

Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

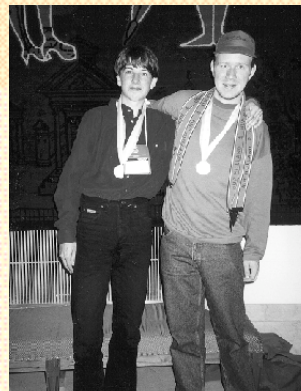
EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 73

1997-1998 juni

8



Astronomische

onderzoekopdrachten

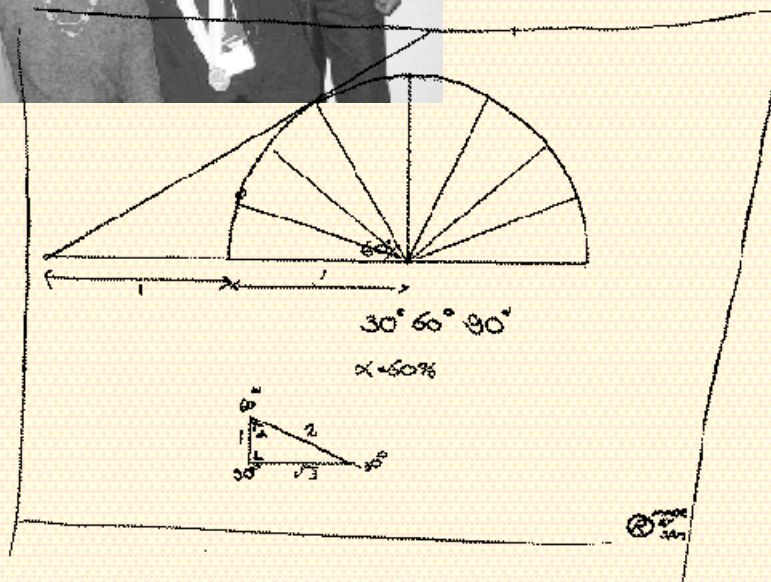
Foucault en

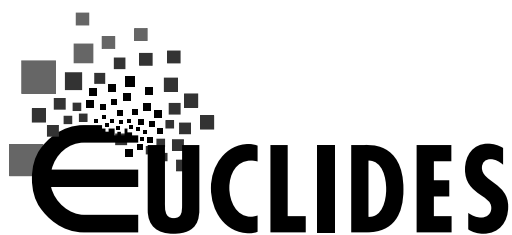
bolmeetkunde

Eerste aankondiging

jaarvergadering/

studiedag 1998





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Redactie

Dr. A.G. van Asch
Drs. R. Bosch
Drs. W.L.J. Doeve
Drs. J.H. de Geus
Drs. C.P. Hoogland *hoofddirecteur*
Ir. W.J.M. Laaper *secretaris*
W. Schaafsma
Ir. V.E. Schmidt *voorz./penningm.*
Mw. Y. Schuringa-Schogt *eindred.*
J. van 't Spijker
A. van der Wal

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem
e-mail: cph@xs4all.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.
Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Richtlijnen voor mededelingen:

- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter

dr. J. van Lint
Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle
tel. 038-4539985

Secretaris

W. Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail:

113015.261@compuserve.com

Ledenadministratie

Mw. N. van Bommel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: NVvW@euronet.nl

Contributie per ver. jaar: f 75,00

Studentleden: f 37,50

Leden van de VVWL: f 50,00

Lidmaatschap zonder Euclides: f 55,00

Betaling geschiedt per acceptgiro.

Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Abonnementsprijs voor personen: f 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: f 240,00 per jaar.

Betaling geschiedt per acceptgiro.

Losse nummers op aanvraag leverbaar voor f 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Maurits-hof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of:

L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891.

Adresgegevens auteurs

R. Bosch

Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

J. van den Brink

Freudenthal instituut
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht

J. Donkers

TU Eindhoven
Faculteit W&I
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

I. Gulikers

Fresiastraat 41
8013 SM Zwolle

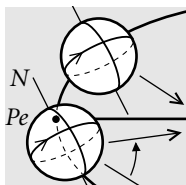
J. Jansen

Hofmeierstraat 16
5663 CK Geldrop

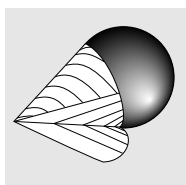
D. Kok

Volta-plein 45
1098 NP Amsterdam

Inhoud



255



263



276

254 Kees Hoogland
Van de redactietafel

255 Hans van Lint
**Astronomische
onderzoeksopdrachten**

258 Rob Bosch
 π en het getal 2

262 Aankondiging
Vakantiecursus 1998

263 Jan van den Brink
**Foucault en de bolmeetkunde
(1) De Slinger en de Parallel-
verschuiving**

268 Iris Gulikers
**Ervaringen met de
Tweede Fase**

271 Agneta Aukema, Marian Kollenfeld
Van de bestuurstafl

N V v W

272 W. Kuipers
Notulen jaarvergadering 1997

N V v W

273 Eerste uitnodiging
**Jaarvergadering/Studiedag
1998**

N V v W

273 Joke Daemen, Harrie Broekman
**Thema studiedag: Op zoek
naar wiskunde**

N V v W

274 Jacques Jansen
**De draaiende rechthoek en
een beetje lui zijn**

276 J.G.M. Donkers
**De XXXVIII Internationale
Wiskunde Olympiade 1997**

279 Aankondiging Nationale
Wiskunde Dagen 1999 en
Cursussen TU Delft

280 Aankondiging Studiedag
VeEX en Oproep

282 Boekbespreking

283 40 jaar geleden

284 Werkbladen

286 Recreatie

288 Kalender

In het vorige nummer meldde ik dat het wiskundeonderwijs zowaar ook eens positief in het nieuws was. Wie had kunnen vermoeden dat een maand later de kranten bol zouden staan van uiterst negatieve berichten over het wiskundeonderwijs: ‘naar de knoppen’, ‘pannenkoekwiskunde’, ‘rampzalig’, zijn nog maar een paar van de vele koppen boven de berichten.

Al deze publiciteit volgde op een oratie van dhr. Keune, uit Nijmegen, inmiddels hoogleraar algebra. Deze vindt onder andere dat de beste 25% van de vwo-leerlingen veel meer deductieve wiskunde (stellingen en bewijzen) moeten krijgen in de onderbouw. Of dit jaren-vijftig-model nu de oplossing is voor het hedendaagse wiskundeonderwijs en hoe dat in de klas te realiseren is, zijn natuurlijk interessante discussiepunten. Het is jammer dat in de berichtgeving negatieve uitspraken direct worden gegeneraliseerd naar het hele wiskundeonderwijs, waardoor wiskundeleraars weer eens opgezadeld worden met een vloed van stereotiepe beelden over wiskundeonderwijs. Freudenthal nam in deze discussie in ieder geval een duidelijk standpunt in: ‘Today, of course, mathematics is an enormously useful science, which, however, in order to obtain this status has had to cross a desert of uselessness where mathematics was to be nursed tenderly, by a spiritual aristocracy that was borne on the mass that had to learn mathematics, a useless mathematics, as a discipline of the mind.’

(Mathematics as an Educational Task (1973))

Discussie over onderbouw havo/vwo

In de volgende jaargang wil de redactie in ieder geval een discussie starten over wat voor de onderbouw havo en vwo mogelijkheden en onmogelijkheden zijn om de β -leerlingen in deze groep goed voor te bereiden op de Natuurprofielen in de Tweede Fase. Er zijn vast genoeg docenten en vakdidactici die daar genuanceerde en realistische ideeën over hebben.

vbo/mavo

In de plannen voor de herstructurering van vso/(i)vbo/mavo tot vmbo komt volgend jaar veel nadruk komen te liggen op de leerwegondersteuning en het praktijkonderwijs. De rol van wiskunde daarin zal ongetwijfeld belangrijk zijn. Er moet natuurlijk wel weer afgewacht worden wat het effect is van een nieuw kabinet op de voortzetting van deze plannen. Hopelijk zal tot de politiek doordringen dat veel ruimere middelen toedelen, met name voor het voortgezet onderwijs, misschien wel de meest efficiënte manier is om Nederland voorop te houden in technisch en technologisch opzicht.

Nieuwe wiskundeleraars

Wat in de advertenties in de kranten opvalt is dat er een zeer grote vraag is naar wiskundeleraars op alle niveaus. Gedeeltelijk komt dat waarschijnlijk door de arbeidstijdverkorting. Bovendien is echter de nieuwe aanwas van wiskundeleraars aan het afnemen. Als er serieuze tekorten aan wiskundeleraars gaan ontstaan is dat zeer zorgelijk. De meeste wiskundeleraars zijn prima in staat om nieuwe programma's op maat te snijden voor hun klassen. Daar is natuurlijk alleen wel wat ruimte, tijd en geld voor nodig.

Examens

De examens zijn inmiddels weer bijna achter de rug. Het eerste nummer van de nieuwe jaargang zal grotendeels gewijd zijn aan die examens. Reacties van lezers op de examens zijn altijd welkom bij de redactie. Deze zouden dan wel voor de zomervakantie binnen moeten zijn.

Ten slotte wenst de redactie u allen een welverdiende vakantie toe.

Kees Hoogland

Astronomische onderzoeksopdrachten

Hans van Lint

Inleiding

Het vak kosmografie is al lang geen verplicht vak (meer) op onze scholen. Het is wel een vak waar in het algemeen bij veel leerlingen belangstelling voor bestaat. In het kader van praktische opdrachten of profielwerkstuk is het mogelijk om talrijke leuke problemen uit de astronomie te vinden om door leerlingen te laten onderzoeken.

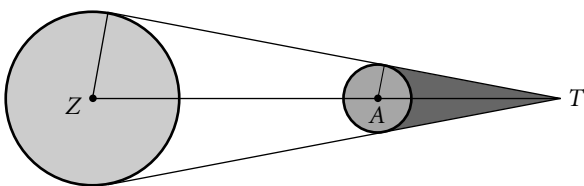
In dit artikel staan geen uitgewerkte onderzoeksopdrachten, maar wel hoop ik in dit artikel ideeën aan te dragen waarmee men bij onderzoeksopdrachten aan de gang kan gaan.

De onderwerpen die aan de orde komen zijn:

- Maansverduistering
- Zonsverduistering
- De Epicykeltheorie
- Tijdsvereffening

Maansverduistering

Om een idee te krijgen over mogelijke maansverduisteringen bekijken we eerst de schaduwkegel van de aarde. Daartoe bekijken we onderstaand plaatje.



figuur 1

De volgende gegevens zijn daarbij van belang:

straal aarde = 6400 km	= r
afstand aarde-maan	= $60r$ (gemiddeld)
afstand aarde-zon	= $23500r$ (gemiddeld)
straal maan	= $0,27r$
straal van de zon	= $109r$

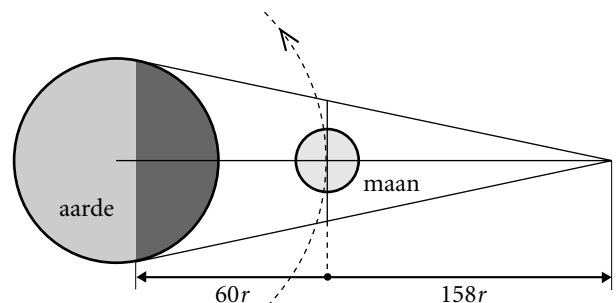
Je kunt nu vrij eenvoudig berekenen of de aardschaduw de maan wel kan raken. In het plaatje geldt:

$$\begin{aligned} ZT/AT &= \text{straal zon/straal aarde} = 109r/r = 109 \\ ZT - AT &= 23500r \end{aligned}$$

Uit deze vergelijkingen volgt: $AT = 218r$.

De schaduwkegel van de aarde is meer dan 3,5 keer zo lang als de afstand aarde-maan, dus kan de maan makkelijk worden getroffen door die schaduwkegel.

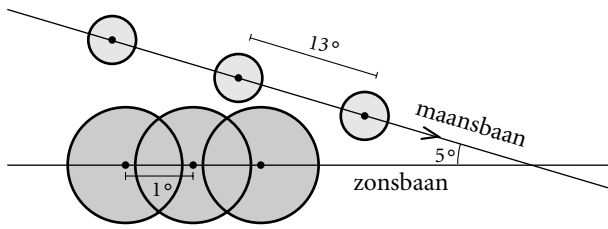
Het tweede dat bekeken kan worden, is of de maan wel helemaal in die aardschaduw terecht kan komen. Daartoe berekenen we met behulp van onderstaand plaatje de straal d van de aardschaduw op maansafstand van de aarde.



figuur 2

Er geldt $d/(218r - 60r) = r/218r$, waaruit volgt $d = 0,72r$. De diameter van de aardschaduw is dus $1,44r$ en dat is dus ruimschoots meer dan de diameter van de maan ($0,54r$) en dus past de maan makkelijk in de aardschaduwkegel.

Elke keer bij volle maan is er een situatie als in het plaatje. De reden dat er niet heel veel maansverduisteringen zijn is dat de maanbaan een hoek maakt van ongeveer 5 graden met de zonnebaan.

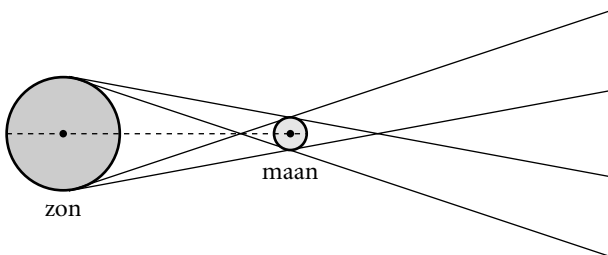


figuur 3

In de meeste gevallen schijnt de zon dus langs de aarde op de maan. Een doordenkertje: de enige ideaal volle maan is dus de verduisterde maan.

Zonsverduistering

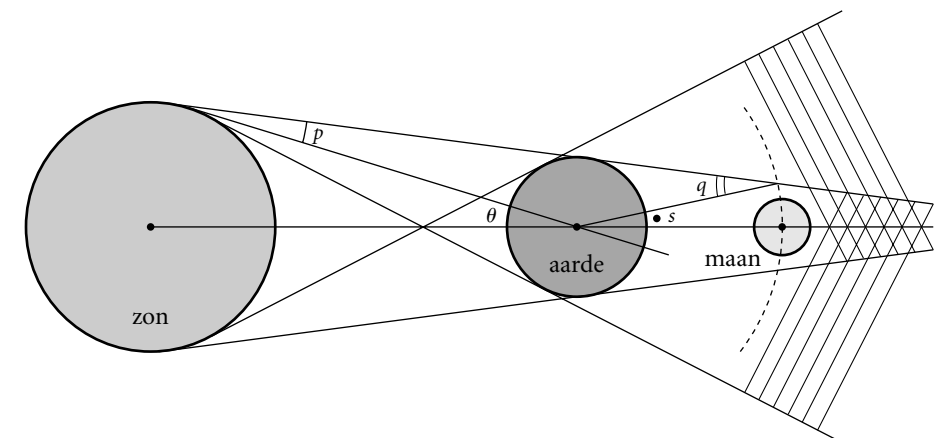
Op dezelfde manier moet voor een zonsverduistering de lengte van de schaduwkegel van de maan berekend worden. Uit de gegevens blijkt dat die lengte ongeveer $58r$ is. In het lijstje met gegevens stond dat de gemiddelde afstand aarde-maan gelijk was aan $60r$. Aangezien de banen van de aarde en de maan ellipsen zijn kan de afstand aarde-maan variëren van $57r$ tot $64r$, en dus zijn er toch af en toe zonsverduisteringen mogelijk.



figuur 4

Maansverduistering nader bekeken

Met wat meer wiskunde kunnen we ook nog eens kijken naar volle of partiële verduistering. Zoals eerder gemeld treedt bij maansverduistering de maan in de schaduwkegel van de aarde. In het plaatje hiernaast zien we dat we onderscheid moeten maken tussen een totale verduistering en een partiële verduistering. De schaduw waar de totale verduistering plaatsvindt noemen we de kernschaduw.



figuur 5

In het plaatje is p de zogenaamde zonsparallax (verschilzicht), dat is het hoekverschil tussen de richting waarin een waarnemer op aarde de zon ziet en de richting waarin een (denkbeeldige) waarnemer in het middelpunt van de aarde de zon ziet (gemeten vanaf de lijn door middelpunt en de waarnemer op het aardoppervlak). Dit komt neer op de hoek waaronder de aardstraal gezien wordt vanuit de zon.

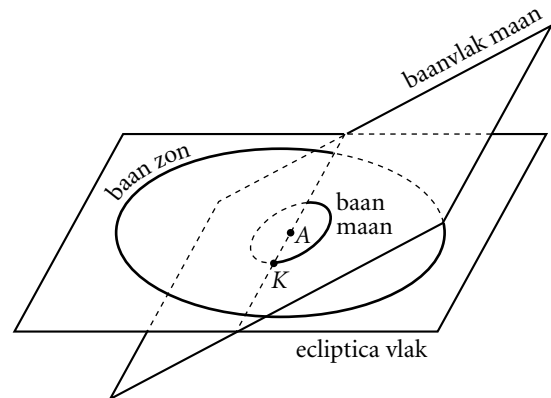
Net zo is q de maansparallax, θ de straal van de zon gezien vanaf de aarde en s de straal van de kernschaduw, gezien vanaf de aarde.

Duidelijk is dat $p + q = s + \theta$

De gemiddelde waarden van p , q en θ zijn bekend, namelijk $p = 9''$, $q = 57'3''$ en $\theta = 16'$.

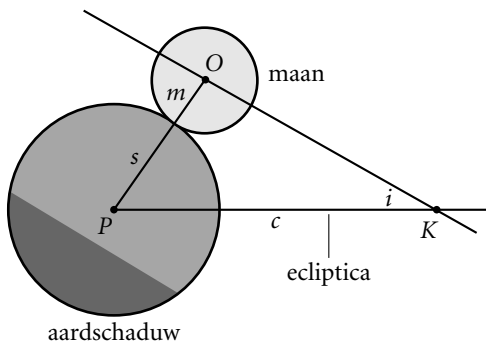
Hieruit volgt dat $s = 41'12''$

Door de hoek die het vlak van de maanbaan ten opzichte van het eclipticavlak heeft, komt er niet altijd een verduistering als zon en maan aan weerskanten van de aarde staan. Die helling ziet men hieronder.



figuur 6

Als nu de rand van de aardschaduw raakt aan de rand van de maan krijgen we de onderstaande figuur.



figuur 7

We moeten driehoek KPO eigenlijk zien als een bol-driehoek. We kijken immers naar de hemelbol. Met c wordt dus bedoeld de hoek waaronder we PK zien. (Net zo zijn s en m de hoeken waaronder we die stralen zien).

In de boldriehoeksmeting is een stelling die ons leert dat bij kleine waarden van c , s , m en i bovenstaande benaderingen (waarbij via radialen teruggerekend wordt naar graden) goed te gebruiken zijn.

Uit het plaatje volgt:

$$PO = c \cdot \sin i = s + m = p + q - \theta + m = 41' + 17' = 58'. \text{ Dan volgt } c = 10^\circ 15'.$$

Je kunt ook afleiden dat je een totale eclips krijgt als $c \cdot \sin i = s - m$. In dat geval geldt: $c = 4^\circ 37'$.

Epicykeltheorie

Als je planetenbanen langs de sterrenhemel bekijkt dan blijken die af en toe lussen te vertonen. Meetkundig is eenvoudig duidelijk te maken dat de richting waarin we vanuit de aarde naar een planeet kijken heen en weer draait. In vele astronomieboeken is te vinden hoe groot de stralen van de banen van de planeten om de zon zijn, en evenzo de omloopsnelheden van die planeten. Bij Mars kan je dat afronden op een straal die 1,5 maal zo groot is als de straal van de aardbaan en een snelheid die ruwweg tweemaal zo klein is als de omloopsnelheid van de aarde.

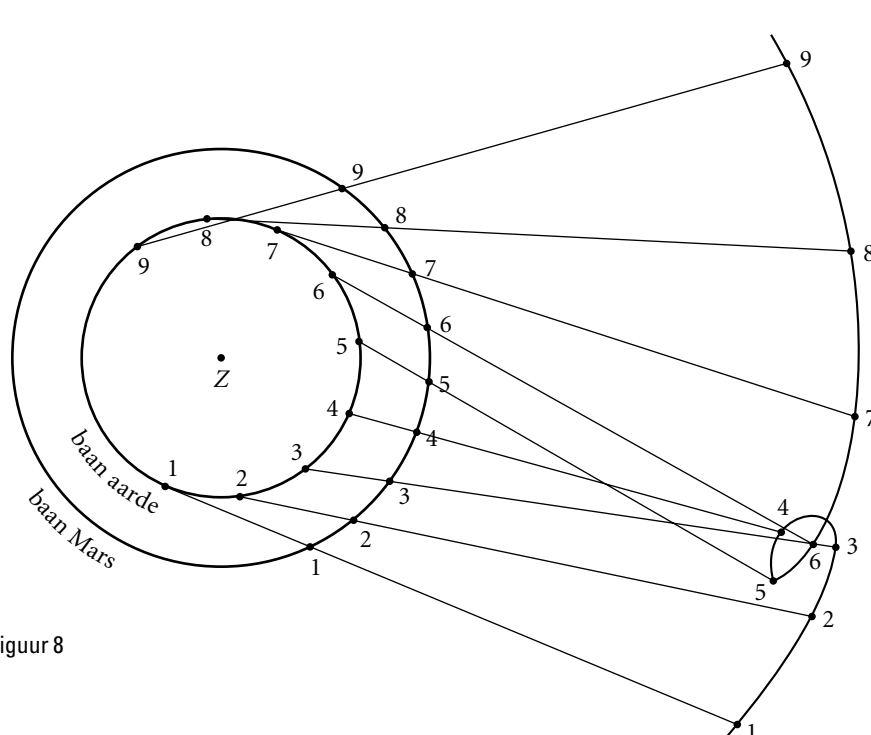
In figuur 8 is, rekening houdend met deze gegevens, een aantal overeenkomstige (wat tijd betreft) plaatsen van de aarde en Mars met elkaar verbonden. Het draaien van de richting is duidelijk te zien.

De lussen zijn alleen te verklaren als je rekening gaat houden met het feit dat de baanvlakken niet samenvallen. In de figuur zijn ze tegen een denkbeeldige hemelbol getekend.

In de oudheid werd als vanzelfsprekend aangenomen dat de aarde in het middelpunt van het heelal stond.

Ptolemaeus verklaarde ideeën van Hipparchus over het verschijnsel van de lussen, door aan te nemen dat fictieve planeten roteren langs een cirkelvormige deferent om de aarde. Om die fictieve planeten roteren de echte planeten langs cirkelvormige banen, de epicykels. Door nu geschikte stralen en geschikte omlooptijden te nemen konden de lusbewegingen van de planeten verklaard worden.

Met een beetje kennis van goniometrie en de grafische rekenmachine zijn vrij snel aardige beelden op te roepen. Bijvoorbeeld (veel variaties zijn mogelijk en het 'spelen' ermee kan nuttig zijn):



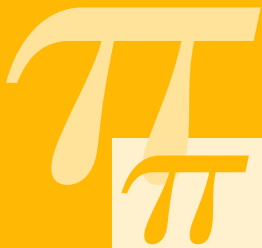
figuur 8

$$x_{1t} = 3 \cos(0.5t) \\ y_{1t} = 3 \sin(0.5t)$$

$$x_{2t} = \cos(4t) \\ y_{2t} = \sin(4t)$$

$$x_{3t} = x_{1t} + x_{2t} \\ y_{3t} = y_{1t} + y_{2t}$$

Historisch gezien is hier ook wel een opdracht aan toe te voegen. Ptolemaeus was de laatste geleerde aan de beroemde academie van Alexandrië. Het zou bijna 1500 jaar duren voordat Copernicus het beeld geschetst door Ptolemaeus



π en het getal 2

Het schrijven van een getal met bijvoorbeeld uitsluitend vijven is een regelmatig terugkerende puzzel in recreatierubrieken. Er is een soortgelijke puzzel met het getal π in de hoofdrol.

Francois Viète (1540-1603) vond namelijk een uitdrukking voor π als een oneindig produkt met uitsluitend tweetjes. Zijn afleiding berust op de verhouding van de oppervlakte van een regelmatige n -hoek en een regelmatige $2n$ -hoek en het herhaaldelijk verdubbelen van het aantal zijden van de veelhoek.

De oppervlakte $O(n)$ van de regelmatige n -hoek is n keer de oppervlakte ΔOAB (zie tekening).

Deze oppervlakte is gelijk aan

$$O(n) = \frac{1}{2}nr^2 \sin 2\alpha \quad (1)$$

Voor de oppervlakte van de regelmatige $2n$ -hoek die gelijk is aan $2n$ keer de oppervlakte van ΔOAC vinden we:

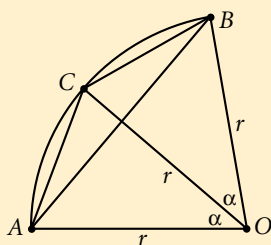
$$O(2n) = nr^2 \sin \alpha$$

Zodat

$$\frac{O(n)}{O(2n)} = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \cos \alpha$$

Als we het aantal zijden van de veelhoek nogmaals verdubbelen krijgen we:

$$\frac{O(n)}{O(4n)} = \frac{O(n)}{O(2n)} \times \frac{O(2n)}{O(4n)} = \cos \alpha \cos (\alpha/2)$$



Herhaaldelijk verdubbelen van het aantal zijden levert dan:

$$\frac{O(n)}{O(2^m n)} = \frac{O(n)}{O(2n)} \times \frac{O(2n)}{O(4n)} \times \dots \times \frac{O(2^{m-1}n)}{O(2^m n)} \\ = \cos \alpha \cos (\alpha/2) \dots \cos (\alpha/2^m) \quad (2)$$

Voor grote m is de oppervlakte van de regelmatige $2^m n$ -hoek ongeveer gelijk aan de oppervlakte van de cirkel dat wil zeggen:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} O(2^m n) = \pi r^2$$

Uit (1) en (2) volgt nu:

$$\pi = \frac{\frac{1}{2}n \sin 2\alpha}{\cos \alpha \cos (\alpha/2) \cos (\alpha/2^2) \cos (\alpha/2^3) \dots}$$

Viète startte met een vierkant zodat $n = 4$, $\alpha = 45^\circ$ en $\cos \alpha = \sin \alpha = \sqrt{1/2}$

en vond zo:

$$\pi = \frac{2}{\cos \alpha \cos (\alpha/2) \cos (\alpha/2^2) \cos (\alpha/2^3) \dots}$$

De cosinusfactoren in de noemer kunnen we met behulp van de dubbelehoekformule

$$\cos (\alpha/2) = \sqrt{1/2 + 1/2 \cos \alpha}$$

uitdrukken in $\cos \alpha$. We krijgen dan

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{1/2} \times \sqrt{1/2 + 1/2\sqrt{1/2}} \times \sqrt{1/2 + 1/2\sqrt{1/2 + 1/2\sqrt{1/2}}} \times \dots}$$

Rob Bosch

Literatuur

Boyer **History of Mathematics**

Berggren, Borwein & Borwein **Pi: a source book**

veranderde en, met gevaar voor ketter versleten te worden, de zon in het centrum van het planetenstelsel plaatste.

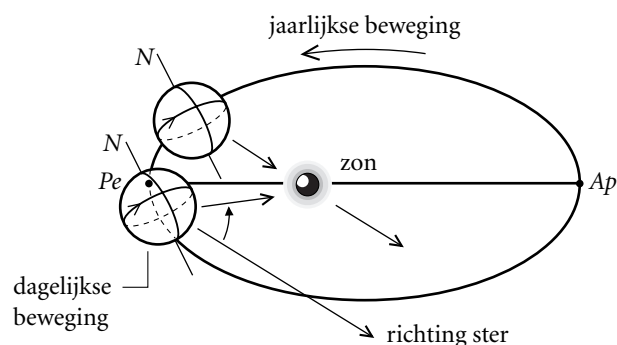
Tijdsvereffening

Voor ons gevoel worden de dagen in november ‘snel’ korter en evenzo in februari ‘snel’ langer. Vooral in de namiddag openbaart zich dat gevoel.

Gewoonlijk doen we het af met: ‘de zon is nu eenmaal korter of langer boven de horizon’.

Het begrip *tijd*, *de daglengte* en *de indeling van de kalender* hebben natuurlijk te maken met de manier waarop de aarde en de zon ten opzichte van elkaar bewegen. De ontwikkeling van de kennis hierover is heel interessant, onder andere omdat godsdienstige opvattingen heel lang invloed gehad hebben op de wetenschappers. De aarde moest in het centrum van het heelal staan en daarvan moest je uitgaan bij de verklaring van de waarnemingen die je gedaan had. (Dat hebben we ook al gezien bij de epicykeltheorie.) Bewegingen zijn relatieve zaken dus kan je bij de beschouwing van de beweging van de zon en de aarde ten opzichte van elkaar zowel *heliocentrisch* als *geocentrisch* te werk gaan.

In het plaatje hieronder bekijken we de jaarlijkse beweging van de aarde om de zon.



figuur 9

De baan is een ellips met de zon in één van de brandpunten (Wet van Kepler). De ellips ligt in het eclipticavlak. De as van de aardrotatie staat iets scheef ten opzichte van dit vlak en wel zó dat bij het perihelium de zon boven het zuidelijk halfrond staat (onze winter). De snelheid van de aarde in haar baan om de zon is het grootst in de buurt van het perihelium en het kleinst in de buurt van het aphelium.

We bekijken nu (theoretisch) een moment dat de zon door onze meridiaan gaat. Als de aarde 360 graden gedraaid is ten opzichte van de ‘oneindig’ ver weg gelegen sterren dan is de aarde iets opgeschoven in haar baan om de zon. Het gevolg is dat de aarde nog iets door moet draaien alvorens de zon weer in de meridiaan staat. De zon is iets naar het **oosten** verschoven.

Het voorgaande betekent dat we bij het vastleggen van de plaats van een ster op een bepaald moment van de dag, zeg ’s avonds 11 uur, zullen ontdekken dat de ster iets opschuift naar het **westen**.

De Grote Beer bijvoorbeeld zien we om de drie maanden 90° gedraaid aan de noordelijke hemel staan.

In 365 dagen gaat de zon 360° rond. Gemiddeld is dat per dag 360/365ste graad, dus zeg voor het gemak maar 1 graad.

De aarde moet dus gemiddeld elke dag 361° draaien alvorens de zon weer in de meridiaan staat.

Die 361° behoren bij onze tijd klok van 24 uur en de sterrendag, die voltooid was toen de ster weer door de meridiaan ging was dus 360/361ste deel van die 24 uur. Het verschil tussen een middelbare zonnedag en een sterrendag is dus gemiddeld:

$$24 \times 60 \text{ minuten} - 360 / 361 \times 24 \times 60 \text{ minuten} = 3,9889 \text{ minuten, dus ongeveer } 4 \text{ minuten.}$$

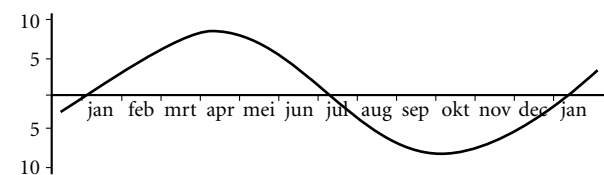
Aangezien de aarde in de buurt van het perihelium sneller gaat dan in de buurt van het aphelium, zal de zon er

- in onze winter vele minuten langer dan 24 uur over doen om weer door de meridiaan te gaan en

- in onze zomer vele minuten korter dan 24 uur.

Daar het proces continu is kunnen we inzien dat er een periodieke functie aan ten grondslag ligt en wel één met een periode van 1 jaar.

In de volgende grafiek geven we het tijdeffect aan, dat ontstaat op grond van het juist besproken gevolg van de elliptische baan van de aarde om de zon. Op de horizontale as staan de maanden van het jaar, terwijl verticaal hier aangegeven wordt hoeveel minuten men bij de tijd van de ware zon (aangegeven door de zonnenuijzer bijvoorbeeld) op moet tellen om de middelbare zonnentijd (onze klok) te krijgen.



figuur 10

De bijbehorende formule (benaderd) luidt:

$$y = 7,6 \sin(0,52t) \text{ met } t \text{ in maanden en } y \text{ in minuten.}$$

Wetten van Kepler

Belangrijk voor de beschrijving van banen van planeten zijn de drie wetten van *Kepler*:

- I De baan van een planeet is een ellips waarbij de zon in een van de brandpunten staat.
- II In gelijke tijden doorloopt de lijn die de zon verbindt met de planeet, oppervlakten van gelijke grootte. (Perkenwet)
- III Van twee planeten verhouden zich de kwadraten van de omlooptijden als de derde machten van de gemiddelde afstanden tot de zon.

Beweging is relatief, dus kan je zowel geocentrisch, als heliocentrisch redeneren bij de bestudering van de beweging van de aarde om de zon.

Definities

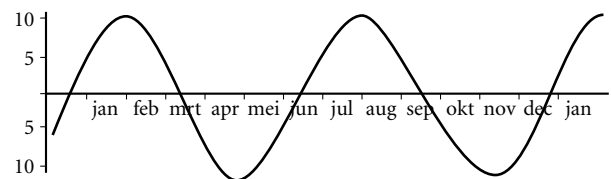
- 1 De baan van de aarde om de zon is een ellips, die ligt in een vlak dat we het *eclipticavlak* noemen. De *ecliptica* is de snijlijn van dit vlak met de hemelbol.
- 2 De *meridiaan* van een plaats is de snijcirkel van het vlak door de verticaal en de hemelpool met de hemelbol.
- 3 *Perihelium* en *aphelium* zijn de eindpunten van de lange as van de ellipsbaan, waarbij het perihelium dichterbij de zon ligt.
- 4 Als een ster door de meridiaan van een plaats gaat spreken we over *culmineren*. Er is een bovenste en een onderste culminatiepunt.
- 5 Een *sterrendag* is de tijd die verloopt tussen twee opvolgende doorgangen van een ster door zijn bovenste culminatiepunt.
- 6 Een *ware zonnedag* is de tijd tussen twee (gelijksoortige) doorgangen van de zon door de meridiaan.
- 7 Een *middelbare zonnedag* is de tijd tussen twee (gelijksoortige) meridiaandoorgangen van een denkbeeldige zon, die eenparig beweegt over de hemelequator.

Een geheel andere reden voor de tijdsvereffening is het schijnbare verschil in snelheid van de ware zon in zijn baan (ecliptica) en die van de denkbeeldige middelbare zon langs de hemelequator, op grond van de helling van het eclipticavlak ten opzichte van het equatorvlak. Het Lentepunt is het snijpunt van de ecliptica en de hemelequator en wel op de plaats waar de zon weer naar het noordelijk halfrond trekt.

Zelfs als we aannemen dat de zon eenparig langs de ecliptica beweegt, dan nog is in te zien dat bij even grote afgelegde bogen door ware zon en middelbare zon de meridiaan van de ware zon op de eerste kwart cirkel achter loopt bij de meridiaan van de middelbare zon. Het verschil neemt van nul eerst toe en daarna weer af tot nul op die kwart cirkel. Bij de volgende kwart cirkel is het net andersom en loopt de meridiaan van de ware zon voor, maar haalt die van de middelbare zon na een kwart cirkel hem weer in.

Zo is in te zien dat er een periodieke functie bestaat met periode 0,5 jaar, die telkens de voorsprong en de achterstand van de ware zon ten opzichte van de middelbare zon aangeeft.

In de volgende grafiek staat het tijdeffect dat het gevolg is van de helling van het eclipticavlak ten opzichte van het equatorvlak.

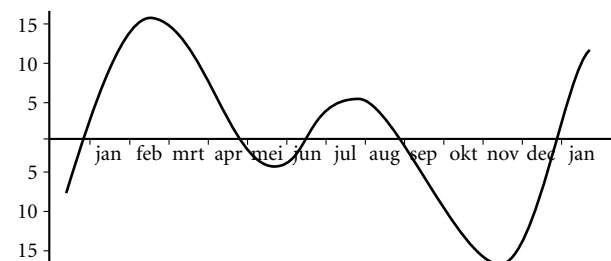


figuur 11

De bijbehorende formule (benaderd) luidt:

$$y = -10 \sin 1,05(t - 2,5)$$

De tijdsvereffening is de somgrafiek van de twee genoemde effecten. (Om nauwkeurige formules te berekenen is veel meer wiskunde nodig.)



figuur 12

De tijdsvereffening is de tijd die bij de volle 24 uur opgeteld wordt (of eraf gaat). Het is leuk om na te gaan dat wij het effect per dag, bijvoorbeeld in januari, merken aan het eind van de middag. De achterstand van de ware zon behoudt die zon in de nacht en hij komt dus ook later op. Dit wordt in de loop van de tijd gecorrigeerd doordat de zon meer naar het noorden komt.

Tot slot

Binnen de astronomie kunnen nog veel meer voorbeelden gevonden worden waar bij wiskunde aan gewerkt kan worden. Zeker als boldriehoeksmeetkunde gebruikt zou worden, zijn nog veel meer interessante zaken te onderzoeken. Mogelijk zal ik daar in een later artikel nog eens op ingaan.

Noot

Dit artikel is geschreven naar aanleiding van de lezing over dit onderwerp door de auteur op de Nationale Wiskunde Dagen 1997.

Vakantiecursus 1998

Voor leraren in de exacte vakken havo, vwo, hbo en andere belangstellenden.

De vakantiecursus die het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) in 1998 organiseert, heeft als thema:

Meetkunde, Oud en Nieuw

Ook dit jaar betreft het een tweedaagse cursus, die zowel in Eindhoven als in Amsterdam wordt gehouden.

Programma Amsterdam

CWI, Kruislaan 413, Amsterdam

vrijdag 28 augustus 1998

- | | |
|---------------|--|
| 15.00 – 15.30 | Ontvangst en opening |
| 15.30 – 16.15 | Analytische Meetkunde: het begin
A.W. Grootendorst, TU Delft |
| 16.45 – 17.30 | Schoolmeetkunde op analytische basis
J. van de Craats, KMA |
| 18.30 – 19.15 | Voronoi diagrammen
J.M. Aarts, TU Delft |
| 19.45 – 20.30 | Eindige Meetkunde
A.J. van Zanten, TU Delft |

zaterdag 29 augustus 1998

- | | |
|---------------|---|
| 10.00 – 10.45 | Perspectief
A. Verweij, TU Delft |
| 11.15 – 12.00 | Polytopen
J.H.M. Steenbrink, KU Nijmegen |
| 13.00 – 13.45 | Oefeningen
J. van de Craats, KMA |
| 14.15 – 15.00 | Niet-Euclidische Meetkunde
F. van der Blij, U Utrecht |
| 15.00 – 15.05 | Sluiting |

Programma Eindhoven

Rekencentrum TU Eindhoven, Den Dolech 2 te Eindhoven.

donderdag 3 september 1998

- | | |
|---------------|--|
| 10.00 – 11.00 | Ontvangst en opening |
| 11.00 – 11.45 | Analytische Meetkunde: het begin
A.W. Grootendorst, TU Delft |
| 12.15 – 13.00 | Schoolmeetkunde op analytische basis
J. van de Craats, KMA |
| 14.00 – 14.45 | Voronoi diagrammen
J.M. Aarts, TU Delft |
| 15.15 – 16.00 | Eindige Meetkunde
A.J. van Zanten, TU Delft |

vrijdag 4 september 1998

- | | |
|---------------|---|
| 10.00 – 10.45 | Perspectief
A. Verweij, TU Delft |
| 11.15 – 12.00 | Polytopen
J.H.M. Steenbrink, KU Nijmegen |
| 13.00 – 13.45 | Oefeningen
J. van de Craats, KMA |
| 14.15 – 15.00 | Niet-Euclidische Meetkunde
F. van der Blij, U Utrecht |
| 15.00 – 15.05 | Sluiting |

Cursusgeld

Het cursusgeld bedraagt f100,- waarbij een syllabus is inbegrepen. Dit bedrag is echter exclusief de kosten van maaltijden. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit. Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar.

Maaltijden

In Amsterdam bestaat de mogelijkheid op vrijdag een warme maaltijd (f20,-) te gebruiken en op zaterdag een lunch (f15,-). In Eindhoven bestaat de mogelijkheid op beide dagen te lunchen (f15,- per lunch).

Informatie

Opgeven kan tot en met 15 augustus 1998.

Een brochure met uitgebreidere informatie kunt u aanvragen bij Simone Panka

adres:

CWI

t.a.v. Simone Panka

Postbus 94079

1090 GB Amsterdam

tel.: 020 – 592 4009

e-mail: Simone.Panka@cwil.nl

Foucault en de bolmeetkunde (1)

De Slinger en de Parallelverschuiving

Jan van den Brink

'(...) En ik had deel aan die opperste ervaring: ook ik bewoog mee met alles en met het al, maar ik kon Hem zien, de Niet-Bewegende (...), de enige mogelijkheid tot verlossing van de vloek van het panta rhei (het 'alles beweegt')...' (Eco, 1996, 11-12).

De Slinger

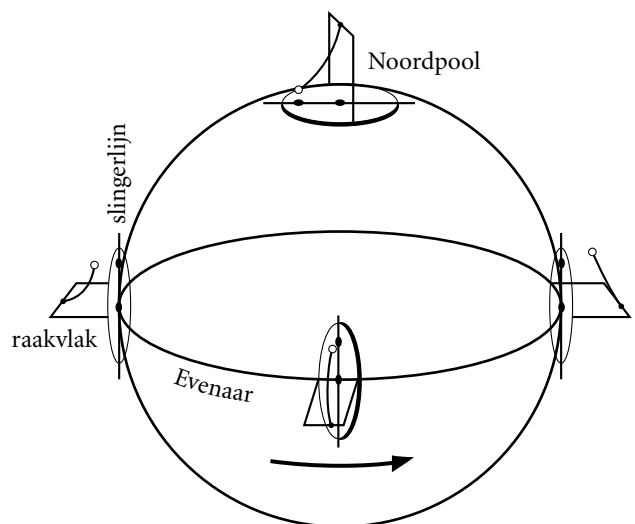
Er zijn vele verhalen rondom 'de Slinger'. Hele romans en mysteries zelfs. En niet te vergeten: prentenboeken (Anno, 1980). Het geschiedenis-verhaal wil dat Foucault in 1851 een kogel van 28 kg ophing aan een draad van 67 meter in de koepel van het Panthéon te Parijs. Daarna gaf hij hem een zetje en het wonder was geboren. De kogel, aangedreven door een magneet loodrecht onder het ophangpunt, slingerde statig heen en weer, strak in een lijn. Maar die lijn veranderde geleidelijk van richting. Het enthousiasme was groot, want niet de Slinger draaide – wat je zag was, dat de aarde onder hem doordraaide. Het was het eerste bewijs dat de aarde draaide. Men had wel eerder getracht zo'n bewijs te leveren, ook met kogels, door bijvoorbeeld ééntje recht omhoog te schieten in de hoop hem ver naast het kanon weer op te vangen. IJdele hoop: veel kogels zijn nooit meer terug gevonden. De draaiing van de aarde was evenmin van die van de zon af te leiden. Je weet eigenlijk niet wat draait: de zon of de aarde. Het dagelijks spraakgebruik wil bovendien dat 'de zon opkomt'.

Kortom, de Slinger was een doorbraak. Hij werd een kermisattractie. In kerken en etablissementen werden kogels opgehangen. Bij ons voor het eerst in het plechtstatige Kurhaus (1903). Later ook in de kerk van Zierik-

zee en in die van Nijmegen (Freudenthal, 1956). Overal vergaapte men zich aan het verschijnsel en las men in de tentoonstelling de uitleg.

De uitleg

Het idee achter de proef is dat de kogel een rechte lijn trekt in een raakvlak aan de aarde, zeg: de slingerlijn of slingerrichting. Tijdens het transport van 24 uur in het rond blijft die lijn evenwijdig aan de slingerrichting bij het begin, op het uur nul.

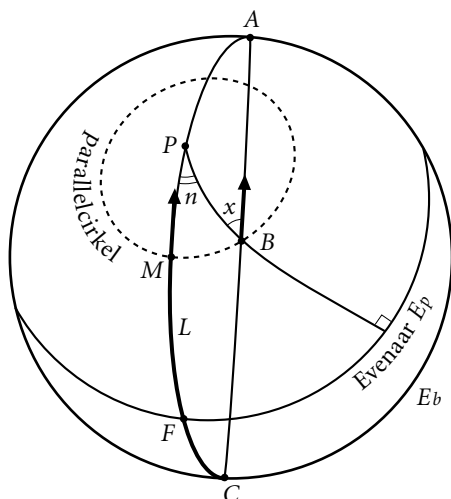


figuur 1

Plaats je de Slinger bijvoorbeeld op de Noordpool (fig. 1), dan maakt de aarde in 24 uur een hele draai

Op de Noordpool een draaihoek van 360° in 24 uur, op de Evenaar 0° – de vraag ligt voor de hand: ‘Hoe groot is de draaihoek bij ons, in Nederland?’

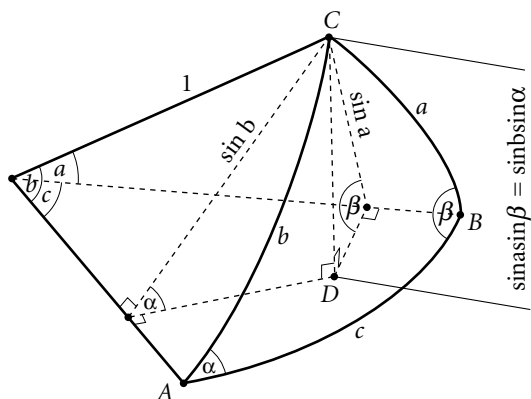
Met april in Parijs ontdekte ik een bewijs van Jean Bernard Léon Foucault zelf. Niet dat ik er naar op zoek was – Parijs heeft ook vele andere schatten – maar men hield er toevallig een Slinger-tentoonstelling. D'Illustration V, een oud geïllustreerd tijdschrift, lag open in een vitrine. Op de bladzijde stond deze tekening (fig. 2):



P is de Noordpool, Ep de Equator, M een punt op een parallelcirkel met noorderbreedte L . In M staat de Pendule opgesteld. Hij slingert in de richting van P , langs de meridiaan MP . Door de draaiing van de aarde over een hoek n gaat punt M over in een punt B en PM in PB .

nieuwe grootcirkel BA en dus nieuwe slingerrichting door B vast te leggen. De reden voor die keuze wordt echter niet gemotiveerd.

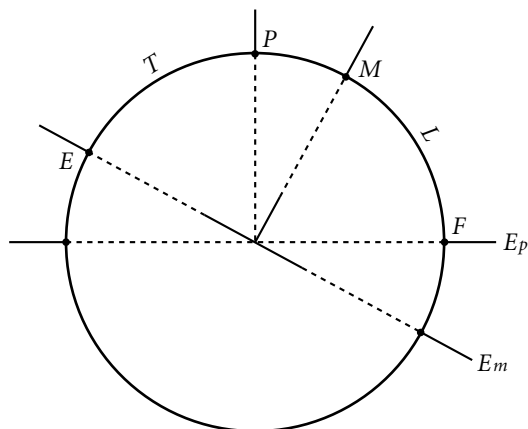
- *2 De ‘bolle’ sinusregel is in te zien door in een boldriehoek ABC (fig. 3) de hoogtelijn CD te trekken met lengte: $\sin a \cdot \sin \beta = \sin b \cdot \sin \alpha$



figuur 3

Opmerking. Door de straal van de bol naar oneindig te laten lopen, gaat de ‘bolle sinusregel’ over in de ‘vlakke sinusregel’.

- *3 B gaat over in M , dan gaat de evenaar Eb van B over in de evenaar Em van M . En PA (met lengte T) gaat over in PE , waarin E het snijpunt is van MP met Em . Zie figuur 4.



figuur 4

F is het snijpunt van MP met evenaar Ep van P . De noorderbreedte van M is $MF = L$. De lengte T van PA wordt $PE = 90^\circ - MP = MF = L$.

- *4 $x = n \cdot \sin L$. Als de draaihoek n over de parallelcirkel tussen twee haakse meridianen bijvoorbeeld 360° is, de meridianen vallen na een rondje weer samen, dan is de draaihoek x van de Slinger op die

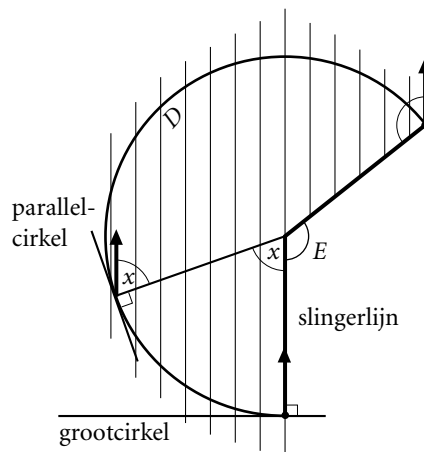
parallelcirkel van noorderbreedte L kleiner, namelijk gelijk aan $360^\circ \cdot \sin L$.

Parallelverschuiving

De gonio-formules uit de boldriehoeksmeting, de limietovergangen uit de analyse en de onduidelijke keuze van de nieuwe verschoven slingerlijn verduisteren de zaak waarom het gaat. Het probleem in het bewijs is dat de slingerlijn tijdens zijn rit langs de parallelcirkel met grootcirkels onder hem wordt vastgelegd. Grootcirkels snijden elkaar. Hoe is dat te rijmen met een slingerlijn die evenwijdig aan zich zelf moet blijven?

T. Levi-Civita en de Nederlander J.A. Schouten hebben later (in 1917) een indrukwekkende vondst gedaan: de ‘Parallelverschuiving’. Ze verschaft een beter meetkundig inzicht in het probleem van de Slinger dan de eerdere analyse.

De vondst was om een kegelvlak aan de bol te laten raken en die te vergelijken met zijn kegeluitslag. De gemeenschappelijke raaklijn is een complete parallelcirkel op de bol, maar slechts een stukje D van een grotere cirkel in de kegeluitslag (zie fig. 5). Hierin steekt het verschil, en de verhouding, tussen draaihoek n van de aarde en draaihoek x van de slingerlijn in het kegelvlak. Schuif namelijk de slingerlijn in de kegeluitslag



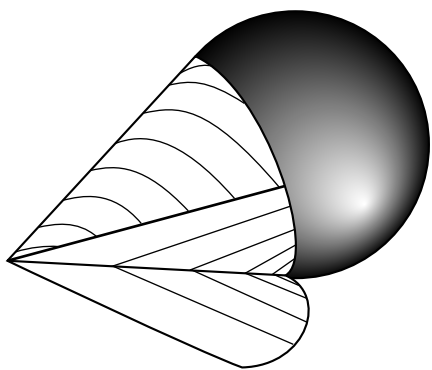
figuur 5

‘evenwijdig aan zichzelf’ langs de parallelcirkel. Dat wil zeggen: bij verplaatsing over een hoek X bij de kegeltop wordt de hoek tussen slingerlijn en raaklijn aan de cirkel ook met X vergroot. Deze Parallelverschuiving langs de raakcirkel in het kegelvlak komt overeen met de verschuiving op de bol langs dezelfde raakcirkel, de parallelcirkel. En daarmee zijn problemen op de bol te vertalen naar problemen in een raakvlak aan de bol. Hoe zit het bijvoorbeeld met een Parallelverschuiving langs een grootcirkel als raaklijn?

Bedenk dus dat het stuk cirkel D (Draaihoek) in de kegeluitslag aan een complete parallelcirkel raakt. Hoek E is het Exces van de cirkel, de aanvulling op D tot 360° : $E = 360^\circ - D$. U ziet, de evenwijdige lijnen aan het begin en eind van de cirkel maken onderling ook een hoek E met elkaar. ¹⁾

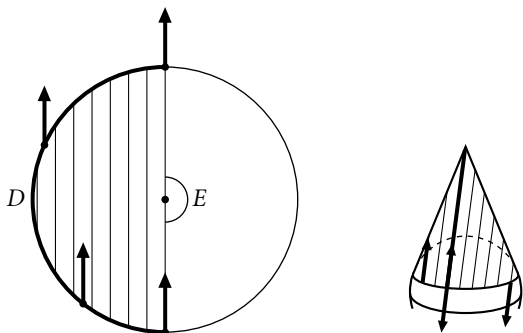
Punthoed op de bol

D.J. Struik, leerling van Schouten, toont in zijn dissertatie (1922) foto's van kegelmodellen ter illustratie van de Parallelverschuiving. Je kan van gelinieerd papier (evenwijdige lijnen!) een punthoed maken op de globe (zie fig. 6).



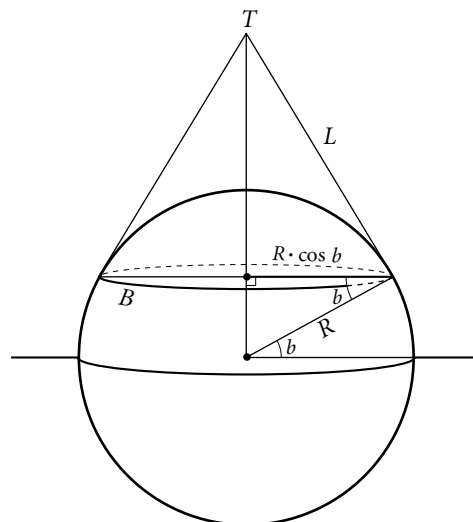
figuur 6

De evenwijdige lijnen geven de slingerrichting aan op verschillende momenten langs de parallelcirkel. Als beginrichting is noord gekozen. Maar aan het eind van de rit is de slingerrichting niet opnieuw weer noord. Op de kegel en in de kegeluitslag (zie fig. 5) is dat gemakkelijk in te zien. ²⁾ Toch zijn er twee parallelcirkels met passende kegels te vinden waar dat wél gebeurt. Op de Evenaar natuurlijk, waar de evenwijdige lijnen op een omhullende cilinder liggen en evenwijdig aan elkaar aansluiten. Maar ook de parallelcirkel van 30° NB is een onderzoekje waard. Fig. 7 toont zijn kegeluitslag op gelinieerd papier. Hier geldt $E = 180^\circ$, zodat na een rondje de slingerlijnen in elkaars verlengde liggen. Slingert de Slinger daar dan tegengesteld?

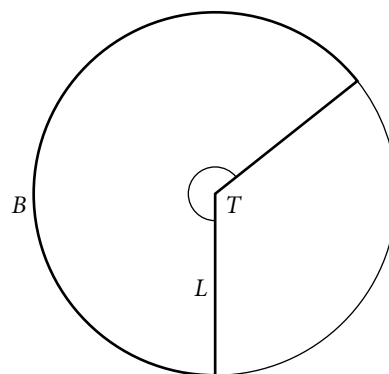


figuur 7

Berekening bij de parallelverschuiving



figuur 8: doorsnede aardbol $B L b R \cdot \cos b R D T$



figuur 9: kegeluitslag draaihoek tophoek $B B L D L T$

De Slinger wordt in 24 uur langs de parallelcirkel rondgedragen (zie fig. 8). Stel de omtrek van de parallelcirkel is boog B en L is de lengte van de raaklijn van kegel-top T tot parallelcirkel. De draaihoek D in de kegeluitslag (zie fig. 9) is dus B/L in radialen.

De omtrek B van de parallelcirkel op noorderbreedte b is: $B = 2\pi R \cos b$, met R als straal van de bol (zie fig. 8). De lengte van de raaklijn aan parallelcirkel is: $L = R \cdot \tan(90^\circ - b) = R \cdot \sin(90^\circ - b) / \cos(90^\circ - b) = R \cdot \cos b / \sin b$.

De draaihoek D van de Slinger in 24 uur over de parallelcirkel van noorderbreedte b is $D = B/L = 2\pi \sin b$. D is onafhankelijk van R , geldt dus op elke bol of globe. Het exces van de parallelcirkel is $E = 360^\circ - D = 360^\circ - 360^\circ \cdot \sin b = 360^\circ (1 - \sin b)$. Dit exces is gelijk aan de oppervlakte van het bolkapje ten noorden van de parallelcirkel.

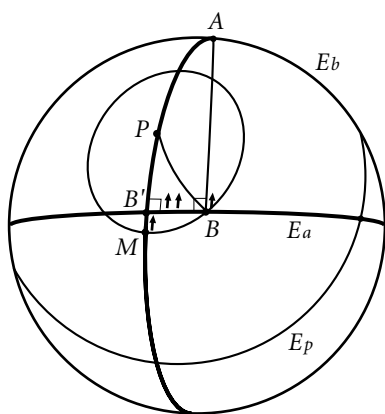
Controle

- Op de Noordpool ($b = 90^\circ$) is de draaihoek van de Slinger in 24 uur gelijk aan 2π ofwel 360° . Klopt.

- Op de Evenaar ($b = 0^\circ$) is de draaihoek in 24 uur 0° .
- Maar op breedte $b = 30^\circ$? De draaihoek van de Slinger is een halve draai (π rad). Na 24 uur slingert de Slinger de tegengestelde kant op. Aan het ding zelf is dat niet te merken, tenzij je hem aan één kant een merkje geeft.

Even terug naar Foucault

De berekening betreft eigenlijk een stilstaande bol waarop de Slinger verplaatst wordt. Elk punt P op de bol is als 'pool' te nemen. Verplaats je de Slinger langs de 'evenaar' Ep van P dan verandert de richting ten opzichte van P niet. Ook niet als je hem langs een 'meridiaan' in de richting van P verplaatst. Hiermee kan duidelijk worden gemaakt waarom Foucault het snijpunt A van Eb met de begin-slingerrichting koos als nieuwe slingerrichting in B (zie fig. 10).



figuur 10

Stel Ea is de evenaar van A en B ligt op Ea . Ea snijdt MA in B' .

Je kan de parallelverschuiving langs de parallelcirkel van M naar B vervangen door twee parallelverschuivingen langs twee grootcirkels van M naar B' en dan van B' naar B . De slingerrichting ten opzichte van A verandert niet, ten opzichte van P wel.

Meetkundeonderwijs

De parallelverschuiving is niet alleen in verschillende wetenschappen een belangrijk instrument, ook voor het meetkundeonderwijs is ze een interessant onderwerp. Ze toont de beperktheid van allerlei 'waarheden', zoals 'de som van de draaihoeken van een platte driehoek is 360° '. Op een bol is dat niet het geval. De Slinger houdt een beginrichting aan, maar loopt toch na een rondje over een parallelcirkel of langs een boldriehoek, een afwijking op in de slingerrichting. Sturen over de

globe of niet-sturen (parallel verschuiven) leveren daarmee verbazingwekkende meetkundige experimenten en toepassingen op. In een volgend artikel worden voorbeelden gegeven ten behoeve van het meetkundeonderwijs.

Noten

- 1 Je zou *E* ook kunnen opvullen met extra kegeloppervlak zodat de totale draaihoek over de parallelcirkel meer dan 360° wordt. Je krijgt dan een 'hyperbolisch hoedje' met kronkelende rand, een model voor een 'hyperbolische' meetkunde.
- 2 Freudenthal (1956) suggereert om de evenwijdige verplaatsing van de Slinger voor te stellen als een plat veld evenwijdige krijtstrepen, waarin je de bol laat rollen. Over de evenaar rolt de globe in een rechte lijn over het veld, op de Noordpool draait de globe op één punt in het rond. En om een parallelcirkel aan te houden moet de bol een cirkelgedeelte trekken door het krijtstrepenveld.

Literatuur

M. Anno **En toch draait ze** (1980)

Pløegsma, vertaling A.G. van Melle en W.J. van Melle-Meijer
(historie in verrassende plaatjes).

F. J. van den Brink **Meetkundeonderwijs te midden van theorieën** (1994)

In: Tijdschrift voor Didactiek der β -wetenschappen 12-2, p.130-149 (niet-euclidische meetkundes en het radicale constructivisme van de eigen producties).

Umberto Eco **De Slinger van Foucault** (1996)

Ooievaar Pockethouse, Amsterdam. Vertaling: Y. Boeke en P. Krone (een roman rond de Slinger).

L. Foucault **Recueil de travaux scientifiques I, II** (1878)
(boldriehoeksmeting).

H. Freudenthal De slingerproef van Foucault in de differentiaalmeetkunde (1956)

In: Simon Stevin 3, p.49-61 (historie, bewijsvoering, krommingen).

D. Hilbert & S. Cohn-Vossen **Geometry and the Imagination**
(1952, 1990).

Chelsea Publishing Compagnie, New York, p.340-341 (bewijsvoering).

V. Icke **Van appels tot zwarte gaten** (1998)

In: Conferentiegid Nationalle Wiskunde Dagen.

(voordracht waarin de parallelverschuiving werd gebruikt in gekromde ruimten binnen de theoretische fysica).

P. Lorist **Differentiaalmeetkunde** (1994)

Hogeschool Midden Nederland, Utrecht, p.101-103
(paralleltransport, kegel en bol).

D.J. Struik **Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung** (1922)

Springer Verlag

(foto's van meetkundige modellen: kegels).

Ervaringen met de Tweede Fase

Iris Gulikers

LIO (Leraar In Opleiding) - stage

Na mijn wiskundestudie aan de universiteit van Groningen ben ik aan het begin van dit schooljaar gestart met de eerstegraads lerarenopleiding voor wiskunde in Groningen. Dit is een eenjarige opleiding die hoofdzakelijk bestaat uit het stage lopen op een middelbare school. Aan het begin van het schooljaar heb ik op een school twee klassen gekregen, een 2 havo-atheneum-klas en een 4 atheneum-klas.

Ik geef het hele schooljaar les aan deze klassen en ben gedurende de lerarenopleiding voor de leerlingen een volwaardig (beginnend) docente. Ik geef niet alleen les aan die klassen, maar doe, net als iedere andere docent, aan alle activiteiten binnen en buiten school mee en ik heb binnen die activiteiten zelf verantwoordelijkheid. Dus naast het voorbereiden van lessen, het maken van proefwerken en het corrigeren hiervan, heb ik dit schooljaar onder andere vergaderingen moeten bijwonen, veel met andere collega's moeten overleggen, gesproken met ouders tijdens ouderavonden, een excursie naar Amsterdam en een sportdag meegemaakt.

Naast het schoolgebeuren heb ik één ochtend in de week een college vakdidactiek en één middag in de week een college onderwijskunde. Verder word ik tijdens mijn oplei-

ding begeleid door de opleiders van de lerarenopleiding en een docente van de school (schoolpracticumdocente). De klassen die ik heb gekregen, heb ik als ware 'geadopteerd' van mijn schoolpracticumdocente, waardoor zij tijd overhoudt om mij te begeleiden.

In de loop van het jaar heb ik er, als vervanging van een collega, nog een 5 havo-klas bij gekregen voor de periode van de herfstvakantie tot de kerstvakantie. Na de kerstvakantie heb ik als vervanging van weer een andere collega een 5 atheneum-wiskunde A-klas gekregen. Deze vervanging loopt tot het eind van het jaar.

Als LIO krijg je vanaf het begin van het jaar te maken met veel problemen. Je moet onder andere zorgen dat je lessen ordelijk verlopen en dat je duidelijk uitlegt. Als je de basisvaardigheden van het lesgeven voor je gevoel aardig onder de knie begint te krijgen, ben je behoorlijk tevreden. Maar al snel kom je er dan achter dat je te maken kunt krijgen met veel gecompliceerdere problemen. Bijvoorbeeld problemen die te maken hebben met de aankomende Tweede Fase.

Tweede Fase experiment

De school waarop ik les geef, experimenteert dit jaar voor het tweede jaar met de Tweede Fase in 4 havo,

4 atheneum en 5 atheneum. Het schooljaar is voor deze klassen verdeeld in vier blokken die elk worden afgesloten met een toetsweek. Voor elk studieblok krijgen de leerlingen een studiegids met daarin de studiewijzers per vak, het toetsrooster en de regels en afspraken. In de studiewijzers per vak kunnen de leerlingen onder andere zien welke leerstof op het programma staat en hoe groot de (geschatte) studielast is. Hiermee wordt de totale omvang van de taak bedoeld, dus lestijd+zelfstudie+huiswerk, uitgedrukt in klokuren. De werkschema's bij elk vak geven de planning per week aan.

Er zijn voor deze klassen twee soorten lesuren: centrale uren, waarbij alle leerlingen in dat lesuur in het lokaal zijn (voor instructie, voortgangscntrole en dergelijke) en zelfwerkzaamheidslessen, waarin de leerlingen zelfstandig verder werken. Dit kan gebeuren in het vaklokaal of in een studieruimte. Naar aanleiding van het begin van mijn vervanging in de 5 atheneum-klas heb ik voor mijn opleiding een verslagje geschreven, dat ik heb uitgebreid tot dit artikel, over problemen waar ik op dat moment tegenaan liep. Die problemen hadden te maken met de overgang naar de studiehuis-achtige aanpak met het gebruik van studiewijzers. Leerlingen worden geconfronteerd met kreten rond zelfstandig leren en met de verschillende interpretaties van leraren en ik merkte dat er voor leerlingen veel onduidelijk was.

Geen wiskunde tijdens de wiskundeles

Tijdens de eerste lessen van mijn vervanging kreeg ik met de leerlingen vaak discussies over het Tweede Fase experiment. Het werd mij al snel duidelijk dat de leerlingen hier een heel ander beeld van hadden dan ik.

De leerlingen vonden onder andere dat ze zelf mochten weten wat ze deden tijdens de centrale lessen: 'Ik zit in de Tweede Fase, dus als ik nú Duits wil leren, moet ik dat toch zelf weten.' Ik heb ze duidelijk gemaakt dat ik verwacht dat ze tijdens de wiskundeles met wiskunde bezig zijn. Alleen als ze de taak voor de week af hebben of al een heel eind daarmee gevorderd zijn kan ik daar een uitzondering op maken en mogen ze wat mij betreft met een ander vak bezig.

Leerlingen die met een ander vak bezig wilden, heb ik gezegd dat ze weg mochten, maar dan wel even bij de afdelingsleider moesten melden dat ze de wiskundeles niet wilden volgen: 'Ja, die ziet mij aankomen ... dat vindt hij toch niet goed.' 'Nou precies ... dat lijkt me dus duidelijk', was mijn reactie.

Klassikaal uitleggen verboden

Verder vonden de leerlingen dat klassikaal uitleggen niet mag: 'Dat is zonde van de tijd, ik wil gewoon zelf doorwerken en als ik vragen heb, stel ik die later wel.' Maar naar mijn idee is het niet de bedoeling dat de leerlingen alleen maar 'dom' sommetjes aan het maken zijn. Het is ook belangrijk dat de leerlingen verwoorden waarmee ze bezig zijn. Bovendien kan ik tijdens klassikale momenten wijzen op belangrijke dingen en kan ik wat dieper op de inhoud ingaan.

Om een voorbeeld te geven, ik had een aantal wijzigingen in het werkschema van de studiewijzer gemaakt en ruim van tevoren aangegeven. Het schema zag er voor week 7 t/m week 10 in het derde blok als volgt uit:

Tabel 1

week	leerstof	activiteit centraal	activiteit niet centraal, zelfstudie
7	deel 5/6V-A2 hfst 1, §1, §2 en §3	theorie §1, §2 en §3, voorbeelden en moeilijke opgaven	1 t/m 21, behalve 3, 5, 9, 14, 16
8	§4 en §5	§4 en §5, voorbeelden en moeilijke opgaven	24 t/m 37, behalve 26, 30, 32 D-toets hfst 5
9	voorjaarsvakantie		
10	§6 hfst 2, §1	theorie §6, voorbeelden en moeilijke opgaven	38 t/m 49, behalve 40, 44, 47 53 t/m 56

Ik had nu opgaven verschoven van de niet-centrale activiteit naar de centrale activiteit, waardoor het werkschema er als volgt uit kwam te zien:

werkschema. De klassikale momenten sloten daardoor niet aan bij waar de leerlingen waren en ze zagen de meerwaarde hiervan dus niet in. Ik stelde de klassikale

Tabel 2

week	leerstof	activiteit centraal	activiteit niet centraal, zelfstudie
7	deel 5/6V-A2 hfst 1, §1, §2 en §3	theorie §1, §2 en §3, voorbeelden (18) en moeilijke opgaven (13)	1 t/m 21, behalve 3, 5, 9, 14, 16, 18
8	§4 en §5	§4 en §5, voorbeelden (24) en moeilijke opgaven	24 t/m 37, behalve 24, 26, 30, 32 D-toets hfst 5
9	voorjaarsvakantie		
10	§6 hfst 2, §1	theorie §6, voorbeelden (35,37,41) en moeilijke opgaven	38 t/m 49, behalve 35, 37, 40, 41, 44, 47 53 t/m 56

'Oh, dan kan ik die opgaven net zo goed zelf maken en hoef ik niet mee te doen tijdens de klassikale uitleg', luidden reacties van sommige leerlingen. Ik heb de leerlingen toen duidelijk proberen te maken dat ik deze opgaven speciaal had uitgezocht om nieuwe leerstof te introduceren, waarbij ik wil dat de leerlingen verwoorden waarmee ze bezig zijn en waarbij ik wat dieper op de stof wil ingaan. De leerlingen hoefden die opgaven dan nog niet van tevoren zelf gemaakt te hebben. Het bleek ook dat sommige leerlingen de klassikale momenten niet nuttig vonden, omdat ze erg achter liepen op de planning van het

momenten daardoor wel eens een les uit, maar dat uitstellen kan niet structureel worden.

Ik vind het zelf best moeilijk om een goede indeling van de lessen over een week te maken die aansluit bij de planningen van de leerlingen. Het is moeilijk om de klassikale bespreking aan te laten sluiten bij waar de meeste leerlingen zijn, zodat de besprekingen voor alle leerlingen interessant zijn en ik ook alle leerlingen bij de klassikale momenten kan betrekken. Dit probleem wil ik proberen op te lossen door aan het begin van een week duidelijk aan te geven wat ik

in die week tijdens de centrale lessen wil gaan doen. De leerlingen kunnen hun planning dan hierop afstemmen en zorgen dat ze hun taak voor de week afkrijgen. Het nadeel vind ik wel dat de leerlingen dan weinig eigen planningsmogelijkheden overhouden. Maar het gaat nu vaak zo dat de leerlingen in een week tijdens de les zo ver mogelijk proberen te komen en wat ze niet afkrijgen in het weekend afmaken (of helemaal niet). De leerlingen zouden eigenlijk door de week thuis ook wat aan wiskunde moeten doen en daar ga ik ook van uit bij mijn lesindelingen.

Thuis werken uit den boze

De leerlingen hadden bovendien niet door (of wilden niet door hebben), dat er ook in het Tweede Fase experiment van ze verwacht wordt, dat ze thuis ook werken. Waarom ze dachten dat dat niet zou hoeven, weet ik niet. Misschien omdat de leerlingen geen huiswerk per les op krijgen of omdat er ook zelfwerkzaamheidslessen zijn, waarvan ze denken dat ze daarin alles af moeten krijgen.

Ik heb ze proberen duidelijk te maken dat er van ze verwacht wordt dat ze normaal gesproken per les nog zo'n 25 minuten thuis werken. In de studiewijzer kunnen de leerlingen zien dat de studiebelasting voor het vak wiskunde A in 5 atheneum in een blok van negen weken geschat is op 47 uur. De leerlingen hebben vier lessen in de week van 50 minuten, dat is dus 3 uur en 20 minuten les in de week. Negen weken les betekent dus 30 uur besteding aan het vak wiskunde A in de les. Dat betekent dat de leerlingen thuis nog 17 uur moeten besteden aan wiskunde. Stel nu dat de voorbereiding op de toets een aantal uren kost, dan blijft er per week nog zo'n kleine anderhalf uur over die de leerlingen thuis aan

wiskunde moeten besteden en dat is gemiddeld zo'n 25 minuten per les.

Facultatieve lessen

Ook wilden de leerlingen meer facultatief les, waarbij ze lessen bedoelden, waar ze helemaal niet hoeven komen. Ze verwachten dit met zelfwerkzaamheidslessen, waarbij de leerlingen niet in het vaklokaal aanwezig hoeven zijn, maar wel met wiskunde aan het werk moeten zijn op een andere plaats in de school. De leerlingen moeten zich aan het begin van zo'n les melden, de leraar vertellen waar ze naar toe gaan en wat ze gaan doen. Aan het eind van de les melden de leerlingen zich weer in het vaklokaal en laten ze zien wat ze hebben gedaan.

Het is de leerlingen niet helemaal helder wat er nu precies van ze verwacht wordt en de verschillende leraren op school geven daar ook verschillende interpretaties aan. Deze problemen worden onder andere veroorzaakt door onduidelijkheden in de overgangssituatie naar het studiehuis. Het is voor mij als beginnend leraar lastig dat de boodschappen en signalen naar de leerlingen over zelfstandigheid nogal variëren en de studiehuisachtige aanpak per leraar nogal eens verschilt. Ik kan het de leerlingen dus ook niet kwalijk nemen dat ze een ander beeld hadden van het Tweede Fase experiment dan ik.

Mijn manier van aanpak

Ik zat zelf na de eerste lessen in deze klas wel een beetje met tegenstrijdige gevoelens. Als ik toe zou geven aan de leerlingen door ze alleen maar zelfstandig te laten werken en meer zelfverantwoordelijkheid te geven, hoefde ik niet de discussie met de leerlingen aan te gaan en

zou ik het mezelf een stuk gemakkelijker maken. Maar dan zou mijn wiskundeonderwijs niet doeltreffend genoeg zijn en zou ik mijn taak als wiskundelerares verzaken. Dat wilde ik natuurlijk niet. Ik heb stug volgehouden en ik ben duidelijk en consequent gebleven, waardoor de leerlingen mijn manier van aanpak gingen accepteren. Het werd de leerlingen in ieder geval langzaam maar zeker duidelijk dat ze tijdens de wiskundelessen met wiskunde bezig moeten gaan en in principe niet met een ander vak en dat facultatieve lessen, waarbij ze helemaal niet hoeven komen, bij mij niet bestaan. De leerlingen zijn zelf ook steeds meer het nut van klassikaal uitleggen gaan inzien, waardoor ze daar ook niet meer zo op tegen zijn. Thuis werken doen de leerlingen nog steeds niet goed genoeg, maar ik wil nog proberen de leerlingen de voordelen te laten inzien van het bijhouden van een planning, waardoor bijvoorbeeld de klassikale momenten aansluiten bij waar ze zijn.

Tot slot

Ik vond het zelf een heel leerzame ervaring. Ik had te maken met problemen die straks tijdens de invoering van de echte Tweede Fase ook aan de orde zullen komen. Ik vraag mij af of er meer wiskundeleraars op het moment tegen zulke problemen aanlopen en ik zou graag van andere leraren horen hoe ze met dit soort problemen omgaan. Ik denk dat het goed zou zijn om ervaringen met elkaar uit te wisselen en ik houd mij graag aanbevolen voor tips en oplossingen.

Van de bestuurstafel

Operatie aanvullen ledengegevens

Het was een forse operatie om aan elk van de 3284 in Nederland wonende leden een persoonlijke brief te sturen met vermelding van diens bekende gegevens en het verzoek deze zo nodig te verbeteren en aan te vullen. Het PR-groepje begon met denken over de opzet en praktische zaken zoals: sturen wij een antwoord-envelop mee? Bij een hoog antwoordpercentage blijkt postzegels plakken voordeliger dan een antwoordnummer. Na een proefzending naar 250 leden werd tot postzegels besloten. De eerste dagen kwam bij Elly van Bommel een zak vol post. 'Alleen al het openen van alle enveloppen en sorteren op wel/geen ingevulde achterkant was uren werk...'. Er kwamen tot 1 mei 2597 stuks, d.w.z. 79% retour. Inmiddels zijn van 1000 formulieren de ingevulde achterkanten verwerkt met als resultaat: 45 mensen zijn bereid mee te werken aan Euclides, 127 aan een sectorwerkgroep, 57 aan een examenbespreking, 26 aan een studiedag/bijeenkomst, 35 aan een themawerkgroep, 33 aan een nieuw vademecum, internet of PR, 182 mensen willen wel meedenken en advies geven bij nieuwe ontwikkelingen en 52 willen wel iets anders doen. Dit is een fantastische 'oogst', waar we heel blij mee zijn! Sommigen zijn inmiddels al benaderd, bij anderen kan het nog wel even duren voor we een beroep op hen doen. Al deze principe-bereidheid omzetten in

effectieve werkgroepen gaat niet ineens. Alle tips, kritiek, suggesties bekijken wij als bestuur heel precies en we proberen er zo adequaat mogelijk op te reageren, maar ook dit vergt de nodige tijd. Veel opmerkingen op de formulieren hebben te maken met de werkdruk en/of met de vernieuwingen. Als alle formulieren verwerkt zijn komen wij hierop terug. Een eerste indruk is nu al dat er onder de jongeren meer vrouwelijke leden zijn dan onder de ouderen, maar het oudste lid waarvan we tot nu toe de geboortedatum weten is een dame geboren in 1915, het jongste een studente geboren in 1978. Enkele leden gebruikten de gratis antwoord-envelop om op te zeggen..., dat was niet ons doel. De actie leverde ook weer nieuwe leden op zoals bij het echtpaar waarvan eerst alleen zij lid was en hij nu ook lid wordt (zonder Euclides, dus f 20,- reductie) 'want jullie doen nu zulke goede dingen'. Zo mogen wij het graag horen, en nog steeds geldt: hoe meer leden, hoe meer wij kunnen doen.

LEVERDE U HET FORMULIER NOG NIET IN? GRAAG ALSNOG DOEN,

en bent u het kwijt, bel 0321-312543 of mail naar nvvw@euronet.nl en u krijgt een nieuw.

Agneta Aukema-Schepel

Symbolische rekenmachine

Als voorloper van de nieuwe manier van werken heeft het bestuur medio 1997 een adviescommissie ingesteld met de opdracht op redelijke termijn te adviseren over de vraag of en hoe een verantwoorde invoering van de symbolische rekenmachine in Nederland tot stand zou kunnen komen. De commissie is voortvarend aan het werk gegaan en heeft ook de computeralgebra in haar werkzaamheden betrokken. Onlangs is het eindrapport aangeboden. De commissie heeft een helder, afgewogen advies gegeven, wat heel waardevol is voor de verdere standpuntbepaling van het bestuur over dit onderwerp. Na de zomer hoort u er meer over.

Jan Breeman

Het was zijn wens dat na zijn dood de opbrengst van zijn wiskunde-spullen ten goede zou komen aan het Wereldwiskunde Fonds van de vereniging. Inmiddels hebben we een bedrag mogen ontvangen. Zo blijft de zorg en de betrokkenheid van Jan bij ons ook postuum nog bestaan. Hij was een bijzonder mens, we missen hem zeer.

Marian Kollenveld

Notulen jaarvergadering 1997

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 15 november 1997, gehouden in het gebouw van Het Nieuwe Lyceum te Bilthoven.

Om ongeveer tien uur opent de voorzitter, dr. J. van Lint, de vergadering. Hij is dankbaar dat er veel belangstelling is voor de uitgebreide markt en dienstverlening in de aula en de koffieruimte, het voorziet in een behoefte. Na de opening worden we hartelijk welkom geheten, in het bijzonder de aanwezige ereleden, de inspectie, een delegatie van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars en vertegenwoordigers van enkele onderwijsorganisaties. De voorzitter spreekt zijn dankbaarheid uit over de grote opkomst en rekent op een geslaagde dag.

De voorzitter spreekt zijn jaarrede uit die u kunt vinden in Euclides 73-5, p.164 e.v. In deze rede komt een aantal actuele zaken aan de orde. We noemen enkele topics: profi-project, leerwegen vbo/mavo, grafische rekenmachine en TIMSS. De vergadering stemt met het gesprokene in door een warm applaus.

Hierna worden de notulen van de algemene vergadering van 1996 aan de orde gesteld. De vergadering heeft geen vragen en onder dank aan de secretaris worden ze vastgesteld. Het jaarverslag van de secretaris vindt instemming en vraagt geen verduidelijking.

De penningmeester krijgt gelegenheid om het financieel beheer toe te lichten. Bij geen der aanwezigen is er reden om rondom dit beheer vragen te stellen. Na het verslag van de kascommissie wordt voorgesteld om de penningmeester te déchargeren. De vergadering gaat akkoord. De voorzitter bedankt dhr. L. Zijp voor zijn bijdrage in de kascommissie. Voor het jaar 1997/1998 worden benoemd tot leden van de kascommissie mw. J.P. Warners-de Bruin en dhr H.G.M. Gerats. De bestuursleden S. Garst, M. Kollenveld, W. Kuipers en J. van Lint worden herbenoemd.

De vergadering geeft met een applaus het signaal af dat deze bestuursleden hun werk mogen voortzetten. De contributie wordt vastgesteld op f 80,-.

De voorzitter maakt melding van het voornemen van het bestuur om te gaan professionaliseren. Hiervoor zal ongetwijfeld in de toekomst geld nodig zijn. We moeten dan denken aan de bezoldiging van bestuursleden. Het werk breidt zich uit en vraagt om permanente aandacht vanwege allerlei ontwikkelingen in het onderwijs. Zodra het bestuur een model voor voortgaande bestuursarbeid heeft ontwikkeld zal het aan de leden worden voorgelegd.

De voorzitter roept de leden op, indien ze daar belangstelling voor hebben, zich op te geven voor een werkgroep. Deze werkgroepen kunnen een zeer nuttige klankbordfunctie vervullen. De voorzitter draagt vervolgens Martin Kindt voor als erelid. Hij schildert de verdiensten van Martin voor het wiskundeonderwijs. Hij wijst op zijn werk als bestuurslid, zijn werk voor Euclides en de Wiskrant, zijn bijdra-

gen aan regionale bijeenkomsten en boeken. De vergadering is het hartelijk eens met het voorstel. Martin weet zich vereerd en spreekt een kort woord van dank.

Mw. N. Verhoeff krijgt gelegenheid om de studiedag in te leiden.

De studiedag heeft als thema: Veranderingen: b(l)oeiend?!

Het huishoudelijk gedeelte van de vergadering wordt om 15.45 voortgezet. In de rondvraag kan de voorzitter dhr. Keultjes geruststellen door te zeggen dat het bestuur zijn best doet om goed om te gaan met logicisme.

Dhr. C.P. Hoogland, hoofdredacteur van Euclides, geeft nog een toelichting op het laatste nieuws rondom de invulling van wiskunde in de profielen. Tenslotte bedankt de voorzitter mw. N. Verhoeff en in haar allen die de studiedag hebben verzorgd. Het bestuurslid F.J. Mahieu wordt dank gezegd voor het vele werk met betrekking tot de organisatie van alles.

Ook dit jaar heeft Het Nieuwe Lyceum ons gastvrij willen ontvangen, waarvoor de voorzitter zijn dankbaarheid uitspreekt.

Om even voor vier wenst de voorzitter ons een goede reis huiswaarts.

W. Kuipers

Jaarvergadering/Studiedag 1998

Eerste uitnodiging

Eerste uitnodiging voor de
jaarvergadering/studiedag 1998 van de
Nederlandse Vereniging van
Wiskundeleraren op
zaterdag 14 november 1998
in het gebouw van

Het Nieuwe Lyceum,
Jan Steenlaan 38
3723 BV BILTHOVEN
tel: 030-2283060

Aanvang : 10.00 uur
Sluiting: 16.00 uur

Agenda

Huishoudelijk gedeelte

- a Opening door de voorzitter
dhr. dr. J. van Lint.
- b Jaarrede door de voorzitter.
- c Notulen van de jaarvergadering 1997
(zie blz. 272).
- d Jaarverslagen (zie Euclides).
- e Décharge van de penningmeester,
vaststelling contributie 1999-2000 en
benoeming van een nieuwe kascom-
missie. Het bestuur stelt kandidaat:
dhr. H.G.M. Gerats en
dhr. W. van den Berg. *)

- f Bestuursverkiezing in verband met
het aftreden van dhr. dr. J. van Lint
en het periodiek aftreden van
mw. A.F.S. Aukema-Schepel en
dhr. F.J. Mahieu.
Mw. Aukema-Schepel stelt zich
herkiesbaar en het bestuur stelt
haar opnieuw kandidaat. Voor de
voorziening in de twee overige ont-
stane vacatures stelt het bestuur
kandidaat:
mw. M. Lambriex-van der Heijden en
dhr. J. Hop. *)
- g Bestuursoverdracht.

Themagedeelte Studiedag

met als thema

'OP ZOEK NAAR WISKUNDE'

Vervolg huishoudelijk gedeelte

- h Rondvraag.
- i Sluiting.

**) Tot achtentwintig dagen na het ver-
schijnen van deze oproep kunnen even-
eens andere leden van de vereniging
schriftelijk worden voorgedragen bij het
bestuur door ten minste vijf leden.*

Themagedeelte studiedag met als thema

Op zoek naar wiskunde

Na de studiedag 1997 'Veranderingen:
b(!)oeiend?!' die als doel had een beeld
te geven van wat ons te wachten stond,
zitten we nu midden in die veranderin-
gen zowel in het mbo, vbo/mavo,
havo/vwo en – als gevolg – ook in het
vervolgonderwijs.
Het gaat er nu niet meer om of we de
veranderingen boeiend vinden, maar of
we een manier kunnen vinden om ze zo
veel mogelijk 'bloeiend' te maken.

Binnen al de veranderingen staat in
ieder geval centraal de actieve, zelf-
standige en onderzoekende rol van de
leerlingen. Het themagedeelte van de
jaarvergadering 1998 gaat vooral over
dit laatste aspect: het onderzoeken.
Het leren gebruiken van kant en klare
recepten gaat volgens alle plannen een
minder belangrijke rol spelen in het wis-
kundeonderwijs. Er komt meer aan-
dacht voor opener probleemstellingen

waarin de leerlingen zelf moeten onder-
zoeken welke wiskundige aanpak
gebruikt kan worden en wat dat oplevert.

Vandaar het motto van de studiedag:
'OP ZOEK NAAR WISKUNDE'

Er zal tijdens de studiedag vooral ook
aandacht besteed worden aan de door-
lopende lijn van het onderzoekend bezig
zijn in het wiskundeonderwijs. Wat mag
en kun je reëel gezien verwachten van
de basisvorming aan onderzoeksvaar-
digheden? Er zijn immers een aantal
vaardigheden nodig om tot goede resul-
taten in het vervolgonderwijs te komen?!

De nieuwe schoolboeken geven wat dat
betreft al veel mogelijkheden; ze bevat-
ten steeds meer praktische opdrachten
en onderzoeksopdrachten. Daarbij wor-
den stappenplannen aangeboden voor
de uitvoering van deze opdrachten. De
computer en ook de grafische- of sym-
bolische rekenmachine speelt hierbij
een essentiële rol als hulpmiddel voor
de leerlingen bij de verkenning en uit-
voering van de onderzoeksopdrachten.
Wezenlijk hierbij is dat ook bij de exa-
mens steeds meer eisen gesteld wor-
den aan de zogenaamde praktische
opdrachten. (Binnen het schoolexamen
in het havo/vwo is het weging van de
praktische opdrachten 40%.)

Hoe meer erover verschijnt hoeveel
meer vragen er ontstaan: beoordeling,
begeleiding, organisatie, bad practice,
good practice, ...

Op de studiedag wordt ingegaan op
allerlei belangrijke aspecten van
(onderzoeks)opdrachten en de vele vra-
gen over het gebruik op school.
Naast het vo en mbo worden dit jaar ook
voor het hbo en voor aanstaande lera-
ren speciale workshops georganiseerd.
In het volgende nummer van Euclides
kunt u gedetailleerd lezen wat u kunt
verwachten op **14 november 1998**.

*Joke Daemen/ Harrie Broekman,
namens de Utrechtse voorbereidings-
groep*

De draaiende rechthoek en een beetje lui zijn

Jacques Jansen

andere opdrachten al niet complex genoeg waren, verzucht Michelle. De draaiende rechthoek is bij veel leerlingen blijven steken in de positie $t = 0$.

U zult wel dezelfde ervaring hebben als ik. Als een formule aangetoond moet worden of je moet er de juistheid van laten zien, haken veel leerlingen af.

Examenmakers geven vaak zo'n formule om het stapeffect te vermijden. De c-vraag is voorspelbaar. Er moet worden gedifferentieerd om het minimum of maximum te

Inleiding

Wilt u eerst de opgave hiernaast doorlezen of wat beter is: de opgave maken? Vervolgens vormt u zich een mening over deze opgave en als u zin heeft leest u verder.

De eindexamenkandidaten zitten vlak voor schoolonderzoek 3. Zo ook, het is maart 1998, mijn leerlingen die havo wiskunde B volgen. De leerlingen vinden de leerstof van de laatste periode niet gemakkelijk (ervoor overigens ook niet). De leerstof gaat over: van optimaliseren in het platte vlak naar optimaliseren in de ruimte, soms met nog wat goniometrie erbij. De laatste tijd hebben de talen de leerlingen aardig in de greep. Veel boeken moeten op het allerlaatst gelezen worden voor het mondeling schoolonderzoek.

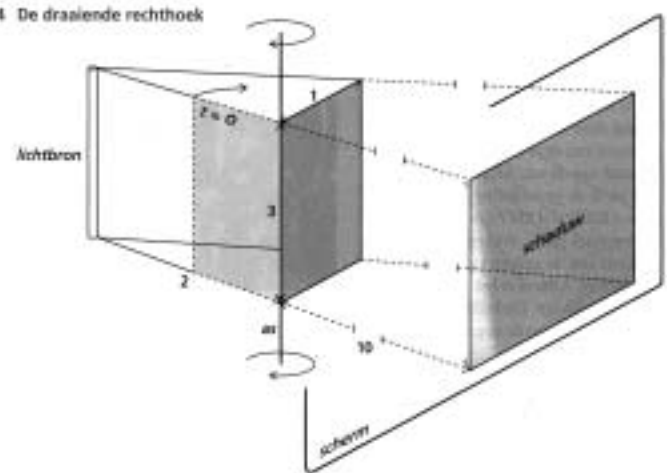
‘Nu is mijn vak weer aan de beurt’, peper ik hen in. Mag je zoiets zeggen in de Tweede Fase, vraag ik me in gedachten af.

Michelle en Jan

Michelle heeft haar eigen gedachten. Sommige opdrachten in het boek (Moderne Wiskunde) heten ‘complexe opdrachten’, alsof de

Hoofdstuk MII Meetkunde en analyse 225

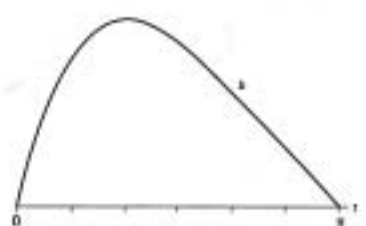
T-4 De draaiende rechthoek



Een rechthoek van 1 m bij 3 m draait met een (hoek)snelheid van 1 radiaal per seconde om de lange zijde. Deze lange zijde staat verticaal. De rechthoek wordt beschenen door een verticale staafvormige lichtbron. Deze werpt een schaduw van de rechthoek op een, eveneens verticaal, scherm. Uit de tekening hierboven zijn de onderlinge afstanden af te lezen. De breedte b van de schaduw is een functie van de tijd t . Op $t = 0$ liggen de lichtbron en de rechthoek in één vlak.

- Op tijdstip $t = \frac{1}{2}\pi$ is de rechthoek evenwijdig aan het scherm. Teken een bovenaanzicht en bereken de breedte van de schaduw op $t = \frac{1}{2}\pi$.
- De breedte van de schaduw wordt op het tijdsinterval $[0, \pi]$ gegeven door de formule:

$$b(t) = \frac{12}{2} \sin t$$
 Laat zien dat deze formule juist is.
- Hoe groot is de draaihoek, in het geval de oppervlakte van de schaduw maximaal is?
- Bereken de maximale breedte van de schaduw.
- Hiernaast is de grafiek van $b(t)$ getekend op het interval $[0, \pi]$. Schets de grafiek van $b(t)$ en beschrijf de functie $b(t)$ op het interval $[\pi, 2\pi]$.



bepalen. Structureren noemen ze dat. Dat het anders kan, bijvoorbeeld bij een kwadratisch verband, wil wel eens emoties oproepen in de klas.

In dit geval van de draaiende rechtehoek is er sprake van een gebroken functie en kun je de quotiënt-regel erop loslaten. Nu mag het nog. De meeste leerlingen hebben niet zoveel zin om deze techniek toe te passen. Sommigen hebben een broertje dood aan technieken. Ze scoren goed bij RUIMTEMEETKUNDE: daar mag je nadenken. Heel wat minder bij ANALYSE: daar moet je rekenen.

Als de auteurs van het boek vragen om c) en d) te maken dan moet je dat doen.

Jan denkt daar anders over. Hij heeft geen zin in afleiden en differentiëren en is een beetje lui, maar niet denklui. Jan trekt zich niets aan van het boek en kiest een hele andere aanpak.

In het schrift van Jan staat de onderstaande tekening.

Het doet mij denken aan een rubriek die vroeger in Euclides stond: 'bewijs zonder woorden'. De tekening, het bovenaanzicht, spreekt voor zich. Met de 'halve' gelijkzijdige driehoek vind je een draaihoek van 60 graden.

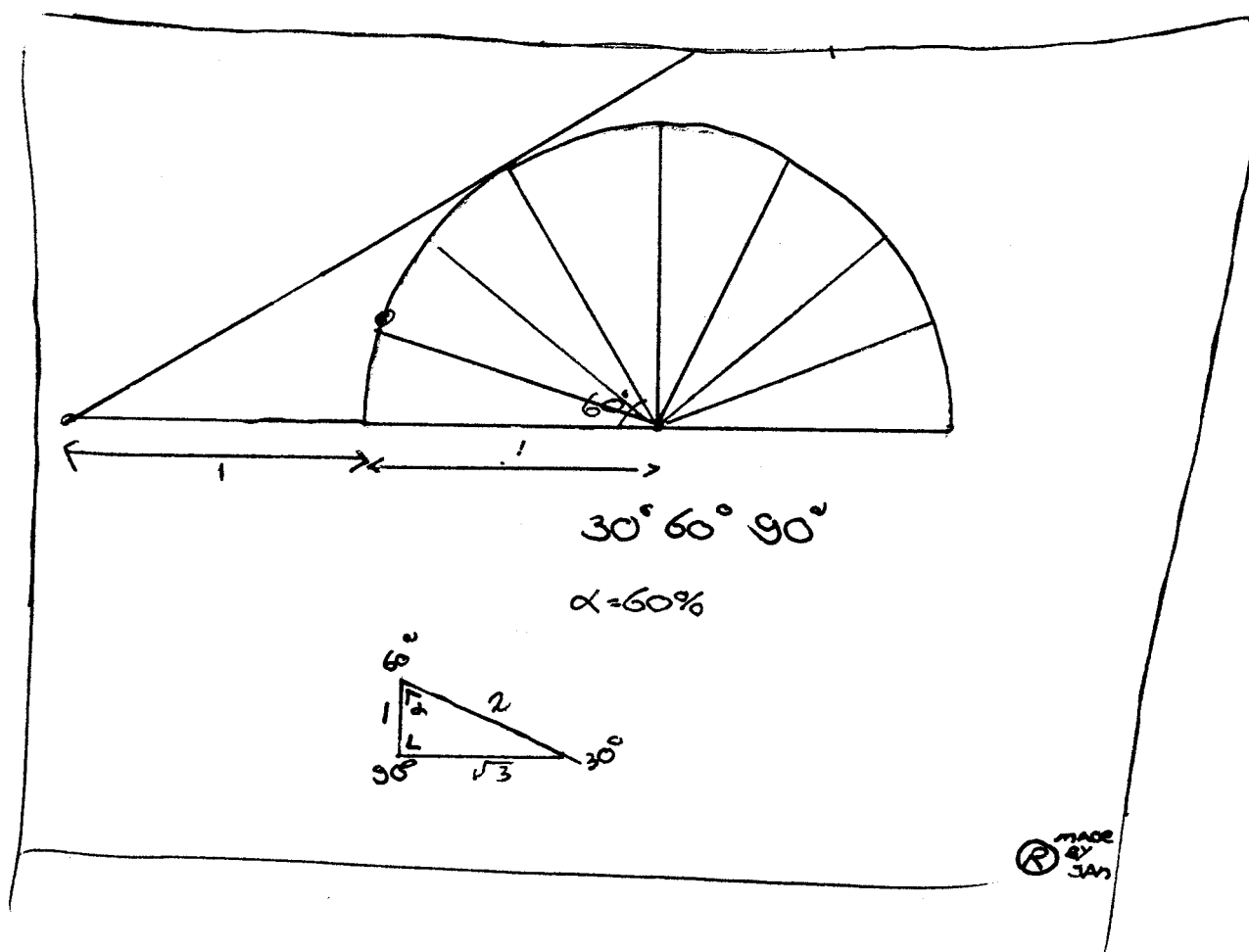
Tot slot

'Wat ging aan deze opgave vooraf?' vraagt u zich af.

In het hoofdstuk waar de opgave uitkomt, worden bij een enkele opgave de analytische aanpak en de meetkundige aanpak vergeleken. Heel mooi!

Waarom wordt deze opgave dan zo gestructureerd en word je de analytische richting ingestuurd?

In ieder geval heeft Jan de kern van het hoofdstuk begrepen. De vaardigheid 'een beetje lui zijn' was hierbij nodig en natuurlijk je niets aantrekken van wat anderen van je willen.



De XXXVIII Internationale Wiskunde Olympiade 1997

J.G.M. Donkers

Inleiding

In 1997 werd de 38e Internationale Wiskunde Olympiade gehouden van 18 tot 31 juli in Mar del Plata, Argentinië. Er waren 460 deelnemers uit 82 landen.

De Nederlandse ploeg bestond uit de volgende leerlingen:

Niels Besseling (17), Zwaag
Johan Bosman (18), Renkum
Fokko van de Bult (16), Oegstgeest
Jerk Doekes (17), Leeuwarden
Sander van Noort (17), Capelle a/d IJssel
Lian len Oei (17), Sterksel

De wedstrijd vond plaats op 24 en 25 juli in Mar del Plata. De deelnemers kregen op beide dagen 4,5 uur voor drie opgaven. De maximale score per opgave is 7 punten. De jury beloonde 39 deelnemers met een gouden medaille (35 t/m 42 punten), 70 met een zilveren (25 t/m 34) en 122 met een bronzen (15 t/m 24).

78 deelnemers ontvingen een eervolle vermelding.
(Degenen die buiten de prijzen vallen maar wel voor tenminste één

opgave de maximale score van 7 punten hebben behaald krijgen een eervolle vermelding.)

Vier leerlingen, afkomstig uit Iran, Roemenië, de Verenigde Staten van Amerika en Vietnam behaalden de maximale score van 42 punten.

In het officiële landenklassement kwam China op de eerste plaats met 223 punten, gevolgd door Hongarije met 219 en Iran met 217 punten.

Nederland kwam ex aequo met het gastland op de 37e plaats met 94 punten.

Tijdens de slotbijeenkomst nodigde de vertegenwoordiger van Taiwan alle landen uit in 1998 aanwezig te zijn bij de 39e Olympiade in Taipei.

De Nederlandse ploeg

Voor de Nederlandse ploeg was deze olympiade de meest succesvolle van de laatste tien jaren. Fokko en Johan behaalden een zilveren medaille, Lian len en Sander een eervolle vermelding.

Ook dit jaar werd de ploeg begeleid door Jan Donkers en Sander van

Rijnswou, beiden werkzaam aan de Technische Universiteit in Eindhoven.

De scores van de Nederlandse deelnemers waren als volgt:

Opgaven						
	1	2	3	4	5	6
Niels	1	3	0	5	0	0
Johan	4	7	7	4	4	1
Fokko	7	5	6	7	3	0
Jerk	1	0	3	1	4	0
Sander	1	0	0	7	0	0
Lian len	1	7	1	4	0	0
Totaal	15	22	17	28	11	1

Hoe is de Nederlandse ploeg tot stand gekomen?

Uit de 2759 deelnemers aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1996 (afkomstig van 253 scholen) werden de 103 beste toegelaten tot de tweede ronde die in september 1996 gehouden werd aan de Technische Universiteit in Eindhoven. De beste dertien



v.l.n.r. Sander, Fokko, Niels, Lian len, Jerk, Johan

van de tweede ronde kregen een uitnodiging om deel te nemen aan de training voor de Internationale Wiskunde Olympiade. De training, die evenals voorgaande jaren werd verzorgd door J. Donkers, begon met een trainingsweekend in november 1996 en werd vervolgd door middel van les-

brieven. Ten slotte was er in de eerste week van juni nog een vijfdaags trainingskamp. Direct na het laatste kamp werd de samenstelling van de ploeg bekend gemaakt. De trainingskampen worden ieder jaar

De selectie van de opgaven

De organisatoren hadden naast Argentijnse wiskundigen een aantal experts uit Brazilië, Bulgarije, Nieuw-Zeeland, Polen en Rusland

Gelukkig werd de verwachting van de jury dat de keuze dit jaar beduidend minder moeilijk moest zijn dan in 1996 bevestigd. De gemiddelde score dit jaar was 16,06, die van het vorige jaar was 12,52.

SCORE MATRIX

Opgave	Score								Totaal studenten	Gemiddelde score
	0	1	2	3	4	5	6	7		
1	92	143	29	23	102	15	8	48	460	2,47
2	164	24	16	4	7	9	0	236	460	3,90
3	269	64	5	22	4	2	6	88	460	1,78
4	81	72	20	34	58	29	31	135	460	3,73
5	136	51	36	31	21	19	14	152	460	3,35
6	341	40	12	22	4	27	4	10	460	0,82

gehouden in een jeugdherberg in Valkenswaard. Een belangrijk deel van de trainingsactiviteiten tijdens deze kampen en van de organisatie is in handen van oud-olympiade-winnaars. Dit jaar waren dat: Ronald van Luijk (student, UU),

uitgenodigd zitting te nemen in de vraagstukkencommissie. Deze commissie was ruim een maand voor de wedstrijd intensief bezig geweest met een beoordeling en selectie van de ruim 100 vraagstukken die door 42 landen waren ingezonden. Ten slotte werden er 26 opgaven, soms met alternatieve formuleringen en oplossingen, aan de jury voorgelegd. Deze selectie bestond uit 10 opgaven over meetkunde, 5 over getaltheorie, 3 over polynomen, 3 over ongelijkheden, 3 over recurrente betrekkingen en 2 op het gebied van de combinatoire.

De beraadslagingen van de jury, die intensief zijn en twee tot drie dagen in beslag nemen, worden met het jaar vermoeiender. Het vereist veel tact en behendigheid van de voorzitter de vergaderingen van zulk een grote groep (ruim 80 personen, ieder land heeft een lid in de jury), waarin zoveel talen worden gesproken, te leiden en ten slotte iedereen op één lijn te krijgen in de keuze van de 6 opgaven voor de wedstrijd. Dan volgen de volgende dag nog eindeloze discussies omtrent de equivalentie van de vertalingen. Want iedere leerling krijgt de opgaven in zijn of haar moedertaal.

Rondom de olympiade

Onze ploeg logeerde eerst enkele dagen in Buenos Aires in een hotel waar nog enkele andere ploegen verbleven. Ondanks het winterse weer kon men toch van de stad genieten. Veel indruk maakte een bezoek aan het stadsdeel La Boca en het voetbalstadion van Boca Juniors, de club van Maradonna. Door de oranje petten en dassen was het voor de terreinknecht direct duidelijk met welke supporterschare hij te doen had. De poort ging open en onze ploeg kreeg een prachtige rondleiding. In Mar del Plata waren, in tegenstelling tot wat we van voorgaande jaren gewend waren, alle ploegen met hun begeleiders en gidsen ondergebracht in één hotel. In dit hotel, in het centrum van de stad, vond ook de wedstrijd plaats. Het was er heel gezellig. Dagelijks werden er 'social meetings' georganiseerd en verscheen het olympiade bulletin 'La hélice' met daarin alle mogelijke wetenswaardigheden omtrent de olympiade. Na de prijsuitreiking in het grote theater van Mar del Plata vond de slotbijeenkomst plaats in het basketbalstadion. Daar werden we getrakteerd op een Zuid-Amerikaanse carnavaleske happening. Onvergetelijk.

De opgaven

Hierna volgen nog de opgaven. Deze zijn eerder verschenen in het leerlingtijdschrift Pythagoras. De resultaten van deze olympiade kunt u ook vinden op webpagina: www.oma.org.ar/imo97/index-en.html



Fokko & Johan met de zilveren medailles

Wim Oudshoorn (AIO, RUG) en Sander van Rijnsouw (AIO, TUE).

Opgaven Internationale Wiskunde Olympiade 1997

Eerste dag

Mar del Plata, Argentinië, 24 juli 1997

- 1 In het vlak zijn de punten met gehele coördinaten de hoekpunten van eenheidsvierkanten. De vierkanten zijn afwisselend zwart en wit gekleurd (zoals op een schaakbord).

Voor ieder paar van positieve gehele getallen m en n beschouwen we een rechthoekige driehoek, waarvan de hoekpunten gehele coördinaten hebben en waarvan de rechthoekszijden, met lengten m en n , gelegen zijn langs de zijden van de vierkanten.

Laat S_1 , de totale oppervlakte zijn van het zwarte deel van de driehoek en S_2 de totale oppervlakte van het witte deel.

Stel $f(m, n) = |S_1 - S_2|$

- a Bepaal $f(m, n)$ voor alle paren positieve gehele getallen m en n die beide ofwel even ofwel oneven zijn.
b Bewijs dat $f(m, n) < \frac{1}{2} \max\{m, n\}$ voor alle m en n .
c Toon aan dat er geen constante C bestaat zodanig dat $f(m, n) < C$ voor alle m en n .

- 2 In driehoek ABC is hoek A het kleinst.

De punten B en C verdelen de omgeschreven cirkel van de driehoek in twee bogen. Laat U een punt zijn op het inwendige van de boog tussen B en C die het punt A niet bevat.

De middelloodlijnen van AB en AC snijden de lijn AU in respectievelijk de punten V en W . De lijnen BV en CW snijden elkaar in T .

Toon aan dat $AU = TB + TC$

- 3 Stel $x_1, x_2, \dots, x_n$ zijn reële getallen die aan de volgende voorwaarden voldoen:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1 \text{ en}$$

$$|x_i| \leq (n+1)/2 \text{ voor } i = 1, 2, \dots, n$$

Toon aan dat er een herschikking (permutatie)

$y_1, y_2, \dots, y_n$ van $x_1, x_1, \dots, x_n$ bestaat zodanig dat

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq (n+1)/2$$

Voor iedere opgave maximaal 7 punten.

Beschikbare tijd: 4,5 uur.

Tweede dag

Mar del Plata, Argentinië, 25 juli 1997

- 4 Een $n \times n$ matrix (een rangschikking van getallen in n rijen en n kolommen), waarvan de getallen behoren tot de verzameling $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ noemen we een *zilver* matrix indien voor alle $i = 1, \dots, n$, in de i de rij en de i de kolom samen alle elementen van S voorkomen.

Toon aan dat

- a er geen zilver matrix bestaat voor $n = 1997$
b er voor oneindig veel waarden van n zilver matrices bestaan.

- 5 Bepaal alle paren van gehele getallen (a, b) met $a \geq 1, b \geq 1$, waarvoor de volgende vergelijking geldt:

$$a^{(b^2)} = b^a$$

- 6 Voor ieder positief geheel getal n is $f(n)$ het aantal manieren waarop het getal n kan worden voorgesteld als de som van machten van 2, met niet negatieve gehele exponenten.

Voorstellingen die alleen in de volgorde verschillen worden als gelijk beschouwd. Zo is bijvoorbeeld $f(4) = 4$ omdat het getal 4 op de volgende vier verschillende manieren kan worden voorgesteld:

4; $2 + 2$; $2 + 1 + 1$ en $1 + 1 + 1 + 1$

Bewijs dat voor ieder geheel getal $n \geq 3$ geldt:

$$2^{(n^2/4)} < f(2n) < 2^{(n^2/2)}$$

Voor iedere opgave maximaal 7 punten.

Beschikbare tijd: 4,5 uur.

Nationale Wiskunde Dagen 1999

De vijfde Nationale Wiskunde Dagen worden gehouden op **5 en 6 februari 1999**, in het Congrescentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout.

Het doel van deze dagen is om wiskundedocenten uit het voortgezet onderwijs in een ontspannen omgeving weer eens de inspirerende kanten van hun vak te laten beleven.

De thema's zijn deze keer:

- wiskunde om de wiskunde: analyse
- wiskunde en geld
- wiskunde en sport
- wiskunde en ruimtevaart
- wiskunde en geluid
- wiskunde en statistiek.

Eind mei is de eerste aankondigingsfolder naar alle scholen gestuurd. Begin september wordt de tweede folder verzonden, met aanmeldingsformulier.

Inlichtingen:

Ank van der Heiden
tel. 030 - 2611611
fax 030 - 2660430
email nwd@fi.uu.nl

Cursussen

Drie korte cursussen voor wiskundedocenten door de TU Delft

Achtergronden van de Discrete Dynamische Modellen in het vwo-profiel Economie & Maatschappij

door prof. dr. J.M. Aarts en mw. drs. A. Verweij.

Twee dinsdagmiddagen van 15.00 uur tot 18.00 uur, op 15 september en 6 oktober 1998 óf op 22 september en 13 oktober 1998

Kosten: f 200,-

Achtergronden van de Voortgezette Meetkunde in het vwo-profiel Natuur & Techniek

door prof. dr. J.M. Aarts en mw. drs. A. Verweij.

Vier dinsdagmiddagen van 15.00 uur tot 18.00 uur, op 3 november, 17 november, 1 december en 15 december 1998

Kosten: f 400,-

Computergebruik bij Wiskunde in de bovenbouw van havo en vwo

door dr. H.J. Smid en mw. drs. A. Verweij.

Drie dinsdagmiddagen van 15.00 uur tot 18.00 uur, op 12 januari, 2 februari en 23 februari 1999

Kosten: f 300,-

Informatie en inschrijving:

Secretariaat van de groep

Algemene Wiskunde

mw. C.A. van Baar,

Mekelweg 4,

2628 CD Delft

tel. 015-2787221,

fax 015-2787245,

e-mail : C.A.vanBaar@twi.tudelft.nl

Studiedag Techniek in het huishouden

datum: donderdag 24 september 1998
locatie: ROC, Amerikalaan 109, Utrecht,
tel. 030-2809809.

Het Centrum Vrouwen en Exacte Vakken (VeEX), de commissie Vrouwengeschiedenis van de Vereniging van GeschiedenisLeraren in Nederland (VGN) en de werkgroep Vrouwen en Geschiedenis van de exacte vakken organiseren op donderdag 24 september 1998 in Utrecht een studiedag, getiteld:

De Techniek in het Huishouden

Deze studiedag is bedoeld voor docenten in de vakken Techniek, Natuur- en Scheikunde, Biologie, Wiskunde, Verzorging, Huishoudkunde, Geschiedenis en Maatschappijleer, en andere geïnteresseerden.

U kunt zich voor 1 september aanmelden voor deze studiedag door f95,- (f65,- voor leden/donateurs van VGN/VeEX) over te maken op gironummer 3465547, t.n.v. Fia Dieteren, p/a Instituut voor Geschiedenis (UU), Kromme Nieuwe Gracht 66, 3512 HL Utrecht, o.v.v. Studiedag Techniek in het Huishouden.

De overschrijving is uw bewijs van inschrijving. Er is ruimte voor een beperkt aantal deelnemers. Bij plaatsing op de deelnemerslijst wordt de volgorde van overmaking aangehouden. Wenst u een nascholingscertificaat, dan graag geboorteplaats en -datum vermelden.

Voor meer informatie kunt u contact opnemen met:
Marjan Bruinvels,
tel. 030-2286463
Fia Dieteren,
tel. 036-5354843
of
Centrum Vrouwen en Exacte Vakken,
tel. 030-2856746.

Oproep

Docenten van het Baronie College Breda en het REC Eindhoven maken modules Rekenen&Wiskunde op niveau 2 en 3 voor (volwassen) NT1- en NT2-cursisten. Wij zijn tot het inzicht gekomen dat er naast schriftelijk materiaal ook concreet handelingsmateriaal (spelletjes, constructiemateriaal en dergelijke) moet komen voor deze volwassen cursisten. We willen graag in contact komen met docenten die behoefte hebben aan of ervaring hebben met dergelijk materiaal. Het gaat om ideeën en consultatie over bruikbaar materiaal.

Als u belangstelling heeft kunt u schrijven aan:
Project MBM3
Bert Imandt, Baronie College Breda
Haagweg 21, 4814 GA Breda
of een bericht achterlaten op: tel: 046-4376949

P R O G R A M M A

10.00 - 10.15 uur:

Ontvangst door de dagvoorzitter dr. Annemarie de Knecht-van Eekelen

10.15 - 11.00 uur:

Lezing van dr. Ruth Oldenziel, 'Honderd jaar techniek van het huishouden'

11.00 - 11.30 uur:

Artistiek intermezzo

11.30 - 12.15 uur:

Lezing van dr. Myriam Daru, 'Waterwerk'

12.15 - 13.30 uur:

Lunch en markt

Er zijn stands met boeken, lesmateriaal en lestips over het thema van de dag

13.30 - 15.00 uur:

Workshops

Martin Kindt

Lessen in Projectieve Meetkunde

Epsilon Uitgaven, Utrecht 1996

Tweede druk

ISBN 90-5041-027-8

288 pagina's

Prijs f 42,50

Met de introductie van ruimtemeetkunde en projectiemethoden in de wiskunde B van havo en vwo eind jaren tachtig, keerde, tenminste voor het vwo, de 'echte meetkunde' weer terug in het programma. Voor sommigen is die meetkunde minder 'echt', immers louter gericht op de ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht bij de leerling waarbij het geven van een bewijs een ondergeschikte rol speelt. In het herziene programma voor het vwo, dat tegelijk met de introductie van de vernieuwde Tweede Fase zal worden ingevoerd, zien we enkele onderwerpen uit de vlakke meetkunde terug met het doel een context te bieden voor het leren bewijzen. Echter bij de opleiding van leraren zit men met studenten die nauwelijks met de beginselen van de meetkunde vertrouwd zijn. Het onderhavige werk is gebaseerd op lessen die de auteur enige jaren heeft gegeven aan de deeltijdopleiding tot eerstegraads leraar te Utrecht. En dat is goed te merken. Nagenoeg iedere pagina toont zijn ruime ervaring op dit gebied. De auteur ontkomt niet aan het didactisch dilemma enerzijds een cursus op te zetten die aansluit op de voorkennis van zijn studenten, anderzijds voor een streng axiomatische (synthetische) dan wel een analytische methode te kiezen. In het voorwoord merkt de auteur op: 'De opzet is wiskundig niet erg conventioneel, in die zin dat niet van meet af aan de lezer een onverbiddelijk systeem van spelregels wordt opgelegd; wel wordt er op diverse plaatsen gediscussieerd over uitgangspunten en axiomatic; ook worden de grenzen van het veld van de projectieve meetkunde regelmatig overschreden, maar dat gaat vrijwel altijd gepaard met een waarschuwend woord.' De eerste hoofdstukken zijn te beschouwen als een opmaat. De invalshoek is de ruimtemeetkunde en het perspectief tekenen, waarbij een stevig beroep wordt gedaan op de intuïtie. Na de introductie van het begrip

dubbelverhouding volgt een hoofdstuk over projectieve en andere eigenschappen waarin de plaats van de projectieve meetkunde ten opzichte van de Euclidische en de affiene meetkunde wordt aangeduid. Dan volgt in hoofdstuk 7, alvorens de begrippen puntenreeks en lijnenwaaier te introduceren, een moment van bezinning. Het hoofdstuk begint als volgt: 'In de voorgaande hoofdstukken is een beetje een omtrekkende beweging gemaakt rond het gebied van de projectieve meetkunde. Het wordt nu tijd om tot dat gebied door te dringen, gebruikmakend van het geschikte werktuig. Dit laatste vraagt een keuze.' Volgt nu een vermelding van de synthetische en de analytische methode. 'Beide methoden, in hun meest pure vorm, vind ik niet zo geschikt voor een eerste kennismaking. (...) In dit boek wil ik een soort middenweg bewandelen. Een belangrijk instrument daarbij is de dubbelverhouding. Dit semi-algebraïsche begrip maakt het mogelijk hier en daar stukjes af te snijden van de wat moeizame weg die de fijnproevers misschien zouden verkiezen, zonder dat het landschap veel aan meetkundige schoonheid inboet. Ook zal in dit boek de wandeling door de projectieve meetkunde niet aan al te strikte regels worden onderworpen: regelmatig wordt het terrein van de Euclidische en de affiene meetkunde betreden, enerzijds om bronnen aan te boren voor projectieve stellingen, anderzijds om projectieve methoden toe te passen in meer gespecialiseerde situaties.' Ik citeer zo uitvoerig omdat ik deze passage uitermate kenmerkend vind voor de stijl van de auteur. Hij is helder in zijn keuzes en bouwt regelmatig momenten van reflectie in. Men kan hierover twisten. Taal en metataal wisselen elkaar af evenals Euclidische, affiene en projectieve beschouwingen. Voorwaar geen kleinigheid voor een noviet, 'als eerste kennismaking', om de grote lijn te blijven volgen. Toch is dit boek sprankelend en wel sprankelend meetkundig. Geen zware axiomatic maar vele en mooie figuren. De lezer moet goed kijken en verbanden leggen tussen meetkundige objecten. Onder de 225 opgaven zijn enkele juweeltjes. De opgaven spelen een essentiële rol en in de tekst wordt er verschillende malen naar verwezen. De 36 hoofdstukken die het boek telt zijn verdeeld over drie delen. In deel een, 'van projecties naar projectieve meetkunde', worden onder andere de dubbelverhouding, het dualiteitsprincipe, harmoniciteit, perspectiviteit en projectiviteit, de stellingen van Pappos en Desargues, de constructie van Steiner en de involutie behandeld. Deel twee handelt over kegelsneden, waarin de stellingen van Pascal en Brianchon, liniaalconstructies, pool en poollijn en projectiviteiten op kegelsneden aan bod komen. In

deel drie worden eerst enkele modellen van het projectieve vlak besproken waarna coördinaten worden ingevoerd en de algebraïsche voorstellingen van collineaties en kegelsneden worden behandeld. Het laatste hoofdstuk geeft een kijkje in de hyperbolische meetkunde. Als toetje is in een appendix Pascal's Essai pour les coniques opgenomen dat zonder nadere uitleg toch lastig te lezen is. Voor een student die erom vraagt zou ik verwijzen naar een goede Engelse vertaling met commentaar in het boek van J.V.Field en J.J.Gray: The geometrical works of Girard Desargues, uitg. Springer 1987. Dat er zo spoedig na de eerste reeds een tweede druk moest verschijnen is de beste aanbeveling die je kan wensen. De auteur heeft deze gelegenheid gebruikt om van alle opgaven ook de uitwerkingen in het boek op te nemen. Misschien wordt er bij de volgende druk wel een diskette geleverd (zoals bv. bij de nieuwste editie van Coxeter's The real projective plane) of verschijnt er misschien een nieuwe editie op cd-rom? Het boek is zoals we dat van de Epsilon uitgaven gewend zijn: keurig verzorgd en van een index voorzien.

Jan Donkers
TU Eindhoven

40 jaar geleden

1105. Gegeven een rij reële getallen $t_1, t_2, t_3, \dots$. S_n stelt de som voor van de eerste n termen van deze rij. Voorts is gegeven:

$$t_1 \neq t_2; S_n = \frac{t_1^2 - t_2 t_n}{t_1 - t_2} \text{ voor } n = 3, 4, 5, \text{ enz.}$$

Laat zien dat de formule voor S_n ook juist is als $n = 2$.

- Bewijs uit het ongerijmde dat $t_1 \neq 0$.
- Bewijs dat de getallen $t_1, t_2, t_3, \dots$ een meetkundige reeks vormen en dat alle termen $\neq 0$ zijn, als $t_2 \neq 0$ is.

(Eindex. Gymn. 1957).

1106. De functie $y = \frac{3x^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ heeft als

asymptoten: $y = 3$, $x = 3$ en $x = -3$.

Voor de beide extremen (x_1, y_1) en (x_2, y_2) geldt:

$x_2 = 2x_1$ en $y_2 = 2y_1$. Bepaal b, c, p, q en r .

Teken de grafiek van de functie.

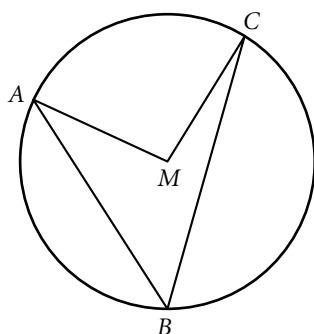
Welke waarden kan y niet aannemen?

1107. In $\triangle ABC$ ($AB \neq BC$) trekt men de deellijn BD van $\angle B$ en men beschrijft de cirkel door B en D , die AC raakt. Deze cirkel snijdt AB en BC voor de tweede maal in X , opv. in Y .

Als de oppervlakte van vierhoek $BXDY = \frac{3}{4}$ opp. $\triangle ABC$, bewijs dan dat de verbindingslijn IZ van het middelpunt I van de ingeschreven cirkel met het zwaartepunt Z van $\triangle ABC$ evenwijdig met AC loopt.

Opgaven uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 45 (1957-1958)

Stellingen en bewijzen



figuur 1

Je kent de volgende stelling (zie figuur 1):

Als drie (verschillende) punten A , B en C op de cirkel met middelpunt M liggen, dan geldt:

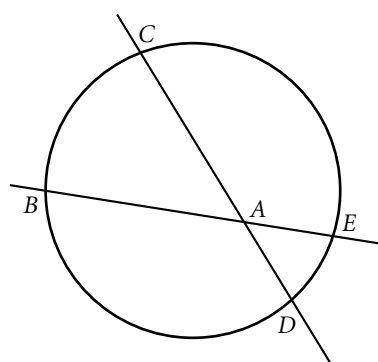
De omtrekshoek $\angle ABC$ is de helft van de bijbehorende middelpuntshoek $\angle AMC$.

In plaats van de middelpuntshoek $\angle AMC$ zegt men ook wel eens de boog AC .

1 Bewijs de volgende stelling (zie figuur 2):

Als twee lijnen elkaar *binnen* een cirkel snijden, dan is de hoek tussen die twee lijnen gelijk aan de helft van de som van de bijbehorende cirkelbogen.

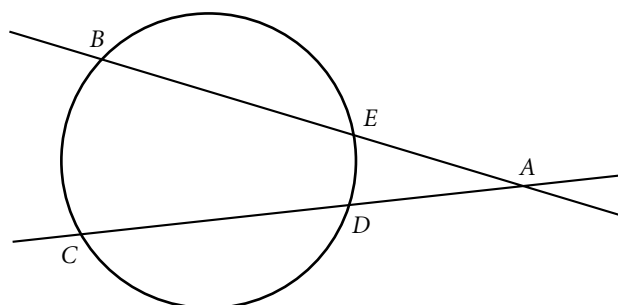
Of: $\angle BAC = \frac{1}{2} (\text{boog } BC + \text{boog } DE)$



figuur 2

2 Als twee lijnen elkaar *buiten* een cirkel snijden (zie figuur 3) dan bestaat er ook een stelling over de hoek van de lijnen en de cirkelbogen.

Formuleer deze stelling en bewijs deze.



figuur 3

Stellingen en bewijzen

1 Vlinderstelling

In een cirkel is een 'vlinder' getekend door vier punten op de cirkel te verbinden (zie figuur 1).

De 'vlinder' bestaat uit twee driehoeken.

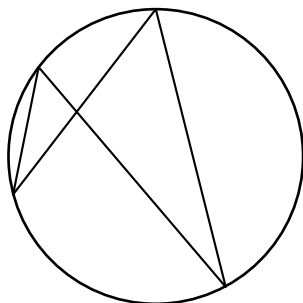
Bewijs dat die driehoeken gelijkvormig zijn.

2 Driehoek ABC is scherphoekig.

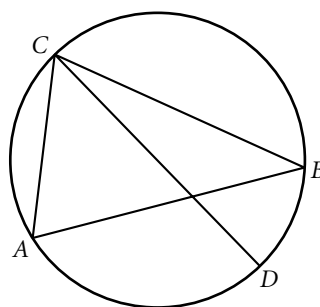
CD is een middellijn in de omgeschreven cirkel van driehoek ABC (zie figuur 2).

Bewijs dat $\angle DCB + \angle BAC = 90^\circ$

Hoe luidt de analoge stelling in het geval $\angle BAC$ stomp is?



figuur 1



figuur 2

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

Recreatieve

Strafwerk. Een woord waar elke leerling wel eens mee te maken heeft gehad. Extra oefeningen maken, een tekst overschrijven en soms (nog steeds!) strafregels schrijven. In de bovenbouw komt 't bij mij zelden voor, maar in mijn twee brugklassen moet ik soms corrigerend optreden. Jaren heb ik hiervoor de eindtoets oneigenlijk gebruikt. Sinds een half jaar heb ik een andere opdracht:

Start met het getal 4

Pas dan één van de volgende regels toe:

1. Zet een 0 achter het getal.
2. Zet een 4 achter het getal.
3. Bij een even getal: deel door 2.

De bedoeling is om een rijtje uitkomsten te krijgen. Bijvoorbeeld de uitkomsten 13 tot en met 20.

$4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 10 \rightarrow 104 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13$

$4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 14$

$4 \rightarrow 2 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 30 \rightarrow 15$

$4 \rightarrow 2 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16$

$4 \rightarrow 2 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 34 \rightarrow 17$

$4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 14 \rightarrow 144 \rightarrow 72 \rightarrow 36 \rightarrow 18$

$4 \rightarrow 2 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 30 \rightarrow 304 \rightarrow 152 \rightarrow 76 \rightarrow 38 \rightarrow 19$

$4 \rightarrow 2 \rightarrow 20$

Intussen zijn we al beland in de 400-serie. Maar, wat niet de bedoeling is (?): de leerlingen worden enthousiast. Ik heb er een aantal leerlingen bij, die vrijwillig verder zijn gegaan! Afgelopen week vroegen ze: 'Zijn zo alle getallen te maken?'

Op dat moment had ik er nog niet over nagedacht, zodat ik antwoordde: 'Ik weet het niet'.

Mag ik u strafwerk voor de vakantie meegeven? U heeft TWEE maanden de tijd om een oplossing te vinden en in te sturen. Als beloning ontvangt u dan maximaal 5 punten voor de doorlopende ladderwedstrijd.

Kunt u bewijzen dat alle positieve gehele getallen zo te maken zijn of is er een kleinste getal dat niet op deze manier te maken is?

Veel puzzelplezier en een fijne vakantie!

Oplossing 683

In het januari-nummer stond de opgave en de beschrijving van de TOWER COLORS puzzel. *Jan Verbakel* (5 punten), Eindhoven, heeft dit spelletje volledig geanalyseerd:

	Oplossing 1	Oplossing 2	Oplossing 3
1	R4Y3-Y4	R4Y3-Y4	R4Y3-Y4
2	G4B3-B4	G2B1-B4	B4V3-V4
3	V4-V2	V4-V0	G4-G2
4	R3-R4	R3-R4	B3-B4
5	Y2G1-G2	Y2G1-G4	V2R1-R2
6	G4B3-B0	G2B1-B0	R4Y3-Y0
7	Y2G1-G4	Y2G1-G2	V2R1-R4
8	G2B1-B4	G4B3-B4	R2Y1-Y4
9	V4V2-V0	V2-V4	G4G2-G0
10	R3R4-R1	R3R4-R1	B3B4-B1
11	Y3Y4-Y2	Y3Y4-Y2	V3V4-V2
12	G3-G2	G3-G4	R3-R2
13	B2V1-V4	B2V1-V2	Y2G1-G4
14	R3-R0	R3R4-R0	B3-B0
15	R4R1-R3	R1-R3	B4B1-B3
16	Y3-Y0	Y3Y4-Y0	V3-V0
17	Y4Y2-Y3	Y2-Y3	V4V2-V3
18	G3G2-G1	G3G4-G1	R3R2-R1
19	B1B4-B2	B3B4-B2	Y1Y4-Y2
20	V3R2-R4	V3R2-R1	G3B2-B4
21	Y1-Y4	Y1-Y2	V1-V4
22	G3G2-G0	G3G4-G0	R3R2-R0
23	G1G4-G3	G1G2-G3	R1R4-R3
24	B1-B3	B3B4-B1	Y1-Y3
25	B4B2-B1	B2-B3	Y4Y2-Y1
26	V3-V1	V3-V1	G3-G1

Bij de zetten 14/15, 16/17 en 24/25 moeten er drie ringen van dezelfde kleur verplaatst worden. Dat kan natuurlijk ook in de andere volgorde. Bij oplossing 3 zijn de zetten 2/3 nog te verwisselen. Totaal $2^3 + 2^3 + 2^4 = 32$ oplossingen. Verder zijn de kleuren cyclisch verdeeld, waardoor we met elke kleur kunnen beginnen. Totaal $5 \times 32 = 160$ verschillende oplossingen in minimaal 26 zetten.

Als de pin 8 ringen of hoger is, dan is het minimum aantal zetten steeds 23. Ook daarvan ontving ik de oplossingen. Jan, ontzettend bedankt voor je analyse!

Intussen is er een Nederlandse beschrijving verschenen: TORENKLEUREN. Helaas is hierin het Engelse woordje *empty* (bewust?) niet vertaald: 'Bij het verplaatsen van slechts één schijf kan deze alleen worden geplaatst op een schijf of paaltje van dezelfde kleur als de te verplaatsen schijf.'

Hierdoor is de gegeven oplossing helaas foutief!

R
e
c
t
e
a
t
i
e

Met 65 punten is winnaar van een boekenbon van f25,-:

Jacques Haubrich
Aeneaslaan 21
5631 LA Eindhoven

Heel hartelijk gefeliciteerd!

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in komend schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Voor of op die datum dienen uw mededelingen bij de hoofdredacteur te zijn. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
1	05-09-98	09-07-98
2	17-10-98	03-09-98
3	28-11-98	15-10-98
4	09-01-99	19-11-98
5	20-02-99	07-01-99
6	03-04-99	18-02-99
7	19-05-99	01-04-99
8	26-06-99	13-05-99

Data nieuwe schooljaar
Wil eenieder die relevante data heeft voor het nieuwe schooljaar deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur:
cph@xs4all.nl

Vierkant Wiskundekampen
 Lunteren
 10 - 14 augustus 1998:
 Origo: 10 t/m 12 jaar
 Bèta: 12 t/m 14 jaar
 Triangle: 14 t/m 17 jaar
 Exponent: 17 t/m 19 jaar
 Voor meer informatie:
 Vierkant: 020 - 4447776
Zie ook Euclides 73-6 p. 200 e.v.

Zomercursussen
 vr. 28 en za. 29 augustus 1998:
 CWI, Kruislaan 413, Amsterdam.
 do. 3 en vr. 4 september 1998:
 TU Eindhoven, Den Dolech 2.
 tel.: 020 - 592 4009
 e-mail: Simone.Panka@cwil.nl
Zie aankondiging blz. 262

VeEX, Conferentie techniek in het huishouden
 do. 24 september 1998
 ROC, Amerikalaan 109, Utrecht
 VeEX: tel. 030-2856746
Zie aankondiging blz. 280

Wetenschap en Techniek-Week
 za. 3 oktober -
 zo. 11 oktober 1998
 Zie informatiekrant op de scholen.

APS-conferentie
 wo. 7 oktober 1998, Utrecht
 Wiskunde op weg in de Tweede Fase
 APS: 030 - 2856722
Aankondiging volgt later

APS-conferentie
 wo. 14 oktober 1998, Utrecht
 Wiskunde in de leerwegen vmbo
 APS: 030 - 2856722
Aankondiging volgt later

Jaarvergadering en studiedag NVvW
 za. 14 november 1998
 Eerste aankondiging zie blz. 273

Wiskunde A-lympiade
 vr. 27 november 1998
 Freudenthal instituut:
 030 2611 611
Aankondiging volgt later

Nationale Wiskunde Dagen
 vr. 5 en za. 6 februari 1999
 Freudenthal instituut:
 030 2611 611
Aankondiging volgt later

Internetsites voor wiskundedocenten:

Wijziging e-mail-adressen Freudenthal instituut

De 'r' gaat uit de e-mail adressen van het Freudenthal instituut.
fi@fi.ruu.nl wordt fi@fi.uu.nl
@fi.ruu.nl wordt @fi.uu.nl

Pythagoras-Escher-prijsvraag
 Voor meer informatie zie vorig nummer van Euclides en verder op www.wins.uva.nl/misc/pythagoras

Europees platform voor het Nederlands Onderwijs
www.europeesplatform.nl

Centrum Vrouwen en Exacte Vakken
ns1.svm.nl/VeEX/

Wiskunde Olympiade
 nationaal:
olympiads.win.tue.nl/nwo
 internationaal:
www.oma.org.ar/imo97/index-en.html

Suggesties voor interessante sites graag zenden aan Kees Hoogland
 e-mail: cph@xs4all.nl

Bereidt uw leerlingen nu al voor op het gebruik van de grafische rekenmachine!

Wist u dat uw leerlingen op het examen wiskunde A oude stijl in 2000 en 2001 een grafische rekenmachine mogen gebruiken? Dat geldt trouwens ook voor natuurkunde, scheikunde, biologie, economie, handelswetenschappen en recht, economische wetenschappen 2 en recht, en management en organisatie.

Voor het vak wiskunde zijn bij Wolters-Noordhoff nu drie handige hulpboekjes verschenen: voor elk van de drie toegestane typen grafische rekenmachines één.

Naast knoppentaal bevatten de boekjes oefenopgaven. Practica leiden uw leerlingen stap voor stap langs de belangrijkste gebruiksmogelijkheden. De boekjes zijn naast elkaar bruikbaar en geschikt voor gebruik in de klas en thuis.



De Casio cfx 9850G, kennismaken en toepassen

ISBN 90 01 83291 1

48 p met hulpkaart f 7,95



De HP-38G, kennismaken en toepassen

ISBN 90 01 83292 X

50 p met hulpkaart f 7,95



De TI-83, kennismaken en toepassen

ISBN 90 01 83290 3

50 p met hulpkaart f 7,95

CEVO-medelingen "De centrale examens voor havo in 2000 en 2001 en vwo in 2001 en 2002"

5 Wiskunde A / 5.1 Algemeen

Voor de examens oude stijl en nieuwe stijl zal naast de huidige rekenmachine ook een grafische rekenmachine worden toegestaan.

Voor de havo gaat dat in 2000 in, voor vwo in 2001. Bij de examens oude stijl zal er op gelet worden dat de grafische rekenmachine voor het maken van de opgaven niet van wezenlijk belang is.

Bron: Uitleg, Gele katern 14e jaargang nr. 8, 18 maart 1998

Wolters-Noordhoff

Postbus 58

9700 MB Groningen

Telefoon (050) 522 63 11

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

**Wolters
Noordhoff**