ze de algebraïsche manier niet boven de numerieke.
De coördinaten van het snijpunt bij vraag 2 worden door de meeste leerlingen met solve gevonden. Dat gaat snel! Twee leerlingen vergeten dit in te vullen in een van de functies, zodat de y-coördinaat van het snijpunt ontbreekt. Een leerling begint met de hand, maar roept in tweede instantie de hulp in van de TI-92 (zie figuur 2).

Aan vraag 3 komen de meeste leerlingen slechts gedeeltelijk toe. Bij het bepalen van de nulpunten van de afgeleide geeft de TI-92 als oplossing $x = -6$ (zie figuur 3). Geen enkele leerling krijgt hier een ongemakkelijk gevoel bij!
Een leerling gebruikt de tabel om het domein te bepalen: als de machine 'undefined' geeft, betekent dat dat er of een verticale asymptoot zit, of dat de grens van

Opgave 1

Met domein $[-3, \rightarrow\rangle$ is gegeven de functie
$f: x \rightarrow x\sqrt{x+3}$ en
met domein $[-3, \rightarrow\rangle\backslash\{0\}$
de functie $g: x \rightarrow \dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$
De grafiek van f is in figuur 1 en op de bijlage getekend.

figuur 1



4p **1** □ Bereken het bereik van f.

6p **2** □ Bereken de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van de grafieken van f en g.

10p **3** □ Onderzoek g en teken de grafiek van g in de figuur van de bijlage.

Het gesloten vlakdeel begrensd door de grafieken van f en g wordt gewenteld om de x-as.

7p **4** □ Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

(2). $f(x) = g(x)$.

$$x\sqrt{x+3} = \frac{\sqrt{x+3}}{x}$$

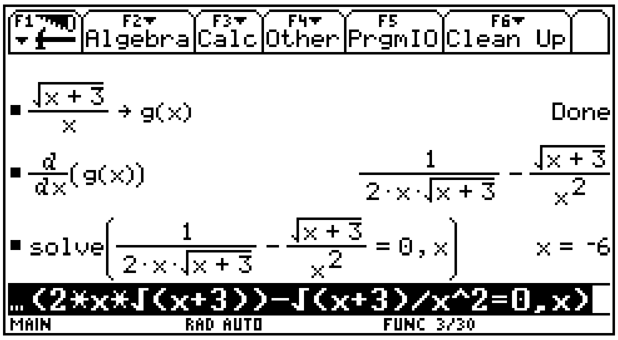
$$x^2\sqrt{x+3} = \sqrt{x+3}.$$

$$\left(x^2 \cdot (x+3)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x+3.$$

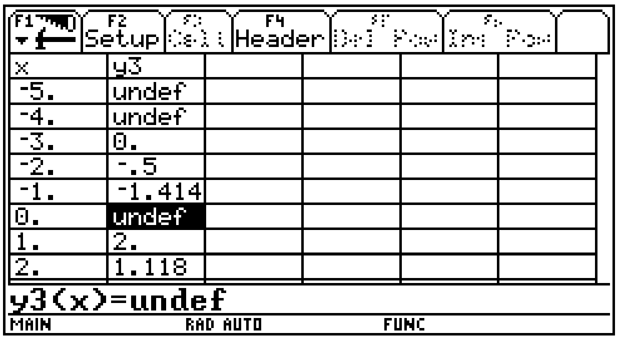
solve op TI-92. (F2 -> 1).

figuur 2

het domein wordt overschreden. (figuur 4)



figuur 3



figuur 4

Algemene indruk

Het werken met het meetkunde-deel van de machine viel de leerlingen wat zwaar, maar voor het overige waren de leerlingen enthousiast. Fanatiek hebben ze veel op het apparaat uitgeprobeerd. Ze waren er ook een beetje trots op met zo'n super-machine rond te lopen, en gebruikten de TI-92 ook bij natuurkunde en bij wiskunde A. Sommige leerlingen hadden wat scepsis. Met name de twee beste leerlingen vertrouwden meer op hun eigen rekencapaciteiten en deden minder met de machine. De twee zwakkere leerlingen zaten niet ven boven het niveau van de grafische rekenmachine, TRACE en zo. Dat kenden ze al van de grafische rekenmachine.

Ik vind dat ze zichzelf snel wegwijs hebben gemaakt op de TI-92. Dit blijkt onder andere uit het hoge tempo waarin ze de examenopgaven hebben doorgewerkt. Dit wekt de indruk dat de drempel van deze machine voor leerlingen niet te hoog is.

Wat een beetje tegenvalt, is de mate waarin de leerlingen in staat zijn de uitvoer van de machine kritisch te bekijken. Als de uitkomst duidelijk onjuist is, of als een benadering wordt gegeven waar een exact antwoord ook mogelijk is, zou er toch eigenlijk een lichtje moeten gaan branden. Kennelijk is dit iets waaraan de docent aandacht moet besteden. Bij het gebruik van de grafische rekenmachine is ditzelfde al vaker geconstateerd.

Opvallend is dat de leerlingen nog niet veel gevoel lijken te hebben voor het verschil tussen exacte en benaderde oplossingen. De keuze tussen deze twee lijkt vrij willekeurig te worden gemaakt, al heeft iedere leerling wellicht zijn eigen voorkeur vanwege de 'weggetjes' op de machine waarmee hij of zij vertrouwd is. Ook hieraan zou de docent in een langer lopend experiment aandacht kunnen besteden.

Napraten met de docent

Wat Henk is opgevallen, is dat leerlingen toch wel veel aan het apparaat overlaten, waar Henk liever had gezien dat ze de zaken op een andere manier zouden inzien. Denk bijvoorbeeld aan de nulpunten van de eerste vraag van de eerste examenopgave.

Verder vindt Henk dat de leerlingen wel snel hun weg vinden op de machine. Ook commando's die niet in het introductiepracticum stonden, zoals bijvoorbeeld ZEROS of TEST, worden door leerlingen gebruikt.

Ook Henk vindt dat de leerlingen niet erg kritisch zijn ten aanzien van de TI-92. Neem bijvoorbeeld $x = -6$ als nulpunt, terwijl dat buiten het domein valt. Wanneer de leerlingen zelf iets in de gaten moeten houden, ontgaat ze dat vaak. Laat Henk het zelf maar vertellen:

Dat zet je wel aan het denken… Dat is toch de hele moeilijkheid bij dat wiskunde B op het vwo, de precisie. Ik ben al blij als ze een buigpunt kunnen vinden, maar uitzonderingen, die is wel goed en die niet, en waarom dan, dat is moeilijk. Vroeger had je dat veel bij differentiaalvergelijkingen.

De globale indruk is wel positief. Toen de leerlingen de TI-92 in moesten leveren, zeiden sommigen: ‘Sorry, maar ik kon hem echt niet meer vinden…’, zo van ik houd hem liever.

Dus de machine was niet zo ingewikkeld dat ze niet over die barrière heen kwamen?
Nee, dat viel me ontzettend mee. Die meetkunde doorzagen ze niet helemaal, maar de rest... Ze konden veel knoppen vinden, en hebben veel gedaan. In een blokuur 2 en een halve examenopgave af!

Geen opvallende verschillen tussen jongens en meisjes?
Nee, ik denk dat de jongens een iets hoger tempo hadden. De meisjes zijn wat voorzichtiger. Dat is hetzelfde effect als met computers. De jongens raggen meer door, en zijn soms daardoor ook wat minder kritisch. Die meiden kijken toch twee keer. De meiden zagen ook vaker het verschil tussen die $6 - x$ en $-(x - 6)$. Ze vertrouwen niet zo blindelings op die machine. Jongens gaan meteen kijken wat er nog meer op zit, maar missen door dat enthousiasme ook wel eens dingen. Die meiden die zijn wat dat betreft heel braaf en doen precies wat het boekje aangaf, en zaten ook gezellig met z’n tweeën.

Ja, hoe ging dat met die samenwerking?
De meeste kozen toch voor alleen werken, en af en toe eens wat overleggen van ‘waar zit dat ook al weer’ of ‘hoe doe je dat ook al weer?’ Als ze samenwerkten, dan deden ze het altijd op twee machines en dan wilden ze ook allebei het juiste antwoord op het scherm.
Aan een PC heb je dat niet.
Verder was het een leuke sfeer, ze vonden het leuk om te doen.

Wat is nu jouw meest in het oog springende ervaring met dat apparaat in de klas?
Wat ik me van tevoren afvroeg is: moet je nou heel andere opgaven verzinnen. Het antwoord is ja, die examensommen zijn flut. Je zult dus opgaven moeten zoeken op een ander niveau, andere vragen. Als leerlingen dit apparaat hebben, wordt het niveau van deze opgaven heel anders, want nu is het een kwestie van het indrukken van de goede toetsen geworden, als je het een beetje beheerst.

Maar de strategie, de aanpak blijft toch hetzelfde?
Jawel, maar in de normen van het examen worden de punten altijd gegeven voor het uitvoeren, voor het bepalen van de afgeleide enzo. Opgaven waarbij de leerlingen iets echt moeten onderzoeken zijn beter. Of in de stijl van ‘verander de grafiek zodanig dat die aan die-en-die eisen voldoet’. Dat soort dingen doen we nu ook wel bij het mondeling schoolonderzoek met de computer. Of die opgave van $g(x) = f(2x)$, die vind ik leuk.

Wat is je nog meer opgevallen?
Dat leerlingen niet altijd de weg volgen die ik zou volgen. Ik vind het niet leuk als alle leerlingen op dezelfde manier een probleem oplossen. Ik krijg hieruit de hoop dat iedereen wel tot ’n oplossing komt, de ene desnoods via een TRACE en een ander probeert wat anders uit. Dat zag ik een klein beetje terug en dat viel me mee. Ik was bang dat dat verdwijnen zou, maar daar lijkt het dus niet op.

Wat tegenviel was hoe kritisch ze ermee omgingen?
Ja. Dit kwam allemaal vrij mooi uit, maar ik zou wel eens wat opgaven willen zien waarbij ze inderdaad moeten nadenken, als het bijvoorbeeld iets praktischer wordt, waarbij randvoorwaarden een rol spelen. Dan moet je er zelf nog over denken.

Draagt het werken met dit apparaat bij aan het inzicht in formules en algebra?
Dat weet ik niet. Dat weet je bij andere dingen ook niet, en is moeilijk te meten. Aan de ene kant vermoordt het in elk geval de oude wiskunde zoals wij die kennen, maar of daar iets goeds voor in de plaats komt, is nog de vraag.

Ze hebben bepaalde dingen wel snel gedaan.
Ja, het heeft tijd bespaard. Dat viel erg mee. Het is opvallend dat geen enkele leerling een verkeerde afgeleide had. Er wordt niets fout ingetoetst, ze weten wat ze moeten doen. Ook bijvoorbeeld het gebruik van dat voorwaarde-teken |, dat is toch mooi gedaan.
Ik zit nog wel met de vraag ‘wat moet er nou veranderen’. Het wordt wel interessanter, denk ik. De wiskunde B op het vwo is heel arm, alleen maar vaardigheden, wiskunde B van het havo is veel leuker.

Zou je nou liever achter een groot beeldscherm gezeten hebben met je leerlingen?
Nee. Ik had nog wel een keer met ze achter Derive willen gaan zitten, maar dat is er door tijdgebrek niet van gekomen.

Nog andere opmerkingen?
Nee, behalve dat dit experiment mij ook meer zicht op de zaken gegeven heeft.

Noten

1 Dit artikel komt voort uit een onderzoek, dat is gefinancierd uit het budget dat het ministerie van OC&W jaarlijks beschikbaar stelt aan de LPC ten behoeve van het Kortlopend Onderwijsonderzoek, dat uitgevoerd wordt op verzoek van het onderwijsveld.
2 *Drijvers, Paul* (1996) **Practicum TI-92** Nijmegen
3 *Drijvers, Paul* (1996) **Oude liefde roest niet** Euclides 72-1 p. 28-31

Het cumulo-getal e in elke groeikromme

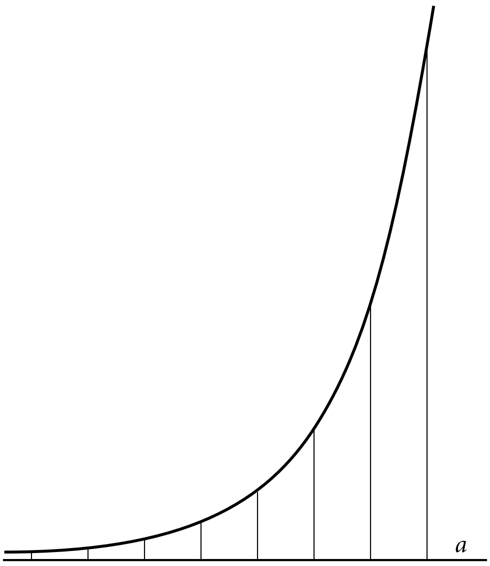
Hessel Pot

Inleiding

Veelal wordt e gedefinieerd als het grondtal van díe exponentiële functies die bij differentiëren niet veranderen. En via een *indirecte* probeermethode worden enkele decimalen gevonden.
Ik vind dit een aanpak die nu niet direct de werkelijke omvang van het belang van dit Euler-getal laat zien. Je kunt op deze manier e niet concreet *zien zitten* zoals je π kunt zien zitten in de omtrek en diameter van een willekeurige cirkel. Er lijken echter ook meer algemene introducties van e mogelijk, zowel meetkundig als analytisch.

Groeifactor e zit in elke exponentiële functie

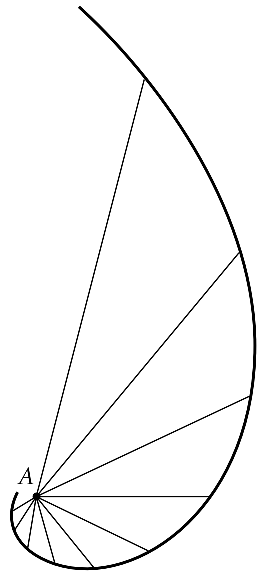
Heel algemeen is te stellen dat exponentiële functies op gelijk-lange domein-intervallen een *relatief* gelijke



figuur 1

groei vertonen. In figuur 1 staat de grafiek van zo'n functie in cartesische coördinaten, met een asymptotische *rechte a*. In figuur 2 staat de grafiek in poolcoördinaten, met een asymptotisch *punt A*.

Het getal e komt nu in beide gevallen te voorschijn als de relatieve groei van de functiewaarde – de groeifactor – over een speciaal domein-interval:



figuur 2

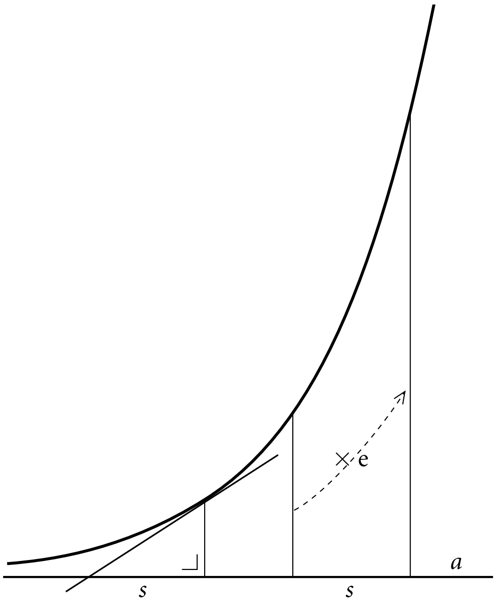
- in het cartesische geval is dit de in figuur 3 aangegeven afstand *s* op de asymptoot (tussen de snijpunten van raaklijn en loodlijn in een willekeurig punt op de exponentiële kromme);
- bij de poolcoördinaten-grafiek gaat het om de in figuur 4 aangeduide hoekgrootte τ (met een radiaalmaat gelijk aan de tangens van de hoek tussen voerstraal en raaklijn in een willekeurig punt van de logaritmische spiraal).

Analytische definitie

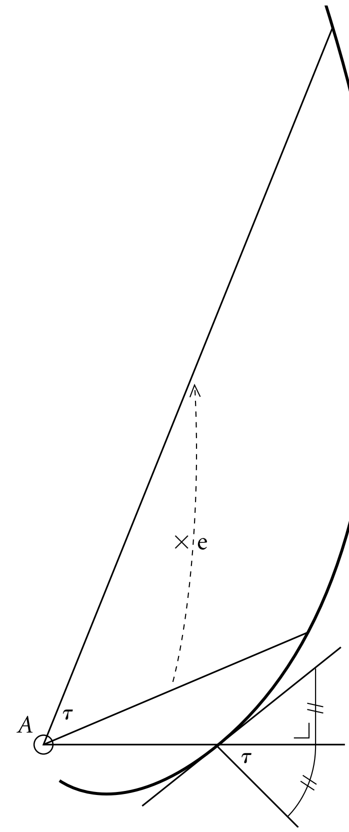
Een analytische vertaling van de algemene meetkundige definities in figuur 3 en 4, is als volgt te geven. Bij een *willekeurige* exponentiële functie E is de constante e te definiëren als:

e $= E(x+s) \,/\, E(x)$ met $s = E(y)/E'(y)$ voor elke x en y.

De traditionele definitie beperkt zich tot het heel speciale geval waarbij $E = E'$. En dus met $s = 1$ en e $= E(x + 1)/E(x)$, het grondtal van de speciale functie E.)



figuur 3



figuur 4

Het cumulo-getal

Het getal e komt voor als een constante verhouding in zowel iedere (cartesische) exponentiële kromme, als in iedere logaritmische spiraal. Beide soorten krommen brengen een cumulatieve groei in beeld (een opstapelende groei, een ideale rente-op-rente-groei). Er lijkt daarom reden om het getal 29718… verbaal aan de duiden als het *cumulo-getal*.
(Met daarnaast eventueel 311415… als het *cyclo-getal*.)

Vraag

Wie kent leerboeken waarin een van de hier gegeven definities van e gebruikt wordt? En wie kent andere varianten van de definitie van e, waarbij een zo algemeen mogelijke situatie als uitgangspunt genomen wordt; en waarbij liefst geen hogere wiskunde zoals limieten, integralen of afgeleiden voorkomen? Ik houd me aanbevolen.

Euro-gedoe

In 2002 komen de euromunten in omloop. Het is aannemelijk dat er in Nederland na verloop van tijd meer buitenlandse euromunten in omloop zijn dan Nederlandse. Er komt een eurocent (dus elf verschillende), een eurotweecent (dus elf verschillende), een euro-stuiver, enz. Op hoeveel verschillende manieren kun je nu een dubbeltje betalen?
Na enig rekenen beperkte ik me al gauw tot een vijf cent. Veel plezier.

Wim Schaafsma

Van de bestuurstafel

Wereldwiskunde Fonds *is weer op zoek naar*

NIEUWE PROJECTEN

Ik had u in een vorig nummer nieuws beloofd over het lustrum, maar de tekst daarover van de Lustrumcommissie was niet op tijd binnen, dus dat sparen we op voor de volgende keer. Maakt u zich niet ongerust, het lustrum zelf verdagen we niet, dat komt allemaal prachtig in orde zo vlak na de millenniumschok, maar hoe precies blijft nog even ongewis.

Een andere actieve werkgroep is het Wereldwiskunde Fonds, en ik ruim hierbij graag ruimte in voor een oproep voor nieuwe projecten.

Het Wereldwiskunde Fonds is een werkgroep binnen de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het doel van deze werkgroep is:
- ondersteuning bieden aan het wiskundeonderwijs in Derde Wereld-landen door middel van financiële bijdragen aan nader te bepalen projecten;
- wiskundedocenten ‘hier’ te laten zien dat er ‘daar’ ook collega’s zijn die zich bezig houden met soortgelijke zaken als zij zelf, maar ook met heel andere vragen en problemen.

Tot op heden werden projecten gesteund in Zambia, Zimbabwe, Mozambique, Bhutan en op de Malediven.
Er kunnen tot 1 mei weer nieuwe aanvragen voor ondersteuning ingediend worden. Uit de ingediende aanvragen kiest de werkgroep een of twee projecten.
Criteria voor het toekennen van subsidies zijn:
- alleen projecten in Derde Wereld-landen;
- zichtbare ondersteuning;
- voorkeur voor projecten in het voortgezet onderwijs;
- projecten die een vervolgproject kunnen krijgen hebben een pre;
- betrouwbaarheid en goede communicatie spelen een grote rol bij toekenning.

Bent u betrokken bij zo’n project of kent u iemand die dat is, dan kunt u een aanvraag indienen bij de secretaris van het Wereldwiskunde Fonds:

Gerben van Lent
Admiraliteitskade 21 H
3063 ED Rotterdam

U kunt de aanvraag het beste eerst even met hem doorspreken.
telefoon: 010 - 452 45 56
e-mail: jonglent@worldonline.nl

Aanvragen moeten voor 1 mei binnen zijn.

Marian Kollenveld

Examenbesprekingen in mei 1999

VBO-B woensdag 19 mei 1999
van 19.00 - 21.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*
UTRECHT	
Jaarbeurs	Mw. M. Lambriex- van der Heijden

VBO/MAVO-C/D donderdag 20 mei 1999
van 15.00 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*
ALKMAAR	
OSG Willem Blaeu Robonsbosweg 11 072-5122477	C: Mw. C.E. Gaykema 020-6131802 D: idem
AMSTERDAM	
CSG Buitenveldert De Cuserstraat 3 020-6423902 *(CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51)*	C: Hr. M. Westland 020-4421797 D: idem
BURGUM	
CSG Liudger Tj. H. Haismastraat 1 0511-460260	C: Hr. J.W.H. de Graaf 058-2561455 D: idem
GRONINGEN	
Zernike College Bordewijklaan 34 050-5266866 *(station buslijn 5)*	C: Hr. S.A.K. Kooiman 050-5251289 D: Hr. J. Rijnaard 050-5254709
'S HERTOGENBOSCH	
Ds. Pierson College G. ter Borchstraat 1 073-6442929 *(NS Den Bosch-OOST)*	C: mw. M. Lambriex- van der Heijden D: idem
ROTTERDAM	
Chr. College Henegouwen Henegouwerplein 16 010-4774533	C: Hr. W. de Jager 0184-683829 D: idem
ZEIST	
KSG De Breul Arnhemsebovenweg 98 030-6915604	C: Hr. R.J. Roukema 0346-560429 D: idem
ZWOLLE	
Greijdanus College Campus 5 038-4698698	C: Hr. R. Kronenberg 038-4210044 D: idem

HAVO-A donderdag 20 mei 1999
van 16.00 - 18.00 uur

HAVO-B maandag 31 mei 1999
van 18.30 - 20.30 uur

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT	
De Amersfoortseberg Hugo de Grootlaan 25 033-4618845	A: Hr. A.B. v.d. Roest 0318-543167 B: Hr. P.M.G.M. Kop 0182-529474
AMSTERDAM	
CSG Buitenveldert De Cuserstraat 3 020-6423092 *(CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51)*	A: Hr. H. Rozenhart 072-5716448 B: Hr. S.T. Min 0229-237756
ARNHEM	
Thomas à Kempiscollege Th. à Kempislaan 25 026-4452447	A: Hr. G.A.J. Voetelink 026-3886258 B: Hr. H. Rutten 024-3240637
GOES	
Buys Ballot College Bergweg 4 0113-213010	A: Hr. F. van Lamoen 0113-230878
'S GRAVENHAGE	
Sorghvliet Gymnasium Johan de Wittlaan 22 070-3451577	A: Hr. J.P.C. van der Meer B: Hr. B. de Jong 079-3213517

GRONINGEN	
Rölingcollege	A: Mw. H. Lüder
Melisseweg 2	050-5340695
050-5474141	B: Hr. J. Tolboom
	050-5776928

’S HERTOGENBOSCH	
Ds. Pierson College	A: Hr. W.J.M. Laaper
G. ter Borchstraat 1	040-2867720
073-6442929	B: Hr. C.J.M. Nienhuis
	0411-678501
(NS Den Bosch-OOST)	

ROTTERDAM	
Chr. College Henegouwen	A: Hr. R.E. Houweling
Henegouwerplein 16	0180-315302
010-4774533	B: Hr. B.L.G.P. Hillebrand
	0180-515210

ZWOLLE	
Van der Capellen SG	A: Hr. L.H. Rietveld
Lassuslaan 230	055-5419287
038-4225202	B: Hr. J.P. Scholten
	053-4768791

VWO-A maandag 31 mei 1999
van 16.00 - 18.00 uur

VWO-B dinsdag 25 mei 1999
van 16.00 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*

AMERSFOORT	
De Amersfoortseberg	A: Hr. C. Brouwer
Hugo de Grootlaan 25	0341-460552
033-4618845	B: Hr. F.W. Zwagers
	033-4752341

AMSTERDAM	
CSG Buitenveldert	A: Mw. G.W. Fokkens
De Cuserstraat 3	020-6438447
020-6423902	B: Hr. B. Giskes
	0299-655525
(CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51)	

ARNHEM	
Thomas à Kempiscollege	A: Mw.E.M.H. van den
Th. à Kempislaan 25	Berg-de Both
026-4452447	024-3551414
	B: Hr. J.M. de Geus
	0575-521442

GOES	
Buys Ballot College	A: Hr. S. Garst
Bergweg 4	0187-642177
0113-213010	

’S GRAVENHAGE	
Sorghvliet Gymnasium	A: Hr. C.D. Hendriks
Johan de Wittlaan 22	0174-620131
070-3451577	B: Hr. R.J. Klinkenberg
	070-3559938

GRONINGEN	
Rölingcollege	A: Hr. L. Tolboom
Melisseweg 2	050-3146093
050-5474141	B: Mw. H. Lüder
	050-5340695

’S HERTOGENBOSCH	
Ds. Pierson College	A: Hr. H.J. Kruisselbrink
G. ter Borchstraat 1	073-5216386
073-6442929	B: Hr. A.L.P. van Merode
	0162-313746
(NS Den Bosch-OOST)	

ROTTERDAM	
Chr. College Henegouwen	A: Hr. R.E. Houweling
Henegouwerplein 16	0180-315302
010-4774533	B: Hr. H.R.K.T. Hillebrand
	0180-523552

ZWOLLE	
Van der Capellen SG	A: Mw. A. Breeman
Lassuslaan 230	038-4539985
038-4225202	B: Hr. A.T. Sterk
	055-3666466

Harry Chambone, NIET de Docent van het Jaar

Wereldberoemd in het Westland

De docent voor het voetlicht brengen. Dat was de achterliggende gedachte bij de eerste verkiezing van de Docent van het Jaar. Op 28 januari werd op de NOT '99 voor het eerst het bronzen beeldje 'De KlasseMeester' uitgereikt. Niet aan Harry Chambone, die werd tweede. Ook dat was voldoende om flink voor het voetlicht te komen. Maar of de wiskundeleraar aan de Gemeentelijke Daltonmavo in Naaldwijk daar nu zo blij mee is?

Harry Chambone heeft gemengde gevoelens over de verkiezing. En dat is zeer zeker niet omdat hij teleurgesteld zou zijn over zijn tweede plaats, want hij vindt dat de motivatie bij zijn voordracht klopte, dat er geen woord van overdreven was. En hij durft te zeggen dat ie een goede leraar is.
'Maar let wel, er zijn 74 docenten voorgedragen. Je maakt mij niet wijs dat er tussen al die anderen die niet voorgedragen zijn, niet ook hele goede zitten. Ik werd tweede, maar wat ben ik dan?'
Geen teleurstelling dus, maar wel een ongemakkelijk gevoel. Dat heeft Harry al sinds hij van z'n nominatie hoorde.
Ik wist van niets, helemaal van niets, herinnert hij zich van het moment dat hij uit de docentenkamer gehaald werd om bij de directeur te komen. Hij dacht dat er problemen met een van z'n leerlingen waren maar werd door z'n baas gefeliciteerd omdat hij een van de vier genomineerden voor de prijs was.
'Ik weet niet of ik daar wel zo blij mee ben', was de eerste reactie van de wiskundeleraar, *'de waardering die er uit spreekt streelt, maar het had ook op een andere manier gekund. Je werkt in een team dat goed draait. Als je er dan eentje uitpikt voor zo'n nominatie, dan zeg je in stilte tegen de anderen dat zij niet zo goed zijn.'*

Eigenlijk is het allemaal niet zo heel erg belangrijk

Maar de nominatie was inmiddels een feit en het circus draaide op volle toeren. Z'n halve familie wist er al van voor dat hij zelf aan het idee gewend was.
'Dat heeft me toch twee rotdagen opgeleverd. Ik wilde die poppenkast niet. Eigenlijk wilde ik de hele zaak maar schrappen. Omdat ik het goed kan vinden met mijn directeur en de man zo trots was, heb ik dat niet gedaan. Ik kwam tot de conclusie dat het allemaal niet zo heel erg belangrijk en dus ook geen conflict waard was.'
De hoop dat het in ieder geval op school stil zou blijven tot 28 januari was een ijdele. LAKS trok naar Naaldwijk om zestien leerlingen aan de tand te voelen over meester Chambone.
'Dat die kinderen in het traject betrokken zijn, is natuurlijk erg leuk. Maar hun reacties waren niet geheel en al onbekend voor me. Zo eens in de twee jaar doe ik zelf ook een peiling met de roos van Leary. Je wilt toch weten of het de leerlingen bevalt wat je doet. Maar de blikken van verstandhouding van de kinderen die door LAKS geïnterviewd werden, waren prachtig. Zo van: Ik heb het meissie te woord gestaan mees enneh, vierde is ook goed.'
Als zestien leerlingen weten dat onze meester van onze school misschien wel KlasseMeester wordt, dan gaat dat natuurlijk als een lopend vuurtje. Ook buiten school, zodat Harry zelfs bij de bakker aangesproken werd over de verkiezing.
'Jaja, wereldberoemd in het Westland', kan hij er om lachen.

Vrijdagmiddag nablijven betekent in het Westland nogal wat

In dat Westland geeft Harry nu al negen jaar les. Op de Gemeentelijke Daltonmavo, die in een Naaldwijkse woonwijk verstopt ligt. Dat kan makkelijk want erg groot is de school niet. Nog net geen 325 leerlingen en iets meer dan twintig leerkrachten onderbouwen dat in cijfers. Harry Chambone voelt zich prettig bij die kleinschaligheid. *'Het is een van de aantrekkelijke punten van deze school. En het is er veilig. Je hoeft hier de deur van je klaslokaal niet op slot te doen.'*
Dat is niet het enige waardoor Harry al wat langer op dezelfde stek zit dan hij gewend is. In zijn eerste zes docentenjaren zag hij drie scholen voor hij naar de Naaldwijkse mavo kwam. Een school waar de zaken goed geregeld zijn volgens Harry.
'Het is prettig dat ik op verschillende scholen gewerkt heb, want dan kun je het verschil goed zien. Het is hier bijvoorbeeld best streng. Spijbelen doen ze hier niet veel. De kans is te klein dat dat ongemerkt lukt en als een leerling tegen de lamp loopt dan haalt ie zich een hoop ellende op de hals. Vrijdagmiddag nablijven bijvoorbeeld, en dat betekent hier in het Westland nogal wat. Die vrije middag wordt over het algemeen gebruikt om te werken, in de kas van pa bijvoorbeeld. Nablijven boort ze dus al gauw een paar tientjes door de neus.'
Wat Harry brengt op de mentaliteit van de Westlandse leerlingen. Die is volgens de wiskundeleraar toch wel anders dan in elders in het land.
'De kinderen werken allemaal, in een tuinbedrijf uiteraard of in een winkel. En ze werken hard, dat maakt ze toch anders. Ik merkte dat meteen tijdens de eerste twee uur die ik hier lesgaf. Het was natuurkunde en ik moest iets klaarzetten in het kabinet. Je verwacht dat ze met jou als nieuweling toch een geintje willen uithalen. Terwijl ik in het kabinet bezig was hoorde ik niets vanuit de klas. Ik dacht dat ze stilletjes het lokaal uitgeslopen waren dus ik ging eens kijken. Het was een bijzondere ervaring om ze allemaal nog aan te treffen, aan het werk.'

Het vak is het doel, jammer dat er kinderen bijzitten?

Toch is het niet alleen aan de instelling van de Westlandse leerlingen te danken dat het op de Gemeentelijke Daltonmavo goed gaat met wiskunde. Van de 72 examenkandidaten doen er 62 wiskunde. Op Economie na is het het meest gekozen vak op de school van Chambone. Volgens het juryrapport van de verkiezing speelt Harry daar een grote rol in. Zijn betrokkenheid, zijn duidelijke uitleg en zijn zeer goede individuele begeleiding worden in het rapport genoemd. Maar volgens Harry heeft het zeker ook te maken met de verandering van wiskunde als vak.
'Het gaat nu veel meer in de richting van de toepasbaarheid en dat maakt het een stuk leuker en interessanter. Hoewel een hoop wiskundigen het daarin niet met me eens zullen zijn, denk ik. Voor hen is het een crime dat er tegenwoordig meerdere antwoorden mogelijk zijn, als de redenering maar goed is. Maar waar gaat het nu eigenlijk om? Wiskunde moet toepasbaar zijn in het dagelijks leven. Sinussen en cosinussen horen daar niet bij. En bruggen bouwen, dat zal een mavo-kind toch nooit gaan doen? Nee, het is een leuk vak maar het is vooral een middel om met de kinderen bezig te zijn, en dat is het doel. Ik heb soms het idee dat voor de 1e graads en de academici het vak het doel is en dat het jammer is dat er kinderen bijzitten.'

Tot mijn 65e wiskunde geven? Nee, dat geloof ik niet

Wiskunde is dus leuk maar het gaat om het lesgeven op zich.
'Ik had ook een ander vak kunnen geven, Engels bijvoorbeeld, of maatschappijleer.'
Aan het lokaal van Harry kun je ook al niet zien dat er een wiskundedocent huist.
'Ik heb geen Eschers en geen kubussen aan de muur hangen. Hoewel, één Escher hangt er. Ik verloochen mijn vak niet.'
Maar de afwezigheid van geometrische afbeeldingen wil niet zeggen dat het een kaal lokaal is. Integendeel. De muren en het plafond hangen vol met zakjes van muziekwinkels.
'Een flinke verzameling ja, 284 stuks. Het begon met voetbalplaatjes. Om het begrip verzamelingen zichtbaar te maken.'
En dan staat er nog een racefiets die verdacht veel op het rijwiel uit de show van Bert Visscher lijkt.
'Hij lijkt er niet alleen op, het is hem echt. Bij het laatste optreden werden alle rekwisieten verloot. Ik won de fiets en zei direct dat ie een mooi plekkie op school zou krijgen.'
Als het aan Harry ligt zal de fiets nog zo'n anderhalf jaar kunnen staan waar hij staat. Dan heeft hij de studie schoolleider voortgezet onderwijs afgerond en wordt het tijd om wat anders te gaan doen. In een leidinggevende positie, met nog meer nadruk op de begeleiding van leerlingen.
'Want dat is misschien nog wel belangrijker dan het vak. En na vijftien jaar lesgeven heb ik wel een beeld ontwikkeld hoe het onderwijs in elkaar hoort te zitten. En tot mijn 65e wiskunde geven?
Nee, dat geloof ik niet. Want dat is denk ik wat die tweede plaats voor me betekent. Dat ik niet in moet dutten maar in beweging moet blijven. Dan blijft het leuk voor jezelf.'

Jan Willem Kommer

Netwerk ß-blokker / Studiestijgers

Henk Pol

Samenvatting

Enkele jaren geleden werd de Werkplaats opgericht. Dit overkoepelend samenwerkingsverband tussen de Rijksuniversiteit Groningen (RuG) en een dertigtal scholen in het noorden van Nederland heeft tot doel projecten op te zetten die de uitwisseling en de contacten tussen de RuG en deze scholen stimuleren. Al enkele jaren wordt er onder de paraplu van deze werkplaats door een tiental scholen en de Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen van de RuG gewerkt aan aspecten van de tweede fase van het VO. De eerste twee jaar werd het project ß-blokker uitgevoerd. Sinds 1997 wordt gewerkt aan het project Studiestijgers.

ß-blokker

De eerste twee jaar werd binnen het netwerk ß-blokker gewerkt aan aspecten van de tweede fase onder de noemer: onderzoeks-vaardigheden en probleemoplossende vaardigheden. Dit werk resulteerde in een bronnenboek met daarin verschillende onderdelen.

Handleiding Studiewijzers
Bijna iedere school in Nederland heeft onderhand wel studiewijzers in gebruik, of is van plan ze in te voeren. Een helder kader aangaande studiewijzers ontbreekt bij veel docenten. De handleiding beoogt een helpende hand te bieden bij het opstellen en implementeren van studiewijzers.

Handleidingen Zelfstandig Onderzoek
De werkgroep Zelfstandig Onderzoek heeft gewerkt aan een leerlingenhandleiding en een begeleiderhandleiding voor de uitvoering van een zelfstandig onderzoek door leerlingen in de tweede fase. Deze documenten geven de docent, TOA en leerling aanwijzingen over de opzet, uitvoering en verslaglegging van een zelfstandig onderzoek.
Naast deze worden voorbeelden gegeven van beoordelingslijsten en is ook een lijst van onderwerpen voor het zelfstandig onderzoek terug te vinden.

Probleemoplossen
Een vaardigheid die steeds belangrijker wordt is het probleemoplossen. Een werkgroep binnen het netwerk heeft gewerkt aan een document ‘breinbrekers bronnenboek’. Het document bevat algemene informatie over het gebruik van systematische probleemaanpak binnen de klas, maar ook concreet lesmateriaal dat binnen reguliere lessen en in speciale uurtjes gebruikt kan worden. Voorbeelden van problemen die worden gebruikt zijn bijvoorbeeld: ideale verpakking voor lucifers, een winst- of verliesberekening bij een gokspel en berekening van het oppervlak van de menselijke huid.
Practica kaarten
Veel aandacht is besteed aan het opzetten van een practicumlijn die onder andere het zelfstandig onderzoek mogelijk moet maken. Dit resulteerde in een kaartensysteem practica. De kaarten geven een beschrijving van allerlei apparatuur en materiaal, en het gebruik daarvan. De kaarten kunnen de leerling steun leveren bij het uitvoeren van praktische opdrachten.

Voortgangstoets algemene vaardigheden
Binnen de tweede fase hebben verschillende algemene vaardigheden een belangrijke rol toebedeeld gekregen. Om deze algemene vaardigheden te kunnen volgen en beoordelen werd een toets ontwikkeld. Van de toets is ook een computerversie ontwikkeld zodat gemakkelijk kan worden getoetst en geëvalueerd.
De handleiding beoogt een helpende hand te bieden bij het opstellen en implementeren van studiewijzers.

Studiestijgers

Tijdens het werken aan de verschillende bovengenoemde producten bleek dat vooral het Profielwerkstuk zoals dat in de nieuwe tweede fase wordt vereist nog veel problemen oplevert. Op dit moment worden op kleine schaal profielwerkstukken uitgeprobeerd op de scholen van ons netwerk. De ervaringen die nu worden opgedaan moeten een basis bieden voor het in de toekomst op een verantwoorde manier invoeren van het profielwerkstuk in het voortgezet onderwijs.

Wenst u meer informatie over het netwerk ß-blokker / Studiestijgers dan kunt u contact opnemen met de netwerkcoördinator. Bij hem is het ook mogelijk het ß-blokker-bronnenboek te bestellen. Het bronnenboek kost ƒ 245,- incl. verzendkosten.

Netwerkcoördinator:
Henk Pol
Vakdidactiek Natuurkunde RuG
Nijenborgh 4, 9747 AG Groningen
E-mail: H.Pol@fwn.rug.nl

Derde Europese Zomeruniversiteit in de Wiskundedidactiek Louvain/Leuven, van 15 tot 21 juli 1999

Geschiedenis en epistemologie in het wiskundeonderwijs
Deze zomeruniversiteit, die eerder gehouden werd in Montpellier (Frankrijk, 1993) en in Braga (Portugal, 1996), wordt in juli 1999 georganiseerd in Louvain-la-Neuve en Leuven (België).

Geschiedenis en epistemologie in wiskundelessen
De laatste jaren gaat heel wat aandacht naar het gebruik van historische aspecten in wiskundelessen. Dat gebeurt niet alleen om de lessen een culturele dimensie te geven, maar ook om de leerlingen beter de betekenis van bepaalde wiskundige ideeën te laten vatten. In de epistemologie worden het ontstaan, de evolutie en de zin van wiskundige begrippen en theorieën onder de loep genomen. Dit gebeurt vaak door te verwijzen naar de geschiedenis van het begrip, maar het kan ook los van de geschiedenis gebeuren.

Europese zomeruniversiteit
Deze zomeruniversiteit presenteert een reeks bijdragen uit diverse Europese landen, waar de geschiedenis en epistemologie gebruikt worden in wiskundelessen. Het is uitdrukkelijk niet bedoeling dat het enkel een bijeenkomst van 'onderzoekers' wordt. De zomeruniversiteit richt zich tot alle geïnteresseerde wiskundeleraren, op alle mogelijke onderwijsniveaus. Op het programma staan plenaire lezingen, parallelle uiteenzettingen, workshops en rondetafelgesprekken. Sommige van deze activiteiten zijn gezamenlijk voorbereid door een leerkracht met een onderzoeker in geschiedenis of epistemologie van de wiskunde. De officiële talen zijn het Nederlands, het Frans en het Engels. Elke uiteenzetting in één van die talen wordt ondersteund door transparanten of fotokopieën in een tweede taal.

Informatie
De zomeruniversiteit begint in Louvain-la-Neuve (van 15 tot 18 juli 1999). Op zondag 18 juli verhuist men naar Leuven, met onderweg de mogelijkheid van een bezoek aan Brussel. Tot 21 juli gaat de zomeruniversiteit verder in Leuven.
De lerarenopleiding van de Universiteit van Groningen kent bij deelname een nascholingscertificaat toe.
De brochure met verdere informatie en inschrijvingsformulieren kun je aanvragen bij:

Dirk Janssens
Academische Lerarenopleiding Wiskunde K.U.Leuven
Celestijnenlaan 200 B
B-3001 Leuven, België
tel: 00-32-16-327095
e-mail: Dirk.Janssens@wis.kuleuven.ac.be

Nadere informatie en aanmeldingsformulier ook via
http://ramses.umh.ac.be/noel/univete/Univetenl.htm

Aanbevolen

William Dunham
The Mathematical Universe,
John Wiley, New York, 1993
296 blz.

Dit boek is een alfabetische reis door grote bewijzen, problemen en persoonlijkheden. Het bestaat uit 25 hoofdstukken met de volgende titels: Arithmetic, Bernoulli trials, Circle Differential Calculus, Euler, Fermat, Greek geometry, Hypotenuse Isoperimetric Problem, Justification Knighted Newton, Lost Leibniz Mathematical personality, Natural Logarithm, Origins, Prime Number Theorem, Quotient, Russel's Paradox, Spherical Surface, Trisection, Utility, Venn Diagram, Where Are the Women?, X-T Plane, Z.
Aan de meeste titels is wel ongeveer af te lezen welke bewijzen, problemen en persoonlijkheden aan bod komen. Opmerkelijk is dat niet alleen regelmatig stellingen bewezen worden, maar dat hoofdstuk J hier apart aan gewijd is. Het meeste zal de lezers bekend zijn. Toch is het op zijn minst handig in een boek al deze zaken bij elkaar te hebben staan.
Van harte aanbevolen.

Overzicht Cito-uitgaven voor de tweede fase

Ger Limpens

Inleiding I

Hé, Ger, wat doe jij nou tegenwoordig?
Tsja, ik sta niet meer voor de klas, ik werk voor het Cito.

Het Cito? Dat zit toch in Arnhem en maakt die basistoets?
Ja, dat ook, maar ze doen nog veel meer. Behalve dan met die Eindtoets Basisonderwijs, waar ik niets mee te maken heb trouwens, houden ze zich daar in Arnhem ook natuurlijk bezig met de eindexamens.

Dus je hebt niks meer van doen met die tweede fase en al die moeilijke dingen als profielen, studielasturen, profielwerkstukken? Of handelingsdelen, technisch-instrumentele vaardigheden en wat er allemaal nog meer bij komt kijken?
Nou, dat moet je niet zeggen.

Inleiding II

Recent mocht ik diverse keren het hierboven geciteerde gesprekje of varianten daarop voeren. In het vervolg bleek dan dat vroegere collega's niet of nauwelijks op de hoogte waren van de diverse Cito-publicaties over deze onderwerpen. Omdat ik tegelijkertijd constateerde dat er nogal wat docenten rondlopen die wat benauwd aankijken tegen al die nieuwe zaken en vaak de indruk geven door de bomen het bos niet meer te zien, heb ik in onderstaand overzicht de verschillende voor wiskunde relevante Cito-publicaties op een rijtje gezet. Sommige publicaties zijn vrij algemeen en voor 'schoolbreed' gebruik bedoeld. Andere zijn specifiek afgestemd op het vak wiskunde. Maar alle publicaties zijn in onderlinge samenhang tot stand gekomen. Bedoeling is dan ook met dit geheel aan publicaties te komen tot een overzicht van alle aspecten van het schoolexamen.

Cito-uitgaven

Vanaf augustus 1996 hebben verschillende scholen onder begeleiding van het Cito geëxperimenteerd met examendossier en praktische opdrachten. Hier opgedane ervaringen hebben aan de basis gestaan van de volgende algemene en vakspecifieke publicaties.

Algemene publicaties

Handleiding Profielwerkstuk tweede fase havo/vwo, september 1998:
Het profielwerkstuk vormt het 'meesterstuk' op het gebied van de vaardigheden. Met name met dit onderdeel van het schoolexamen laat de leerling zien wat hij of zij in de loop van de schoolloopbaan aan vaardigheden heeft opgedaan en in hoeverre het gekozen profiel wordt beheerst. Het is dus een vakoverstijgende opdracht met alle gevolgen van dien voor de schoolorganisatie. Omdat wiskunde onderdeel is van ieder profiel is het bij ieder profiel dan ook mogelijk dat wiskunde een van de vakken is die in het profielwerkstuk voorkomen. Deze Handleiding Profielwerkstuk bevat een aantal 'instrumenten' waaruit scholen zelf kunnen kiezen om te komen tot een schoolbrede profielwerkstukopzet.

Handleiding Praktische opdrachten tweede fase havo/vwo, april 1998:
Deze handleiding bevat een raamwerk dat gehanteerd kan worden om praktische opdrachten te maken. Dit raamwerk is met name gericht op afstemming binnen secties en tussen de secties van een school onderling. Aan de hand van dit raamwerk kan een praktische opdracht worden geconstrueerd die samengesteld is uit een leerlingentekst, een docentenhandleiding en een beoordelingsmodel. Tevens vindt u in deze handleiding een hoofdstuk met leerlinginstructies. Hierin is aandacht voor plan van aanpak, logboek en verschillende presentatievormen. Tot slot vindt u in deze handleiding van diverse vakken een voorbeeld van een praktische opdracht, geconstrueerd volgens het bovenvermelde raamwerk. Leerlinginstructies en praktische opdrachten worden op diskette meegeleverd. Iedere school kan dus een en ander aanpassen aan eigen behoefte.

Vakspecifieke publicaties

Bundel Praktische opdrachten wiskunde tweede fase havo/vwo, voorjaar/zomer 1999:
Als vervolg op de bovengenoemde Handleiding Praktische opdrach-

ten is er bij diverse vakken een aparte bundel praktische opdrachten verschenen, allen vervaardigd volgens dat aldaar gepubliceerde raamwerk. Binnenkort verschijnt er een dergelijke bundel voor wiskunde. In deze bundel worden eveneens suggesties voor varianten op de opgenomen praktische opdrachten gedaan. Ook bij deze bundel wordt een diskette meegeleverd.

Syllabus schoolexamen wiskunde in de tweede fase havo/vwo, voorjaar/zomer 1999:
In deze syllabus die binnenkort zal verschijnen staat een overzicht van alle zaken die relevant zijn voor het schoolexamen. Ook worden alle veranderingen die voor het vak wiskunde aan de orde zijn op een rijtje gezet. Verder is er uitgebreid aandacht voor het verschijnsel PTA (programma van toetsing en afsluiting). Een dergelijke syllabus is reeds van enkele andere vakken verschenen. Alle syllabi schoolexamens zijn opgezet volgens een zelfde structuur dus overleg met andere secties naar aanleiding van de hier gehanteerde opzet behoort tot de mogelijkheden.

Cevo/Cito-uitgaven

De vernieuwingen hebben ook ingrijpende gevolgen gehad voor inhoud en vormgeving van de centrale examens. Om ieder een zo concreet mogelijk beeld te geven van de veranderingen hebben Cevo/Cito diverse syllabi centrale examens uitgebracht.

Syllabus wiskunde A met voorbeeldexamens voor de centrale examens in de tweede fase havo/vwo, juni 1998:
Deze Cevo/Cito-uitgave geeft een beeld van de veranderingen van de centrale examens wiskunde A. Verder treft u in de syllabus de toetsmatrijzen aan die aangeven hoe vakinhoudelijke aspecten, vaardigheden en de verhouding productie/reproductie aan bod zullen komen in de toekomstige examens. Ook wordt er ingegaan op de overgangsperiode als gevolg van de gefaseerde invoering van de tweede fase.
De syllabus besluit met voorbeeldexamens van de examenvakken wiskunde A1, 2 havo, wiskunde A1, vwo en wiskunde A1, 2 vwo. Ieder van deze voorbeeldexamens is voorzien van een antwoordmodel en een toelichting. Uiteraard zijn deze voorbeelden bedoeld als illustratie van examens zoals die worden afgenomen als de tweede fase volledig is ingevoerd. Iedere school heeft in de zomer van 1998 een gratis exemplaar van deze syllabus ontvangen. Bij contacten met vaksecties blijkt echter dat er nogal wat wiskundedocenten/secties zijn die van het bestaan van deze syllabus niet op de hoogte zijn. Extra exemplaren voor docenten kunnen tegen betaling worden besteld.

Syllabus wiskunde B havo met voorbeeldexamens voor de centrale examens in de tweede fase havo/vwo, juni 1998:
Deze syllabus kent dezelfde opzet als de wiskunde A syllabus voor de centrale examens maar dan alleen voor wiskunde B havo. Ook van deze syllabus is medio 1998 reeds een exemplaar verstrekt aan iedere havo/vwo-school zonder dat alle docenten daarvan op de hoogte blijken te zijn.

Syllabus wiskunde B vwo met voorbeeldexamens voor de centrale examens in de tweede fase havo/vwo, voorjaar 1999:
De vakken wiskunde B1 vwo en wiskunde B1, 2 vwo kennen een ingrijpende programmaverandering vergeleken met het ‘oude’ vak wiskunde B. De bijbehorende eindexamenprogramma’s van wiskunde B1, B1, 2 vwo zijn als gevolg daarvan in een later stadium afgerond, waardoor de bijbehorende syllabus met voorbeeldexamens ook later verschenen is. De opzet van deze syllabus is weer gelijk aan de opzet van het bovenvermelde tweetal syllabi centrale examens. In deze syllabus staan voorbeeldexamens van de vakken wiskunde B1, vwo en wiskunde B1, 2 vwo.
Deze syllabus verschijnt in het voorjaar van 1999. Ook hiervan zal iedere school één gratis exemplaar ontvangen. Extra exemplaren zijn via het Cito te bestellen.

Tot slot

En dan hoop ik voortaan natuurlijk alleen maar wiskundedocenten tegen te komen die zeggen dat ze het Cito voornamelijk kennen van hun ondersteuningspublicaties voor de tweede fase.
Over de uitgaven die al klaar zijn, is meer (schriftelijke) informatie bij het Cito verkrijgbaar. En ieder van de hier vermelde publicaties is, voor zover nu reeds verschenen, te bestellen via

Cito
Sectie Verkoop
Postbus 1034
6801 MG Arnhem
tel. 026 352 15 90
fax 026 352 11 35
e-mail: verkoop@cito.nl
internet: www.cito.nl

bespreking

Christiaan Huygens
Van Rekeningh in Spelen van Geluck
vertaald en toegelicht door Wim Kleijne
Epsilon uitgaven, Utrecht 1998
59 pagina's, *ƒ* 12,50
ISBN 90-5041-047-2

Het boekje 'Van Rekeningh in Spelen van Geluck' is door Epsilon uitgebracht met de uitdrukkelijke bedoeling dat het een plaats krijgt in het 'studiehuis' dat nu of volgend jaar alom in het voortgezet onderwijs realiteit gaat worden.
Het boekje bevat een verhandeling van Huygens over kansspelen. Het is in de 17*e* eeuw door de Leidse hoogleraar Frans van Schooten uit het Latijn in het Nederlands vertaald en gepubliceerd. Deze tekst was daarmee de eerste Nederlandstalige tekst over kansrekening en is dan ook van grote invloed geweest. Wim Kleijne heeft in dit boekje op de rechterpagina steeds de oorspronkelijke 17*e* eeuwse tekst geplaatst en deze op de linkerpagina in hedendaags Nederlands vertaald.
De oorspronkelijke tekst bestaat uit een veertiental 'voorstellen', zoals Huygens dat noemt, waarin beweringen worden gedaan die vervolgens worden aangetoond. De eerste drie 'voorstellen' handelen over de vraag hoeveel mij het spelen van verschillende spellen **waard** is als ik weet dat mijn kansen op het winnen van een aantal verschillende geldbedragen even groot zijn. In hedendaagse kansberekeningstermen zouden wij het dan hebben over verwachtingswaarden bij een zeker kansexperiment. Het aardige is juist dat de terminologie en de benadering een heel andere is dan wij en dus ook de hedendaagse vwo-leerling gewend zijn.
De 'voorstellen' 4 tot en met 9 gaan over de vraag hoe men de pot bij een dobbelspel, op een rechtmatige wijze, moet verdelen als men het spel voortijdig staakt. Door gebruik te maken van recursie wordt er voor steeds complexere situaties voorgerekend hoe de verhoudingen liggen.
De laatste drie 'voorstellen' laten zien wat eerlijke (ongeveer gelijke kansen) afspraken zijn die men maakt over het aantal worpen dat men doet met een dobbelsteen. Zo luidt de vraag bij voorstel 11: 'Te vinden het aantal worpen dat men kan nemen om met twee stenen twee zessen te gooien'. Een niet erg hedendaagse formulering, maar in voetnoten legt Kleijne iedere keer omstandig uit waar het om gaat. In dit geval dus om de vraag bij hoeveel worpen je een faire kans hebt om te winnen. Redenerend vanuit de kansen bij één keer gooien naar twee keer gooien enzovoorts komt Huygens tot de conclusie dat men zich bij 24 worpen tekort doet en bij 25 in het voordeel is.
Tot slot geeft Huygens nog een aantal 'voorstellen' zonder daarbij de oplossing te vermelden. De laatste zeventien pagina's bestaan uit: allerlei uitleg over het leven van Huygens, hoe wij zijn formuleringen in onze terminologie moeten plaatsen, in welke tijd het stuk tekst is ontstaan, nog wat extra literatuurverwijzing en de uitwerking van de laatste 'voorstellen'.
Ik heb het boekje met veel plezier gelezen. Bij de tekst van Huygens ervaar je, als je iets weet van kansrekenen, zowel een stuk herkenning alsook dat het zo'n andere ingang is om naar kansen te kijken. Het zou natuurlijk een echte verrijking zijn als de gemiddelde vwo-er straks niet alleen standaardtrucjes kan toepassen, maar ook, door er eens door deze bril naar gekeken te hebben begrip van het een en ander heeft. Ook het aantonen van de verschillende 'voorstellen' lijkt me een aardig stukje puzzel- en leeswerk voor vwo-leerlingen.
Echt jammer vind ik het dan ook, dat alles wat je zelf ziet en herkent in de tekst, in de laatste paragrafen uitgebreid wordt voorgekauwd. Het leren informatie te verzamelen, te bewerken en tot je nemen op allerlei manieren, één van de doelstellingen van het studiehuis, wordt zo wel erg simpel gemaakt. Maar wellicht kan dit boekje een klein onderdeel zijn van een veel groter project dat de toekomstige vwo-er op zich kan nemen voor bijvoorbeeld zijn profielwerkstuk. En als dat dan allemaal lukt in het toekomstige studiehuis met veel van dit soort boekjes, dan weet ik het zeker, dan zou het mij veel **waard** zijn, ware ik wat later geboren.

Gerdien Visser

Zebra-boekjes

De Vereniging heeft de afgelopen jaren veel inspanningen verricht om te komen tot een reeks Zebra-boekjes, bedoeld voor de invulling van de 40 slu vrije keuzeruimte in de examenprogramma's van vwo E&M, N&G en N&T.
Zoals eerder aangekondigd is het eerste Zebra-boekje uit: 'Kattenaids en Statistiek'. Dit is het eerste deel van wat een hele serie gaat worden.

Hoe te verkrijgen:
De afzonderlijke delen zijn verkrijgbaar bij de boekhandel, winkelprijs ƒ 14,75.
Een los deel bestellen bij Epsilon per giro kost ƒ 16,50 inclusief verzendkosten.

Voor scholen is een jaarabonnement aantrekkelijk:
zes exemplaren van vijf verschillende Zebraboekjes kosten (inclusief vijf keer verzendkosten) ƒ 400,–.

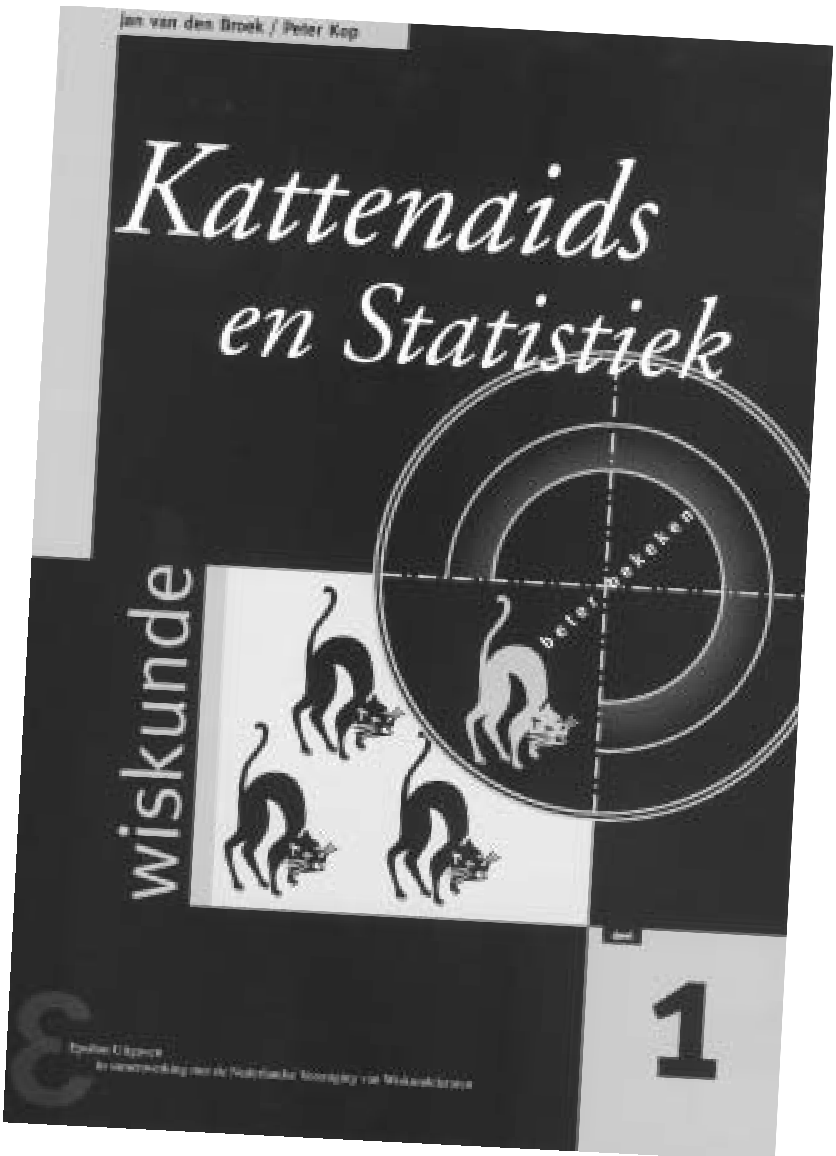
Leden van de NVvW kunnen zich ook individueel abonneren: de prijs voor een jaarabonnement van vijf delen per jaar is ƒ 75,– inclusief verzendkosten.

Op de diverse bijeenkomsten van de NVvW zijn de boekjes voor leden te koop voor ƒ 12,50 per deel.

De boekjes ontvangt u nadat u het genoemde bedrag over gemaakt heeft op postbanknummer 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van Zebra (+ nummer of titel).

Verdere informatie kunt u verkrijgen op de site van de Vereniging: www.euronet.nl/~nvvw.

Gun uzelf en uw leerlingen de (Zebra-)ruimte en geniet ervan, zoals de bedoeling was en is.



bespreking

J. van IJzeren **Moderne Planimetrie**
Utrecht 1997, Epsilon uitgaven 39, 208 blz.
ISBN 90-5041-046-4

Bij een moderne abstracte opbouw van de vlakke meetkunde wordt niet meer teruggegrepen op het axiomasysteem van Euclides. Er is te veel reparatie nodig om aan de huidige eisen van axiomatiek te voldoen. David Hilbert heeft in zijn 'Grundlagen der Geometrie' uit 1899 een moderne opbouw gegeven. Het boekje 'De logische grondslagen der euclidische meetkunde' van B.L.van der Waerden (Groningen 1937) wil een brug zijn over de kloof die er toen gaapte tussen de meetkunde die de wiskundestudent op de universiteit onderwezen kreeg en de elementaire, axiomatisch opgebouwde Euclidische meetkunde, die hij op school moest gaan onderwijzen. In 1999 is die kloof nog veel breder en dieper geworden.
Een eenvoudig axiomasysteem voor de vlakke meetkunde kan bijvoorbeeld beginnen met twee incidentie axioma's voor lijnen en punten, door iedere twee punten gaat precies één lijn, iedere twee lijnen hebben precies één snijpunt. Met nog een extra eis om trivialiteiten uit te sluiten. Hierdoor wordt een projectieve meetkunde gedefinieerd, door het aanwijzen van één lijn als oneindig verre lijn wordt het affiene vlak verkregen. Via de invoering van een polariteit worden begrippen als hoeken en lengtes van lijnstukken gedefinieerd.
Een andere weg is om uit te gaan van een getalsysteem, het eenvoudigste is van een lichaam uit te gaan, bijvoorbeeld de reële getallen, maar ook eindige lichamen, het lichaam van de rationale of van de complexe getallen zijn mogelijk, en dan coördinaten in te voeren.
In het boek van J. van IJzeren wordt een abstracte axiomatische opbouw van een affien vlak gegeven. De auteur start met drie axioma's:
Door twee punten gaat één lijn.
Door een punt buiten een lijn gaat één lijn die de eerste niet snijdt.
Er zijn drie punten die niet op één lijn liggen.
Met deze axioma's zijn nog vele meetkunden mogelijk. Bij voorbeeld een meetkunde van vier punten (0, 0), (1, 0), (0, 1) en (1, 1), met coördinaten modulo 2 gerekend. Om in het algemene geval verdere structuur te krijgen zijn nog axioma's analoog aan die van Desargues en Pappos nodig.
In 167 pagina's abstract deduceren wordt de meetkunde zover uitgebouwd dat begrippen als oppervlakte, kwadraat van de lengte, hoeken, etc. (in deze volgorde) ingevoerd kunnen worden. Vanaf hoofdstuk 11 op pagina 115 worden de traditionele meetkundige stellingen nu in de algemene context van een affien vlak afgeleid. Er blijken soms andere dan de klassieke bewijzen nodig te zijn om in deze algemeenheid over bissectrices, middelloodlijnen, omgeschreven cirkels enz. stellingen te bewijzen. Het zal de lezer niet verbazen dat in het geval dat in het vlak de rekenregel $-1 = 1$ geldt vele bekende zaken anders worden. Toch komen in dit deel stellingen als van Brocard, de Ceva, Feuerbach en anderen aan de orde.
Hoofdstuk 15 behandelt een thema dat de auteur al in 1941 in een boekje aan de orde stelde. Het betreft de trisectrices van

een driehoek. Een bekende stelling van Morley zegt dat een drietal van de snijpunten van deze trisectrices voor iedere, willekeurige driehoek, altijd de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek vormen. Evenals de stelling dat de drie bisectrices van een driehoek door één punt gaan een speciaal geval is van incidenties van snijpunten van binnen en buitenhoekdeellijnen, is deze stelling van Morley ook een speciaal geval van een algemenere uitspraak over trisectrices. Ook deze stelling behandelt de auteur in het kader van een willekeurig affien vlak.
In het laatste hoofdstuk komt ordening, corresponderend met speciale eigenschappen van het betreffende lichaam aan de orde. Dan pas kan er over het binnengebied van een driehoek gesproken worden.
Het boek bevat een interessante theorie, maar de bestudering ervan, met behulp van de ingevoegde opgaven, is geen eenvoudige zaak. De gekozen abstracte algemene weg vraagt subtiele redeneringen. De inperking tot de in de euclidische (school) wiskunde gebruikelijke situatie wordt van tijd tot tijd duidelijk aangegeven. Maar toch vraagt deze aanpak dat men in eerste instantie afziet van de bekende meetkunde, die als model voor de ons omringende ruimte bruikbaar is. Verwijzingen naar andere literatuur over deze meetkundige structuren ontbreken. Men moet geen directe toepasbaarheid van dit boek in de nu weer actuele toepassing van de meetkunde in het voortgezet onderwijs verwachten.

F. van der Blij

40 jaar geleden

1137
Van een oneindig voortlopende meetkundige reeks is

$$t_k = \left(\frac{x+6}{2x+3}\right)^{k-1}$$

a Voor welke waarden van x is deze reeks convergent?
b De som van de reeks is een functie van x. Teken de grafiek van deze functie (met inachtneming van het onder **a.** gevonden resultaat).

(Gymnasium 1958)

1138
Gegeven is de vergelijking $x^4 - x^2 + p = 0$, p is reëel.
a Voor welke waarden van p is het aantal verschillende (reële) wortels van deze vergelijking resp. 4, 3, 2, 1, 0?
b Dit aantal is blijkbaar een functie van p. Teken de grafiek van deze functie.

(Gymnasium 1958)

1141
Gegeven is de kubus *ABCD-EFGH*. *P* is het midden van *AD*; *Q* het midden van *BC*; *R* ligt op *CD* zo, dat *CR* : *RD* = 1 : 3.
a Bewijs dat *DF* loodrecht op vlak *ACH* staat.
b Construeer in de stereometrische figuur de rechten, die *PQ*, *BD* en *ER* snijden en *DF* loodrecht kruisen.

(Gymnasium 1958)

Opgaven uit:
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 46 (1958-1959)

Zwaartelijnen

Wim Schaafsma

In de deur van de rokerskamer heb ik een wat ongemakkelijk gesprek met een jonge niet-roker. Natuurlijk, ’t is een collega, eentje uit de wiskundesectie zelfs, maar hij rookt niet. En daarbij weet hij vreselijk goeie wiskundelinks op internet, en voordat hij op onze school benoemd werd, was ik de deskundige.

Gelukkig kwam een leerling van mijn klas met een vragende blik op mij af. Dat zou een manier zijn om van dat arrogante nieuwlichtertje af te komen. Misschien moest ik wel een begeleidend vaderlijk initiatief tonen! Ietwat van opwinding gloeiend vroeg ik: ‘Kan ik je helpen, Joris?’
Met zelfverzekerde blik zei deze in zijn tweede fase verkerende puber: ‘Meneer Wim er zijn te weinig overlegruimtes beschikbaar op dit uur, en de bel is al gegaan, mogen we de sleutel van het lokaal? Dan kunnen we beginnen met onze taakstelling voor dit uur.’

Meneer Wim is een leraar die meegaat met zijn tijd, hij weet dat je leerlingen moet begeleiden, maar ook dat je afstand moet houden: ’t is niet gewoon Wim, maar meneer Wim. Net zoals op de basisschool: niet Nel, maar juf Nel. Aansluiting van beneden naar boven en andersom, is ’t hedendaags pedagogisch didactisch adagium.

Met tegenzin, maar begrijpende blik, (hopelijk was de lichaamstaal positief) gaf ik mijn lokaalsleutel aan de leerling. En met een bezorgd ‘kijk uit, de deur klemt een beetje’, ging de leerling naar de werkruimte.

Dat Volkskrantartikel van die twee oud-rectoren zit Wim nog wat dwars: hoe denkt die jonge hond tegenover hem daarover? Nee, de jonge hond staat te vertellen over een math-site in Ohio die me toch een grafiekenprogramma freeware aanbiedt dat je zonder aanpassingen en zonder java zomaar kan integreren in een 386-er. Daar heb je niet eens een geconfigureerde dubbelgestuurde switch-muis voor nodig!

Meneer Wim is een leraar die met zijn tijd meegaat, hij geeft geen les meer, hij begeleidt. Hij weet niet erg hoe dat nou precies moet, hij weet alleen dat je leerlingen nooit meer een echt antwoord mag geven. Je moet tegenvragen stellen zeiden ze op de cursus. ‘Handen op je rug onderwijs’ heet dat.

Meneer Wim begon zich te vervelen tijdens de lessen, hij vond er niks meer aan. Nadat hij zijn lokaal echt helemaal opgeruimd had, zijn bord elke les echt gepoetst had, ging hij zijn lokaal verfraaien, een postertje hier, een postertje daar.

Geen gele kleuren gebruiken! Da’s slecht voor kinderen met iets moeilijks bij de geboorte, daar worden ze agressief van. Had meneer Wim geleerd van de coördinator-niet-te-hanteren-kinderen.

Ook niet iets wiskundigs, dan is je lokaal te eendimensionaal!

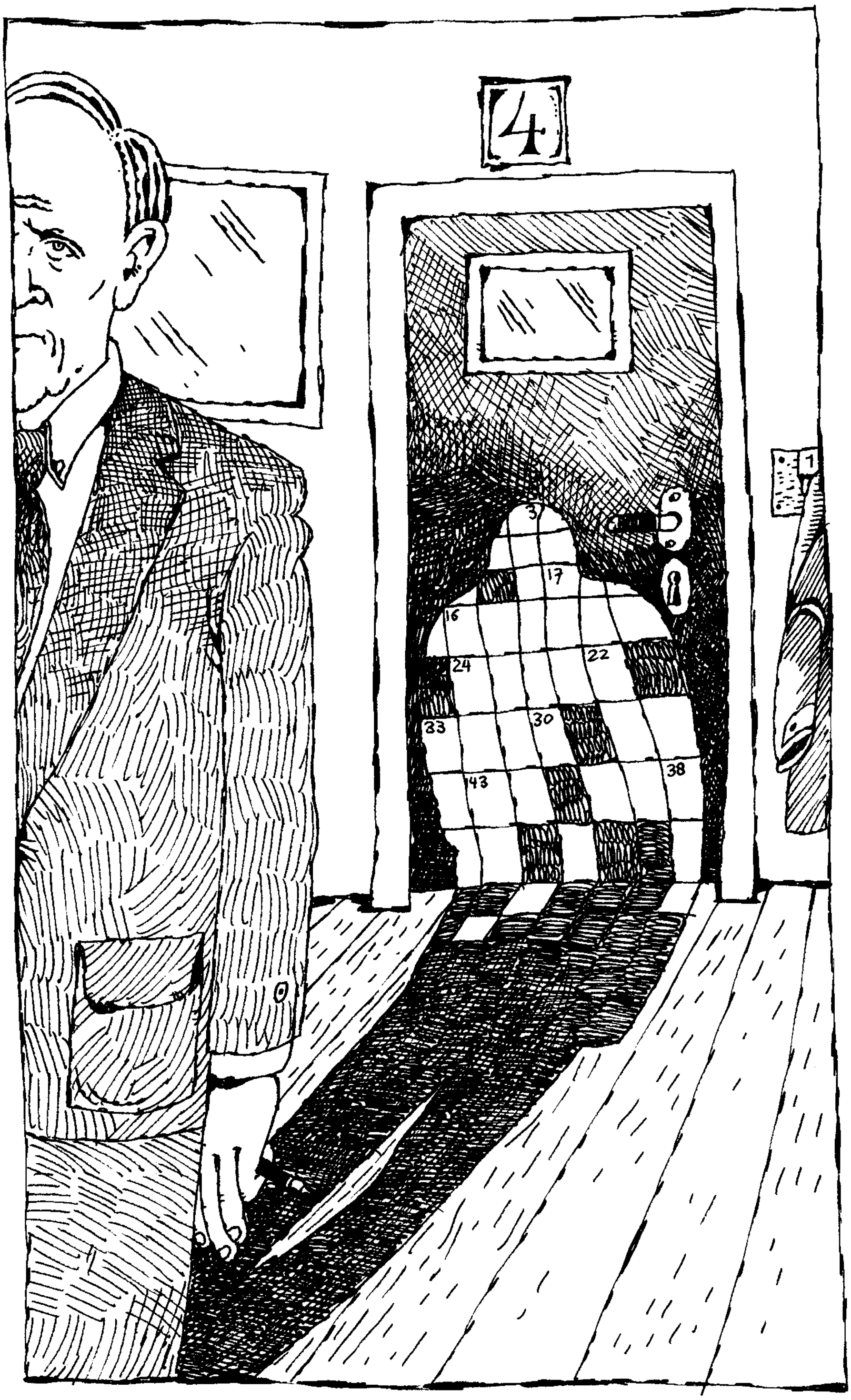
‘En budgettair is dat onverantwoord’, zegt de collega (?) afdeling ‘gebouwen en beheer’. ‘De leergelegenheid moet multi-inzetbaar zijn, en afgezien van het probleem van een bedenkelijk laag efficiëntiequotiënt van de wiskundelokalen, je hebt ook het eeuwige leven niet ’, zei hij met een zorgelijke blik.

Met een obligaat vies gezicht stak de collega zijn hoofd door de deuropening van het rokershok en zei: ‘Wat stinken jullie toch altijd.’ En samen liepen de collega’s door de garderobe naar de hal. Dagelijks bleef leraar Wim zich verbazen over de opschriften op de grote borden in de leerlingengarderobe:

‘VERBODEN JE HIER TE BEVINDEN’ en ‘VERBODEN HIER TE ROKEN’

Al enkele malen had hij de huishoudelijk coördinator proberen te overtuigen dat je je wel ergens moet ‘bevinden’ om je jas op te hangen. En als je je ergens al niet bevindt, dan kan je er ook niet roken. De laatste keer had de vroegere conciërge gevraagd wat collega Wim dan voorstelde. Leraar Wim wilde een groot bord in de garderobe met ‘WELKOM LIEVE LEERLINGEN’. Zonder een woord te zeggen was de manager ‘huishoudelijke zaken’ weggelopen. Hetgeen ongetwijfeld geregistreerd was door de videocamera die daar preventief was opgehangen.

In het leerhuis aangekomen zag leerkracht Wim tot zijn stomme verbazing dat geen van zijn leerlingen bij het tafelvoetbal stond, ook bij het tafeltennis, de gokautomaten of de binnenschoolse supermarkt niet! Snel graaide hij zijn schrapkaart uit de tas en controleerde zijn contacturen voor die dag. Dat klopte, gauw even de wekelijkse info doorgebladerd. Nee hoor, er was ook geen voorlichting of wat dan ook. Enigszins hulpeloos stond hij daar te bedenken waar zijn leerlingen allemaal konden zijn. Ineens wat zenuwachtig bedacht hij dat de leerlingen vandaag misschien echt les wilden. Misschien mocht hij iets klassikaals uitleggen.



Uitleggen, een broek kun je uitleggen, of een jurk. Maar een leerling niet, dat zou iets bloederigs worden. Met een onbestemde grijns overdacht Wim deze zaken.

Woordspelletjes waren zijn lust en zijn leven geworden. Veel cryptogrammen maken in de klas tijdens de niet-verplichte contacturen brachten hem al tot de vier-sterren boekjes. Tegen zijn vrouw had hij zich al ‘crypto-wiskundige’ genoemd. Maar toen moest hij dat weer uitleggen. Maar een omschrijving uit de NRC (12 horizontaal) van afgelopen zaterdag hield hem nog steeds bezig: ‘mathematisch afvallen om op de helft van je gewicht te komen’. Hij kwam er maar niet uit, en dat ergerde hem bovenmatig. Vooral omdat er een wiskundig tintje aanzat.

Met een ik-zit-niet-lekker- in-mijn-vel-gevoel ging meneer Wim naar zijn lokaal. Daar aangekomen zag hij dat de tafeltjes en stoelen in rijtjes van twee bij twee keurig in formatie stonden. En alle 34 leerlingen zaten doodstil geïnteresseerd te kijken naar oudcollega Van den Goernik die voor het bord stond. Op het bord stonden allemaal tekeningen!

Nog van verbazing vervuld bulderde hij ouderwets: ‘Wat is hier aan de hand?’

Joris stond met een sst-gebaar op, en troonde hem naar de gang.

‘Meester Wim’, zei Joris, ‘we moeten zelfstandig leren onze informatie en kennis te vergaren. We hebben meneer van den Goernik bereid gevonden ons wat klassikale lessen te geven. We hebben dat aangevraagd bij de centrale administratie in het hoofdgebouw, dat voorstel is goedgekeurd, het wordt betaald uit het potje ’speciale gasten’, en als u dat niet is meegedeeld door het hoofd ‘bijzondere projecten’, dan hebt u een probleem. Mag ik nu terug naar de les? Overmorgen is de finale-toets.‘ En weg was Joris.

Verbouwereerd strompelde Wimmie naar de docentenkamer, hij pakte zijn NRC uit de tas. Vulde de laatste omschrijving (12 horizontaal) in, en er was geen greintje overwinningsgevoel in zijn hoofd.

Recreatie

Opgave 692

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

Op 5 en 6 februari 1999 vonden in Noordwijkerhout voor de vijfde keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats. Van de vele hoogtepunten wil ik vooral de werkgroep ‘Gegoochel met Getallen’ noemen. Naast wiskundeleraar is Job van de Groep van het Oosterlicht College te Nieuwegein ook goochelaar. Voor deze NWD had hij goocheltrucs verzameld met een wiskundige achtergrond.
Na afloop van de workshop kregen de deelnemers een exclusief boekje met 27 (wiskundige) trucs. Hij eindigt zijn voorwoord met ‘Ik houd mij aanbevolen voor andere, mij niet bekende “wiskundige” toverkunsten’.
Dus … als u een wiskundige truc kent, of literatuur hierover bezit, schrijf dan naar Job van de Groep, Klaverkamp 37, 4133 TD Vianen, 0347-373086.
Hij zal het zeer waarderen !

In een oude duitse goocheldoos vond ik de volgende truc. Een toeschouwer wordt gevraagd een positief geheel getal (≤ 40) in gedachten te nemen. De toeschouwer vertelt op welke kaarten zijn getal staat: arabisch of romeins. Na de vierde kaart roept de goochelaar het betreffende getal.

Tabelle 1

1	4	7	10	13
16	19	22	25	28
31	34	37	40	
II	V	VIII	XI	XIV
XVII	XX	XXIII	XXVI	
XXIX	XXXII	XXXV	XXXVIII	

Tabelle 2

2	3	4	11	12	13
20	21	22	29	30	31
38	39	40			
V	VI	VII	XIV	XV	XVI
XXIII	XXIV	XXV	XXXII		
XXXIII	XXXIV				

Tabelle 3

5	6	7	8	9	10	11
12	13	32	33	34	35	
36	37	38	39	40		
XIV	XV	XVI	XVII	XVIII		
XIX	XX	XXI	XXII			

Tabelle 4

14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37
38	39	40			

De vraag is natuurlijk: ‘Welk wiskundig principe zit hierachter ?’ Waarom arabische/romeinse cijfers ?
Als ik deze truc wil uitbreiden tot 100 (dus met ‘Tabelle 5’ erbij), op welke kaarten staat dan ‘60’ en in welke notatie: arabisch of romeins ?

Als u de oplossing denkt te weten, stuur deze dan binnen een maand in en 5 punten voor de doorlopende ladderwedstrijd is uw deel.
Om met Job te spreken: ‘**Veel magisch plezier**’.

Oplossing 689

Voor het vinden van alle oplossingen van $A^3 + 1 = B^2$, waarbij A en B gehele getallen zijn, vond ik indertijd het volgende bewijs:
De opgave is te schrijven als

$$(A + 1)(A^2 - A + 1) = B^2.$$

Omdat alle priemfactoren rechts in een even aantal voorkomen, moet dat links ook het geval zijn. De opgave is daarom ook te schrijven als

$$(A + 1)^2 \left(A - 2 + \frac{3}{A + 1}\right) = B^2.$$

Aangezien A en B geheel zijn, moet nu $\frac{3}{A + 1}$ ook geheel zijn.
Voor $A = 0$ vinden we $B = \pm 1$.
Voor $A = 2$ vinden we $B = \pm 3$.
Daarnaast voldoet naturlijk ook $A = -1$ met $B = 0$.

Toen ik, naar aanleiding van Recreatie 689, deze oplossing aan een aantal getaltheoretici liet zien, werd deze oplossing (terecht) afgekeurd. Voor de echte oplossing heeft men veel voorkennis nodig (o.a. over elliptische krommen) en bestaat het uiteindelijke bewijs uit enkele A4'tjes.
Helaas moet ik u voor een correcte oplossing verwijzen naar het boek 'On Mordell's Equation $y^2 - k = x^3$' van H. London & R. Finkelstein. (1973, Bowling Green State Univ. Press).

Zeer veel informatie kunt u ook vinden in het onlangs verschenen boek van Frits Beukers: 'Getaltheorie voor Beginners' (1999, Epsilon Uitgave 42).
Van harte aanbevolen !

Uiteraard zullen, na deze onbevredigende ervaring, alle inzendingen mild worden beoordeeld !
In 1844 vermoedde E. Catalan dat $x^m - y^n = 1$ alleen waar is voor $3^2 - 2^3 = 1$.
De getallen 8 en 9 spelen trouwens ook in de volgende opgave een unieke rol.
'Vind alle priemgetallen p waarvoor $2^p + p^2$ ook een priemgetal is'.
De enige oplossing is $p = 3$, waarbij $2^3 + 3^2 = 17$. inderdaad een priemgetal is.

Recreatie

Met 67 punten is winnaar van een boekenbon van *f* 50,–:

Harm Bakker
Zuiderbuuren 32
9363 HK Marum

Heel hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in dit schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Voor of op die datum dienen uw mededelingen bij de hoofdredacteur te zijn. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
7	17-05-99	01-04-99
8	24-06-99	13-05-99
1	02-09-99	08-07-99
2	14-10-99	02-09-99
3	25-11-99	14-10-99

Data nieuwe schooljaar
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur: cph@xs4all.nl

School en Computer 1999 Regionale ICT-onderwijs Dagen
7 april Amsterdam, RAI
14 april Nijmegen, Triavium
21 april Rotterdam, Erasmus Expo
Openingstijden: 12.00 - 17.00 u.
De toegang is gratis.
website: www.ess.nl
Zie ook blz. 162

Wiskunde Olympiade 1999
Eerste ronde
vrijdag 9 april 1999
Fred Bosman
026-3521294
Fred.Bosman@cito.nl

Symposium Examendossier exacte vakken
dinsdag 13 april 1999
APS, Cito en PMVO
APS: 030 - 2856618/712;
natuurentechniek@aps.nl
Zie advertentie blz. 210

Examendata
vbo/mavo C/D:
di. 18 mei 1999
havo wiskunde A:
ma. 17 mei 1999
havo wiskunde B:
wo. 26 mei 1999
vwo wiskunde A:
do. 27 mei 1999
vwo wiskunde B:
do. 20 mei 1999

Examenbesprekingen
vbo-B:
wo. 19 mei 1999:
19.00 - 21.00
vbo/mavo C/D:
do. 20 mei 1999:
15.00 - 18.00
havo-A:
do. 20 mei 1999:
16.00 - 18.00
havo-B:
ma. 31 mei 1999:
18.30 - 20.30
vwo-A:
ma. 31 mei 1999:
16.00 - 18.00
vwo-B:
di. 25 mei 1999:
16.00 - 18.00

Studiedag Historische Kring
zaterdag 29 mei 1999
HKRWO
Ed de Moor
030 - 2611611
Zie aankondiging blz. 187

Zomeruniversiteit wiskundedidactiek
do. 15 tot en met wo. 21 juli 1999
Louvain/Leuven België
http://ramses.umh.ac.be/noel/univete/Univetenl.htm
Zie ook blz. 205

9th International Congress on Mathematical Education (ICME)
31/6/00 - 6/8/00
Tokyo, Japan
www.ma.kagu.sut.ac.jp/~icme9/

Internetsites voor wiskundedocenten:

NVvW website
Bezoek regelmatig de website van de NVvW. Boordevol actuele informatie
www.euronet.nl/~nvvw

Archief WiskundE-brief
skyline.www.cistron.nl/wiskunde/brief/wb_main.htm

Ook voor leerlingen
Over Escher:
www.worldofescher.com
www.murmellius.nl
-vakken, -wiskunde
Leuke puzzels:
www.cut-the-knot.com
Fractals:
fractal.mta.ca/fractals
Links naar wiskunde-sites:
www.univie.ac.at/future.media/mo/collections.html
Prachtige wiskunde:
www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

Wiskunde Olympiade
olympiads.win.tue.nl/nwo

Wiskunde-nieuwsgroep
Voor de puzzelaars:
alt.math.recreational

Suggesties voor interessante sites graag zenden aan Kees Hoogland
e-mail: cph@xs4all.nl

Jan van den Broek / Peter Kop

Kattenaids en Statistiek

wiskunde

deel

1

Epsilon Uitgaven
in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Software bij

Moderne wiskunde 7e editie Netwerk 2e editie

Het gebruik van software is een integraal onderdeel van de examenprogramma's vwo wiskunde. Bij een aantal vwo-delen van *Moderne wiskunde 7e editie* en *Netwerk 2e editie* worden diskettes met leerling-licenties meegeleverd. De software komt overeen met het uitgangspunt van de Tweede Fase: zelfstandig werken en leren.

Diskettes met leerling-licenties bij:

vwo wiskunde	Domein	Software	Moderne wiskunde 7e editie	Netwerk 2e editie
A1	Statistiek en kansrekening	VU-Stat voor Windows	vwo A1 deel 3	vwo A1 deel 3
A2	Lineair programmeren	Orstat-LP Windows	vwo A2 deel 3	vwo A2 deel 2
A2	Discrete Dynamische modellen	Dynasys	vwo A2 deel 3	–
B1	Normale verdeling en toetsen van hypothesen	VU-Stat voor Windows	vwo B1 deel 5	vwo B1 deel 5
B1	Continue Dynamische Modellen	VU-Diff	vwo B1 deel 5	vwo B1 deel 5
B2	Voortgezette Meetkunde	Cabri Geometry II	vwo B2 deel 1	vwo B2

Schoollicenties

Gebruikers van *Moderne wiskunde 7e editie* en *Netwerk 2e editie* voor de Tweede Fase kunnen de schoollicenties (netwerk-versies) van deze nieuwe Windows-programma's met aanmerkelijke korting aanschaffen.

Neem voor meer informatie contact op met onze voorlichter Elka van der Steeg, tel (050) 522 63 11, fax (050) 522 62 55, email: voorlichting.vo.exact@wolters.nl

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

Wolters Noordhoff

419/9082