

Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

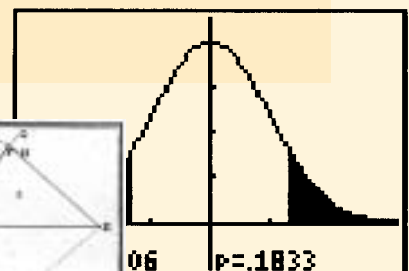
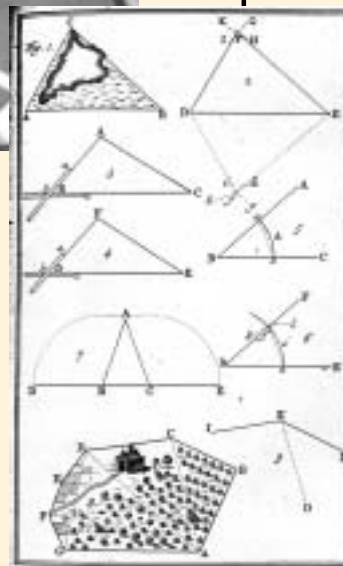
EUCLIDES

V a k b l a d v o o r d e w i s k u n d e l e r a a r

jaargang 73

1997-1998 januari

4



A.C. Clairaut

(1713-1765)

Statistiek

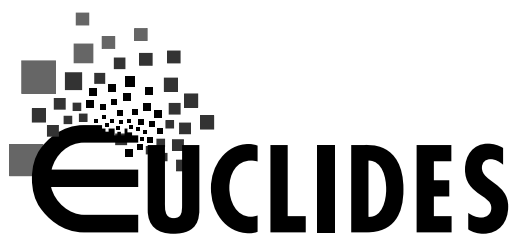
met de GR

Regionale NVvW

Bijeenkomsten

Maart 1998





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Redactie

Dr. A.G. van Asch
Drs. R. Bosch
Drs. W.L.J. Doeve
Drs. J.H. de Geus
Drs. C.P. Hoogland *hoofdredacteur*
Ir. W.J.M. Laaper *secretaris*
W. Schaafsma
Ir. V.E. Schmidt *penningmeester*
Mw. Y. Schuringa-Schogt *eindred.*
J. van 't Spijker
A. van der Wal
Drs. G. Zwaneveld *voorzitter*

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem.

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.
Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Richtlijnen voor mededelingen:

- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter

dr. J. van Lint
Spiekerbrink 25
8034 RA Zwolle
tel. 038-4539985

Secretaris

W. Kuipers
Waalstraat 8
8052 AE Hattem
tel. 038-4447017

Ledenadministratie

Mw. N. van Bommel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543

Contributie per ver. jaar: f 75,00

Studentleden: f 37,50

Leden van de VVWL: f 50,00

Lidmaatschap zonder Euclides: f 55,00

Betaling geschiedt per acceptgiro.

Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.

Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Abonnementsprijs voor personen:
f 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: f 240,00 per jaar.

Betaling geschiedt per acceptgiro.

Losse nummers op aanvraag leverbaar voor f 30,00.

Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritsshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of:

L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891.

Adresgegevens auteurs

A.F.S. Aukema-Schepel

Buitenplaats 77
8212 AC Lelystad

D.J. Beckers

Merelstraat 16
6542 WJ Nijmegen

R. Bosch

Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

J. Breedveld

Weidebloemstraat 15
2825 AD Berkenwoude

L. van den Broek

Graafseweg 387
6532 ZN Nijmegen

Nederlandse Onderwijs

Televisie

M. Bruin
Postbus 1070
1200 BB Hilversum

P. Drijvers

Paddepoelseweg 9
6532 ZG Nijmegen

M. Kollenveld

Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk

G. van Lent

Admiraliteitskade 21 H
3063 ED Rotterdam

S. Oortwijn

Graafseweg 387
6532 ZN Nijmegen

V.E. Schmidt

Verlengde Grachtstraat 43
9717 GE Groningen

Inhoud



111



122



132

110 Kees Hoogland
Van de redactietafel

111 D.J. Beckers
A.C. Clairaut (1713-1765) en de geschiedenis van de wiskunde

114 Rob Bosch
 π , het product van Wallis

117 Paul Drijvers
Statistiek met de grafische rekenmachine

120 Rectificatie

122 Victor Schmidt
'Ze kunnen meer dan je denkt'
INTERVIEW

124 Leon van den Broek, Saskia Oortwijn
Erin gevlogen

127 Marian Kollenveld
Van de bestuurstafel
NVvW

128 Agneta Aukema
Regionale NVvW-studie-bijeenkomsten
NVvW

132 Gerben van Lent
Boeken naar Mpongwe

136 Jaap Breedveld
ILS in het MTO

139 40 jaar geleden

140 Werkbladen

142 Recreatie

144 Kalender

De redactie hoopt dat u allen van een welverdiende kerstvakantie hebt genoten.

Het is inmiddels 1998. Nog twee jaar voor we het over het wiskundeonderwijs in de 21e eeuw kunnen gaan hebben. Wist u dat de Vereniging dan ook 75 jaar zal bestaan?

Het wiskundeonderwijs in de 21e eeuw zal er niet uitzien zoals nu, dat lijkt inmiddels zeker. Of misschien toch wel?

Leest u onderstaand citaat eens. *'Alle stellingen worden in een praktische context behandeld. (...) Clairaut introduceert een toepassing; laat zien dat daarbij een paar meetkundige problemen een rol spelen, en gaat die vervolgens te lijf. Daartoe formuleert hij steeds een bewering en laat dan zien waarom die uitspraak logisch is. Daarbij doet hij vaak een beroep op de intuïtie.'*

Dit zou een citaat uit een voorstel voor een nieuw leerplan wiskunde kunnen zijn. Dat is het in zekere zin ook. Het betreft echter wel een leerboek uit 1741. Het citaat is uit het eerste artikel in dit nummer. Verschillende visies op de inrichting van wiskundeonderwijs zijn blijkbaar van alle tijden. Blijkbaar zijn ook praktische opdrachten bij wiskundeonderwijs toch weer niet zo'n modern verschijnsel.

Terug maar weer naar het heden.

vbo/mavo

De politiek heeft besloten de invoering van de nieuwe structuur voor vbo/mavo in ieder geval één jaar uit te stellen. Dit mede op grond van een advies van de Onderwijsraad, die zich grote zorgen maakt over de haalbaarheid van de voorgestelde programma's voor grote groepen leerlingen in met name het vbo.

Dat geeft weer wat lucht aan scholen en docenten om de veranderingen zorgvuldig in te voeren. Of de plannen in augustus 1999 wel voldoende concreet en op deze leerlingen toegesneden zijn valt nog te bezien.

havo/vwo

Inmiddels zijn er schattingen dat ongeveer 30% van de scholen op het vwo en/of de havo in 1998 zullen starten met de Tweede Fase. Dat is toch weer een aanzienlijk hoger percentage dan een paar maanden geleden door meniggeen werd geschat.

In het vorige nummer van Euclides heeft een lijst gestaan met scholen die aan de redactie hebben gemeld dat zij in ieder geval tot die 30% behoren. Ook uw school kan zich nog melden aan de redactie. In één van de volgende nummers zal een geactualiseerde lijst verschijnen.

Steeds meer beslissingen rond de inrichting van de Tweede Fase worden nu definitief genomen.

Ik raad u aan om het 'Van de bestuurs-tafel' in dit nummer aandachtig te lezen. De CEVO zal zeer binnenkort een beslissing nemen over wanneer en bij welke vakken de grafische rekenmachine toegestaan zal worden. Mogelijk al in 1998 bij wiskunde A en bij andere vakken. In het volgende nummer zal de definitieve beslissing van de CEVO staan. Om een idee te krijgen van het gebruik bij wiskunde A staat er in dit nummer een artikel over de statistische mogelijkheden van de grafische rekenmachine. Heeft u er al één aangeschaft?

Ten slotte

De regionale bijeenkomsten van de Vereniging komen er weer aan. In maart kunt u op drie plaatsen in het land weer helemaal bijgepraat worden over de laatste ontwikkelingen. De uitgebreide aankondiging vindt u verderop in dit nummer.

Als lid van de Vereniging kunt u daar gratis heen. Bovendien is in deze woelige tijden optimaal geïnformeerd zijn over de ontwikkelingen van het wiskundeonderwijs van levensbelang. Zijn uw sectieleden eigenlijk al lid van de Vereniging?

Kees Hoogland

A.C. Clairaut (1713-1765)

en de geschiedenis van de wiskunde

D.J. Beckers

Inleiding

In 1741 publiceerde Alexis Claude Clairaut zijn *Éléments de géométrie*. In 1743 volgde de *Éléments d'algèbre*. De boeken waren een groot succes. Beide werden in 1760 door Arnoldus Bastiaan Strabbe, de latere oprichter van het Wiskundig Genootschap, in het Nederlands vertaald. De Nederlandse vertaling kon het succes van de Franse editie niet evenaren: ze heeft nooit een herdruk mogen beleven. Gedurende de Franse tijd werd aan veel scholen voor hoger onderwijs wel een Franse editie - herzien door Lagrange en Laplace¹ - gebruikt, maar zonder enthousiasme. Ondanks het feit dat de boeken hier ten lande geen succes oogstten, was het toch zeer opmerkelijk werk. Clairaut had de opbouw van zijn meetkunde en algebra namelijk gekoppeld aan de geschiedenis van de wiskunde. Een zeer origineel idee met een verrassend resultaat.

Biografische schets

Alexis Claude Clairaut werd te Parijs geboren op 7 mei 1713. Zijn vader, die als leermeester in de wiskunde in zijn onderhoud voorzag, onderwees hem thuis. Wiskunde was in die tijd veel breder dan dat het vakgebied nu wordt opgevat, en omvatte onder andere ook de planning en bouw van fortificaties, waarin Clairaut zich ook bekwaamde. Men zou zijn positie dus kunnen vergelijken met die van de huidige ingenieur. Clairaut kreeg van zijn vader een gedegen wiskundige opleiding die, zoals dat hoorde in die tijd, begon met de boeken van Euclides.

De eerste publicaties van Clairaut waren niet op het gebied van de wiskunde, maar gingen over de vorm van de aarde, de astronomie en de invloed van de maan op de getijden. Met dergelijk werk plaatste Clairaut zich in de rij van wetenschappelijke alleskunnars die in de

achttiende eeuw in navolging van Newton de natuurwetten trachtten bloot te leggen.

Als lid van vele grote academies in Europa en als redacteur van het gerenommeerde *Journal des Savants* was Clairaut een van de groten van zijn tijd.

Hij stierf op 17 mei 1765, ongetrouwd en kinderloos. Als een blijk van waardering voor de *géomètre* schonk de Franse koning aan de broer van Clairaut een pensioen van 1200 Franse francs.

Onderwijs

Gedurende de achttiende eeuw vond het onderwijs in de wiskunde plaats aan de universiteiten en de ingenieursscholen. Aan de universiteiten werd de wiskunde, en dan met name de meetkunde, bestudeerd met als doel beter te leren redeneren. De ingenieurs hoefden niet te leren redeneren: hen werd ook wiskunde geleerd, maar dan in de vorm van praktische regels waarvan de waarheid niet werd aangetoond. Wij zouden die regels tegenwoordig algoritmen noemen.

De elementen (Στοιχεία) van Euclides (± 300 v. Chr.) werd beschouwd als de basis voor de gehele wiskunde. Alle leerboeken waren op de een of andere manier gekoppeld aan het werk van de oude Griekse wiskundige. Academici leerden uit (een vertaling van) Euclides. In boeken voor het ingenieursonderwijs werd regelmatig naar *De elementen* verwezen, om een bepaalde regel te rechtvaardigen. Voor ingenieurs bleef Euclides echter de schimmige figuur die in zijn boeken had samengevat waarom alles klopte wat zij deden: de meesten van hen namen geen kennis van zijn werk.

Clairaut had zijn boek geschreven voor ingenieurs die zich in de achtergronden van hun vak wilden verdiepen. Hij wilde hen, die de Euclidische beginselen niet geleerd hadden, de mogelijkheid bieden de wortels van hun vak echt te leren kennen. Hij wilde hen met zijn

boek de mooie logica achter hun werk laten zien, zonder Euclides erbij te slepen. Kennis van de (wiskundige) beginselen van zijn werk zou de ingenieur meer inzicht en plezier verschaffen.

Clairaut behoorde tot een groep van populariseerders. Leren redeneren was voor hem het hoofddoel bij het wiskundeonderwijs; de Euclidische redeneertrant vond hij echter te gecompliceerd. Clairaut stelde dat de bewijzen in de boeken van Euclides veel te moeilijk waren voor de *klaarblijkelijke waarheden* die ze bewezen. Volgens hem had Euclides dat alleen maar gedaan om de sofisten uit zijn tijd van repliek te kunnen dienen. Het kon dus allemaal veel eenvoudiger: structuur en betoogtrant van de boeken van Euclides zijn in zijn boeken dan ook afwezig.

Het meetkundeboek

Clairaut begon zijn *Beginzelen der geometrie* met een behandeling van het vergelijken (meten) van lengtes (met een gegeven lengte). In zijn visie was dat het eerste dat de mens aan meetkunde zou hebben geleerd, omdat meten het eerste zou zijn geweest dat de mens nodig had. Vervolgens komen er allerlei praktische meetkundige stellingen aan bod, zoals het oprichten van een loodlijn (om de afstand van twee lijnen te kunnen meten) en het verplaatsen van een hoek. De Euclidische stelling dat het mogelijk is om een hoek te verplaatsen laat hij eerst zien aan de hand van twee scharnierende latten die hij in een bepaalde stand kan vastzetten. Daarna toont hij ook het Euclidische bewijs. Bij de meeste stellingen blijft dat laatste echter achterwege. Alle stellingen worden in een praktische context behandeld. De historische pretentie is al vrij snel verdwenen. Clairaut introduceert een toepassing; laat zien dat daarbij een paar meetkundige problemen een rol spelen, en gaat die vervolgens te lijf. Daartoe formuleert hij steeds een bewering en laat dan zien waarom die uitspraak logisch is. Daarbij doet hij vaak een beroep op de intuïtie.

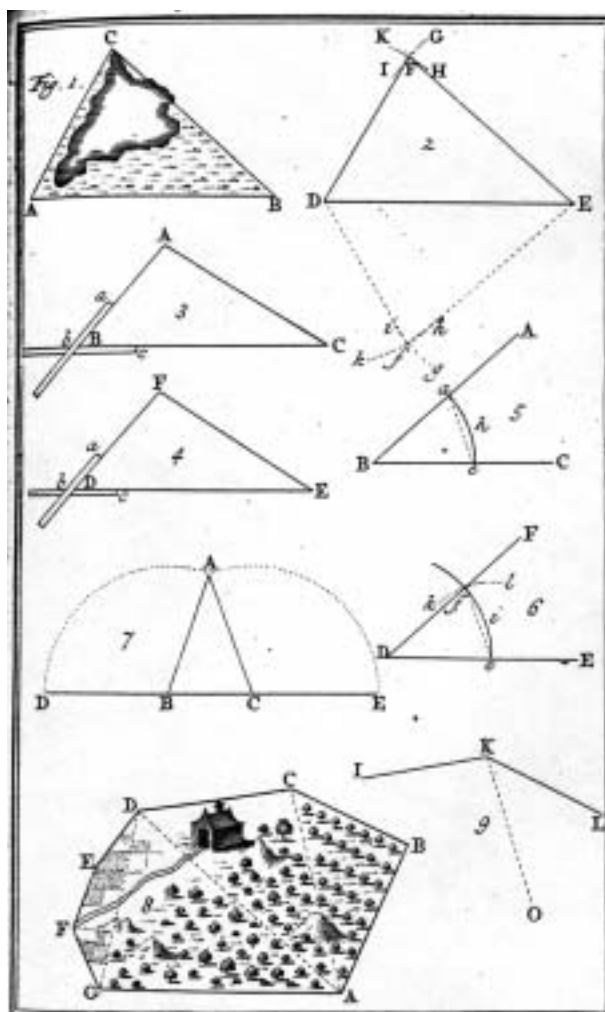
Bijvoorbeeld: in de praktijk van het landmeten stuit Clairaut op de volgende problemen die om meetkundige stellingen vragen. Om de zijden van een driehoek te kunnen meten, waarvan één der zijden door een meer-
tje loopt, heeft hij de stelling nodig dat een driehoek met twee zijden en een hoek vast ligt (Zie plaat III). Op een analoge wijze komt de congruentie (Clairaut gebruikt het woord gelijkheid) aan bod van alle driehoeken waarvan twee hoeken en de tussenliggende zijde gelijk zijn. Dan merkt hij op dat wanneer men twee zijden van de driehoek gelijk (lees: even lang) bevindt, dan zijn de twee hoeken tussen die zijden en de derde zijde ook gelijk. Dat scheelt tijd, want dan hoeft je maar

één hoek te meten, stelt Clairaut. Om de waarheid van dit laatste te doen inzien vraagt hij zijn lezers zich voor te stellen wat er gebeurt als die even lange zijden zich in het verlengde van de basis zouden bevinden en langzaam in hun positie worden getakeld:

... om derzelver einden in 't punt A te vereenigen; want als dan, zoude de gelijkheid deezer twee zyden, haar beletten om een ongelyke weg te maken. Derhalven zouden zy (zaamengevoegt zynde) een gelyke neiging hebben tot de bafis BC, en gevolgelyk, zoude de hoek ABC, gelyk zyn aan den hoek ACB.

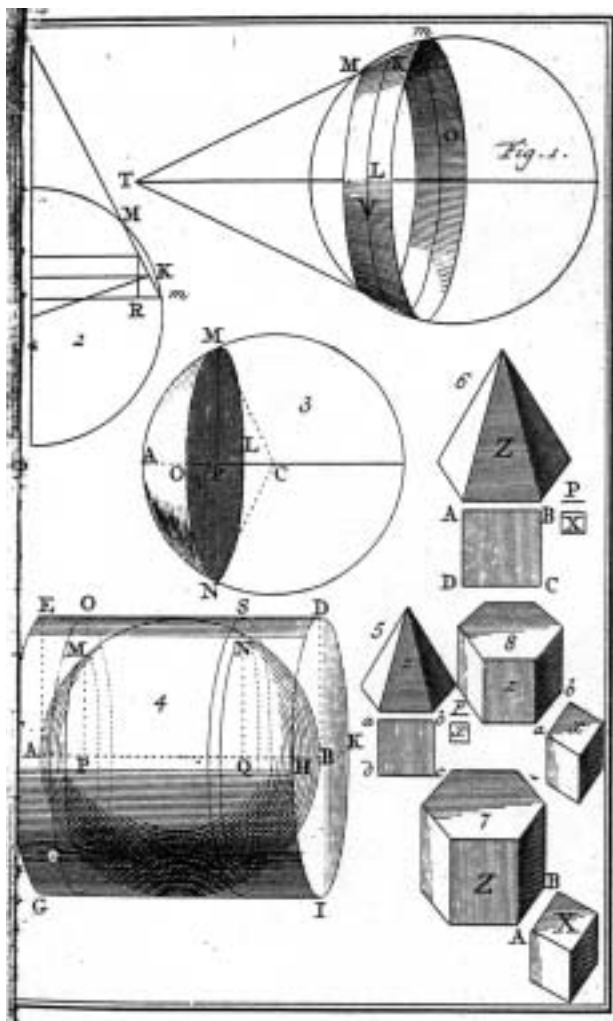
Vervolgens gaat hij over tot de problematiek die het landmeten in de praktijk met zich meebrengt: de grote afstanden, problemen met het kiezen van zichtbare hoekpunten voor het netwerk etcetera.

Om de stelling van Pythagoras te bewijzen gebruikt hij een puzzel-argument. Dat de figuren in kwestie ook allemaal de eigenschappen hebben die ze lijken te heb-



Plaat III uit Clairaut: *Beginzelen der geometrie*.

ben laat hij daarbij, zonder dit expliciet te problematiseren, aan de lezer over. Nadat hij op deze wijze de centrale vragen uit het eerste boek van Euclides heeft behandeld volgen een aantal stellingen over gelijkvormigheid, dan over het meten van oppervlakten en tot slot een hoofdstuk over ruimtelijke figuren. Het laatste voorstel uit het boek luidt: de inhouden van twee gelijkvormige lichamen staan tot elkaar als de kubussen op de overeenkomstige zijden (Zie plaat XIV).



Plaat XIV uit Clairaut: *Beginzelen der geometrie*.

Het 'bewijs' gaat aan de hand van twee gelijkvormige prisma's. Clairaut laat de lezer zich twee kubusjes voorstellen, waarvan er een aantal op de zijde van het ene prisma naast elkaar kunnen staan, en de ander even vaak op de overeenkomstige zijde van het andere prisma past. Met het stapelen van deze kubusjes valt de stelling dan te begrijpen. Tot slot volgt dan de opmerking dat dit voor alle lichamen werkt, ook als de zijden niet met kubusjes meetbaar lijken, zoals bijvoorbeeld bij een cirkelvormig grondvlak het geval is. Het lijkt erop dat Clairaut in plaats van een historische weg eerder een eigen didactische weg bewandelt. Met

zijn opzet appelleert hij aan de belevingswereld van de praktisch ingestelde ingenieurs, en in zijn redeneringen wordt hij niet zo abstract als Euclides.

De vertaler achtte het verder nodig om het meetkundeboek van Clairaut uit te breiden met een vertaling van een vrij theoretische verhandeling van Thomas Simpson over de trigonometrie. Vanwege het uitbundige formule-gebruik detoneert dit aanhangsel enigszins met het boek van Clairaut. Het past ook niet in de bedoeling die Clairaut met zijn boek nastreefde: echte wiskunde wilde hij helemaal niet overbrengen; wel hetgeen hij de essentie vond van de wiskundige manier van denken.

Het algebraboek

De *Gronden der algebra* was een leerboek over het oplossen van vergelijkingen voor hetzelfde publiek als het besproken meetkundeboek. Algebra had in de tijd van Clairaut de betekenis van algemene rekenkunde, en de auteur wijkt niet van die opvatting af: alle regels worden bewezen uit de bekend veronderstelde getaloperaties. Het boek begint met een opgave die neerkomt op een lineaire vergelijking, en die Clairaut een opgave noemt 'gelyk de geene die de eerste Stelkonstenaars malkander hebben kunnen voorstellen [namely:] <...> een som te verdeelen, byvoorbeeld 890 \$\$ onder drie persoonen, sodanig, dat de eerste 180 \$\$ meerder als de tweede, en de tweede 115 \$\$ meerder als de derde ontvangt.'

Deze wordt door Clairaut opgelost door middel van redenering. Vervolgens demonstreert hij de oplossing door middel van een aantal algebraïsche bewerkingen. Deze tweede uitleg duurt minstens zo lang, omdat hij zowel de notaties als de benodigde rekenregels gelijktijdig introduceert: eerst vertelt hij dat de personen — het onbekende gemeenschappelijke deel x stellende — respectievelijk x , $x + 115$, en $x + 115 + 180$ krijgen. Samen is dat $3x + 410$ constateert Clairaut vervolgens, en dat stelt hij gelijk aan 890. Op dat punt aangekomen heeft hij al tussenstops moeten maken om zijn lezers de betekenis van de symbolen $+$ en $=$ uit te leggen, om te zeggen wat hij onder een vergelijking verstaat, en waarom die in dit geval met de opgave overeenkomt. Opvallend is dat hij onderweg wel uitlegt dat $115 + 115 + 180$ verkort kan worden tot 410, maar de verkorting van $x + x + x$ tot $3x$ niet van uitleg voorziet.

Tijdens de oplossing moet hij vervolgens nog een tussenstop maken om uit te leggen wat hij met het minteken bedoeld. Hij grijpt steeds terug op de betekenis van de symbolen om uit te leggen waarom hij aan beide kanten van het gelijkteken hetzelfde doet. Daarna laat hij de voordelen van de nieuw geïntroduceerde methode zien met nieuwe voorbeelden.

Het product van Wallis

Een van de bekendste resultaten van de Engelse wiskundige John Wallis (1616-1703) is de representatie van $\pi/2$ door een oneindig product.

Zij

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \quad n \geq 0$$

Door partiële integratie leiden we eenvoudig de volgende relatie af

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

met $I_0 = \pi/2$ en $I_1 = 1$ vinden we dan

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1$$

Uit $0 < \sin x < 1$ voor $0 < x < \pi/2$ volgt $\sin x > \sin^2 x > \sin^3 x > \dots$ en dus

$$I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}$$

zodat

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} > \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} > 1$$

Invullen van de uitdrukkingen voor

I_{2n-1} , I_{2n} en I_{2n+1} geeft

$$\frac{2n+1}{2n} > \frac{1.3.5.7 \dots (2n+1)}{2.2.4.4.6.6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} > 1$$

Nemen we nu de limiet voor $n \rightarrow \infty$ dan volgt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} \cdots$$

Rob Bosch

Literatuur

Courant **What is Mathematics?**

Boyer **A history of Mathematics**

Een historische ontwikkeling is hier niet echt te herkennen: Clairaut noemt zijn eerste oplossing 'zoals dat vroeger door wiskunstenaars werd gedaan', en zijn tweede methode lijkt hij gewoon de beste te vinden. De historische opzet is alleen terug te vinden in opmerkingen over de manier waarop de eerste *stelkonstenaars* een probleem hadden opgelost, nadat hij zelf heeft laten zien hoe het moet.



Veeleer lijkt het alsof Clairaut zich, net als bij zijn meetkundeboek, is gaan afvragen in welke volgorde de onderwerpen behandeld zouden moeten worden. Dat levert af en toe heel goede stukken op, bijvoorbeeld wanneer hij de oplossing van vierkantsvergelijkingen behandelt. Terwijl zijn tijdgenoten meestal maar één oplossing vinden (met de positieve wortel), en de tweede oplossing pas na een aantal voorbeelden geven — omdat die uit een negatief getal voortkomt — behandelt Clairaut dit stukje alleraardigst: eerst laat hij zien dat wanneer $x^2 = a$ geldt, $x = \sqrt{a}$ en $x = -\sqrt{a}$ beide voldoen. Even verderop in het boek laat hij zien dat $(x+a)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot a + a^2$ om die wetenschap vervolgens te gebruiken bij het oplossen van $x^2 + p \cdot x + q = 0$. Door goed naar de eerder afgeleide formule te kijken kan hij de laatste vergelijking schrijven in de vorm $(x + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$. En die vergelijking kon hij (door substitutie) al oplossen.

De theoretische wijze van introduceren was heel normaal in die tijd: de voorbeelden kwamen pas na het algemene geval. Clairauts introductie tot de algebra met het getallenvoorbeeld zoals de eerste wiskundigen dat hadden kunnen formuleren was vernieuwend. Waarschijnlijk vond hij daarna dat de lezer zich op een hoger abstractieniveau moest kunnen plaatsen: in elk geval herhaalde hij de introductie van een probleem aan de hand van een (getallen) voorbeeld niet meer. De getallenvoorbeelden waren voor de lezer ook een herinnering aan waar het eigenlijk om ging: het uitrekenen van getallen. De achttiende-eeuwse algebraboeken in het algemeen, en dat van Clairaut in het bijzonder, hielden zich uitsluitend bezig met oplossen van vergelijkingen: het vinden van onbekende getallen waartussen een bepaalde betrekking bekend was. De verdienste van Clairaut zit hem niet in zijn visie op de algebra -die was niet anders dan die van zijn tijdgenoten- maar in de manier waarin hij de stof probeerde over te brengen.

In de *Essais sur l'Enseignement* uit 1805 prijst S.F. Lacroix het algebraboek van Clairaut dan ook terecht aan als een tekst die nog steeds de moeite waard is wegens de slimme didactische opzet.

Om ons te verzeekeren, dat de vermenigvuldiging van $-$ met $-$ altyd in het Product $+$ moet voortbrengen; zoo laat ons zien, welk licht wy uyt de algemeene leerwyze der vermenigvuldigen, gegeven Art. XLV. trekken kunnen. Volgens deeze leerwyze, ziet men zeer klaar, dat het vermenigvuldigde van eene grootheid, gelyk $a-b$ met een ander $c-d$, moet zyn $ac-bc-ad+bd$, en bygevolg, zoo ziet men terzelver tyd, dat de term bd , welke door de vermenigvuldiging van b met d voortgekomen het teken $+$ voor zich heeft, terwyl de termen b en d , die dit Product voortbrengen, het teken $-$ zyn toegedaan. Daar blyft dan niets meer overig als te moeten weten, dat van twee Negative groottheeden gelyk $-b$ en $-d$, een Positive grootheid voor zich hebbende, haar vermenigvuldigde nograns zal zyn $+bd$. Hier van nu kan men gemakkelijk de waarheyd erkennen, dewyl de leerwyze, waar door men ontdekt heeft, dat het vermenigvuldigde van $a-b$ met $c-d$, was $ac-bc-ad+bd$, alwaar geen byzondere grootheid nog door a nog door c word uytgedrukt, en ook geen plaats kan hebben, als deeze groottheeden gelyk niet zyn: doch, in dit geval, word het Product $ac-bc-ad+bd$ gebragt tot $+bd$, derhalven $-b \times -d = +bd$.

Negatieve getallen

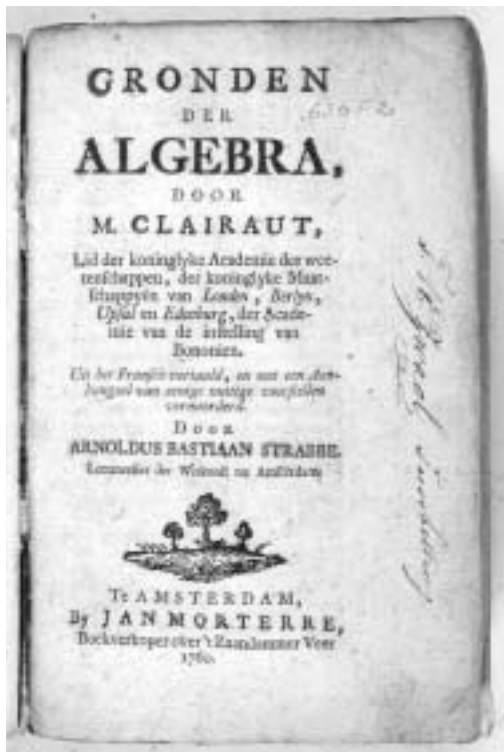
Zo mooi als zijn aanpak vanuit didactisch oogpunt ook mocht zijn, Clairaut negeerde met zijn aanpak het probleem dat aan de definitie van negatieve getallen kleefde. Negatieve — en ook imaginaire — getallen werden weliswaar gebruikt, maar dan vooral omdat het in de praktijk vaak bruikbare resultaten opleverde. Of het uit logisch oogpunt allemaal wel kon stond in de tijd van Clairaut ter discussie: een theoretisch kader, vanuit de rekenkundige achtergrond van de algebra, bestond er niet. Er waren zelfs wiskundigen die de afschaffing van deze ‘onmogelijke’ waarden bepleitten. Met name Britse wiskundigen in hun afwijzing van alles wat van het continent kwam vanwege het conflict over de ontdekking van de infinitesimaalrekening tussen Newton en Leibniz, konden het niet nalaten om iedere keer weer te wijzen op de tekortkomingen van de zogenaamde *French mathematics*.

Clairaut gaat aan deze discussie helemaal voorbij. Bij zijn behandeling van de stelling dat het product van twee negatieve getallen positief moet zijn, zegt hij bijvoorbeeld dat:

‘de eerste stelkonstenaars <...> daar van niet zyn verzekerd geweest, als na dezelve door veele voorbeelden bekrachtigd te hebben.’ Daarmee suggereert hij dus dat het bestaan en gebruik van negatieve getallen altijd evident is geweest, en dat is zeker niet het geval.

Hij demonstreert de waarheid van zijn stelling door in $(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$ voor a en c nul in te vullen. Clairaut werd er onder anderen door de Engelse wiskundige Thomas Simpson op aangevallen dat hij in het bewijs van deze stelling de absurde fout beging ‘iets’ van ‘niets’ af te trekken. Feitelijk verruimde hij stiekem het domein van de operatie ‘min’. Het bewijs van bovenstaande gelijkheid geschiedde door middel van oppervlakten. Volgens Simpson hechtte Clairaut te veel geloof aan het algebraïsche rekenwerk dat in die tijd op de eigenschappen van getallen rustte, en niet op een axiomatisch stelsel. Terwijl Clairaut rotsvast vertrouwde op het rekenen met letters, keek Simpson steeds wat het eigenlijk betekende. Saillant detail daarbij is dat het diezelfde Thomas Simpson was wiens trigonometrie de Nederlandse vertaling van het meetkundeboekje van Clairaut opsierde.

Toch is het niet vreemd dat Clairaut aan deze problematiek voorbij ging. Zoals reeds vermeld was het boekje bedoeld voor ingenieurs, en die maakten in de praktijk gebruik van negatieve waarden. Een theoretische discussie over het al dan niet bestaan van zaken die zij in het dagelijks leven gewoon gebruikten zou aan deze mensen niet besteed zijn geweest.



Slot

In beide boeken gebruikte Clairaut nogal eens de uitdrukking 'het schijnt mij toe dat'. Daarmee gaf hij te kennen dat de historische ontwikkelingen in zijn wiskundeboek voor het merendeel niet door onderzoek, maar door contemplatie waren verkregen.

De geschiedenis van de wiskunde had zich in zijn visie net zo logisch ontwikkeld als de wiskunde zelf was, en liet zich zodoende door overdenking ontdekken. De ontwikkeling van de wiskunde was voor Clairaut gericht op een voortdurende verbetering en nieuwe toepassing van dat vak. Stukjes wiskunde die hij uit het verleden kende, maar die in zijn tijd niet meer gebruikt werden, zoals het rekenen met Romeinse cijfers, beschouwde hij als doodlopende wegen die in zijn geschiedenis gevoeglijk konden worden overgeslagen. Expliciet schrijft hij in zijn *Gronden der algebra*: 'Ik hebbe getragt om <...> regelen der Algebra <...> te geven in een order welke de uytinders hadden kunnen volgen. Geen waarheid word 'er onder de gedaante van Theoremâs (bewijsbare voorstellen) voorgesteld, alle schynen ontdekt te wezen als men zig op de voorstellen oeffend welke de nood of de nieuwsgierigheid hebben doen onderneemen te ontbinden.'

Clairaut beschouwde de geschiedenis als een middel om zijn didactische ideeën vorm te geven. Auteurs van wiskundeboeken voor het onderwijs na hem hebben zijn idee gretig overgenomen. Lacroix begint zijn algebraboek uit 1799, dat ook in het Duits en Nederlands werd vertaald, vrijwel hetzelfde als Clairaut. Jacob de Gelder gebruikte in zijn rekenboek uit 1812 ook een didactische knipoog naar de geschiedenis: hij gebruikte een telbord om het tientallig stelsel te introduceren, en noemde dat de manier van tellen 'zoals men dat vroeger deed'. Voor Clairaut waren de historische situaties echter meer dan het didactisch hulpmiddeltje dat ze bij De Gelder waren: hij zag echt een analogie tussen het leerproces en de geschiedenis. In de meeste gevallen diende het leerproces daarbij als mal voor de historische ontwikkeling.

Clairaut achtte de tijd gekomen om de wiskundige

manier van redeneren ook onder het volk te brengen. Dat deed hij door alles dat logisch leek ook logisch te noemen. Daarin schulde zijns inziens geen gevaar: wanneer mensen tot nadenken werden aangespoord zouden zij — geïnspireerd door de wiskundige geest — vanzelf tot de juiste conclusies komen.

Desalniettemin mag de poging van Clairaut om de leerstof op te hangen aan een historische kapstok als bijzonder origineel worden beschouwd. De didactiek van de wiskunde was in de achttiende eeuw geen expliciet aandachtsveld. Clairaut nam met zijn beide boeken een zeer uitgesproken didactisch standpunt in. Dat de geschiedenis, die hij pretendeerde te gebruiken, subject was aan zijn didactische ideeën, zegt veel over zijn geschiedopvatting. Een historicus van de wiskunde — in de huidige betekenis van het woord — kunnen we hem niet noemen; een didacticus zeker wel.

Noot

- 1 Uit: *Nieuwe Algemeene Konst- en Letterbode* X nr 237, 13 july 1798, p.12

Literatuur

D.J. Beckers

Meetkunde-onderwijs in achttiende-eeuws Nederland
Nieuwe Wiskrant 16-3 (1996)

Pierre Brunet

La vie et l'œuvre de Clairaut (1713-1765)
Paris: Presses Universitaires de France (1952)

A.C. Clairaut

Beginzelen der geometrie
Amsterdam (1760)

A.C. Clairaut

Gronden der algebra
Amsterdam (1760)

Silvestre François Lacroix

Essais sur l'enseignement
Paris (1805)

Silvestre François Lacroix

Éléments d'algèbre
Paris (1811)

Wolfgang Schmale & Nan L. Dodde (Hg.)

Revolution des Wissens?
Bochum (1991)

Statistiek met de grafische rekenmachine

Paul Drijvers

Inleiding

Toen de eerste grafische rekenmachines in het begin van de jaren negentig opdoken in de Nederlandse wiskundewereld, zagen velen snel het belang van deze apparaten voor het analyse-programma (zie bijvoorbeeld Kindt, 1992). Experimenten met grafische rekenmachines in de klas hebben zich sindsdien vooral op de analyse van wiskunde B gericht. Niet dat wiskunde A helemaal buiten beeld is gebleven; op het Liemers College in Zevenaar bijvoorbeeld gebruikten A-leerlingen de grafische rekenmachine bij matrixrekening doeltreffend en met veel enthousiasme. Ook bij statistiek liggen er veel mogelijkheden om de grafische rekenmachine zinvol in te zetten. Dit heeft tot nog toe minder aandacht gekregen dan de toepassingen bij analyse, mogelijk vanwege het (in mijn ogen onjuiste) idee dat de grafische rekenmachine vooral iets voor wiskunde B is. Misschien speelt ook het feit mee dat de oudere types minder statistische mogelijkheden boden dan de huidige generatie.

Langs de traditionele lijn, beschrijvende statistiek - kansrekening - verklarende statistiek, passeren in dit artikel de belangrijkste statistische mogelijkheden van de grafische rekenmachine de revue. Daarnaast

wordt hier en daar aangegeven wat dit zou kunnen betekenen voor de gang van zaken in de klas. Ik bespreek alleen toepassingen uit het curriculum van havo en vwo; interessante onderwerpen zoals correlatie, regressie en curve fitting blijven daarom buiten beschouwing, al heeft de grafische rekenmachine op die punten wel degelijk veel te bieden.

In de Tweede Fase zullen in elk geval drie machines bij het CSE van havo en vwo worden toegestaan: de Casio cfx-9850G, de HP38G en de TI-83. In de voorbeelden beperk ik me tot de TI-83, omdat dit apparaat op statistisch gebied wat meer te bieden heeft dan de andere twee. Met name het toetsen van hypothesen is een extraatje van de TI-83. Voor wat betreft de andere statistische opties zijn de drie genoemde machines in grote lijnen vergelijkbaar. Daarom zal ik in het vervolg meestal spreken over de grafische rekenmachine (of GR). Alleen wanneer het specifiek over de TI-83 gaat, schrijf ik TI-83 in plaats van GR. Aan de bediening van de GR besteed ik niet veel aandacht; de literatuurlijst vermeldt boekjes die daar wel op ingaan.

Plaatjes

Eerst maar de beschrijvende statistiek. Zoals u weet, hebben veel leer-

lingen bijbaantjes als kinderoppas, bezorger van kranten en folders, of als vakkenvuller in de supermarkt. Aan 37 leerlingen van 5 havo van het Over Betuwe College in Bemmel is in september 1997 gevraagd hoeveel inkomsten ze gemiddeld per week hebben uit dergelijke baantjes. Zakgeld en vakantiewerk tellen niet mee. Hoeveel denkt u dat de gemiddelde wekelijkse inkomsten van een doorsnee leerling van 5 havo bedragen? De resultaten, uitgesplitst naar geslacht, ziet u hieronder.

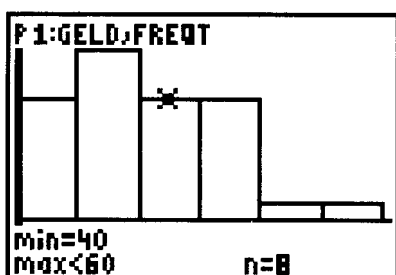
Inkomsten (f/week)	Aantal meisjes	Aantal jongens
0	3	1
1 - < 20	2	2
20 - < 40	8	3
40 - < 60	6	2
60 - < 80	7	1
80 - < 100	0	1
100 - < 120	1	0

Om deze gegevens statistisch te verwerken, worden de oorspronkelijke ruwe data (dus niet de klassenindeling hierboven!) ingevoerd. Op de GR gaat dat in lijsten, die standaard-namen hebben. Het gebruik van deze namen kan echter verwarrend zijn: het onderscheid tussen waarnemingen en frequenties valt weg. Vandaar dat ik als lijstnamen GELD, FREQM en FREQJ kies. Iets meer werk, maar hopelijk verhelderend (zie figuur 1).

De vierde kolom, die buiten beeld valt, heb ik FREQT genoemd. Daar staan de totale frequenties. Die hoef ik niet in te typen; FREQT wordt gedefinieerd als de som van FREQM en FREQJ, net als in een spreadsheet-programma. Nu de data zijn ingevoerd, zijn er talloze mogelijkheden tot verwerking. Ik laat bijvoorbeeld eerst een histogram maken, zonder uit te splitsen naar geslacht (figuur 2).

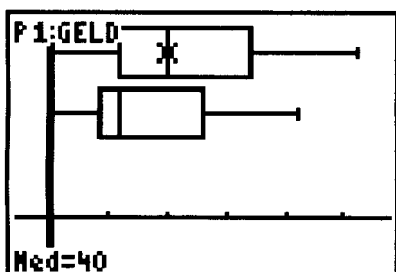
GELD	FREQM	FREQJ	3
0	3	1	
2.75	1	0	
5	1	0	
7.5	0	1	
10	0	1	
20	1	0	
24	0	2	
FREQJ(1)=1			

figuur 1



figuur 2

Het histogram is niet echt indrukwekkend, al geeft het een globaal beeld. De balken kunnen één voor één worden doorlopen, waarbij onder in beeld de klassengrenzen en -frequenties verschijnen. Het instellen van de klassenbreedte kan meestal beter niet aan de machine worden overgelaten, omdat die soms een wat ongelukkige waarde daarvoor neemt. Dat vraagt wat extra handelingen van de leerling. Het vergelijken van groepen komt veel voor in de statistiek. Om na te gaan in hoeverre de inkomsten van meisjes verschillen van die van de jongens, laat ik voor elk van beide groepen een boxplot tekenen (figuur 3).



figuur 3

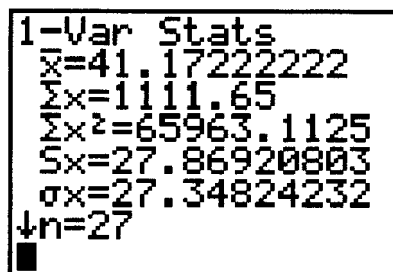
Zo op het oog verdienen de meisjes gemiddeld meer dan de jongens. De mediaan is voor de meisjes

gelijk aan 40, en voor de jongens 24,5. Dat is een behoorlijk verschil. Verder valt op, dat de verdeling van de jongens schever is dan die van de meisjes.

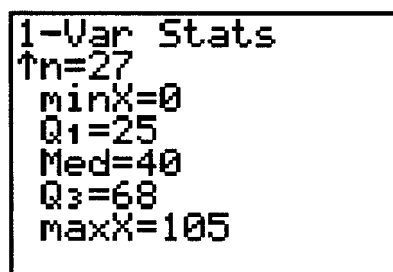
Er zijn nog meer statistische plaatjes te maken, zoals frequentiepolygonen, maar voor het moment laat ik het erbij. Duidelijk is dat het maken van de plaatjes niet het probleem is; het accent komt te liggen op de interpretatie ervan. In de klas zouden leerlingen nu snel bij deze dataset verschillende representaties kunnen maken, om vervolgens te kijken welk plaatje het beste beeld geeft.

Centrum- en spreidingsmaten

Nu de gegevens over de bijverdiensten eenmaal zijn ingevoerd, zijn allerlei statistische maten beschikbaar. Ik bekijk de meisjes en de jongens weer apart.



figuur 4



figuur 5

Voor de 27 meisjes bestaat de uitvoer uit twee schermen (figuur 4 en figuur 5). Het vraagt enig overzicht om uit al deze gegevens wijs te kun-

nen. Het gemiddelde weekinkomen bedraagt f 41,17. Voor de 10 jongens (niet afgebeeld) is dat f 35,10. Dit verschil is veel kleiner dan dat van de medianen. Hoe zou dat komen? Zoals u weet, is het gemiddelde gevoeliger voor uitschieters dan de mediaan, en omdat de verdeling van de jongens schever is dan die van de meisjes, wordt het gemiddelde bij de jongens in sterkere mate 'opgetrokken' dan bij de meisjes. Eventueel is dat snel te onderzoeken door bijvoorbeeld het hoogste inkomen van een jongen (f 85,-) te vervangen door een lager bedrag, en te kijken wat het effect is op gemiddelde en mediaan.

Zo'n beschouwing over de ligging van mediaan en gemiddelde is naar mijn idee veel interessanter en belangrijker dan de daadwerkelijke berekening van deze centrummaten, die dan ook aan het apparaat wordt overgelaten. Verder leent de GR zich (net als statistische software natuurlijk) goed voor exploratie van een dataset door bijvoorbeeld verschillende grafische voorstellingen of centrummaten met elkaar te combineren, of door het effect van een wijziging te onderzoeken.

Voor spreidingsmaten geldt in grote lijnen hetzelfde als voor centrummaten: de berekening krijg je (vrijwel) cadeau, maar het inzicht en de interpretatie natuurlijk niet.

Kansrekening

Van de beschrijvende statistiek nu over naar de kansrekening. Voor het berekenen van kansen is de grafische rekenmachine een handig hulpmiddel. Stel bijvoorbeeld dat een toevalsvariabele X een binomiale kansverdeling heeft met $n = 20$ en $p = 0.5$. Dan laat $p(X = 7)$ zich op twee manieren berekenen (figuur 6). Ook $p(X \leq 7)$ is geen probleem (figuur 7). Een


```
20 nCr 7*0.5^20
.073928833
binompdf(20,0.5,
7)
.073928833
```

figuur 6

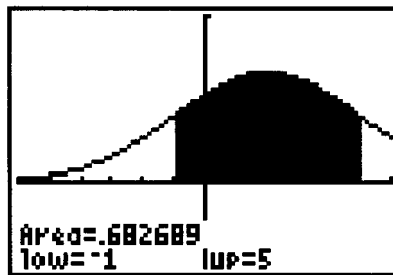
```
binomcdf(20,0.5,
7)
.1315879818
```

figuur 7

tabellenboekje voor de binomiale verdeling lijkt dus overbodig. Voor grote waarden van n kan de GR dergelijke berekeningen niet meer aan. De machine beschikt niet over een algoritme dat in dat geval overschakelt op normale benaderingen, al is een programma daarvoor eenvoudig te schrijven. Zonder een dergelijke aanpassing zal de leerling in voorkomende gevallen dus zelf een binomiale kans in een normale moeten kunnen omzetten, al dan niet met continuïteitscorrectie. Ook normale kansen zijn met de GR te berekenen, desgewenst geïllustreerd met een plaatje. Neem bijvoorbeeld $p(-1 < X < 5)$, waarbij X een normale verdeling heeft met $\mu = 2$ en $\sigma = 3$ (zie figuren 8 en 9). De grafiek van de normale verdeling met de arcering van het betreffende gebied vormt een

```
normalcdf(-1,5,2
,3)
.6826894809
ShadeNorm(-1,5,2
,3)
```

figuur 8



figuur 9

beeldende visualisatie van de gevraagde kans, die kan bijdragen aan het inzicht in de betekenis van kansen bij een normale verdeling.

Nu de omgekeerde vraag: voor welke x geldt dat $p(X < x) = 0.95$ als $\mu = 2$ en $\sigma = 3$? Figuur 10 geeft het antwoord, evenals op de analoge vraag voor de standaardnormale verdeling.

```
invNorm(.95,2,3)
6.934560878
invNorm(.95,0,1)
1.644853626
```

figuur 10

Bij kansrekening kan de GR dus het tabellenboek vervangen. Evenzo wordt het standaardiseren van een normale verdeling overbodig. De normale benadering van een binomiale verdeling is niet standaard geïmplementeerd, maar ongetwijfeld zal een slimme leerling daar een programmaatje voor maken, dat in een mum van tijd naar alle andere machines in de klas wordt doorgesluisd. Bij het cse hoeft de machine volgens de CEVO-richtlijnen (zie Uitleg nummer 16, juni 1997) niet te worden 'leegge maakt', dus dat is geen probleem. De plaatjes bij de berekende kansen zijn illustratief en vormen een goede controle op de vraag of de juiste kans berekend wordt. Wanneer bijvoorbeeld de leerling per ongeluk $p(X < 6)$ opvraagt in plaats van

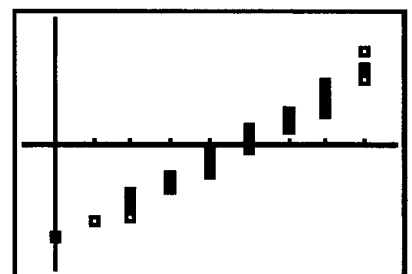
$p(X > 6)$, dan blijkt dat meteen uit het plaatje.

Simulatie

Het simuleren van toevalsexperimenten is een zinnige activiteit met leerlingen. Het kan ze een idee geven van een toevalsexperiment, en het kan het ontstaan van een frequentieverdeling goed in beeld brengen. Ook bij het onderwerp Wachttijden speelt simulatie een rol. Zonder computer of rekenmachine is het uitvoeren van een simulatie vrijwel ondoenlijk. De GR biedt mogelijkheden tot pseudo-toevalstrekkings uit verschillende kansverdelingen.

Een voorbeeld: werp tien munten, en tel hoe vaak 'kop' boven komt. Het herhalen van dit proefje (zeg 100 keer) vergt enig doorzettingsvermogen. Eenvoudiger is het om het experiment door de GR te laten nabootsen.

Volgens de Centrale Limietstelling is de som van 100 binomiaal verdeelde stochasten bij benadering normaal verdeeld. Om na te gaan of de resultaten inderdaad de bekende klokvorm vertonen zou men weer een histogram kunnen maken. Een andere mogelijkheid is om de resultaten van de simulatie uit te zetten op normaal waarschijnlijkheidspapier (zie figuur 11)



figuur 11

De data in figuur 11 liggen min of meer op een rechte lijn. Dat betekent dat er inderdaad (bij benadering) sprake is van een normale

Verschenen

David Wells

Mysterieuze & fascinerende raadsels.

De opwindendste hersenkrakers uit de wiskunde

Vertaald door Jos den Bekker

Op hoeveel manieren kun je drie witte pionnen op een schaakbord plaatsen?

Wat is ook alweer het verschil tussen sinus, cosinus en tangens? Wat zijn gebroken machten, afgeleide waarden en natuurlijke logaritmen?

In dit boek introduceert David Wells de lezer in de wereld van de wiskunde. Met eenvoudige voorbeelden laat hij de lezer kennismaken met de grondbeginselen van de wiskunde; iedereen die bekend is met getallen, cirkels, rechte lijnen en vierkanten kan nu deze mysterieuze en fascinerende raadsels oplossen. Deze inleiding in de wiskunde begint met de geheimen van de driehoek en de verbluffende patronen die zelfs de simpelste getallen kunnen vormen. Stap voor stap worden alle beginselen van de wiskunde uitgelegd met behulp van aansprekende voorbeelden die voor iedereen te volgen zijn.

David Wells schreef eerder *Merkwaardig en interessante meetkunde* en

Merkwaardige en interessante puzzels.

ISBN 90 351 1860 X

Bert Bakker

392 blz., f 49,90

Aanbevolen

William Dunham

The Mathematical Universe

Dit boek is, een alfabetische reis door grote bewijzen, problemen en persoonlijkheden.

Het bestaat uit 25 hoofdstukken met de volgende titels:

Arithmetic, Bernoulli trials, Circle Differential Calculus, Euler, Fermat, Greek geometry, Hypotenuse, Isoperimetric Problem, Justification Knighted Newton, Lost Leibniz, Mathematical personality, Natural Logarithm, Origins, Prime Number, Theorem, Quotient, Russel's Paradox, Spherical Surface, Trisection, Utility, Venn Diagram, Where Are the Women?, X-T Plane, Z.

Aan de meeste titels is wel ongeveer af te lezen welke bewijzen, problemen en persoonlijkheden aan bod komen. Opmerkelijk is dat niet alleen regelmatig stellingen bewezen worden, maar dat hoofdstuk J hier apart aan gewijd is. Het meeste zal de lezers bekend zijn. Toch is het op zijn minst handig in een boek al deze zaken bij elkaar te hebben staan. Van harte aanbevolen.

John Wiley, New York, 1993

296 blz.

kansverdeling. Een interessant vervolg zou nu kunnen zijn, om de succeskans van 0.5 te veranderen in bijvoorbeeld 0.1, en te kijken welke gevolgen dat heeft voor het plaatje.

Toen ik voor de eerste keer een klas leerlingen een simulatie liet uitvoeren, gebeurde er iets opvallends: iedereen kreeg exact dezelfde gegevens! Dat komt omdat de machines, als ze nieuw zijn, allemaal dezelfde startwaarde voor de toevalsgenerator hanteren. Het is dus van belang, om de eerste keer deze startwaarde te wijzigen!

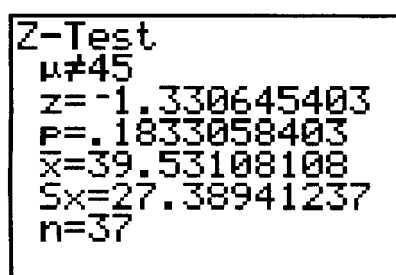
De GR maakt het simuleren van toevalsexperimenten mogelijk. De resultaten van de simulatie kunnen verwerkt worden met de technieken uit de beschrijvende statistiek. Het invullen van data op normaal waarschijnlijkheidspapier is niet meer nodig, al blijft het wel belangrijk dat de leerlingen gegevens op normaal waarschijnlijkheidspapier kunnen aflezen en interpreteren. Dat vereist vermoedelijk toch wel enige oefening in het handmatig werken ermee.

Toetsen van hypothesen

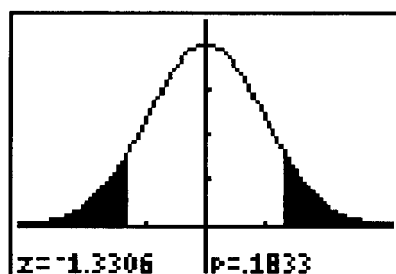
Een belangrijk onderdeel van de verklarende statistiek is het toetsen van hypothesen. In het nieuwe programma van de vwo-profielen E&M, N&G en mogelijk N&T zijn twee toetsen opgenomen, de toets voor μ bij een normale verdeling met gegeven σ (de Z-toets voor één steekproef) en de binomiaaltoets. Van de drie genoemde grafische rekenmachines biedt alleen de TI-83 de mogelijkheid om deze (en nog vele andere) toetsen uit te voeren.

In het eerder beschreven voorbeeld van de bijverdiensten van meisjes en jongens uit havo 5 is een steekproef van 37 leerlingen een bepaalde school genomen. Veronderstel

dat uit een veel groter landelijk onderzoek is gebleken dat de gemiddelde leerling uit havo 5 wekelijks f 45,- verdient. Geven de data aanleiding om te veronderstellen dat de 37 leerlingen uit de steekproef afkomstig zijn uit een significant afwijkende groep? Aangenomen dat de standaardafwijking bekend is, bijvoorbeeld $\sigma = 25$, dan kan dit worden onderzocht met de Z-toets voor één steekproef. De nulhypothese luidt dan $\mu = 50$. Als alternatief neem ik $\mu \neq 50$. Twee soorten uitvoer zijn mogelijk: numerieke (figuur 12) en grafische (figuur 13).



figuur 12



figuur 13

Zoals u ziet, wordt de (tweezijdige) overschrijdingskans berekend. Net zoals gebruikelijk is bij statistische software werkt de TI-83 niet met de methode van het kritieke gebied, maar met de significantie. Voor het apparaat heeft dit het voordeel dat het zich niet hoeft te bekommeren om de vraag welke α u in gedachten heeft. Zolang er geen sprake is van fouten van de tweede soort of van het onderscheidingsvermogen van de toets, heb ik ook geen behoefte aan het kritiek gebied.

Naar mijn idee geeft de methode van de overschrijdingskans meer inzicht in de essentie van het toetsen: hoe (on-)waarschijnlijk is het optreden van de geobserveerde waarnemingen onder de nulhypothese?

In dit geval is de tweezijdige overschrijdingskans ongeveer 18%, dus zo groot dat er in het licht van H_0 niets bijzonders is gebeurd. Het verschil tussen het steekproefgemiddelde (f 39,53) en de veronderstelde verwachting van f 45,- is bij deze steekproefomvang niet groot genoeg om significant te zijn.

Wat moet de leerling nog kunnen om een toets met de grafische rekenmachine uit te voeren? Allereerst weten wat er onderzocht moet worden, en hoe dat te vertalen is in statistische hypothesen. Vervolgens is er natuurlijk de beslissing welke toets wordt gebruikt, al heeft die keuze met een curriculum dat slechts twee toetsen bevat wel een erg grote kans van slagen. Dan het omgaan met de één- of tweezijdigheid, en tenslotte de interpretatie van de gevonden overschrijdingskans in termen van het oorspronkelijke probleem. Deze laatste stap wordt door de visualisatie van deze kans eenvoudiger gemaakt. De TI-83 voert bij de binomiaaltoets geen continuïteitscorrectie uit, wanneer de kansverdeling normaal wordt benaderd. Als dat wel een vereiste is op proefwerk of examen, zal de leerling dat dus zelf moeten doen.

Slot

Ik hoop met het bovenstaande een indruk te hebben gegeven van wat de grafische rekenmachine bij statistiek kan betekenen. De voordelen van het gebruik van de GR bij statistiek zijn te vergelijken met die van statistische programma's voor de PC: grotere datasets met een

hoog realiteitsgehalte kunnen verwerkt worden, statistische concepten kunnen met een plaatje worden geïllustreerd, en de gevolgen van veranderingen en variaties kunnen eenvoudig worden onderzocht. Te hopen valt, dat dit de statistiek voor de leerlingen levendiger en dynamischer zal maken. Of dat in de praktijk ook werkelijk zo is, zal de toekomst moeten leren.

Literatuur

Drijvers, P. en M. Doorman

De TI-83, kennismaken en toepassen

Wolters-Noordhoff (1997)

Drijvers, P., M. Doorman en W. Hoekstra

De Casio cfx-9850 G, kennismaken en toepassen

Wolters-Noordhoff (1997)

Drijvers, P., M. Doorman en W. Hoekstra

De HP 38 G, kennismaken en toepassen

Wolters-Noordhoff (1998)

Kindt, M.

Functieonderzoek begint bij de grafiek

Euclides 67-7 en 67-8 (1992)

‘Ze kunnen meer dan je denkt’

Mieke Thijsseling is verbonden aan het Maartenscollege in Groningen en Haren. Ze is docent wiskunde in de onderbouw en als zodanig betrokken bij onder andere de afsluiting van de Basisvorming. Ik heb een gesprek met haar na afloop van de slotavond BaVo, waar een aantal leerlingen hun BaVo-scriptie hebben gepresenteerd.

Kun je iets vertellen over de BaVo-scriptie?

Op onze school hebben we er voor gekozen de eerste fase niet aan de hand van de Cito-toetsen, maar door middel van een scriptie af te sluiten. De toetsen van het Cito sluiten onvoldoende aan bij onze ideeën over hoe je de basisvorming zou moeten afronden. Wij zijn meer geporteerd van een toetsvorm waarin de verschillende vakken geïntegreerd aan bod komen. Daarom laten we onze derdeklassers havo en vwo in tweetallen een scriptie schrijven waarin twee vakken verwerkt worden.

Nemen jullie de Cito-toetsen dan helemaal niet af?

Jawel, maar de toets heeft bij ons de status van een schriftelijke overhoring.

Je had het net over twee vakken. Mogen de leerlingen zelf kiezen over welke vakken ze een scriptie schrijven?

Gedeeltelijk. Wij wijzen per klas een hoofdvak aan. De docent van dat

hoofdvak is hoofddocent en begeleidt en beoordeelt de leerlingen. Het is de bedoeling dat de leerlingen één of meer onderwerpen uit het hoofdvak toepassen op een vak van hun keuze, het bijvak. Zodoende ontstaan er interessante combinaties van hoofd- en bijvak.

En wiskunde is één van de hoofdvakken...

Ja, in de klas waar ik hoofddocent ben, schrijven de leerlingen een scriptie met wiskunde als hoofdvak. De keuze van de bijvakken is heel divers. Zo waren een leerlingen die economie gekozen hadden, maar ook aardrijkskunde, natuurkunde, tekenen en biologie kwamen als bijvak voor.

Wat voor onderwerpen kiezen de leerlingen zoal?

Je hebt de scripties op de slotavond kunnen inzien. Een scriptie ging over de invoering van de Euro, een tweede over de beweging van planeten, een derde over de tekeningen van Escher, een vierde over parabolen in relatie tot de legende van Robin Hood en er was ook een scriptie over de gang van zaken op de beurs.

Wat me opviel is dat in sommige scripties wiskunde aan de orde komt die geen deel uit maakt van de stof.

Dat klopt. De jongens die de beweging van de planeten hadden onderzocht, liepen al snel tegen de wetten

van Kepler en ellipsen aan. Ook de scriptie over Robin Hood staat bol van parabolen en tweedegraads functies.

Ja, je ziet toch dat bij deze manier van toetsen sommige leerlingen buiten de stof treden. Overigens zijn er ook leerlingen die er moeite mee hebben relevante onderwerpen uit de wiskunde toe te passen.

Het lijkt me voor een docent niet eenvoudig om het geheel te begeleiden.

Dat is dus de taak van de hoofddocent. In de maanden april en mei kunnen de leerlingen gedurende minimaal één uur in de week onder begeleiding van de hoofddocent aan de scriptie werken. De hoofddocent is dan aanwezig voor vragen en opmerkingen.

Blijft de begeleidingstaak daarbij? Nee, ik laat de leerlingen een planning maken en houd in de gaten of de planning gehaald wordt. Daarnaast moeten de leerlingen per tweetal een logboek bijhouden, waarin alle afspraken worden vermeld. Zo'n twee weken voor de inleverdatum krijg ik een kladversie van de scriptie. Daarop geef ik commentaar.





bezwaar te zijn. Sterker nog, de leerlingen moeten literatuur raadplegen of op Internet kijken. De kans bestaat natuurlijk dat bijvoorbeeld ouders of een oudere broer of zus de scriptie schrijven. Mede om dat te vermijden, verlang ik van leerlingen een kladversie. Ik probeer problemen op dit terrein voor te zijn.



Welke problemen kom je nou het meeste tegen?
Een scriptie moet a) een duidelijke onderzoeksvraag bevatten, die op zijn beurt weer bestaat uit deelvragen en b) afgesloten worden met een conclusie. Leerlingen hebben er soms moeite mee dat te onderkennen. Daar moet ik ze vaak op wijzen.

Daarnaast zijn er leerlingen die tot aan de datum waarop ze een kladversie moeten inleveren nog niets - althans zichtbaar op papier - gedaan hebben. Dat pak ik rigoureus aan. De ouders van deze leerlingen krijgen een brief van mij, waarin ik aangeef dat hun zoon of dochter nog weinig aan de scriptie heeft gedaan. Meestal heeft dat het beoogde (schrik)effect.

Krijgen leerlingen wel eens hulp van buitenaf?
Zolang de scriptie niet door anderen geschreven wordt, hoeft dat geen

Hoe beoordelen jullie zo'n scriptie?
Alle scripties worden door mij doorgenomen. Op basis van een beoordelingsformulier bepaal ik een cijfer. Ruwweg een derde gedeelte van dat cijfer wordt bepaald door de structuur en de vorm van de scriptie, de rest door de wiskundige inhoud ervan. Ik let er dan vooral op of er voldoende wiskunde in voorkomt, maar kijk ook naar notaties, berekeningen, of variabelen netjes gedefinieerd worden, het gebruik van eenheden, enzovoorts.

In de klas houdt elke groep een presentatie van ongeveer een kwartier. Die presentatie telt niet mee voor het cijfer. Dat is gelet op het tijdschema onmogelijk. Wel kiezen de leerlingen drie groepjes die hun onderzoek mogen presenteren op de slotavond.

Dat lijkt me een hele opgave...
Ja zeker, het is een hele prestatie om voor een zaal met pakweg tweehonderd aanwezigen, onder wie ouders, docenten en andere belangstellenden, een goed verhaal te houden. Bij de

klaspresentaties zit je nog in een min of meer beschermde omgeving. Hier sta je voor een groter publiek. Je hebt zelf gezien hoe dat gaat. De een staat te giechelen van de zenuwen, de ander houdt een gedegen voordracht over termijnmarkten, warrants en opties.

De bijdragen aan de slotavond worden beoordeeld door een deskundige jury van twee ouders, twee docenten en twee bovenbouw-leerlingen. De beste bijdrage wordt beloond met een aardigheidje.

Wat ik vooral leuk vind aan de slotavond, is dat de leerlingen ook op inhoudelijk gebied hun capaciteiten kunnen tonen. Op onze school kennen we veel activiteiten als theater, een songfestival of muziekkuitvoeringen. Maar hier is sprake van een bijzondere avond op cognitief terrein.

Doen jullie op school nog meer van dit soort dingen?

Ja, in de eerste twee klassen van de onderbouw hebben we het GWA-werkstuk. Ook dat werkstuk hoort een onderwerp, een vraagstelling en een conclusie te bevatten. Over het werkstuk houden de leerlingen in de klas een presentatie.

We hebben het idee dat de lijn van GWA-werkstuk via de BaVo-scriptie naar het toekomstige profielwerkstuk in de tweede fase op deze wijze goed van de grond komt. En dat vinden we belangrijk. Je moet het maken van een scriptie als het profielwerkstuk al vanaf het eerste begin voorbereiden.

Is dit de toekomst?

Het lijkt me wel. Hier zie je de docent in een rol als begeleider van leerprocessen. Ook benader je je leerlingen anders. Je kunt op aangename wijze voor allerlei verrassingen komen te staan. Leerlingen hebben zoveel binnen- en buitenschoolse belangstellingen, waar je dankbaar gebruik van kan maken. Ze kunnen meer dan je denkt.

Victor Schmidt

Erin gevlogen

Leon van den Broek,
Saskia Oortwijn

Gebruiksaanwijzing

De lezer wordt in dit artikel een paar keer uitgenodigd zelf zijn mening te vormen. Deze momenten zijn aangegeven door:

[denkpauze]

Gezien de titel bent u gewaarschuwd!

Een eenvoudig kansrekeningsvraagstuk

Een zeker tweemotorig vliegtuig kan ook op één motor vliegen. Het hoeft dus pas een noodlanding te maken als beide motoren zijn uitgevallen. De motoren werken onafhankelijk van elkaar. We bekijken een vast vliegtraject, met nooit veranderende omstandigheden. Elke motor valt tijdens de vlucht uit met kans 0,05.

Vraag 1: wat is de kans dat het een noodlanding moet maken?

Geen enkel probleem; gewoon $0,05 \times 0,05 = 0,0025$. Nu is echter de veronderstelling dat de motoren onafhankelijk van elkaar werken niet zo realistisch. Immers, als één van de motoren is uitgevallen, krijgt de andere motor het zwaarder te verduren en zal zijn kans om ook uit te vallen wat groter worden, zeg 0,07.

Vraag 2: wat is nu de kans dat het vliegtuig een noodlanding moet maken? (Om misverstanden te voorkomen: twee motoren zullen nooit exact tegelijk uitvallen.)

[denkpauze]

Ook geen probleem nietwaar; gewoon: $0,05 \times 0,07 = 0,0035$. Anneke vindt dat de kans twee keer zo groot is, want je hebt twee mogelijkheden: de linker motor valt uit en daarna de rechter of omgekeerd; beide mogelijkheden hebben kans $0,05 \times 0,07$. Volgens ons kan Anneke geen gelijk hebben, want dan zou die factor 2 ook gebruikt moeten worden in het geval beide motoren kans 0,05 hadden om uit te vallen. Kiest u ons kamp of dat van Anneke?

[denkpauze]

Deze verwarring ontstond bij het opstellen van een opgave voor een wiskunde A-tentamen voor vwo 6. Bovenstaande 'oplossingen' lijken plausibel, maar dat is schijn. Verderop zullen we het bedrog ontmaskeren.

Grote problemen

We bekijken weer het tweemotorig toestel uit vraag 2. Wat zijn de kansen op het uitvallen van geen motor, van precies één motor en van beide motoren?

[denkpauze]

Vindt u de volgende kansen: $0,95 \times 0,95$, $2 \times 0,05 \times 0,93$ en $0,05 \times 0,07$, eventueel de laatste kans verdubbeld (als u Annekes

leer volgt)? Maar de som van de kansen is in beide gevallen niet 1! Inderdaad grote problemen. En het is allemaal nog erger. De kans dat geen van beide motoren uitvalt is niet $0,95^2$, zoals we in de volgende paragraaf zullen aantonen!

Dat deze kansen veel lastiger te berekenen zijn dan we op school gewend zijn, blijkt als u probeert een boomdiagram te tekenen.

[denkpauze]

Inderdaad, dat lukt helemaal niet zo makkelijk!

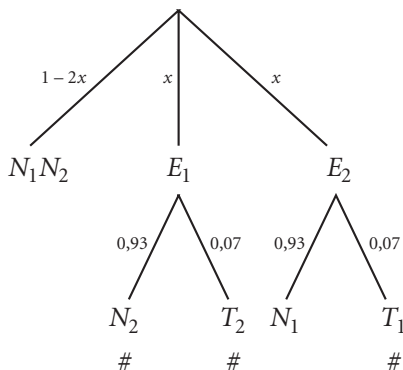
Hoe zit het nou eigenlijk?

Het grote probleem is dat de diverse gebeurtenissen niet onafhankelijk zijn. We kunnen alleen verder komen als we heel precies zeggen wat de gegeven kansen betekenen. 'De kans op uitvallen is voor elke motor 0,05' betekent: van 100 vluchten valt gemiddeld 5 keer de linker motor uit (ongeacht het uitvallen van de rechter motor). Hetzelfde geldt als je de linker en de rechter motor verwisselt. 'De kans dat na het uitvallen van één motor de andere motor daarna ook nog uitvalt is 0,07' betekent: van 100 vluchten waarbij de linker motor uitvalt, valt daarna gemiddeld 7 keer ook de rechter motor uit. Hetzelfde geldt als je de linker en de rechter motor verwisselt. Mee eens?

[denkpauze]

Als u in deze definities mee kunt gaan, kunnen we de kans uitrekenen dat beide motoren uitvallen bij het tweemotorig vliegtuig. We nummeren de twee motoren: 1 en 2. We benoemen de volgende gebeurtenissen: E_1 = motor 1 valt als eerste uit;

T_1 = motor 1 valt als tweede uit;
 N_1 = motor 1 valt niet uit.
 Evenzo E_2 , T_2 en N_2 .
 We hebben te maken met vijf uitkomsten:
 N_1N_2 = beide motoren vallen niet uit;
 N_1N_2 = motor 1 valt (als eerste) uit, motor 2 valt niet uit;
 E_2N_1 = motor 2 valt (als eerste) uit, motor 1 valt niet uit;
 E_1T_2 = motor 1 valt als eerste uit, motor 2 valt als tweede uit;
 E_2T_1 = motor 2 valt als eerste uit, motor 1 valt als tweede uit.
 We geven de vijf mogelijke verlopen van de vlucht weer in een boomdiagram, waarbij x is de kans dat motor 1 als eerste uitvalt; dat is dus ook de kans dat motor 2 als eerste uitvalt. Deze kansen schrijven we bij de corresponderende takken in de boom. De kans dat motor 2 uitvalt *nadat* motor 1 is uitgevallen staat bij de tak $E_1 \rightarrow T_2$: 0,07.



De drie uiteinden waarbij motor 1 uitvalt zijn in het boomdiagram aangegeven met een #. Samen hebben ze kans 0,05.
 Dus $P(\text{motor 1 valt uit}) = P(E_1N_2) + P(E_1T_2) + P(E_2T_1) = x \cdot 0,93 + x \cdot 0,07 + x \cdot 0,07 = 0,05$.
 Hieruit valt x te berekenen:
 $x = 0,05 / 1,07 \approx 0,4673$.
 Nu kunnen we alle gezochte kansen uitrekenen.
 $P(N_1N_2) = 1 - 2x = 0,97 / 1,07 \approx 0,90654$ en dat is niet gelijk aan $0,95^2 \approx 0,9025$!

$P(\text{noodlanding}) = P(E_1T_2) + P(E_2T_1) = 2 \cdot x \cdot 0,07 = 0,007 / 1,07 \approx 0,00654$. Zo ver zat Anneke met haar antwoord op vraag 2 er dus niet naast!

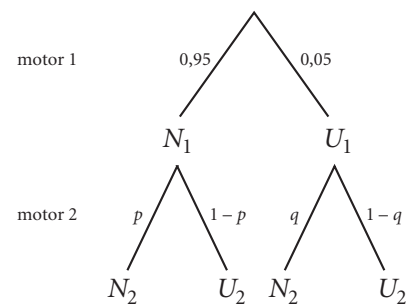
Het bedrag ontmaskerd

Wat was er mis met de oorspronkelijke redenering bij vraag 2? De suggestie wordt gewekt dat we in $0,05 \times 0,05$ alleen maar de tweede kans 0,05 hoeven te vervangen door 0,07. Alsof bij vraag 1 de tweede factor 0,05 de kans is dat, als er een motor is uitgevallen, de andere motor ook stuk gaat. Maar dat is helemaal niet zo!
 We voeren naast de notaties N_1 (motor 1 valt niet uit), E_1 (motor 1 valt als eerste uit), T_1 (motor 1 valt als tweede uit), N_2 , E_2 en T_2 nog twee nieuwe notaties in:
 U_1 = motor 1 valt uit en
 U_2 = motor 2 valt uit.

We gaan voorwaardelijke kansen gebruiken: $P(A | B)$ is de kans op 'A gegeven B', dat is de kans dat A gebeurt als je weet dat B gebeurt. Zowel bij vraag 1 (motoren vallen *onafhankelijk* van elkaar uit) als bij vraag 2 (motoren vallen *afhankelijk* van elkaar uit) geldt:
 $P(U_1) = P(U_2) = 0,05$. De kans dat het vliegtuig een noodlanding moet maken is in beide gevallen $P(U_1U_2) = P(U_1) \cdot P(U_2 | U_1)$.
 Bij vraag 1 geldt $P(U_2 | U_1) = P(U_2) = 0,05$, want dan zijn U_1 en U_2 onafhankelijk. Bij vraag 2 zijn U_1 en U_2 wel afhankelijk. Dan kennen we de kans $P(U_2 | U_1)$ niet. Wel kennen we de kans $P(T_2 | E_1)$; deze kans is 0,07. We kunnen de kans $P(U_2 | U_1)$ wel berekenen.

[denkpauze]

We berekenen die kans met het volgende boomdiagram.

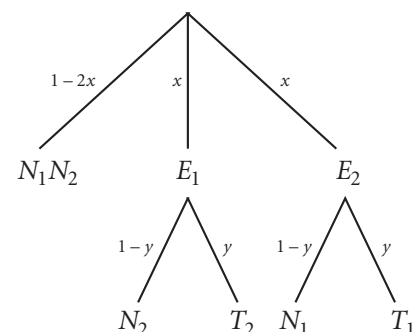


We willen $P(U_2 | U_1) = 1 - q$ berekenen. In de vorige paragraaf hebben we al berekend dat $P(N_1N_2) = 0,97/1,07$. Dus geldt $0,95 \cdot p = 0,97/1,07$. Dat levert $p = 0,97/(1,07 \cdot 0,95) \approx 0,95425$. Omdat $P(N_1U_2) = P(N_2U_1)$ geldt: $0,95 \cdot (1 - p) = 0,05 \cdot q$. Hieruit kunnen we q berekenen:
 $q = (1,07 \cdot 0,95 - 0,97) / (1,07 \cdot 0,05) \approx 0,86916$. Dus $P(U_2 | U_1) = 1 - q \approx 0,13084$. Dat is wel behoorlijk veel groter dan de 0,05 uit het onafhankelijke geval!

Het is ook wel interessant om te weten wat het equivalent van 0,07 is in het geval dat het uitvallen van beide motoren onafhankelijk is.

[denkpauze]

Dat is dus de kans $P(T_2 | E_1)$. We tekenen weer een boom als in de vorige paragraaf.



Omdat het uitvallen van motor 1 en het uitvallen van motor 2 *onafhankelijk* zijn verondersteld, geldt

$P(N_1 N_2) = 0,95^2$. Dat levert $1 - 2x = 0,95^2$, dus $x = (1 - 0,95^2) / 2 \approx 0,04875$. Verder geldt: $P(\text{motor 1 valt uit}) = P(E_1) + P(E_2 T_1) = x + x \cdot y = 0,05$. Dat levert $y = 0,1 / (1 - 0,95^2) - 1 \approx 0,02564$.

Bent u erin gevlogen? Uiteindelijk zijn we veilig geland en zijn de mankementen verholpen. Wilt u revanche? Dat kan in de volgende paragraaf.

Opgave

Voor een zeker viermotorig vliegtuig geldt dat het in de lucht kan blijven zolang ten minste twee motoren werken. Voor elke motor is de kans op uitvallen 0,05. Als er één motor is uitgevallen, is de kans op uitvallen voor elk van de andere drie motoren 0,07. Als er twee motoren zijn uitgevallen is de kans op uitvallen voor beide overgebleven motoren 0,10. Als een derde motor is uitgevallen, moet het vliegtuig een noodlanding maken. De vierde motor krijgt dus geen gelegenheid om ook nog uit te vallen. Wat is de kans dat het vliegtuig een noodlanding moet maken?

[denkpauze]

Deze kans is $7/1210 \approx 0,00579$.

De moraal

Kansrekening is een glibberig vak. Er zijn opgaven op ogenschijnlijk elementair niveau die grote problemen opleveren. Vooral vragen waarbij voorwaardelijke kansen een rol spelen. Denk aan de vele (foute) reacties die het drie-deurenprobleem oproep in NRC Handelsblad (artikel **Statistiek volgens een Engelse Dominee** van Rob van den Berg, 18 mei 1995).

Zodra er iets afgeweken wordt van de standaardopgave over de binomiale verdeling, is de zekerheid hoe de opgave aan te pakken volledig zoek. Veel leerlingen verkeren bij kansrekening voortdurend in vergelijkbare onzekerheid. Het is van

groot belang deze twijfels te onderkennen. In elk geval is zorgvuldigheid in de formulering van vraagstukken een eerste vereiste. Zie ook het artikel **Ik heb ze maar allebei goed gerekend**, *Euclides* 70-7, blz. 252.

School & Computer '98

Voor het vijfde achtereenvolgende jaar worden er in het land zes beurzen gehouden onder de naam '**School & Computer '98**'. Op elke beurs staan 50 tot 60 stands. Alle belangrijke producenten van educatieve software, maar ook hardware-leveranciers en anderen die zich op de educatieve ICT-markt begeven, zijn vertegenwoordigd. Het procesmanagement ICT in het onderwijs van het ministerie van OCenW is eveneens aanwezig.

School & Computer is bestemd voor leraren, schooldirecties en -besturen, administrateurs en systeembeheerders, ouders en andere belangstellenden. De beurzen zijn gericht op het basis- en voortgezet onderwijs en de beroeps- en volwasseneneducatie.

Op **School & Computer** zijn de laatste ontwikkelingen op het gebied van ICT voor educatief gebruik te zien, maar ook aanverwante producten, zoals boeken, werkbladen, hardware, etcetera.

Men kan alle programmatuur zelf uitproberen. Er zijn voor alle schooltypen en -vakken diverse pakketten aanwezig, ook verantwoorde software voor thuisgebruik ontbreekt niet. Verder: leerlingvolgsystemen en administratieve pakketten, roosterprogramma's, toetsingssoftware en pakketten voor de schoolbibliotheek.

Plaatsen en data

Groningen, 11 maart Martinihal • *Zwolle*, 18 maart, IJsselhallen • *Rotterdam*, 1 april, Erasmus Congrescentrum • *Eindhoven*, 8 april, Het Evoluon • *Amsterdam*, 15 april, WTC • *Utrecht*, 22 april, Jaarbeurs

Geopend van 12.00 - 17.00 uur In Utrecht van 11.00 - 17.30 uur

De toegang is gratis.

Workshops

Tijdens de beurs kunnen bezoekers kosteloos deelnemen aan een aantal workshops. Een overzicht van de workshops, met telefoonnummers en contactpersonen, staat in de School & Computer-krant en op Internet: www.ess.nl

School & Computer-krant

In februari verschijnt de School & Computer-krant in een oplage van 85.000. De krant wordt gratis verspreid op alle scholen in Nederland.

Het bestellen van een krant is mogelijk door overmaking van f 5,- op postbankrekening 300847 t.n.v. ESS te Groningen, o.v.v. 'krant'.

Vijf exemplaren kosten f 12,50. Grotere aantallen op aanvraag.

Informatie

ESS, Anneke Kok of Wim Illem Postbus 614, 9700 AP Groningen

tel.: (050) 527 75 04 fax: (050) 526 42 34

e-mail: ess@ess.nl Internet: www.ess.nl

Van de bestuurstafel

Never a dull moment

Op het moment dat ik dit schrijf is de jaarvergadering net achter de rug, in dit nummer vindt u de aankondigen voor de regionale bijeenkomsten in het voorjaar. De jaarvergadering/studiedag is het hoogtepunt in het verenigingsjaar, en gelukkig mag deze zich in een toenevende belangstelling verheugen. Dat is ook heel plezierig voor de organisatoren, die er weer veel tijd en energie in hadden gestopt om de aanwezigen een zinvolle dag te bezorgen. Het is een dag om niet te missen, waarin je op de hoogte gebracht wordt van de laatste ontwikkelingen, kunt praten over je vak, allerlei nieuwe dingen horen en zien, leuke ideeetjes opdoen van collega's of simpelweg spullen kopen ter verfraaiing van het lokaal.

Tweede fase havo/vwo

Zoals u in vorige nummers hebt kunnen lezen is de definitieve vaststelling van de examenprogramma's voor wiskunde nog steeds niet helemaal rond. We zijn blij dat inmiddels, mede dankzij de eensgezindheid van alle bij het wiskundeonderwijs betrokken instanties, als nog bij C&M vwo de keuze is gevallen op Grafen en Matrices, en niet op Differentiëren. Over het gewicht van de praktische opdrachten bij wiskunde de volgende keer meer. Op dit moment is al wel duidelijk dat het aantal uren dat aan de praktische opdrachten besteed moet worden niet meer expliciet zal worden vermeld, wat meer vrijheid geeft om dit in de klas goed op te bouwen.

De grafische rekenmachine

Zoals u weet heeft de politiek niet zo daadkrachtige besluitvorming rond de

invoering van de nieuwe programma's er toe geleid dat scholen zelf de keuze hebben tussen invoering in 1998 of in 1999. Een gevolg hiervan is dat er gedurende een aantal jaren (denk ook aan bezemexamens) voor veel vakken een dubbele hoeveelheid examens gemaakt zou moeten worden. Dat is een kostbare zaak, en vandaar dat men pogingen doet om een zo groot mogelijke overlap tussen oude en nieuwe examens tot stand te brengen. Voor wiskunde zou die overlap groter zijn als ook in het oude programma de grafische rekenmachine ingevoerd zou worden. De CEVO heeft hierover ons advies gevraagd, wat u hieronder verkort aantreft. Overigens geldt hiervoor hetzelfde als voor onze andere openbare brieven/adviezen: als u wilt beschikken over de complete tekst, neem dan contact op met de secretaris.

Wat we niet willen:

1. *In het belang van de wiskundedocenten en hun leerlingen: Een oud examen dat richting nieuw is opgeschoven waarbij iedere leerling een GRM heeft en de docent zelf maar moet uitzoeken hoe en wat er in zijn lesgeven met de oude methode moet veranderen. Dat creëert onveiligheid en onrust bij docenten en ongelijke kansen bij leerlingen afhankelijk van deze specifieke vaardigheden van de docent.*
2. *In het belang van de vernieuwing van het wiskundeonderwijs: Dat het nieuwe examen dermate richting oud wordt aangepast dat nieuw niet meer herkenbaar anders is.*

Als gevolg hiervan zien we in principe de volgende mogelijkheden:

1. Oud blijft oud en de leerlingen hebben een gewone rekenmachine. De overlap is dan kleiner, maar er is complete duidelijkheid en de vernieuwing kan in het nieuwe examen goed zichtbaar gemaakt worden.

2. Breng differentiatie aan in het examen, naar analogie van de situatie bij scheikunde. Concreet wil dat zeggen dat in het overgangsjaar de leerlingen in het oude programma in het examen een aantal vragen vinden voor het geval zij in de klas met de GRM hebben gewerkt (de GRM-stroom) en een aantal vragen voor het geval dat niet zo was. (de ZRM-stroom) Hiermee blijft de veiligheid behouden en is er toch ruimte voor experimenteren voor docenten die dat wensen. Bij de GRM-stroom kan er een grotere overlap zijn met nieuw.

3. Oud blijft oud en de leerlingen hebben eventueel een GRM. Bij het oude examen worden de opgaven zo gemaakt dat leerlingen het ook met een gewone rekenmachine afkunnen. De GRM zal vooral in de klas gebruikt worden als een didactisch hulpmiddel. De docent bepaalt wat hij ermee doet, maar de leerling zal aan de oude eisen m.b.t. de technische wiskundige vaardigheden moeten voldoen. Bij deze laatste mogelijkheid gaan we ervan uit dat de GRM in elk geval per 1-8-1998 zal worden ingevoerd bij de vakken na, bi, sk en ec. Navraag bij de diverse vakverenigingen bevestigde ons vermoeden dat een laconieke houding ten opzichte van invoering wordt ingegeven door de veronderstelling dat het al dan niet gebruiken nauwelijks van invloed zal zijn. In deze variant is de situatie voor wiskunde hiermee vergelijkbaar.'

▼ Vervolg op pag. 128

Daarnaast hebben we nogmaals benadrukt dat er in december helderheid moet zijn over het besluit en de gevolgen daarvan voor het programma en de

te verwachten vragen op het examen, zodat men zich in de maanden daarna op de scholen in overleg met andere

secties kan oriënteren op de gevolgen, zowel financieel als organisatorisch.

Marian Kollenveld

Regionale NVvW-studiebijeenkomsten

Een plezierige vorm van korte nascholing, niet te ver weg, met certificaat. U bent weer welkom in:

LEIDEN donderdag 12/3
Visser 't Hooftlyceum, Kagerstr. 1
tel. 071-5171661
NS uitgang Rijnsburgerweg
(8 min. lopen): links, 3e straat rechts.

ZWOLLE woensdag 18/3
Greijdanuscollege, Campus 5
tel. 038-4698698
NS uitgang Zuid (10 min. lopen):
rechtsaf, schuin over parkeerterrein,
onder tunnel door, rechtsaf, achter
HS Windesheim.

EINDHOVEN dinsdag 24/3
HS Eindhoven, Rachelsmolen 1
tel. 040-2605510
NS uitgang Noord (10 min. lopen):
parkeerterrein schuin rechts over, weg
over, na 300m langs Kennedylaan
linksaf (dus niet TU!), gebouw R1.

Let op de juiste data!!
(De data in het boekje van de jaarvergadering november 1997 zijn *niet* correct.)

We zijn erg blij dat ook nu een aantal mensen bereid is om geheel belangeloos hun speciale expertise aan u uit te dragen. Wij hopen dat er weer 'voor elk wat wils' is.

Programma

15.45-16.00 ontvangst, koffie/thee

16.00-16.45 plenaire voordracht

16.45-18.00 middagwerkgroepen

18.00-18.45 eenvoudige maaltijd en verkoop van posters en 'juwelen van de wiskundekoningin'.

18.45-20.00 vooravondwerkgroepen

Plenaire voordracht

Praktische opdrachten, tussen droom en daad, Kees Hoogland en Douwe Kok.

De toenemende rol van praktische opdrachten in het wiskundeonderwijs. Consequenties voor onderbouw en bovenbouw.

Middagwerkgroepen

A Een rijk verrijksdeel, project wiskunde SLO.

In het nieuwe leerwegenstelsel vmbo verdwijnen de B, C, en D-niveaus. Het vernieuwde examenprogramma bevat verrijksdelen voor doorstroming en aansluiting naar de verschillende vormen van lang mbo en 4 havo. Daarover is zeker discussie mogelijk! Recent ontwikkeld beeldmateriaal toont hoe wij denken dat die aansluiting concreet vorm kan krijgen.

B Computermeetkunde,

door deelnemers aan de reis voor wiskundeleraren naar Denemarken.

Na een elementaire kennismaking worden aan de hand van zelf uit te voeren opdrachten de didactische mogelijkheden van interactieve meetkunde op de computer verkend; zowel voor onder- als bovenbouw.

C Wat kunnen verschillende grafische rekenmachines?

Vertegenwoordigers van HP, Casio, en TI zullen aan de hand van dezelfde opgave en een korte eigen presentatie de overeenkomsten en verschillen proberen duidelijk te maken.

D Hbo-doorstroom Nieuwe Stijl,

door leden van het Platform MTO. Het nieuwe leerplan wiskunde mto en het TWIN-project hebben een omslag van het didactisch handelen binnen het wiskundeonderwijs op het mto tot gevolg. Daarbij hoort vanzelfsprekend ook de ontwikkeling van nieuwe eindtermen voor de doorstroom naar hbo. U hoort de laatste ontwikkelingen.

Vooravondwerkgroepen

Q Leerweg en leerwegondersteuning, Wim Kuipers.

In augustus 1999 worden de leerwegen in het vbo/mavo ingevoerd. Weliswaar in de brugklas en het examen is dan nog ver weg ..., maar toch. Wat betekent de invoering voor deze brugklassers als we letten op morgen en over-

morgen? Wat zijn de consequenties voor het wiskundeonderwijs? We willen aandacht schenken aan de veranderingen en een aantal praktijkvoorbeelden aan u voorleggen.

R Hoe gebruik je de video in de wiskundes?, Magda Bruin.

Een discussie aan de hand van de door Teleac/NOT ontwikkelde banden 'Wat en waar is wiskunde I en II' voor klas 1 en 2 (i)vbo-vwo, over manieren om van werkelijkheid naar model te komen. Deze banden worden vergeleken met Amerikaanse banden. Welke onderwerpen zijn van belang voor volgende leerjaren?

S Hoe discreet is de analyse?, door het Profi-team.

'Discrete analyse' komt in het gemeenschappelijk deel voor alle vwo-profielen. De traditionele rol van de afgeleide functie wordt overgenomen door een soort differentiefunctie, grafisch gerepresenteerd door een toenamen-diagram.

Hierbij is een plaats ingeruimd voor het onderwerp 'rijen': verschil- en somrijen spelen een belangrijke rol.

Het is een voorbereiding op de continue analyse van wiskunde A en B, op de voortgezette analyse van wiskunde B1,2, maar vooral ook op 'discrete dynamische modellen' van wiskunde A1,2.

Het eerste experimentele materiaal voor beide domeinen is getest in de klas, met gebruik van de grafische rekenmachine.

U ziet en hoort de klaservaringen.

T Applets & Open Leren,

door leden van het Platform MTO.

Kennismaking met een aantal internet-applets die binnen het TWIN-project ontwikkeld zijn.

Deze op het internet aanwezige applicaties zijn bedoeld als dynamische lesondersteuning op het moment dat een uitleg met statische beelden minder effectief zou zijn.

In hoeverre kunnen de applets een sturende rol hebben binnen het Open Leren?

U (alleen in Zwolle!)

Leren van elkaar, de leerling is docent, door Els Franken.

Wegens succes herhaling van 15-11-'97. Op het Carolus Clusius College is men achterin een hoofdstuk uit Getal en Ruimte begonnen, bij de gemengde opgaven. Hoe het leren dan verder opgebouwd wordt zult u aan den lijve ondervinden: praktisch werk, zoals het ook in de klas is gebeurd. Hoe werk je samen een hoofdstuk door, presenteert je dit aan de klas en zorg je ervoor dat iedereen inzicht in alle stof krijgt? Een idee om zelf te gebruiken; voor onder- en bovenbouw.

Certificaat

Wilt U een nascholingscertificaat ontvangen, vermeld dan bij uw aanmelding uw voorletters en uw geboortedatum. U krijgt na afloop van de studiebijeenkomst het certificaat uitgereikt op vertoon van een identiteitsbewijs. U hebt alleen recht op een certificaat als u de gehele bijeenkomst hebt bijgewoond. Certificaten kunnen niet worden nagestuurd.

Kosten

Voor leden van de NVvW, en degenen die bij aanmelding lid worden, is de bijeenkomst gratis. Van niet-leden wordt een bijdrage van f60,- gevraagd. Voor de maaltijd en koffie of thee dient elke deelnemer f17,50 te betalen.

Nieuwe leden betalen f40,- contributie tot augustus 1998 (halfjaar) en ontvangen als welkomstpakket het vademecum, de heruitgave van drie brochures van Joop van Dormolen en Bert Zwanveld, evenals het themanummer over de nieuwe vbo/mavo examens en de nummers van deze jaargang van Euclides (voor zover voorradig).

De overschrijving van f17,50; f57,50 of f77,50 op giro 4470718 t.n.v. NVvW, Boxtel MOET VOOR 20 FEBRUARI binnen zijn. Ter plaatse aanmelden is niet mogelijk.

Hoe aanmelden

Iedereen kan één middag- en één vooravondwerkgroep bijwonen. Voor elk dient men een eerste en tweede keuze op te geven. Wie zich het eerst meldt krijgt de eerste keuze.

A. aanmelden via school:

Aan elke school wordt ook nog een aankondiging gestuurd. Breng uw collega's die nog geen lid zijn mee. Het is een mooie gelegenheid om hen lid te maken! Maakt uw school het bedrag over, dan dient u het schoolopgavebiljet in te zenden.

B. privé aanmelden:

Geschiedt de afschrijving van een rekening op uw eigen naam, vermeld dan de plaatscode Zw, Le of Ei; daarna de eerste en tweede keuze van respectievelijk de middag- en de vooravondwerkgroepen. Vervolgens uw telefoonnummer, uw voorletters en, als u een certificaat wilt, uw geboortedatum.

Voorbeeld:

LeBDRS071-5123456JJ1-1-'50
(N.B. Banken geven maximaal 30 tekens aan de giro door).

Bij vragen of problemen kunt U zich wenden tot het organiserende bestuurslid

Freek Mahieu, Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel, tel. 0411-673468, of in noodgeval tot *Agneta Aukema*, tel. 0320-226518.

Ten slotte

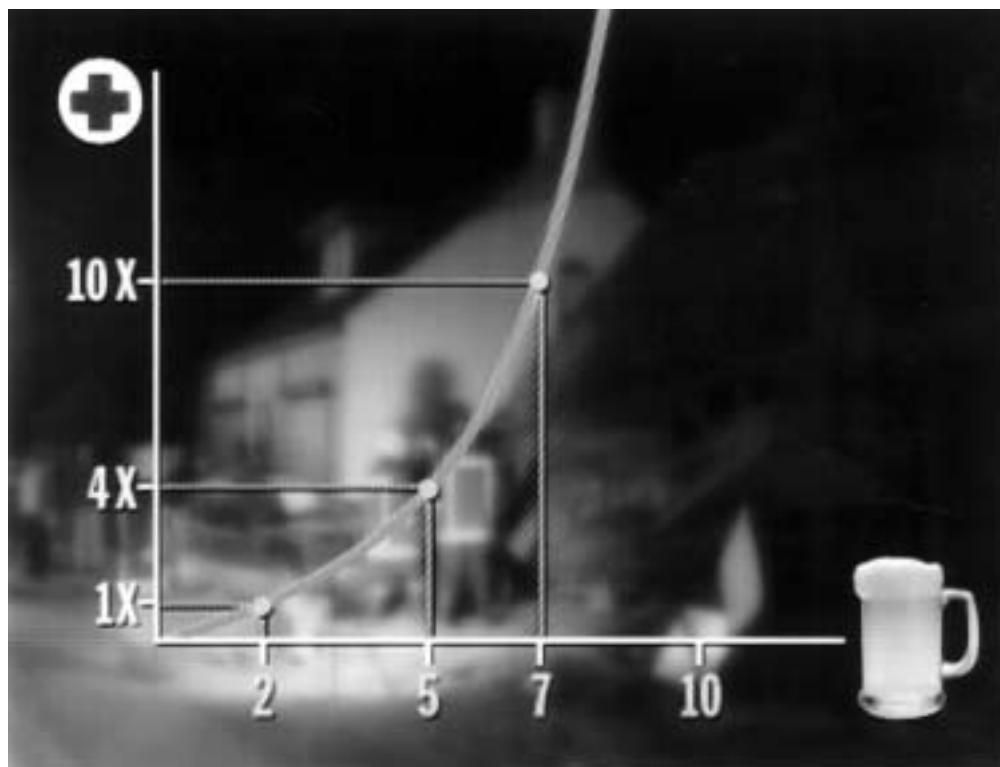
Uw inschrijving wordt niet bevestigd.

Bij binnenkomst vindt u uw badge met codes voor uw werkgroepen.

Wij wensen u alvast veel genoegen.

Nieuwe TV-serie voor wiskunde

In de serie 'Wat en Waar is Wiskunde' vormt de wereld om ons heen het uitgangspunt. Grafische bewerkingen koppelen de werkelijkheid aan de wiskunde. De mogelijkheid om de buitenwereld binnen de muren van het klaslokaal te halen is vorig jaar voor het eerst geïntroduceerd in de brugklas en door de docenten met veel enthousiasme ontvangen.



De nieuwe serie 'Wat en Waar is Wiskunde II' is bestemd voor het tweede leerjaar van de basisvorming. De vier programma's bestaan in totaal uit acht thema's van tien minuten die ieder een introductie vormen op de onderwerpen die aangeboden worden. De inhoud is afgestemd op bestaande methoden.

Programma 1

Thema 1: Statistiek

Statistiek geeft een overzicht van wat mensen doen en zijn. De verzameling van gegevens begint bij het stellen van de juiste vraag. Door de antwoorden te tellen ontstaat een overzicht. Dit overzicht moet eenvoudig te lezen zijn, zoals de labeltjes in kleding.

Thema 2: Verbanden

Lineaire, kwadratische en exponentiële verbanden zijn om ons heen te vinden. De remweg van een auto, de druk die toeneemt bij het duiken. Het spelen van het piramide-spel lijkt een makkelijke manier om veel geld te verdienen, maar kijk eens naar het aantal spelers dat nodig is!

Programma 2

Thema 3: Schatten

Schatten doe je snel en het geeft je een ruw inzicht. Kan ik er nog bij in de lift? Schatten wordt nauwkeuriger als je ervaring hebt in een vergelijkbare situatie. De strategie die jong en oud gebruikt is het vinden van de juiste 'maat' om structuur aan te brengen.

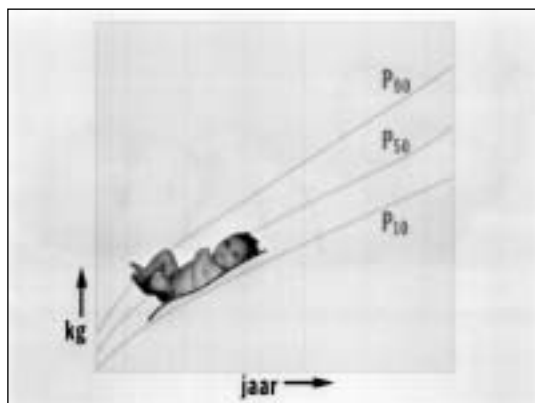
Thema 4: Getallen

Met getallen ordening aanbrengen in de wereld om ons heen is al duizenden jaren oud. Daarvoor zijn ook negatieve of wortelgetallen nodig. Hele grote getallen en hele kleine maken dat je de dingen anders ziet; de reis van celkern naar zwart gat in het heelal.

Programma 3

Thema 5: Omtrek, oppervlakte en inhoud

Het verschil tussen meten met een touwtje, ergens een raster over heen leggen en een ruimte opvullen met blokjes wordt uitgelegd aan de hand van figuren die iedereen kent. De vaste verhouding tussen omtrek van een wiel en diameter is al eeuwen bekend en levert het getal π op.



Thema 6: Vergroten en verkleinen

Groter maken doe je door een dia te projecteren op de muur; kleiner maken door een schaalmodel van een auto. Door alles te vermenigvuldigen met steeds hetzelfde getal wordt een visitekaartje een krant. Vergroten en verkleinen van een vissenkom of kofferset geeft een verrassend effect.

Programma 4

Thema 7: Stelling van Pythagoras

In de bouw, stratenmakers, archeologen, iedereen die makkelijk en snel een rechte hoek wil uitzetten gebruikt de 3-4-5-steek. De Griekse wijsgeer Pythagoras heeft er zijn naam aan gegeven door aan te tonen dat het voor andere getalcombinaties ook geldt.

Thema 8: Doorsnede

Aan de vorm en de structuur van een afgesneden plakje is veel over de totale vorm te vertellen. Bij een hersenscan worden evenwijdig plakjes afgesneden en zo ontstaat een beeld van alles wat eerst onzichtbaar was. En wat is het verband tussen planeten en een zaklamp?

Handleiding

Bevat per thema twee werkbladen met opdrachten in opklimmende moeilijkheidsgraad van vbo- tot vwo-niveau, die in de praktijk zijn uitgetest. Elke opdracht gaat uit van een situatieschets uit het programma om optimale afstemming tussen werkelijkheid en wiskunde te realiseren. De antwoorden zijn onderaan de pagina opgenomen zodat leerlingen zelfstandig aan de slag kunnen. Het programma bekijken plus het maken van de opdrachten neemt ongeveer een lesuur in beslag.

De prijs is f 22,50; te bestellen via: 035-6236260.

Voor meer informatie:

Magda Bruin, Teleac/NOT, 035-6723624

Uitzenddata 1998:

Programma 1:

Statistiek & Verbanden.

Maandag 9 februari om 9.30 (Nederland 3)

Programma 2:

Schatten & Getallen.

Maandag 16 februari om 9.30 (Nederland 3)

Programma 3:

Omtrek, oppervlakte en inhoud & Vergroten en verkleinen.

Maandag 2 maart om 9.30 (TV2)

Programma 4:

Stelling van Pythagoras & Doorsnede.

Maandag 9 maart om 9.30(TV2)

De blokuitzending van 80 minuten:

Donderdag 12 maart 1998 om 9.30 (TV2)

Herhaling Wiskunde I in blokuitzending van 80 minuten:

Donderdag 26 maart om 9.30 (TV2)

Boeken naar Mpongwe

Gerben van Lent

Inleiding

‘Naar school gaan doet men voornamelijk te voet en wel op blote voeten om dan op school de schoenen aan te doen, want die horen bij het uniform.’

Zo luidt een zin uit een brief van Janco Dees aan het Wereldwiskunde Fonds. Janco Dees heeft de afgelopen jaren gewerkt in Zambia en wel als wiskundeleraar op de lerarenopleiding Cosetco (Copperbelt Secondary Teachers College) in Kitwe. In zijn werk heeft hij veel te maken gehad met Mpongwe Secondary school gelegen op het platteland van Zambia. Het eerste project dat met behulp van de donaties van de leden van de NVvW is gerealiseerd, betrof het geven van wiskundeboeken aan deze plattelandsschool. Het Wereldwiskunde Fonds heeft aan Janco gevraagd een indruk te geven van het onderwijs in Zambia en zijn eigen ervaringen.

Het onderwijs in Zambia

Het onderwijs in Zambia is net als in Nederland onderverdeeld in basis-, middelbaar en hoger onderwijs. Basis- (primary) en middelbaar (secondary) onderwijs worden doorlopen in twaalf leerjaren (grades), 7 jaar basisonderwijs en 5 jaar middelbaar onderwijs. Naast basisscholen en middelbare scholen zijn er ook combinaties van lager en middelbaar onderwijs of juist

scholen met slechts een klein aantal leerjaren. Op het platteland vind je bijvoorbeeld nogal wat lower primary scholen (grade 1-4), omdat anders de afstanden voor de kleine kinderen te groot worden. Na grade 7 wordt er een examen gedaan dat bepalend is voor wie er doorstroomt naar grade 8. Voor slechts één op de drie kandidaten is er een plaats in grade 8, een heel verschil met de overgang van de basisschool naar de middelbare school in Nederland. Na grade 9 volgt er weer een examen waarna weer één derde doorstroomt naar grade 10. Na grade 12 volgt dan het GCE-examen¹. Dit is vergelijkbaar met het vwo-examenniveau. Het curriculum en de examens worden zoals in de meeste voormalige Britse koloniën samengesteld door de internationale examencommissie in Cambridge.

Na het middelbaar onderwijs kan men naar de Universiteit (UNZA² in Lusaka of CBU³ in Kitwe) of naar één van de colleges voor een beroepsopleiding. Ook bestaan er in de grote steden enkele programma's voor vroegtijdige schoolverlaters.

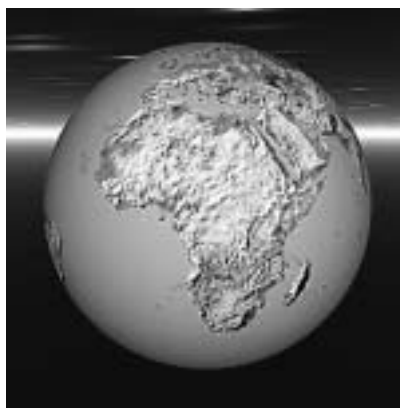
Deelname aan het onderwijs

Basisonderwijs wordt slechts gevolgd door 25% van degenen die

er voor in aanmerking komen. Ruim 10 jaar geleden was dat nog bijna 100%, maar door de economische teruggang is dat percentage nogal naar beneden gegaan. Het zijn meestal de meisjes die het eerst van school gehaald worden.

Het is Zambiaans beleid dat deel-

name van meisjes aan het onderwijs gestimuleerd moet worden. Inmiddels is algemeen bekend dat vrouwen een grote rol spelen in de ontwikkeling van een land. Zij zijn het die



zorgen voor het gezin door de grond te bewerken en de landbouwproducten op de markt te verkopen. Ook bij het terugdringen van de bevolkingsgroei blijkt dat er een verband bestaat tussen het aantal kinderen in een gezin en het opleidingsniveau van de vrouw. Bij de overgang van grade 7 naar grade 8 en van grade 9 naar grade 10 wordt de helft van de plaatsen gereserveerd voor meisjes.

Meisjes hebben het niet gemakkelijk in het onderwijs. Een belangrijke reden is dat van meisjes in tegenstelling tot jongens verlangd wordt dat ze veel huishoudelijk werk doen. Zowel voor als na school hebben zij taken zoals het halen van water, oppassen op de andere kinderen van het gezin, schoonmaken en koken. Hierdoor vallen hun studieresultaten vaak nogal tegen.

De opleiding tot wiskundeleraar

Mensen die leraar willen worden, kunnen voor een opleiding voor de primary sector terecht op één van de tien Primary Teacher Colleges

die het land rijk is. De opleiding hiervoor duurde twee jaar, maar in een poging om het grote tekort aan leerkrachten op te vullen is dat teruggebracht tot één jaar. Voor het middelbaar onderwijs zijn er twee lerarenopleidingen, het Nkrumah Teachers College en Cosetco. Deze opleidingen duren twee jaar, waarbij studenten op Nkrumah ook nog een ander vak moeten kiezen. Op Cosetco doet men alleen wiskunde. Ook bestaan er bijscholingscursussen voor primary teachers op een instituut in Lusaka en op Cosetco. Na de opleiding gaat men enkele jaren les geven en een aantal mensen kan dan nog een extra jaar volgen op Cosetco om een advanced diploma te halen. Hiermee is men dan bevoegd om de verplichte wiskunde te geven op het senior secondary niveau. Om bevoegd te zijn voor het keuzevak Additional Mathematics moet men opgeleid zijn tot wiskundeleraar op de School of Education van UNZA.

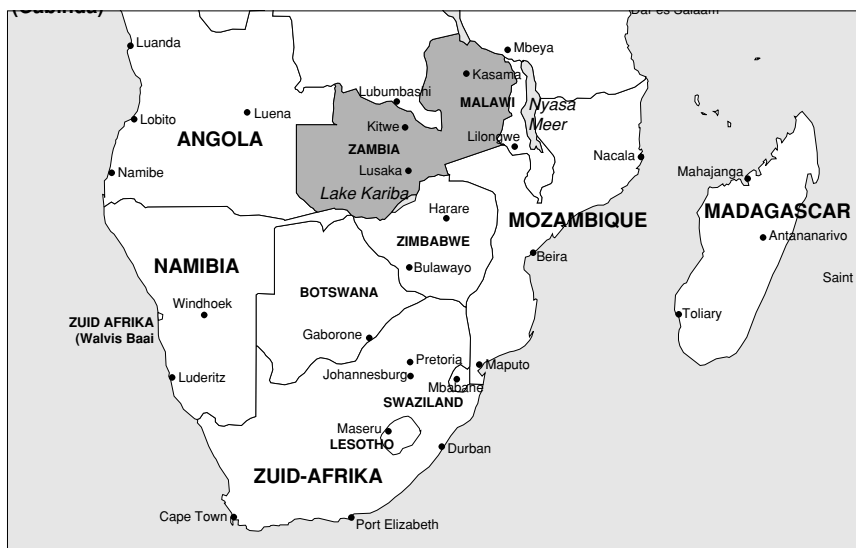
iets te doen aan het gebrek aan kennis van veel docenten. Zij willen in eigen beheer een aantal boekjes laten schrijven door Zambiaanse wiskundeleraars die wel voldoende opgeleid zijn, over onderwerpen die velen van hun collega's erg moeilijk vinden, zoals goniometrie, vectoren, statistiek en dergelijke. Tijdens een aantal workshops zal materiaal worden ontwikkeld. Per onderwerp zal er een klein boekje worden gemaakt om te verspreiden onder de docenten. De workshops kunnen alleen plaatsvinden in de vakanties. Het is een van de pogingen om iets te doen aan de problemen waardoor het Zambiaanse onderwijs geteisterd wordt.

Problemen in het Zambiaanse onderwijs

Hoewel het onderwijssysteem op papier er misschien nog aardig uit-

school te laten gaan. Dat betekent dat er wat extra gedaan moet worden zoals bijlessen geven, landbouwproducten verbouwen, etcetera. Het gevaar is dat de extra activiteiten belangrijker worden dan de eigenlijke taak: het les geven. De motivatie van Zambiaanse leerkrachten is dan ook begrijpelijkerwijs niet al te hoog. Ook verdwijnen een heleboel leerkrachten naar Botswana of Zuid-Afrika, waar de beloning heel wat hoger is. Het gevolg: een groot gebrek aan competente leerkrachten. Veel lessen worden gegeven door mensen die te laag of helemaal niet bevoegd zijn. Zo is er op sommige secondary scholen geen enkele opgeleide wiskundeleraar te vinden.

Omdat de prioriteiten voor de Zambiaanse overheidsuitgaven in onvoldoende mate bij het onderwijs liggen, betekent het dat de scholen geen uitgaven kunnen doen voor onderwijs- en leermiddelen. Een heleboel tijd in de klas gaat verloren aan het overschrijven van leerteksten van het bord. Bordpassers, linialen etcetera moeten over het algemeen zelf gemaakt worden. Het materiaal om deze spullen te maken is vaak schaars. Een ander probleem is de gebrekkige vakinhoudelijke kennis van veel leerkrachten: een opleidingsduur van twee jaar is eigenlijk te kort en op het examen kan men een gebrek aan wiskundekennis compenseren met een goed resultaat voor didactiek. Zo komt het regelmatig voor dat studenten voor het "Advanced diploma" op Cosetco grote problemen hebben met het optellen van breuken, een onderwerp dat ze zelf al een paar jaar zouden hebben moeten geven. En dit soort gevallen zijn niet incidenteel. Voor mensen die op Nkrumah zijn opgeleid komt daar nog het probleem bij dat ze slechts de helft van de tijd aan wiskunde hebben kunnen besteden. De meeste



De Zambiaanse vereniging van wiskundeleraars

Ook Zambia heeft een vereniging van wiskundeleraars: de ZAME⁴. Janco had contacten met deze vereniging en tijdens zijn verblijf heeft de ZAME een idee ontwikkeld om

ziet, is er in de praktijk een overvloed aan problemen. Janco schrijft hierover:

‘Allereerst is er het lage salaris voor Zambiaanse leerkrachten. Het is absoluut niet mogelijk om van een lerarensalaris een gezin te voeden, te kleden en de kinderen naar

docenten omzeilen problemen over onderwerpen die ze niet voldoende beheersen, door die onderwerpen gewoonweg niet te onderwijzen.

Veel scholen hebben ook een schrijnend gebrek aan meubilair: leerlingen zitten vaak op de grond of met z'n tweeën op een stoel. Ook hebben heel wat scholen geen ruiten in de vensters. Het onderwijs wordt gegeven in het Engels, maar de moedertaal van de meeste leerlingen is een bantoetaal, zoals bemba of nyanja. Tijdens de les moet niet alleen een wiskundeprobleem duidelijk gemaakt worden, ook moet er een taalbarrière overwonnen worden.

Als laatste kan er nog gewezen worden op de vele examens die een leerling moet ondergaan. Voor een school zijn slaagpercentages belangrijk, dus wordt er veel tijd besteed aan examentraining. Op de meeste examens wordt de nadruk gelegd op kennis. Inzicht wordt nauwelijks getoetst, dus worden leerlingen daar ook niet op getraind. Met ingang van dit jaar is daar gelukkig verandering in gekomen.'

Mpongwe secondary school

'Mpongwe secondary school is een gemengde school van zo'n 650 leerlingen en bevat grade 8 tot en met grade 12. De leerlingen zijn verdeeld over twaalf klassen met ieder ongeveer 50 leerlingen (Er zijn scholen waar klassen van 100 leerlingen niet ongewoon zijn). De meeste leerlingen van de school zijn intern, omdat ze vaak van grote afstanden moeten komen. De leerlingen die in de omgeving wonen, gaan 's avonds naar huis. De school ligt zo'n 65 km van de dichtstbijzijnde stad (Luanshya). Om die reden kan de school niet

vaak profiteren van buitenlandse hulp. De meeste organisaties kiezen voor hun projecten liever scholen in een grote stad, vanwege de betere bereikbaarheid. De



overheidsbijdrage voor de school is niet hoog genoeg om de school te voorzien van onderwijs- en leermiddelen.

Met het geld van het Wereldwiskunde Fonds hebben we voor de school in totaal 300 boeken voor grade 8 en grade 9 gekocht. Deze zijn in Zambia geschreven en

geschreven zijn. Hiervan zijn er 200 aangeschaft. Ook hebben we nog een aantal boeken voor het keuzevak additional mathematics kunnen kopen. Op het moment

zijn er nog 160 tabellenboekjes in bestelling, waaraan op school een flinke behoefte is.'

Het Wereldwiskunde Fonds koos dit project, omdat het ging om een afgelegen school op het platteland met een enorm gebrek aan leermiddelen. Bovendien worden de boeken lokaal, in Zambia en



worden ook in andere Zambiaanse scholen gebruikt. Voor de senior sector worden meestal boeken gebruikt die in Zimbabwe

Zimbabwe, gedrukt. Ze behoeven niet uit Europa geïmporteerd te worden. Het geld komt zo als het ware twee keer goed terecht.

Tot slot

Janco's tijd zit er op. In de loop van dit jaar keert hij terug naar Nederland. Het werken in het onderwijs in een derdewereld-land is zwaar. Je wilt het beste voor je studenten die over het algemeen erg gemotiveerd zijn, maar omstandigheden als gebrekkig materiaal, weinig betrokken collega's en een weerbarstige bureaucratie maken het soms lastig om de moed er in te houden. Het zijn diezelfde leerlingen die een kans verdienen voor de toekomst.



Janco verwoordt het in zijn laatste brief aan het Fonds met 'Van de chaostheorie weet tenslotte iedere wiskundige dat kleine oorzaken grote gevolgen kunnen hebben'.

Noten

- 1 General Certificate of Education
- 2 University of Zambia
- 3 Copperbelt University
- 4 Zambian Association for Mathematics Education



W.T. van Horssen en A.H.P. van der Burgh **Inleiding Matrixrekening en Lineaire Optimalisering**

Epsilon Uitgaven Utrecht 1996

ISBN 90-5041-018-9

129 pagina's

Prijs f 37,50

Dit boek, waarvan in 1985 de eerste druk is verschenen en dat ontstaan is uit een collegedictaat voor bouwkundestudenten aan de TU Delft, geeft een inleiding in de matrixrekening en de lineaire optimalisering, waarbij slechts de wiskundekennis van het havo of vwo bekend verondersteld wordt. Het boek bevat vier hoofdstukken.

In de eerste twee hoofdstukken komen matrices en lineaire vergelijkingen aan de orde. Behalve aan de wiskundige theorie: matrixbewerkingen, de inverse matrix, de eliminatiemethoden van Gauss en Gauss-Jordan en de LU-decompositie, besteden de schrijvers aandacht aan het opstellen van matrices en stelsels vergelijkingen in praktijkvoorbeelden. Hierdoor sluiten deze hoofdstukken goed aan bij de wijze van behandelen op de middelbare school. Het derde hoofdstuk is gewijd aan het lineair programmeren. Na de grafische oplossingsmethode, die uiteraard beperkt toepasbaar is, bespreken de auteurs uitvoerig de simplexmethode. Veel aandacht wordt besteed aan het formuleren van het wiskundige model. In het laatste hoofdstuk 'Computeralgebra' wordt kort ingegaan op de mogelijkheden om de berekeningen uit te voeren met behulp van een computerpakket. Het computerpakket Maple dient hiervoor als basis.

In het boek is een groot aantal opgaven met antwoorden opgenomen. Dit maakt het geschikt voor zelfstudie.

De behandelde stof kan gezien worden als een uitbreiding van de matrixrekening en het lineair programmeren van het vwo. De heldere uitleg en vele voorbeelden maken het boek uitstekend geschikt voor een verdieping van de vwo-stof.

Ik kan het dan ook van harte aanbevelen aan iedereen die de matrixrekening en het lineair programmeren op de middelbare school onderwijst. Het kan tevens gebruikt worden in het kader van de toekomstige keuzeonderwerpen (zebra).

Rob Bosch

ILS in het MTO

Jaap Breedveld

Inleiding

Nu de herstructurering van het middelbaar beroepsonderwijs zijn voltooiing nadert binnen het kader van ROC¹-vorming en de WEB², wordt het MTO momenteel overspoeld (geteisterd?) door een golf van inhoudelijke vernieuwingsprojecten.

terug te dringen. In dit artikel wil ik mij beperken tot een nadere kennismaking met ILS.

Wat is nieuw aan ILS?

Het verwerven van kennis in groepsverband is op vrijwel alle onderwijsinstituten een vertrouwde werkvorm.

De zevensprong

Als lesmodel wordt in ILS gebruik gemaakt van de zevensprong:

- 1 Schrijf de huiswerktaken op het bord;
- 2 Activeer de voorkennis (3-5 min.);
- 3 Geef instructie (10-12 min.);
- 4 Laat taken (huiswerk) in groepjes maken (15-20 min.);
- 5 Controleer, help en vat samen (max. 10 min.);
- 6 Evalueer het groepswerk;
- 7 Individuele toetsing.

Het zal duidelijk zijn dat het niet altijd mogelijk en wenselijk is elke les in bovengenoemd 'keurslijf' te



Het ROC Zadkine te Rotterdam - waaraan ik als wiskundedocent ben verbonden - participeert in een drietal projecten, te weten Aantrekkelijk Technisch Beroepsonderwijs (ATB), Probleem Gestuurd Onderwijs (PGO) en het Interactief Leergroepen Systeem (ILS). Alle beogen de leerling actiever en effectiever te betrekken in het leerproces en de traditionele rol van de docent

Henk Witteman³, de initiator van het ILS-project, heeft als nieuw element ingebracht het formeren van groepen op basis van leerstijlen. Met behulp van een zogenaamde leerstijlentest wordt bij elke leerling vastgesteld hoe hij of zij eigenlijk leert. Door nu leerlingen met verschillende leerstijlen in groepjes te laten werken aan probleemgerichte opdrachten leren ze van elkaars aanpak en komen aldus tot betere prestaties.

gieten. Een en ander kan ook over meer dan één les worden gespreid.

Een wiskundeles met ILS

Als onderwerp voor een ILS-les heb ik gekozen voor 'Toepassingen van Lineaire functies' als vervolg op een enige tijd eerder gegeven les in formele wiskunde over eerstegraads functies. Overeenkomstig stap 1

van de Zevensprong vertelde ik de klas dat ze aan de gang moesten met een drietal toepassingen van lineaire functies (zie de werkbladen op pagina 140 en 141). Ter activering van hun voorkennis stelde ik vragen zoals 'Geef eens een voorbeeld van een eerstegraads functie', 'Hoe worden ze ook wel genoemd?', 'Wat geef je aan met een functie?' (moeilijk!) en 'Welke gegevens heb je nodig voor de grafiek en voor het opstellen van de formule?' (blijkt ook lastig!). De beantwoording blijkt meer tijd in beslag te nemen dan gepland. De eerste tijdsoverschrijding is een feit. Ik besluit daarom de instructie (stap 3) te beperken tot het verwijzen naar enkele voorbeelden in het boek, waarin het opstellen van eerstegraads functies aan de orde komt. Nadat een kwartier verstreken is gaat de klas — verdeeld in zes vaste groepen van vier leerlingen — met de opdrachten aan de slag. Met groot enthousiasme storten de groepen zich op de eerste opdracht, die zoals tijdens de evaluatie zal blijken als moeilijkste opgave wordt ervaren. Het ontbreken van x -en, y -en, rico's en coördinaten levert bij vrijwel alle groepen onoverkomelijke problemen op. Ook al worden ze bij de technische vakken voortdurend met toepassingen geconfronteerd, in de wiskundeles zijn ze anders gewend. Na een korte onderbreking waarin de 'vertaalslag' van de gegevens wordt verduidelijkt en met verwijzing naar een voorbeeld in het boek gaan ze opnieuw aan de slag. Het opzetje werpt zijn vruchten af. Na druk overleg vinden alle groepen de juiste formules. Ook geven alle groepen een bevredigende uitleg van de lineaire verbanden met 'het zijn rechte lijnen' en 'als de tijd 5 min. omhoog gaat, gaat de hoogte 3,5m omhoog'. Hoewel de eerste opgave door alle groepen succesvol werd uitgevoerd blijkt in de beide resterende opgaven het vinden van de

functievoorschriften slechts voor de helft te lukken. Het herkennen van gelijke structuren in wisselende situaties blijkt problematisch te zijn. Bovendien begint de motivatie af te nemen doordat de eerste opgave veel tijd en inspanning heeft gevergd. Als het na 45 minuten de hoogste tijd is het werk in te leveren, blijkt de helft niet te zijn toegekomen aan de makkelijke afleesvraag 3b, terwijl de grafiek toch in de meeste gevallen goed werd getekend. Na inlevering van het groepswerk leek het mij niet zinvol tot bespreking ervan over te gaan, maar wel de bevindingen te evalueren. Tenslotte was dit geen 'doorsnee' wiskundeles. Uit de evaluatie

kwamen in meerderheid de volgende reacties:

- De les was moeilijk, maar leerzaam;
- Opgave 1 was het moeilijkst en opgave 3 het gemakkelijkst;
- Zonder elkaar was het nooit gelukt, zeker opgave 1 niet.
- We hebben echt van elkaar geleerd;
- Met groepswork gaat de gemiddelde prestatie omhoog.

Na deze evaluatie hadden de meesten het echt gehad. Naderhand bleek het resultaat gemiddeld voldoende te zijn. Naar mijn inschatting was dit zonder groepswork niet gelukt omdat dan geen groepscorrectie plaats vindt. 'Dat moet je zò doen' of 'Ik krijg er wat

Platform MTO-Wiskunde verbreed

Het al weer meer dan een jaar geleden voorgestelde team van Platform MTO (zie Euclides 71-8) — inmiddels omgedoopt in 'Platform MTO-Wiskunde' — is versterkt. Het vijfde teamlid is Jaap Breedveld, docent wiskunde/informatica aan de vestiging Prinsensland van het ROC Zadkine te Rotterdam. Jaap heeft na de Dalton HBS in Rotterdam de Kweekschool doorlopen en na zijn hoofdakte de derdegraads bevoegdheid wiskunde behaald. Bijscholing heeft hem de tweedegraads verklaring voor het MTO opgeleverd. Na enkele jaren basisonderwijs maakte hij in 1967 de overstap naar de 4e lts in Rotterdam. Via de avond-MTS werd hij in 1971 als docent aangesteld in de toenmalige schakelklas van de 1e MTS, eveneens in Rotterdam. Als coördinator heeft hij een aantal jaren de sectie avo geleid. De SVM-operatie en een schoolverhuizing deden hem in 1991 belanden in de vestiging Prinsensland van het Zadkine College. Naast zijn taak als docent heeft Jaap zich bezig gehouden met de aansluitingsproblemen tussen vbo/mavo en het MTO. In dat kader heeft hij als lid van de resonansgroep meegewerkt aan de ontwikkeling van de computerondersteunde cursus 'Wiskundig (om)rekenen' voor het MTO. Als senior (58 jaar) hoopt hij nog een aantal jaren de doelstellingen van het Platform MTO-Wiskunde te helpen uitdragen en realiseren. Op de foto's bij het artikel ziet u Jaap in actie.

anders uit' waren vaak voorkomende opmerkingen.

Mijn ervaringen met ILS

Op onze school geschiedde deelname aan het ILS-project op vrijwillige basis. De sectie wis- en natuurkunde besloot dit cursusjaar unaniem tot deelname. Wat mij met name aansprak — en later ook werd bevestigd — was de omkering van het rollenpatroon tijdens de les. Niet meer het voorkauwen aan de (niet oplettende) klas, maar kennisverwerving en -verwerking door de leerlingen zelf. Door te werken met ILS ben je veel bewuster bezig in je verschillende rollen. Bij het voorbereiden van de les richt je je

werk gaat. Wat je voorheen tot in detail voordeed in een aantal voorbeeldopgaven laat je nu meer over aan de leerling zelf. En dat blijkt vaak nog te lukken ook.

Plussen en minnen

- + Het lesmodel is veel afwisselender dan ik gewend was. Tijdens het groepswork ben je meer ontspannen bezig. Je observeert, loopt rond en biedt (niet te snel) hulp;
- + Van de leerling wordt meer inspanning verwacht. Daartoe zijn ze doorgaans zeer bereid. Het werken met elkaar motiveert en werkt veelal positief op de resultaten;

groepsresultaat bij elk van de leden gelegd. Dit noopt ze tot samenwerking;

- + ILS nodigt uit tot opdrachten die het probleemoplossend denken bevorderen. Zie daartoe de eerder genoemde opdrachten.

Maar er zijn ook minpunten:

- ILS betekent een ingrijpend omschakelingsproces met name voor de docent. Het is alleen al bijzonder moeilijk je rol van uitlegger en voordoener in te perken. Daarbij moet je voortdurend de actieve rol van de leerling in je lessen betrekken;
- Het blijkt bepaald geen sinecure te zijn geschikte opdrachten te bedenken, dat wil zeggen probleemgericht en open. Bovendien zullen nog steeds



meer op de te bereiken leerdoelen, waardoor je tijdens de instructie ook gerichter, dus beknopter te

- + Doordat steeds één lid per groep het werk inlevert wordt de verantwoordelijkheid voor het

rekenkundige/algebraïsche vaardigheden verworven moeten worden door individuele training.

Tot slot

In het voorgaande heb ik getracht een korte impressie te geven van de ideeën achter en de ervaringen met het ILS-project, zoals dat op onze vestiging wordt uitgevoerd. Gezien de nog geringe ervaring met ILS vind ik het niet verantwoord duidelijke conclusies uit te spreken. In alle voorzichtigheid ben ik wel van mening dat ILS een nieuwe onderwijsvorm is die heilzaam en motiveerend werkt op zowel leerlingen als docenten. Bovendien verhogen de groepscijfers de resultaten van de zwakkere leerlingen. Hopelijk kan ik in een later stadium ook nog eens de met ILS beoogde werkelijke toename in leerprestaties constateren. In het kader van het TWIN⁴-project wordt momenteel een nieuw curriculum ontwikkeld voor wis- en natuurkunde voor het MTO. Door het 'realistische' karakter lijkt dit uitermate geschikt ILS-materiaal. Wordt ILS de standaard in BVE⁵-onderwijsland?

Noten

- 1 Regionale OpleidingsCentra
- 2 Wet Educatie Beroepsonderwijs
- 3 Dr. Henk Witteman is in 1997 gepromoveerd aan de Rijksuniversiteit Leiden op het ILS-project.
- 4 Techniek, Wiskunde, Informatietechnologie, Natuurkunde
- 5 Beroepsonderwijs VolwassenenEducatie

40 jaar geleden

1081

- a Los op: $^{100}x \log 10 + {}^x \log 0,01 + 1/3 = 0$.
- b Voor welke waarde(n) van p heeft de vergelijking $2^{2x+1} - 9 \times 2^x = p$ twee wortels, waarvan de som 1 is?

1082

- Van een meetkundige reeks is de eerste term $x^2 - 3x - 4$ en de reden $(2x + 1)^{-1}$.
- a Voor welke waarden van x zijn alle termen van de reeks positief?
- b Voor welke waarden van x is de reeks convergent? Bij de beantwoording van deze vraag moet de onder a vermelde voorwaarde buiten beschouwing worden gelaten.
- c Druk voor de waarden van x , waarvoor de reeks convergent is, de som $s(x)$ van de reeks in x uit. Schets voor deze waarden van x de grafiek van $s(x)$.

1083

Is $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4$ een regelmatige vijfhoek, dan voldoet $A_0 A_1$ aan de vergelijking $A_0 A_1^4 - 5R^2 \cdot A_0 A_1^2 + 5R^2 = 0$.
(dr. O. Bottema, *de elementaire meetkunde van het platte vlak*, blz. 206)

1084

Drie cirkels α , β en γ gaan door één punt P . Construeer een cirkel, die α en β raakt en γ loodrecht snijdt.
(Ex. *Wiskunde-1957-Indonesië*)

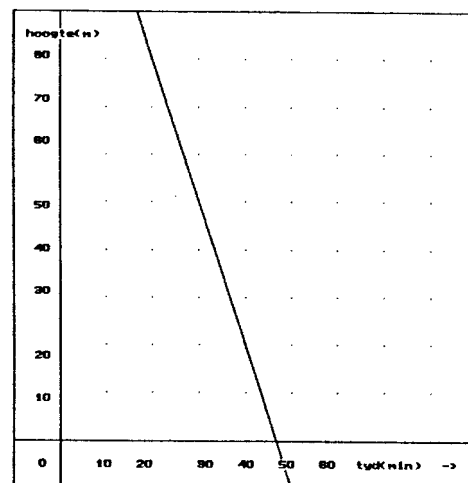
Opgaven uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 45(1957-1958)

Werkblad

Toepassingen van lineaire functies

1

tijd (min)	hoogte (m)
5	6,00
10	9,50
15	13,00
20	16,50
25	20,00
30	23,50

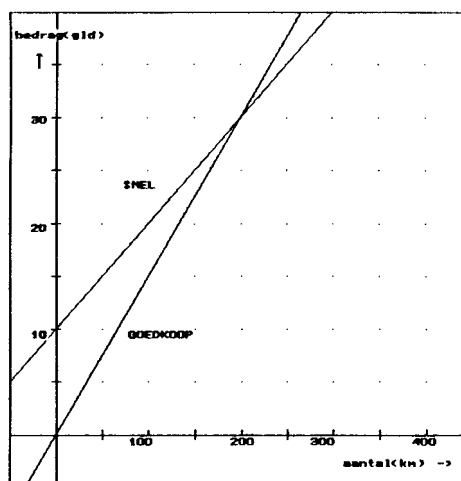


Hierboven zie je een tabel en een grafiek. Bij elk hoort een verband tussen *tijd* (in minuten) en *hoogte* (in meters).

- Maak een formule met als variabelen h en t bij de tabel.
- Idem, maar nu bij de grafiek.
- Is in beide gevallen sprake van een lineair verband?
Zo ja, leg dan eens voor beide gevallen uit waarom?

2

pas voor het rijbewijs geslaagde student wil een auto huren. Hij vergelijkt de prijzen van de firma's GOEDKOOP en SNEL met elkaar.



- Welke variabelen worden gebruikt?
- Welke firma rekent behalve een km-prijs ook nog een vast bedrag?
- Stel voor beide grafieken een (woord)formule op.
- Is de firma GOEDKOOP echt het voordeligst?
Licht je antwoord toe.

Werkblad

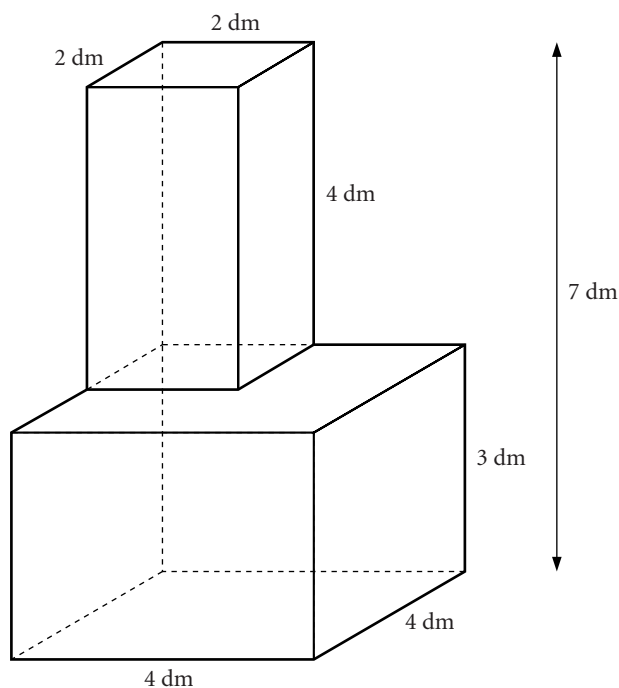
3 Hieronder zie je een tweedelige bak van plexiglas.

De binnenmaten zijn bij de figuur aangegeven.

De bak wordt totaal gevuld met water, dat met een snelheid van 8 liter per minuut de kraan uitkomt.

Er bestaat een verband tussen de tijd t (in minuten) en de hoogte h (in dm).

- Druk dit verband tussen h en t zowel uit in een grafiek als ook in een formule. Doe dit **eerst** voor de **onderste bak** en daarna **aansluitend** voor de bovenste bak.
- Hoe hoog staat het water nadat de helft van de vultijd is verstreken?
Na hoeveel tijd is de totale bak voor de helft gevuld?



Noot: Deze opdrachten horen bij het artikel 'ILS in het MBO' op pagina 136.

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

erfgoed

De laatste jaren gaan kleine speelgoedwinkels of kadoshops ook wiskundige puzzels verkopen. Vooral de studentensteden staan in de belangstelling: Delft, Amsterdam, Groningen, Eindhoven. Meestal verkopen ze dan de bekende firmanamen, zoals ARJEU of PENTANGLE.

Soms vind je iets leuks, iets ongewoons, zoals afgelopen zomer toen ik de simpel ogende 'TOWER COLORS' kocht. Het enig herkenbare is een sticker met 'Made in Thailand'. De volledig houten puzzel bestaat uit een ondergrond met daarin 5 pinnen. Om zo'n pin kun je maximaal zeven houten ringen stapelen. De pinnen en de ringen zijn gekleurd: rood, violet, blauw, groen of geel. Voor het gemak gebruik ik de Engelse namen Red, Violet, Blue, Green en Yellow. Het cijfer 0 is de pin en de cijfers 1, 2, 3 en 4 zijn de vier ringen. De beginopstelling en de originele handleiding zijn als volgt:

Beginopstelling:

Y4	G4	B4	V4	R4
G3	B3	V3	R3	Y3
B2	V2	R2	Y2	G2
V1	R1	Y1	G1	B1
R0	Y0	G0	B0	V0

TOWER COLORS

STARTING: Start with four disks of different colors arranged on a peg that does not match the four disks in color. (See "set-up" diagram.)

OBJECT: The object is to place all disks of the same color on the peg matching that color.

RULES: You may move only one or two disks together on any one move. When one disk is moved it can be placed only on a disk or empty peg of the same color. When two disks are moved simultaneously, the bottom disks can be placed only on a disk or empty peg of the same color. No stack of disks can exceed seven in number.

Ik ben 's avonds direct gaan puzzelen. De notatie Y4G3G4 betekent dat de ringen Y4 en G3 op de groene ring G4 worden gelegd.

De volgende zetten zijn mogelijk.

- | | |
|----------|----------|
| 1 Y4G3G4 | 6 G2B1B2 |
| 2 B2V1V4 | 7 V1V4V0 |
| 3 R4R0 | 8 R3R4 |
| 4 Y3Y4 | 9 Y3Y4Y2 |
| 5 B2B4 | 10 G2G3 |

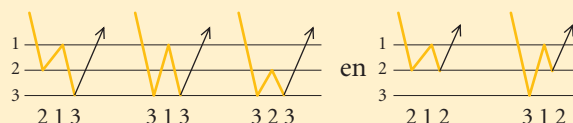
Helaas is er nu geen reglementaire zet meer mogelijk.

Als u wel een oplossing vindt, zend deze dan binnen 1 maand in en 5 punten voor de doorlopende ladderwedstrijd is mijn waardering voor uw prestatie.

Oplossing 680

In het eerste nummer stond de puzzel van de twee glasplaten. Een schuin invallende lichtstraal maakt 10 inwendige reflecties, waarna hij de glasplaat aan de onderkant weer verlaat. Op hoeveel verschillende manieren kan dit?

We nummeren de reflectievlakken 1, 2 en 3. Het voorbeeld van $N = 3$ reflecties is nu in twee groepen te verdelen: de laatste reflectie is vlak 3 of de laatste reflectie is vlak 2. We krijgen dan:



Als a^N het aantal manieren is van N reflecties, dan zien we: $a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$

In het algemeen:

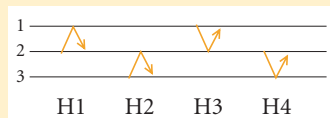
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{met } a_0 = 1 \text{ en } a_1 = 2$$

Dit is de beroemde rij van *Fibonacci*:

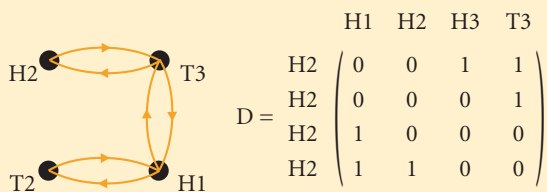
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Het antwoord op de gestelde vraag is dus: $N = 10$ reflecties kunnen op $a_{10} = 144$ manieren plaatsvinden.

Kees Nagtegaal (61 punten), Dordrecht gebruikt grafentheorie. Er zijn 4 verschillende reflecties: twee Heen en twee Terug.



De bijbehorende graaf en directewegen-matrix zijn:



Het aantal manieren bij $N = 10$ reflecties vinden we door het aantal negenstapswegen te berekenen. De som van de getallen in de matrix D^9 is inderdaad 144.

Drie lezers puzzelden verder.

Bij 3 glasplaten ontstaat de reeks

1, 3, 6, 14, 31, 70, 157, 353, 793, 1782, 4004, ...

Deze voldoet aan $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$

Bij 4 glasplaten ontstaat de reeks

1, 4, 10, 30, 85, 246, 707, 2037, 5864, 16886, 48620, ...

Deze voldoet aan $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4}$

Met dank aan: *Harm Bakker* (25 punten), Marum, *Elias Buissant des Amorie* (48 punten), Castricum en *Wobien Doyer* (20 punten), Leiden.

Met 62 punten is winnaar van een boekenbon van f 25,-:

Edward van Kervel
Bentheimerstraat 81
7573 CZ Oldenzaal

Hartelijk gefeliciteerd!

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Voor of op die datum dienen uw mededelingen bij de hoofdredacteur te zijn. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
5	19-02-98	08-01-98
6	19-03-98	05-02-98
7	01-05-98	19-03-98
8	18-06-98	07-05-98

Masterclass Analyse RU Leiden
‘Van afbeeldingen naar fractals.’
 do. 22 / vr. 23 januari 1998
 Voor 4, 5 en 6 vwo en docenten.
 Mathematisch Instituut, RU Leiden
hfinkeln@wi.leidenuniv.nl
Zie ook laatste kolom.

Mathematische Modelleercompetitie
 za. 31 januari 1998
 Voor 4, 5 en 6 vwo Maastricht

Nationale Wiskunde Dagen
 vr. 30 januari / za. 31 januari 1998
 Freudenthal instituut:
 030 - 2611 611
Zie aankondiging Euclides 72-8

Wat en Waar is Wiskunde II
 Maandagochtend 9.30 TV
 9/2, 16/2, 2/3, 9/3
 Herhaling WWW II: donderdag 12/3
 Herhaling WWW I: donderdag 26/3
Zie aankondiging blz. 130

VMBO: leerwegen in uitvoering
 donderdag 19 februari 1998
 Algemene conferentie Mesoconsult:
 013 - 4560311

Methodekeuze-bijeenkomsten
 wo. 4 februari 1998
 do. 5 februari 1998
 wo. 11 februari 1998
 do. 12 februari 1998
 wo. 18 februari 1998
 do. 19 februari 1998

Regionale bijeenkomsten NVvW
 do. 12 maart 1998
 Visser ‘t Hooft, Leiden
 wo. 18 maart 1998
 Greijdanus, Zwolle
 di. 24 maart 1998
 Hogeschool, Eindhoven
 16.00 - 20.00
Aankondiging zie blz. 128

Panama-conferentie
 do. 19 / vr. 20 maart 1998
panama@fi.ruu.nl

Kangoeroe
 vr. 20 maart 1998
 TU Eindhoven:
 040-2472738
jand@win.tue.nl

Wiskunde Olympiade Voorronde
 vr. 3 april 1998
 Cito: 026 - 3521294
Fred.Bosman@cito.nl

Wiskunde in de ROC's
 do. 23 / vr. 24 april 1998
twin@fi.ruu.nl
Aankondiging volgt later

Examendata
 vbo B:
 do. 14 mei 1998
 vbo/mavo C/D:
 di. 19 mei 1998
 havo wiskunde A:
 vr. 15 mei 1998
 havo wiskunde B:
 wo. 27 mei 1997
 vwo wiskunde A:
 di. 19 mei 1998
 vwo wiskunde B:
 vr. 15 mei 1998

Regionale bijeenkomsten TWIN
 di. 12 / di. 19 mei 1998
twin@fi.ruu.nl

M.C. Escher conferentie
 24-28 juni 1998
 Rome, Ravello, Italië
www.mat.uniroma1.it/escher98

Internetsites voor wiskundedocenten:
 Nationale Wiskunde Dagen:
www.fi.ruu.nl/nwd
 Masterclass Analyse RU Leiden
www.wi.leidenuniv.nl/math/master
 Informatie over Wiskunde Olympiade, Kangoeroe, inclusief veel verzamelde Wiskunde-Olympiade opgaven:
olympiads.win.tue.nl/nwo
 De Internationale Wiskunde-Olympiade-opgaven 1997 zijn verschenen in Pythagoras:
www.wins.uva.nl/misc/pythagoras
 Suggesties voor interessante sites graag e-mailen naar cph@xs4all.nl

Advertentie EPN

Getal & Ruimte

Herziene kerndoelen basisvorming,
Tweede Fase havo/vwo, Leerwegen vmbo

Wolters-Noordhoff nodigt u uit

**U bent van harte welkom op een of meer van de volgende
bijeenkomsten. U kunt daar uitgebreid kennismaken met de
herziene delen voor de basisvorming en de nieuwe delen voor
de Tweede Fase van**

Moderne wiskunde zevende editie en Netwerk tweede editie

Gebruikersbijeenkomsten

Eind januari 1998 organiseren wij exclusieve bijeenkomsten voor de gebruikers van onze methoden. U gebruikt *Moderne wiskunde*, *Netwerk* of *WiskundeLijn* en u hebt geen aanmeldings-kaart ontvangen? Meldt u zich dan telefonisch aan bij Wolters-Noordhoff:
(050) 522 63 11.

- maandag 26 januari 1998 *Moderne wiskunde*
- dinsdag 27 januari 1998 *Netwerk*
- donderdag 29 januari 1998 *WiskundeLijn*

Nationale Wiskunde Dagen

Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen zijn wij met de nieuwe edities aanwezig op de informatie-markt. Ook nodigen wij u van harte uit deel te nemen aan onze workshop op vrijdagavond, van 21.30 tot 22.30 uur.

U kunt zich nog aanmelden voor de NWD bij het Freudenthal Instituut, telefoon (030) 253 86 11, fax (030) 253 53 53.

- vrijdag 30 en zaterdag 31 januari 1998
te Noordwijkerhout.

Methodekeuzebijeenkomsten

De LPC's organiseren in samenwerking met de uitgevers door het gehele land Methodekeuze-bijeenkomsten. U kunt zich daar laten informeren over alle nieuwe en herziene methodes.

- woensdag 4 februari 1998 Eindhoven
- donderdag 5 februari 1998 Zwolle
- woensdag 11 februari 1998 Arnhem
- donderdag 12 februari 1998 Amsterdam
- woensdag 18 februari 1998 Utrecht
- donderdag 19 februari 1998 Rotterdam

Voor inhoudelijke informatie en inschrijf-formulieren kunt u terecht bij Roel Gordijn (LPC), tel. (033) 453 43 43 of Freke Bosscha, tel. (020) 430 91 63.

Wolters-Noordhoff

Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

419/7335 [Euclides]
419/7378 [Pythagoras]

**Wolters
Noordhoff**