

Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

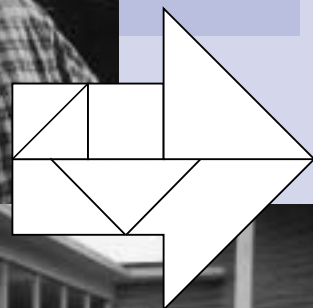
EUCLIDES

V a k b l a d v o o r d e w i s k u n d e l e r a a r

jaargang 72

1996-1997 juni

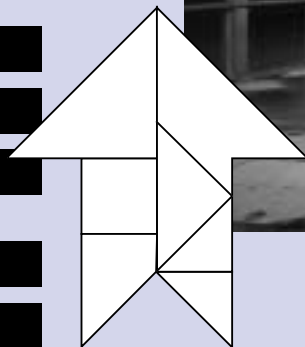
8

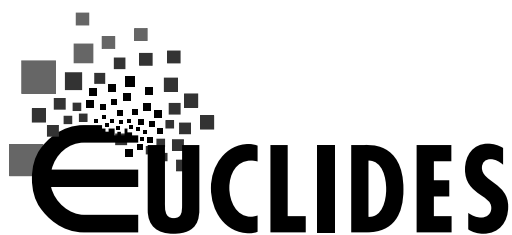


**Bewijzen als
denkmethode**

**Eerste generatie
afsluitingstoetsen
basisvorming**

**Aankondiging
jaarvergadering/
studiedag 1997**





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Redactie

Dr. A.G. van Asch
Drs. R. Bosch
Drs. W.L.J. Doeve
Drs. J.H. de Geus
Drs. C.P. Hoogland *hoofddredacteur*
Ir. W.J.M. Laaper *secretaris*
W. Schaafsma
Ir. V.E. Schmidt *penningmeester*
Mw. Y. Schuringa-Schogt *eindred.*
J. van 't Spijker
Mw. drs. A. Verweij
A. van der Wal
Drs. G. Zwaneveld *voorzitter*

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem.

Richtlijnen voor aanlevering:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
 - platte tekst op diskette: WP of ASCII
 - illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.
- Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter

dr. J. van Lint
Spiekerbrink 25
8034 RA Zwolle
tel. 038-4539985

Secretaris

W. Kuipers
Burg. Bijleveldsingel 38
8052 AP Hattem
tel. 038-4447017

Ledenadministratie

Mw. N. van Bommel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543

Contributie per ver. jaar: f70,00

Studentleden: f47,50

Leden van de VVWL: f50,00

Lidmaatschap zonder Euclides: f50,00

Betaling geschiedt per acceptgiro.

Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.

Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Abonnementsprijs voor personen: f80,00 per jaar. Voor instituten en scholen: f240,00 per jaar.

Betaling geschiedt per acceptgiro.

Losse nummers op aanvraag leverbaar voor f20,00.

Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritsshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of naar:

L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891.

Adresgegevens auteurs

H. Boertien

Cito

Postbus 1034
6801 MG Arnhem

J.G.M. Donkers

TU Eindhoven, fac. W&I

Postbus 513
5600 MB Eindhoven

M. van Glabbeek

E. de Boer v. Rijkstraat 15
2331 HH Leiden

J. Kuhlemeijer

Cito

Postbus 1034
6801 MG Arnhem

A. van Streun

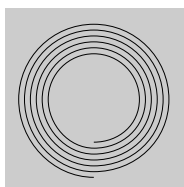
RU Groningen, fac. W&N

Postbus 800
9700 AV Groningen

G. Zwaneveld

Bieslanderweg 18
6213 AJ Maastricht

Inhoud



302



304



317

294 Kees Hoogland
Van de redactietafel

295 Anne van Streun
Bewijzen als denkmethode

298 Waar zit de fout?

302 M. van Glabbeek
Twin slaat aan

304 Kees Hoogland
**'De leerling werkt zelfstandi-
ger door de Grafische Reken-
machine'**

INTERVIEW

306 Boekbespreking

308 H. Boertien, J.B. Kuhlemeier
**Toetsen Basisvorming
De eerste generatie afslui-
tingstoetsen basisvorming
wiskunde**

311 Jaarvergadering/studiedag
1997; Eerste uitnodiging

NVvW

312 Brief aan de staatssecretaris

NVvW

316 Aankondigingen

317 J.G.M. Donkers
**De XXXVIIe Internationale
Wiskunde Olympiade 1996**

321 Boekbespreking

323 40 jaar geleden

324 Werkbladen

326 Recreatie

328 Kalender

328b Boekbespreking

Ik kan u aanraden geen telefonische gesprekken te voeren over vbo-B en vwo-B. Dat kan makkelijk tot misverstanden leiden. Nogmaals onze excuses voor de verkeerde data van de examenbesprekingen in het vorige nummer. Hopelijk heeft u niet op een verkeerd tijdstip ergens op de stoep van een school gestaan.

vbo/mavo

In het bestuursgedeelte vindt u een zeer uitgebreide reactie van het bestuur op de nieuwe plannen voor vbo en mavo. In de volgende jaargang zullen we de laatste stand van zaken voor u regelmatig op een rijtje zetten.

havo/vwo

De ontwikkelingen rond havo en vwo raken in een stroomversnelling. De meeste beroering is ontstaan over het bericht dat wiskunde mogelijk verplicht zou worden voor vwo in het profiel Cultuur & Maatschappij. Uit de reacties, van vooral niet-betrokkenen bij het wiskundeonderwijs, lijkt het wel of hierdoor grote groepen alfa-leerlingen in hun goede naam en eer worden aangetast. De meeste argumenten lijken bijzonder veel op de argumenten van zo rond 1830, toen wiskunde een plaats trachtte te veroveren op de Latijnse scholen. In dat kader kan ik u het proefschrift van Harm Jan Smid aanbevelen, dat verderop in dit nummer door Bert Zwaneveld wordt besproken.

In geen enkele reactie heb ik de opmerking gezien dat het hier gaat om 7% van de leerlingen en bijna alleen meisjes. Het is treurig dat dat niet wordt meegenomen in de discussie.

Wat mij ook nogal stoort is dat er geen enkele ophef is over een vergelijkbare situatie op het havo. Daar is al vanaf het begin van de plannen een verplicht stuk wiskunde geprogrammeerd in het profiel C&M. Als het over het vwo gaat is het blijkbaar opeens belangrijk genoeg daar vele bladzijden in de krant en zelfs gedeelten van praatprogramma's op de TV aan te wijden.

Invoering

Op 12 mei jongstleden is er uitvoerig gediscussieerd in de Tweede Kamer over de invoeringsdatum en de rol van wiskunde in de plannen. Op dit moment van schrijven (21 mei 1997) is de definitieve invoeringsdatum nog steeds niet bekend. Wordt het 1998 of toch maar 1999, of toch maar weer 1998, mits er extra geld komt? De AOb was eerst voor uitstel en recentelijk toch maar niet. De schoolleiders waren eerst voor uitstel en recentelijk toch maar niet. De uitgevers waren eerst voor uitstel en recentelijk toch maar niet. De Kamer wikt en weegt en heeft, als u dit leest, hopelijk inmiddels een beslissing genomen. Het maakt nogal uit of het volgende schooljaar het laatste jaar voor de invoering is of dat er nog twee jaar is voor de voorbereiding.

Wiskunde A

Het lijkt er sterk op dat voor het profiel Cultuur & Maatschappij vwo een wiskunde komt met een omvang van $280 + 80 = 360$ uur. De term wiskunde C is al gevallen in de discussies hierover. De organisatie binnen de school zal er hierdoor niet gemakkelijker op worden, gezien het kleine aantal leerlingen waar het omgaat.

Het blijkt in de plannenmakerij nog steeds heel moeilijk te zijn om én de inrichting van de profielen én de inhoud van de vakken én de mogelijke organisatie daarvan én de onderwijsbaarheid tegelijk in ogenschouw te nemen. Dat zou alleen al een reden voor uitstel kunnen zijn.

Ten slotte

De examens en de rapportbesprekingen zijn (bijna) achter de rug en de vakantie nadert.

Volgend schooljaar weten we ongetwijfeld meer. We houden u op de hoogte.

Kees Hoogland

Bewijzen als denkmethode

Anne van Streun

Inleiding

In de discussies over de gewenste inhoud van het programma wiskunde B voor het profiel Natuur & Techniek van het vwo is van veel kanten aangedrongen op meer aandacht voor het wiskundig redeneren en bewijzen. Het rapport van de studietoetscommissie vwo Wiskunde B en een reeks van artikelen in de Nieuwe Wiskrant en Euclides getuigen daarvan. Die aandacht komt niet alleen vanuit de hoek van de universitaire wiskunde, maar ook uit nagenoeg alle disciplines waar leerlingen met N&T kunnen gaan studeren. In het interuniversitaire overleg over de toelatingseisen en het belang van wiskunde B vallen dan termen als 'logisch redeneren', 'precies formuleren', 'helder beargumenteren', 'noodzakelijke en voldoende voorwaarden onderscheiden' enzovoort. De legitimering van het bewijzen is daarom veel breder dan het kennismaken met het bewijzen, zoals dat binnen de wiskunde als wetenschap gebruikelijk is. De maatschappij verwacht en eist transfer van bewijzen naar allerlei terreinen buiten de wiskunde.

In mijn proefschrift (Van Streun, 1989) heb ik kort aangegeven welke opvattingen zoal leven over de mogelijke transfer van wiskundig denken naar andere gebieden dan de wiskunde. Zo stelde Polya dat in de wiskunde de know-how, de vaardigheid in het oplossen van

problemen die keuzemogelijkheden bevatten en originaliteit of creativiteit vereisen, veel belangrijker is dan de feitelijke kennis, de leerstof. Ehrenfest-Afanassjewa beargumenteerde dat het wiskundige denken het algemene denkvermogen van leerlingen ontwikkelt. Van Hiele (1957) ziet wel mogelijkheden in het ontwikkelen van goede denkgewoonten door middel van wiskundeonderwijs, mits de leerlingen zelf actief worden betrokken bij de opbouw van een deductief logisch systeem. De oudere Freudenthal (55+) gaat daarin mee en spreekt in dit verband over het door leerlingen axiomatiseren en formaliseren van een deel van de wiskunde.

In mijn aanbevelingen uit 1989 constateer ik dat tot dan toe alle leerplanvernieuwingen zijn verzand in het aandragen van nieuwe leerstof, zonder dat het bedoelde en gewenste wiskundig denken en de transfer door middel van algemene denkmethoden handen en voeten heeft gekregen. Er zijn nog geen hoopgevende tekenen dat op dit moment de twee belangrijkste leerdoelen bij wiskunde in de Tweede Fase, het modelleren en het redeneren, in de uitwerking van de programma's zo centraal komen te staan, dat transfer naar andere vakgebieden verzekerd is. Lukt dat niet dan betekent dat mijns inziens op termijn het einde van de centrale plaats die altijd aan het vak wiskunde in allerlei takken van onderwijs is toegekend. De relevant geachte

wiskundige methoden halen gebruikers van wiskunde wel uit een computer. In verschillende hogescholen en universiteiten is die ontwikkeling al aan de gang. De gebruikers van wiskunde zijn van mening, dat wiskunde-afdelingen niet meer nodig zijn voor dienstverlenend onderwijs, als het wiskundeonderwijs de gewenste transfer naar de gebruikers zelf niet kan garanderen. Dezelfde ontwikkeling heeft zich al jaren geleden binnen de universiteiten voltrokken op het terrein van de statistiek op het moment dat de statistische software beschikbaar kwam en de professionele statistici geen oog hadden voor de behoeften van de gebruikers van statistiek.

De vlakke meetkunde als medium

In de studietoetscommissie vwo Wiskunde B en in de vakontwikkelgroep zijn met name de getaltheorie en de vlakke meetkunde genoemd als leerstofgebieden die geschikt zijn om het wiskundig redeneren en bewijzen te beoefenen. Een belangrijk argument voor de vlakke meetkunde was dat leraren daarmee meer vertrouwd waren dan met de getaltheorie. Dat argument is lelijk onderuit gehaald door de centrale plaats die de Voronoi-meetkunde, volstrekt nieuw voor leraren en niet zonder wiskundige haken en ogen, vervolgens in het experimentele lesmateriaal heeft gekregen. Niettemin is de keuze voor vlakke meetkunde goed te verdedigen, omdat hier concrete representaties kunnen worden gekoppeld aan een deductieve opbouw. Eminente wiskundigen als Kline en Thom hebben op die grond gepleit voor een belangrijke plaats van de vlakke meetkunde in het voortgezet onderwijs (Otte 1974).

Een locale deductieve opbouw

Mijn eerste kennismaking met de meetkunde, klas 1 CHBS Leeuwarden in 1953, onder de strenge supervisie van mijn wiskundelerares mevrouw Ebels, bestond nog uit de 5 axioma's van Euclides. In 1964 begon ik les te geven uit een meetkundeboek met een zogenaamde intuïtieve inleiding van drie maanden waarna op een rijtje werd gezet wat we ondertussen allemaal aan meetkunde hadden geleerd. Dat werd de basis voor de verdere deductieve opbouw tot en met het derde leerjaar hbs en gymnasium. Uit de presentemplaren van werkboeken van Bos & Lepoeter en de publicaties van Polya leerde ik intussen hoe ik dat meetkundeonderwijs zó kon geven, dat ook de modale leerling zelf probleempjes kon oplossen en bewijsjes kon bedenken.

Naar mijn vaste overtuiging kan het nieuwe onderdeel Vlakke Meetkunde alleen een bijdrage leveren aan het wiskundig redeneren en bewijzen als vanaf het begin wordt gewerkt aan een locale deductieve opbouw, waarbij duidelijk onderscheid wordt gemaakt tussen de verschillende typen uitspraken en bewijsmethoden. Voor de Vlakke Meetkunde zou de volgende opbouw gekozen kunnen worden, een opbouw die geïnspireerd is door de werkboeken van Bos & Lepoeter. Omdat de oude schoolboeken slecht verkrijgbaar zijn, geef ik kort een opzet weer, die is geïnspireerd door de opbouw van Bos & Lepoeter. Ik beperk mij tot een mogelijke opbouw voor de Vlakke Meetkunde in vwo Natuur & Techniek.

Basisstellingen

De basisstellingen vormen tezamen met de basisdefinities het vooraf bekend veronderstelde kennisbe-

stand, waar vanaf het begin een beroep op mag worden gedaan. Die basis hoeft niet meer te worden bewezen en moet mijns inziens heel klein zijn om recht te kunnen doen aan de opbouw.

- 1 Bij twee snijdende lijnen zijn de overstaande hoeken gelijk.
- 2a Als twee evenwijdige lijnen worden gesneden door een derde lijn, dan zijn de overeenkomstige hoeken (F -hoeken) en de verwisselende binnenhoeken (Z -hoeken) gelijk.
- 2b Als twee lijnen gesneden worden door een derde lijn en als dan twee overeenkomstige hoeken gelijk zijn of twee verwisselende binnenhoeken gelijk zijn dan zijn die twee lijnen evenwijdig.
- 3 De som van de hoeken van een driehoek is 180° .
- 4a De basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn gelijk.
- 4b Als van een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan zijn de zijden tegenover die hoeken ook gelijk.
- 5 De congruentiegevallen van driehoeken HZH , ZHH , ZHZ , ZZZ , ZZH_{90° .
- 6 Eén zijde van een driehoek is altijd kleiner dan de som van de beide andere zijden.
- 7 In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de beide rechte hoekszijden.

8a Als drie evenwijdige lijnen gesneden worden door twee andere lijnen, dan is de verhouding van de stukken op de ene snijlijn gelijk aan de verhouding van de stukken op de andere snijlijn.

8b Als drie lijnen gesneden worden door twee andere lijnen en de verhouding van de stukken op de ene snijlijn gelijk is aan de verhouding van de stukken op de andere snijlijn, dan zijn die drie lijnen evenwijdig.

9 De gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken hh , zhz , zzz , zzh_{90° .

De eigenschappen 1, 2a, 3, 4, 6 en 7 komen meer of minder expliciet in de onderbouw aan de orde. De congruentiegevallen worden in Bos & Lepoeter plausibel gemaakt op basis van de constructies, maar dat kan ook met Cabri of met knippen en passen. De stellingen over verhoudingen en gelijkvormigheid spelen geen rol spelen in het experimentele lesmateriaal. Gezien het feit dat er in de onderbouw veel werk van wordt gemaakt, is het jammer dat op de kennis over de verhoudingen niet is voortgebouwd.

Definitie en stelling

Hoe in Bos & Lepoeter definitie en stelling werden gedefinieerd is te zien in voorbeeld 1.

Een definitie legt vast welke bijzonderheden een bepaalde naam (volgens afspraak) zal uitdrukken.

Hierbij aansluitend kunnen we nu ook makkelijk een nauwkeurige omschrijving geven van het begrip „eigenschap van een figuur”.

Een eigenschap van een figuur geeft bijzonderheden aan, waarvan men kan bewijzen dat ze het gevolg zijn van de bijzonderheden, die door de definitie zijn vastgelegd. Deze eigenschappen noemen we stellingen. Voortaan zullen we de bewijzen van de stellingen ook geven.

Voorbeeld 1 Bos & Lepoeter: Wegwijzer in de meetkunde 1, 11e druk, pag. 128

In de meetkunde heb je precies hetzelfde (zie fig. 94). Als je weet dat $AC = BC$, dan volgt daaruit dat $\angle A = \angle B$. Als je *omgekeerd* weet dat $\angle A = \angle B$, dan volgt daaruit dat $CA = CB$.

In de vorige taken hebben we al vaak gehad, dat we wisten dat een driehoek gelijkbenig was. Dan volgde daaruit dat de basishoeken gelijk waren. In deze taak zullen we zien dat het omgekeerd ook vaak gebeurt, dat we weten dat twee hoeken van een driehoek gelijk zijn. Dan kunnen we daaruit laten volgen dat de zijden van die driehoek tegenover die gelijke hoeken ook gelijk zijn.

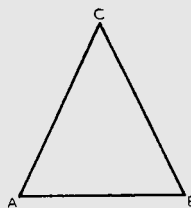


Fig. 94

Voorbeeld 2 Bos & Lepoeter: Wegwijzer in de meetkunde 1, 11e druk, pag. 103

Naast de basisstellingen is het hel-der om de definities van de bijzondere driehoeken en vierhoeken vast te leggen en de bekende bijzondere lijnen nog eens te expliciteren. De verdere eigenschappen van figuren, stellingen en hun omgekeerde, kunnen in het oefenen van het bewijzen worden opgenomen. Bos & Lepoeter maken in dit verband expliciet werk van het didactisch belangrijke onderscheid tussen de

stelling en diens omgekeerde. Een belangrijk aspect bij het wiskundig redeneren en bewijzen. Zie voorbeeld 2.

Op grond van dit basispakket kan een groot deel van de vlakke meetkunde worden bewezen. Twee onderwerpen mogen mijns inziens wegens hun didactische waarde niet ontbreken, dat zijn de meetkundige plaatsen (puntverzamelin-

gen) en de cirkelmeetkunde. Het bewijzen dat de middelloodlijn van lijnstuk AB de verzameling van (alle) punten P is met de eigenschap dat $AP = BP$ is bijvoorbeeld een mooie illustratie van een bewijs door middel van een tegenspraak en van het verschil tussen noodzakelijke en voldoende voorwaarden. De cirkelmeetkunde kan heel mooi vanaf het moeilijke begin worden opgebouwd. Zie de aanloop uit Bos & Lepoeter en die uit Steenstra (1770) in voorbeeld 3 en 4. De resultaten zijn ook nog verrassend.

Bewijsmethoden

In 5 en 6 vwo moet de meerwaarde van de vlakke meetkunde liggen in de aangrijpingspunten om het redeneren en bewijzen zelf tot onderwerp van studie te maken. Agnes Verweij attendeerde mij op het boek '100 % Mathematical Proof' (1996), waarin een aantal hoofdstukken voorkomt, dat voor ons onderwerp relevant is. Om de lezer te verleiden zelf dit boek te gaan bestuderen, volgen hier een aantal paragraaftitels:

- The method of direct proof.
- Finding proofs.
- Proof using the contrapositive.
- Proof by contradiction.
- Proof by construction.
- Use of counter-examples.

Bos & Lepoeter beschreven voor de leerlingen ook de verschillende typen redeneringen die in bewijzen vaak voorkomen. Zie voorbeeld 5.

Van exploreren naar bewijzen

In tegenstelling tot het klassieke meetkundeonderwijs dat na 1968 in Nederland is geschrapt, zal de nadruk in het nieuwe onderwerp Vlakke Meetkunde veel meer liggen op het samen ontwikkelen van een opbouw en het zelf ontdekken van (nieuwe) stellingen. Dat sluit goed

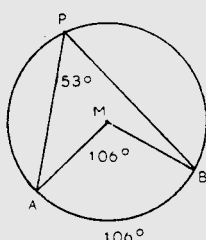


Fig. 21

In fig. 21 b.v. mogen we dan zeggen dat boog AB 106° „telt” (omdat $\angle M = 106^\circ$). Je ziet nu gemakkelijk welk verband er bestaat tussen de omtrekshoek P en de bijbehorende boog AB . Immers in plaats van „ $\angle P$ is de helft van de middelpuntshoek M ” kunnen we nu ook zeggen: het aantal graden van $\angle P$ (53) is de helft van het aantal graden van boog AB (106). Men drukt dit gewoonlijk kortweg als volgt uit: „een omtrekshoek is gelijk aan de helft van de bijbehorende boog”, of nog iets korter:

Een omtrekshoek is gelijk aan de helft van de boog waarop hij staat.

Deze korte formulering is eigenlijk onjuist, want een lijnstuk kan gelijk zijn aan de helft van een ander lijnstuk, een hoek kan gelijk zijn aan de helft van een andere hoek, een boog kan gelijk zijn aan de helft van een andere boog, maar een *hoek* kan onmogelijk gelijk zijn aan de helft van een *boog*. De juiste, maar iets langere formulering is: *Het aantal graden van een omtrekshoek van een cirkel is gelijk aan de helft van het aantal graden van de boog, waarop hij staat.*

Het tellen van bogen in graden is waarschijnlijk niet nieuw voor je. Je hebt het bij aardrijkskunde gehad (geografische lengte en breedte) en ook in de meetkunde hebben we vroeger wel al eens gezegd: „de hele cirkel is 360° ”.

Je ziet nu welk „nut” dit tellen van bogen in graden heeft bij de theorie van de omtrekshoeken: het stelt ons in staat om rechtstreeks verband te leggen tussen een omtrekshoek en de boog, waarop hij staat.

Opmerking: Bedenk wel dat we het bovenstaande verband door meten gevonden hebben, maar nog niet *bewezen* hebben! Dit bewijs komt in de volgende taak.

Voorbeeld 3 Bos & Lepoeter: Wegwijzer in de meetkunde 3, 6e druk, pag. 19

Dit is de limiet

Een rijtje reële getallen a_n met $n = 0, 1, 2, \dots$ is gegeven door

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2 \text{ en } a_0 = a.$$

We berekenen de limiet van het rijtje a_n .

Stel de limiet is l .

Dan is

$$\lim a_{n+1} = \lim (a_n^2 - 2)$$

$$\lim a_{n+1} = \lim (a_n^2) - 2$$

$$\lim a_{n+1} = (\lim a_n)^2 - 2$$

$$\text{Nu is } \lim a_{n+1} = \lim a_n = l.$$

$$\text{En dus geldt: } l = l^2 - 2$$

$$\text{Waaruit volgt } l = 2 \text{ of } l = -1$$

We controleren de berekende limietwaarden bij verschillende startwaarden a .

$$a_0 = a = 0$$

$$\text{dan is } a_1 = -2,$$

$$a_2 = 2, a_3 = a_4 = \dots = 2$$

$$\text{en dus } \lim a_n = 2$$

$$a_0 = a = 1$$

$$\text{dan is } a_1 = -1,$$

$$a_2 = a_3 = a_4 = \dots = -1$$

$$\text{en dus } \lim a_n = -1$$

$$a_0 = a = 2 \text{ dan is}$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 2$$

$$\text{en dus } \lim a_n = 2$$

$$a_0 = a = 3$$

$$\text{dan is}$$

$$a_1 = 7, a_2 = 47, a_3 = 2207$$

$$\text{en } \lim a_n = ?$$

Merkwaardig, aangezien de bovenstaande afleiding onafhankelijk is van de gekozen startwaarde a .

aan bij de geciteerde aanbevelingen van mevrouw Ehrenfest, Van Hiele en Freudenthal. Computerprogramma's als Cabri, Geometrucs, Geom en andere geven ruime mogelijkheden om meetkundige situaties te exploreren. Weer is het beslist noodzakelijk om voor leerlingen duidelijk te maken waar je dan mee bezig bent. In deel 2a mhv van Wiskunde Lijn (hoofdstuk 5 WIT) wordt dat de VVV-methode genoemd, je onderzoekt Voorbeelden, je formuleert een Vermoeden en je wilt vervolgens Vaststellen door een sluitende redenering dat het altijd waar is. Zie voorbeeld 6.

Een systematische probleemaanpak

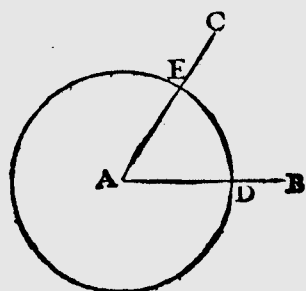
De slinkende groep nog actieve wiskundeleraren, die zelf in de onderbouw van mulo, hbs en gymnasium meetkunde heeft onderwezen, herinnert zich ongetwijfeld nog de vertwijfeling van veel leerlingen die (aanvankelijk) geen greep konden krijgen op de aanpak van die sommen en bewijzen uit de meetkunde. Mijn ervaring was dat een systematische probleemaanpak, die een combinatie is van het werk Polya en van Wim Bos, de modale leerling kon en kan op weg helpen. Een goede analyse van de gegeven situatie en van het doel (het te bewijzen), voorbeelden van progressief (vanuit de gegeven situatie) en regressief (vanuit het doel) redeneren en een bijpassende overzichtelijke schrijfwijze in twee kolommen vormen de kern van zo'n benadering. Zie de werken van Polya. In de meetkundeboeken van Bos & Lepoeter is daarnaast veel aandacht besteed aan de herordening van de kennis, zodat die meer operationeel beschikbaar komt. Het wiskundig gereedschap is gekoppeld aan het gebruik dat er van kan worden gemaakt. Zie voorbeeld 7.

Niet alleen voorkomt de aandacht voor de manier waarop je een meetkundig bewijs aanpakt dat leerlingen het idee krijgen dat je het ziet of niet ziet, maar ook de transfer naar andere gebieden en typen problemen wordt zo bevorderd. Mits zo'n aanpak inderdaad wordt geëxpliciteerd en meegenomen wordt als leerdoel, bijvoorbeeld door een verantwoording te vragen van het oplossingsproces.

Zelfstandig leren en reflecteren

Wie iets gezien heeft van het experimentele lesmateriaal van het PROFI-team of iets gehoord heeft over de ervaringen in de klas of wie zich heeft verdiept in de internationale literatuur over het leren bewijzen, moet zich wel met zorg afvragen hoe de noodzakelijk gebleken en gewenst geachte intensieve interactie in een klas bij dit

XIV. DEFINITIE.



De Grootheid eens hoeks, wordt gemeeten door de graden eens cirkels, wiens middelpunt in het top-punt des hoeks is.

3. Geval. Het middelpunt (B) buiten den hoek (ADC) aan den omtrek zijnde.

DEMONSTRATIE.

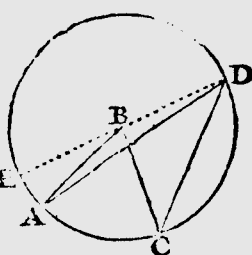
Van den $\angle EBC = 2\angle EDC$. } 1. Gev.
trek af $\angle ABE = 2\angle EDA$. } val.

blijft $\angle ABC = 2\angle ADC$. ax. 4.

Dat te bewijzen was.

G E V O L G.

Nademaal de hoek aan het middelpunt ABC , gemeten wordt door den boog AC , op welken hij staat; volgens de 14. def. 1. boek. zal de maat des hoeks aan den omtrek ADC gelijk zijn aan de helft des boogs AC : dat is, de maat eens hoeks aan den omtrek, is gelijk aan de helft des boogs daar hij op staat.



vraag over de lengten van lijnstukken in een cirkel, mits de basisstellingen over meetkundige verhoudingen tot het pakket gaan behoren.

De klassikale interactie gaat bij deze benadering vooral over:

- De aanbevolen en gevolgde probleemaanpak.
- Het samenvatten van kennis over het bewijzen.
- Het opstarten van grote onderzoeksoopdrachten.
- De presentatie door leerlingen van hun werk.

Voronoi-meetkunde als verwerking

Op dit moment kom ik op een didactische ordening van de Vlakke Meetkunde, die er als volgt uit gaat zien:

- 1 Kleine bewijsjes leveren, die nauw aansluiten bij de basisstellingen en definities.
- 2 Meetkundige plaatsen (puntverzamelingen) exploreren en bewijzen.
- 3 Cirkelmeetkunde, met tal van verrassende stellingen en nieuwe meetkundige plaatsen.
- 4/5 Voronoi-meetkunde als verwerking van het leren exploreren en bewijzen.
- 6 Meer over vermoedens, stellingen en bewijzen.

Voorbeeld 4 Pibo Steenstra: Grondbeginselen der Meetkunst, 7e druk (1811), pag. 5 en 105

onderwerp zich verhoudt tot het studiehuis. Juist in de discussie ontstaat een idee over de waarde van een bewijs of van het bewijzen en over de manier waarop je tot ideeën voor het geven van een bewijs kunt komen.

Accepteren we het gegeven dat er straks minder reguliere contacturen dan nu gebruikelijk voor de wiskunde en de Vlakke Meetkunde beschikbaar zijn dan vereist dat een bijzonder didactisch arrangement. De besproken systematische probleemaanpak, het expliciteren van

bewijsmethoden en de dagelijkse toegankelijkheid van een programma als Cabri kunnen en moeten de mogelijkheid tot zelfstandig leren vergroten. Daarnaast valt te denken aan goed uitgekiende grote onderzoeksoopdrachten, aan de hand waarvan groepjes leerlingen zelf het gehele proces van exploreren naar bewijzen doorlopen. De vraag naar de eigenschappen van hoeken in een cirkel kan zo'n grote opdracht zijn, nadat bijvoorbeeld de stelling over de omtrekshoek is ontdekt en bewezen. Hetzelfde geldt voor een

Na zo'n drie hoofdstukken en de nodige grote onderzoeksoopdrachten kunnen de meer complexe afstandsverhalen – een ook voor leraren 'nieuw' gebied van de meetkunde – aan de orde komen. Niet omdat ook maar iemand uit het vervolgonderwijs om die leerstof heeft gevraagd maar uitsluitend als verwerking van het idee van bewijzen! Het verschil tussen enerzijds exploreren en vermoedens formuleren en anderzijds stellingen met bewijzen moet daarbij helder blijven. Het is natuurlijk geen ramp

Taak 37

Terugblik

Wat is bewijzen?

Je weet nu wel wat we in de meetkunde „bewijzen” noemen.

Bewijzen is beredeneren dat uit de „gegevens” het „te bewijzen” volgt. Hierbij mag je alleen gebruik maken van de stellingen, die je gehad hebt, van de definities en van verschillende redeneer-schema's (en natuurlijk ook van de gegevens).

De belangrijkste typen van deze schema's herhalen we nog even:

$$\text{keten-type: } \left. \begin{array}{l} a = b \\ b = c \\ c = d \end{array} \right\} \rightarrow a = d \quad (\text{taak 21})$$

$$\text{aanvullings-type: } \left. \begin{array}{l} a + b = 180^\circ \\ c + d = 180^\circ \\ b = d \end{array} \right\} \rightarrow a = c \quad (\text{taak 21})$$

$$\text{aftrek-type: } \left. \begin{array}{l} a + b = c + d \\ b = d \end{array} \right\} \rightarrow a = c \quad (\text{taak 21})$$

$$\text{optel-type: } \left. \begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array} \right\} \rightarrow a + c = b + d \quad (\text{taak 21})$$

$$\text{halverings-type: } \left. \begin{array}{l} a + b = c + d \\ a = b \\ c = d \end{array} \right\} \rightarrow a = c \quad (\text{taak 25})$$

$$\text{vervangings-type: } \left. \begin{array}{l} a = b + c \\ b = c \end{array} \right\} \rightarrow a = 2b \quad (\text{taak 25})$$

Voorbeeld 5 Bos & Lepoeter: Wegwijzer in de meetkunde 1, 11e druk, pag. 169

dat sommige vermoedens niet tot een stelling met bewijs kunnen worden gepromoveerd.

Het laatste hoofdstuk bevat historische en andere voorbeelden over bewijzen en beperkt zich daarbij

niet tot de meetkunde. Voorbeelden uit de getaltheorie en uit andere delen van wiskunde B zijn hier op hun plaats. Op die manier wordt de noodzakelijke transfer bevorderd.

Toetsing en examinering

Voor een centrale schriftelijke toetsing moet duidelijk zijn naar welke basisstellingen zonder meer kan worden verwezen en welke dientengevolge ter plekke moeten worden afgeleid, als de leerling ze wil gebruiken. In de doelstellingen van dit onderwerp past natuurlijk niet dat leerlingen een veertigtal stellingen ('feiten' worden ze genoemd in het experimentele lesmateriaal) uit het hoofd moeten kennen, maar het bijleveren van continu hetzelfde lijstje stellingen werkt ook verstar- ring in de hand. Het lijkt mij daarom een passend idee om per toetsing een lijstje van al dan niet relevante stellingen bij te leveren waar zonder meer een beroep op kan worden gedaan. Op die manier

15

Gegeven:

Een cirkel en punt P binnen de cirkel en twee koorden door P die van de cirkel de bogen AB en CD afsnijden.

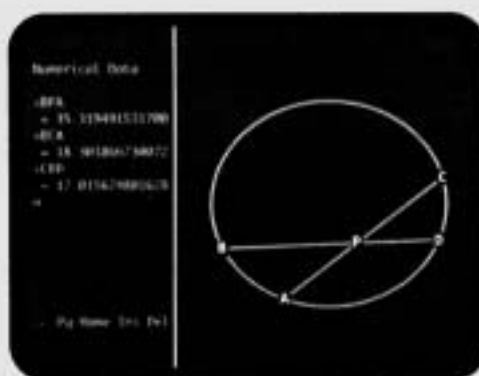
Vermoeden:

Er bestaat een verband tussen $\angle APB$ en de omtrekshoeken $\angle ACB$ en $\angle CBD$.

Omschrijf wat jij denkt dat het verband is.

Bewijs dat verband.

(Een hulplijn tekenen ligt hier voor de hand.)



Voorbeeld 6 Wiskunde Lijn 2a-5 WIT, pagina 247

wordt het ook mogelijk om stellingen te gebruiken waar nog geen leerling van had gehoord!

Conclusies

Meer dan ooit zit het ontwikkelen van geschikt lesmateriaal bij een nieuw onderwerp als de Vlakke Meetkunde in tijdnood. Na de zomer van 1997 zullen auteursgroepen

we Voronoi-meetkunde, leuk voor ontwikkelaars om dat te brengen, maar dat op die manier die leerstof, waar niemand om heeft gevraagd, centraal komt te staan. In tweede instantie nog eens proberen wat werk van het bewijzen te maken is voor leerlingen en leraren volstrekt ongeloofwaardig. De eerste kritische geluiden om dit geplande vakonderdeel dan maar te laten vervallen, zijn al gehoord. Met kracht van

geen positieve bijval. Ook nu kan alleen een ad hoc gevormd breed forum, bestaande uit een evenwichtige uitbreiding van de resonansgroep met externe deskundigen en een zware vertegenwoordiging van de NVvW knopen doorhakken.

Literatuur

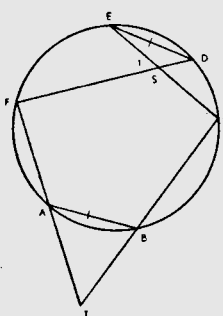
- P.M. van Hiele (1957)
De problematiek van het inzicht
- M. Otte (1974)
Mathematiker über die Mathematik
- A. van Streun (1989)
Heuristisch wiskundeonderwijs
- R. Garnier & J. Taylor (1996)
100% Mathematical Proof

II Hoe bewijst men dat twee hoeken gelijk zijn?

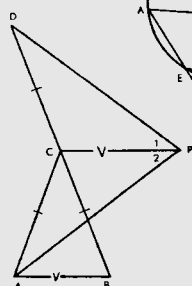
De belangrijkste methoden hiervoor zijn:

- a) met congruentie
- b) met de stelling: als twee driehoeken twee hoeken gelijk hebben, dan hebben ze ook de derde hoek gelijk
- c) met gelijkvormigheid
- d) met de stelling van de gelijkbenige driehoek
- e) met bogen (ook als in de figuur geen cirkel voorkomt, maar deze er bij gedacht kan worden, zie taak 31.)

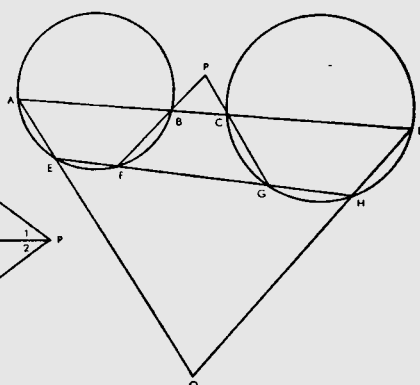
16.



17.



18.



*Te bew.: $\angle S_1 = \angle T$ *Te bew.: $\angle P_1 = \angle P_2$ *Te bew.: $\angle P = \angle Q$***

Voorbeeld 7 Bos & Lepoeter: Wegwijzer in de meetkunde 3, 6e druk, pag. 135

pen ongetwijfeld met dit onderwerp aan de gang moeten, omdat anders de boeken voor 5 vwo niet op tijd klaar komen. Ook dit onderwerp heeft dan nog maar twee ronden met experimenteel lesmateriaal gedraaid en het Profi-team stelt dat het nog geen tijd heeft gehad voor een goede didactische doordenking. Bij de Vlakke Meetkunde draait het nu juist om de didactische opbouw, want anders worden de doelen niet gehaald. De indruk bestaat dat er veel energie is gestoken in de nieu-

argumenten heb ik in dit artikel ervoor gepleit om het beoogde doel 'Het leren wiskundig redeneren en bewijzen' centraal te stellen in de opbouw van dit vakonderdeel en op die basis duidelijke richtlijnen te geven voor de auteurs van schoolboeken en examenmakers. Wie moeten die richtlijnen geven? Jaren geleden heb ik in Euclides (april 1990) al gepleit voor een scheiding van het ontwikkelwerk en de besluitvorming over de inhoud van programma's. Dat vond toen

Vakantiecursus 1997

De Stichting Mathematisch Centrum organiseert dit jaar weer de vakantiecursus voor leraren in de exacte vakken. Het onderwerp van deze cursus is:



Rekenen op het Toeval

De cursus wordt gehouden te:

Amsterdam:

22 en 23 augustus 1997

Eindhoven:

28 en 29 augustus 1997

Op het programma staan o.a.: de geschiedenis van de statistiek, de geschiedenis van de kansrekening, schatten, wachttijden en wachtrijen, steekproeven, chaos en toeval.

Voor nadere inlichtingen en toezending van de uitgebreide brochure kunt u contact opnemen met
M. Bakker SMC/CWI
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
tel: 020 - 5924172
fax: 020 - 5924199
e-mail: Miente.Bakker@cwi.nl

Twin slaat aan

M. van Glabbeek

Inleiding

De eerste volgschoolbijeenkomsten van het TWIN¹-project zitten er weer op. Op 11 maart in Zwolle en 18 maart in Utrecht kwamen bijna honderd wiskunde- en natuurkundedocenten uit het MTO bij elkaar. Voor iedereen die het MTO kent is dit een ongehoord hoog aantal temeer daar er per volgschool maar twee mensen per sectie mee mochten doen. De volgende volgschooldagen zullen dan ook uit drie bijeenkomsten bestaan. In de wandelgangen vernam ik dat nu meer dan 80% van de ROC's op een of andere manier bij TWIN betrokken is. Dat is niet slecht voor een project dat nog geen jaar draait.

De inleiders

Een van de inleidingen werd verzorgd door Hans Wisbrun (SLO, WISCOM). Hij schetste daarin de geschiedenis van wiskunde en natuurkunde in het MTO en het hoe en waarom van de onderwijsvernieuwing². Een onverwachte complicatie hierbij is op dit moment het erg grote verschil in studielast dat de Landelijke Organen³ aan de exacte vakken toekennen. Henk van der Kooy (Fi) benadrukte de verandering van kwantitatieve naar kwalitatieve wiskunde. Dit betoog ondersteunde hij met het demonstreren van een grafische rekenmachine. Niet meer eindeloos kwadraat afsplitsen, wortelverdrijven uit de noemer etcetera, maar diverse verbanden leren herkennen. Voor sommige collega's,

niet vertrouwd met de GR, was dat even slikken. Maar ik heb de indruk dat na de aanvankelijke weerstand de meeste MTO-collega's de nieuwe wiskunde gaan accepteren.

Ervaringen

De ervaringen van collega's op de kernscholen met het TWIN-materiaal klonken erg overtuigend. Jelle Kat van het Groninger Aa-College heeft in het begin moeten wennen aan het TWIN-materiaal. Hij noemde het een cultuurschok om over te schakelen van frontaal lesgeven naar groepswork. Tom Goris (Technisch Lyceum Eindhoven) 'surft' naar eigen zeggen van groep naar groep. Een test naar leerstijlen van leerlingen vooraf is belangrijk om een goede groepssamenstelling en daarmee een goed leerproces te waarborgen. Veel leerlingen komen, zeker in het begin, moeilijk los van de contexten. Gelukkig speelt dit niet of nauwelijks bij leerlingen van proefscholen die al het nieuwe programma in de onderbouw gevolgd hebben. Deze groep is erg enthousiast omdat het materiaal goed aansluit bij wat ze al gehad hebben. Jacob Hop (Randmeercollege) stelt dat de beste resultaten worden gehaald in de afdeling Bouwkunde. Daar is meer projectmatig onderwijs te vinden. Langzamerhand gaan ook andere afdelingen schoorvoetend experimenteren met projectmatig onderwijs en groepswork.

Een voorbeeld

Over de opbouw en achtergronden van het TWIN-materiaal bericht ik graag een andere keer. Maar een aardige illustratie van waartoe een TWIN-opgave kan leiden wil ik u niet onthouden. De som hiernaast hoort thuis in het eerste semester.

In de praktijk blijken leerlingen uit vier strategieën te kiezen om tot een oplossing te komen voor 108d. De strategieën zijn als volgt te verdelen:

- I via de oppervlakte van een CD en de lengte van het spoor
- II via de gemiddelde omtrek en van daaruit een rechthoek opbouwen
- III via de gemiddelde omtrek en de speelduur van die omtrek
- IV via de gemiddelde omtrek en het aantal bytes daarvan.

Leerlingen verwachtten een waaroordeel van de docent en waren soms onthutst dat alle vier de oplossingen even goed zijn!

Ten slotte

Als u dit leest is de tweede reeks bijeenkomsten ook verleden tijd. Tijdens die dagen zal veel aandacht aan toetsvormen worden besteed. Het zou mooi zijn als de wiskunde dankzij TWIN in plaats van achterblijver nu de rol van voortrekker in het MTO zou kunnen vervullen. Met dank aan de overige leden van het Platform Wiskunde MTO voor hun bijdragen waardoor ik dit stukje kon schrijven.

1.7 Toepassingen en oefeningen

De werking van de CD

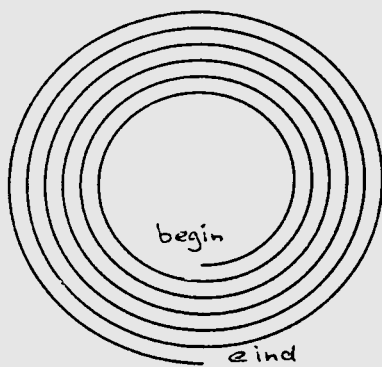
In § 1.1 is aangekondigd dat je met het onderzoeken van de werking van de CD terecht komt in de wereld van de heel kleine en de heel grote getallen. Nu je handig met die getallen kunt omgaan, volgen hier een aantal berekeningen over de CD.

Op een CD staan nullen en enen. Dat betekent dat geluid omgezet moet worden in nullen en enen. Om dat te kunnen doen, moet geluid eerst omgezet worden in een elektrisch signaal. Uit het feit dat er aan een speaker een elektriciteitsdraadje zit, blijkt wel dat dat in ieder geval een reeds lang opgelost probleem is.

Je kunt je nu voorstellen dat je dat elektrische signaal een aantal keer per seconde meet. De meetgegevens vormen dan een reeks van getallen. Die getallen zijn weer om te zetten naar getallen die alleen uit nullen en enen bestaan. Dat heten *binair* getallen.

Die stroom nullen en enen staat uiteindelijk als een lange reeks putjes op de CD. Een putje stelt een 'nul' voor, geen putje een 'één'. Bij weergave van de CD tast een laserstraal het spoor af. Een fotocel meet het teruggekaatste licht en geeft de elektronica de juiste reeks nullen en enen door. Het spoor bevat zo'n 1,02 miljoen putjes per meter.

De hele reeks nullen en enen liggen als een spiraal in de CD. De laser begint in het midden van de CD de spiraal te lezen. Schematisch dus zo:



De laser moet een vast aantal bits per seconde verwerken. Ieder seconde 'bekijkt' de laser 1,2 m van de spiraal. Het spiraalspoor is ontzettend smal. Er wordt weleens beweerd: 'Als je de CD zou opblazen tot de afmetingen van een voetbalveld, dan is de spoorbreedte nog maar een halve mm.'

- 108 a. Waarom heeft een CD bij het afspelen in het begin een hoger toerental dan aan het eind?
- b. Op een CD kun je zien waar de putjes beginnen en ophouden. Meet de straal van de spiraal aan het begin en bereken het aantal omwentelingen per seconde (= toerental).
(Zoek de formule voor de omtrek van een cirkel op als je die niet meer weet).
- c. Bereken ook het aantal omwentelingen per seconde aan het eind van de CD.
- d. Schat (door middel van een berekening!) de breedte van de spiraal. Wat moet je daar eerst voor berekenen?
- 109 a. Hoeveel bits en hoeveel bytes worden er per seconde afgelezen door de laser?
- b. De capaciteit van een CD is 5,44 miljard bits.
Hoe lang duurt een CD maximaal?
- c. Hoe lang is de spiraal van nullen en enen?

Noten

- 1 TWIN staat voor Techniek, Wiskunde, Informatietechnologie en Natuurkunde. TWIN is een samenwerkingsverband tussen Fi, SLO, ROC Eindhoven, HvU en SMD.
- 2 Geïnteresseerde lezers verwijs ik graag naar artikelen over TWIN en het Platform MTO Wiskunde in vorige nummers van Euclides waarin is ingegaan op de merkwaardige positie die het vak Wiskunde in het MTO innam.
- 3 Het curriculum voor de algemeen vormende vakken in het MTO valt nu onder de verantwoordelijkheid van de LOB's (= Landelijke Organen). Het verschil in studielast van deze vakken in de afdeling Bouw scheelt een factor vier met die van de afdeling Werktuigbouw terwijl de eindtermen identiek zijn.

‘De leerling werkt zelfstandiger door de Grafische Rekenmachine’

Jaap Klaassens en Roelof Plieger zijn sinds 1983 respectievelijk 1981 verbonden aan de PC en RK schoolengemeenschap Ubbo Emmius in Stadskanaal. Het Ubbo Emmius doet sinds het begin van dit schooljaar mee aan het APS-Profi-volgscholen- project. Jaap en Roelof hebben dit jaar in 4 vwo naast het boek Wiskunde Lijn gewerkt met een aantal pakketjes van het Profiteam. Belangrijker is nog dat zij het hele jaar in de 4vwo-klassen hebben gewerkt met een grafische rekenmachine.

Hoe kwamen jullie erbij om aan zo’n project met nieuwe leerstof en het gebruik van een grafische rekenmachine mee te doen?

Vanaf het moment dat we wisten dat er veranderingen zouden komen in het onderwijs (invoering Tweede Fase), en daarmee ook veranderingen in het wiskundeonderwijs, konden we haast niet meer wachten op deze veranderingen. Niet zozeer uit onvrede met de huidige situatie als wel met de gedachte dat veranderingen en vernieuwingen zeer stimulerend en uitdagend werken voor zowel leerling als leraar.

Nu voorop durven lopen en dus vroegtijdig op de hoogte zijn van de invloed van de grafische rekenmachine op het wiskundeonderwijs was voor ons dusdanig uitdagend dat we het project met de nieuwe leerstof niet aan ons voorbij wilden laten gaan.



Hoe reageerden leerlingen, ouders en collega’s op de invoering van de grafische rekenmachine?

Voor de invoering van de grafische rekenmachine zijn zowel de leerlingen als de ouders op de hoogte gebracht. Met vertrouwen heeft blijkbaar eenieder de invoering ervan tegemoet gezien want reacties vooraf zijn er nauwelijks geweest. Vermeld dient te worden dat de leerlingen met veel enthousiasme in 4 vwo zijn begonnen met het uitzoeken

van de mogelijkheden van het apparaat. Na een aantal weken met het apparaat te hebben gewerkt zijn de collega’s op de hoogte gebracht van de vele, zowel wiskundige als niet-wiskundige, gebruiksmogelijkheden. Deze informatie werd door enkele collega’s zeer op prijs gesteld.

Hoe snel kunnen de leerlingen fatsoenlijk werken met de grafische rekenmachine? Is de introductie jullie mee- of tegengevallen?

De TI-83 is gebruikersvriendelijk. De leerlingen kunnen direct met de GR aan het werk. Met name het invoeren van functies en het plotten van bijbehorende grafieken gaat moeiteloos.

Zien jullie op dit gebied ook duidelijke verschillen tussen leerlingen, of valt dit wel mee?

Bij de GR is een uitvoerige handleiding. De leerlingen die meer willen dan het beslist noodzakelijke werken

zelfstandig dit boekje door. Verder zijn ons geen grote verschillen opgevallen tussen de leerlingen.

plicht is, maar in het daarop volgende jaar de GR alleen verplicht is voor de leerlingen die in 5 vwo wiskunde B gaan volgen.

Wat vinden jullie de belangrijkste verandering voor het wiskundeonderwijs in 4 vwo door de invoering van de grafische rekenmachine?



Iedere leerling mag dan ook aan het einde van het schooljaar zijn in goede staat verkerende GR aan ons terug verkopen voor 2/3 van de aanschafprijs. Deze regeling zal bij de invoering van de Tweede Fase vervallen.

Wat vinden jullie de belangrijkste wijziging in je dagelijkse lespraktijk in 4 vwo door de invoering van de grafische rekenmachine?

De leerling werkt zelfstandiger door de GR. De leerling is na verloop van tijd geneigd om indien een grafische voorstelling bij een opgave mogelijk is, deze ook te tekenen om zo probleemverhelderend bezig te zijn. Op een later moment dan voorheen wordt er een beroep gedaan op anderen.

Een zeer prettige eigenschap van de GR is dat gemaakte fouten in berekeningen vaak nog te achterhalen zijn, omdat je op het scherm van de GR kunt zien wat is ingetypt. De leerling signaleert eerder gemaakte 'rekenfouten'.

Je wint met de GR veel tijd die normaal verloren gaat met het maken van tabellen en grafieken. Je kunt direct naar het wiskundeprobleem toe. Fouten in met name tabellen komen niet meer voor.

Een duidelijk gesignaleerd nadeel is dat bij leerlingen de neiging bestaat om steeds minder zorgvuldig te formuleren. Uitkomsten van de GR worden overgenomen en voordat je het weet krijg je een opsomming van eindantwoorden.

Hebben jullie nog tips voor collega's die over enige tijd met grafische rekenmachines gaan werken? *Zorg dat iedere leerling over dezelfde GR beschikt. Start de cursus met wat introductiewerk voor de GR (bijvoorbeeld 'TI-83 practica en lesideeën' van het Freudenthal instituut). Voor demonstraties is de demonstratiemachine voor de overhead-projector een onmisbaar hulpmiddel. Wij adviseren om er hiervan per docent eentje aan te schaffen.*

Kees Hoogland

Hoe hebben jullie de aanschaf van de grafische rekenmachine georganiseerd?

Als school hebben we voor alle 4vwo-leerlingen (67) een GR ingekocht. Bovendien hebben we een gering aantal extra machines ingekocht. Als een machine kapot is krijgt de leerling direct een vervangend apparaat van ons ter beschikking totdat het kapotte apparaat gerepareerd is. Onze situatie is bijzonder, omdat voor alle 4vwo-leerlingen de GR ver-

P.J. Davis, R. Hersh, A.E. Marchisotto

The Mathematical Experience

Study Edition, Boston, Basel, Berlin 2e ed. 1995

ISBN 0-8176-3739-7

500 pagina's

gebonden, f 121,60

Het zal wel als volgt gegaan zijn.

De uitgever van een in 1981 uitgekomen boek, dat succesvol was en allang niet meer leverbaar, krijgt een brief (fax, E-mail, ...) van iemand die het boek jaar in, jaar uit voor ...-tig studenten laat kopiëren en die er bovendien een mooie verzameling opgaven bij gemaakt heeft. 'Is het niet tijd voor een nieuwe druk?' De uitgever zucht even, want de meeste bibliotheken en andere potentiële kopers zijn reeds voorzien. Aan de andere kant is een boek dat verplichte kost is voor grote aantallen studenten wel weer interessant. Maar dan moet de heruitgave niet te veel kosten. Dus besluit de uitgever om de zetter gewoon de ringband te geven van de docent die om de heruitgave vraagt. Deze bestaat uit de hoofdstukken uit 1981 afgewisseld met de door de docent toegevoegde opgaven. Dan blijft het boek tenminste betaalbaar, zal de uitgever gedacht hebben, hard-cover er omheen, klaar is Kees. Zo zal het ongeveer gegaan zijn.

De auteurs Davis en Hersh legden in 1979 de laatste hand aan *The Mathematical Experience*. Birkhäuser had er in 1981 bij een groot publiek succes mee, kreeg er in 1984 de American Book Award voor en brengt het in 1995 uit als 'Study Edition', hetgeen inhoudt dat de oorspronkelijke tekst nagenoeg onveranderd overgenomen is maar dat er opgaven en literatuurverwijzingen van de hand van Marchisotto aan toegevoegd zijn.

Zo. Nu is het hoog tijd om iets over het boek te zeggen. Het biedt een mengeling van wiskunde en beschouwingen over de wiskunde, deze laatste veelal filosofisch of historisch van aard. Oorspronkelijk was het boek bedoeld voor het grote publiek van geïnteresseerde leken en niet als studieboek. Toch bleek, aldus

de auteurs, dat het op allerlei plaatsen gebruikt werd, op lerarenopleidingen, en ook voor onderwijs aan niet-wiskundestudenten die als achtergrond toch wat wiskunde willen doen. Voor deze groepen en voor de geïnteresseerde leek is er veel te halen, maar ook voor wiskundigen (wiskundeleraren zijn daarvan een deelverzameling) die van enige afstand naar hun vak willen kijken. De keuze van onderwerpen is zeer breed, en dat valt extra op omdat steeds een minimum aan voorkennis verondersteld wordt. Van de meer beschouwende onderwerpen noem ik: *Wat is wiskunde? Waar is wiskunde? Wiskunde en oorlog. Streven naar algemeenheid en abstractie* (toegelicht aan het voorbeeld van de Chinese reststelling). *Het oneindige. Heuristiek. Schoonheid. Waarom zou ik een computer geloven?*

Steeds gaat het om stukken van een bladzijde of vijf die tamelijk op zichzelf staan. Daardoor blijft het boek toegankelijk ook voor wie niet in de gelegenheid is om het in een adem uit te lezen.

Tevens bevat het een ruime selectie aan wiskundige onderwerpen. Ik noem er weer enkele: de classificatie van eindige groepen, de priemgetalstelling, niet-euclidische meetkunde, non-standaard analyse, Fourier-analyse, vermoedens (Riemann, Goldbach) en hun rol in de ontwikkeling van nieuwe wiskunde (Lakatos), meer-dimensionale meetkunde. Er is veel moois te beleven, ook voor degene die het allemaal al weet. Deze laatste groep zal namelijk geboeid worden door de context waarin de wiskunde geplaatst wordt. Zo bewijzen de auteurs de twee-pannenkoeken-stelling, die zegt:

Leg in een vlak twee pannenkoeken neer. Ongeacht hun vorm, grootte en onderlinge ligging bestaat er in het vlak altijd een rechte die beide pannenkoeken halveert (d.w.z. in twee delen met dezelfde oppervlakte verdeelt).

Het bewijs maakt gebruik van de tussenwaardestelling voor continue functies, die intuïtief wordt ingevoerd ('een grootte die van a tot b continu verandert, neemt alle waarden tussen a en b aan'). De auteurs grijpen het bewijs aan om het verschil te laten zien tussen een constructief bewijs (waarbij de lijn echt getrokken wordt) en een niet-constructief existentie-bewijs. Een van de auteurs vertelt dat hij eens op college merkte dat het totaal langs zijn leerlingen heen ging. Zijn analyse van het didactische probleem, en het alternatieve bewijs dat daaruit volgde zijn zeer lezenswaard. En de beschouwing die hij eraan vastknoopt over hoe het in klassen fout kan gaan met de aansluiting tussen leraar en leerling, zou verplichte kost moeten zijn voor iedereen die wiskunde onderwijst.

Een boek om uit te leren en uit te lezen, ik kan niet anders zeggen. Maar ik wil er nog wel een paar zaken aan toevoegen. Zo zijn er de Opgaven, nieuw in deze editie. Na elk van de acht hoofdstukken volgt een serie opdrachten, onderverdeeld in een aantal rubrieken. Elke serie begint met *Topics to explore*, losse onderwerpen waarover de student blijkbaar meer aan de weet moet zien te komen. Waartoe dit moet leiden is niet duidelijk, ik zie het maar als een aansporing tot grasduinen. Onderwerpen in deze categorie: Wat is wiskunde, Het getal, De vierkleurenstelling, Platonisme, Het gebruik van tegenvoorbeelden in de wiskunde, De vele dimensies van de wiskunde (en nog veel, veel meer). Dan volgen *Essay Assignments*, die om een geargumenteerde schriftelijke beantwoording vragen. Ze zijn gevarieerd, sluiten vaak goed aan bij de tekst van het hoofdstuk en lijken me bruikbaar om studenten de stof nog een keer te laten doordenken. Aan de andere kant bevat deze rubriek nogal eens vragen die gemakkelijk te stellen zijn, maar waarvan de beantwoording een studie op zich vraagt. De achterliggende gedachte lijkt: als de student er maar lang genoeg mee bezig geweest is, dan is het wel goed. Ook hier enkele voorbeelden: Hoe verhoudt wiskunde zich tot uw geloof, of tot dat geloof waarmee u het best bekend bent? Kies een standpunt (empirisme of rationalisme) en bespreek of en waarom wiskunde naar uw mening een proces van ontdekken of van uitvinden is. Beschrijf hoe seismologen wiskunde gebruiken bij het voorspellen van aardbevingen. Dan is er een sectie met (wiskundige) *Problems*, steeds is er een *Computer Question* en de opgaven worden afgesloten met *Suggested Readings*, een lijst met bij de opgaven aansluitende publicaties; naar verschillende ervan wordt in de opgaven verwezen. Voor wie het boek in het onderwijs wil gebruiken lijken de opgaven me van grote waarde, hoewel ik er zelf maar een beperkt aantal echt zou kunnen en willen gebruiken. De opgaven brengen me bij mijn laatste punt. Wat namelijk bevreemdt is dat elk hoofdstuk zijn eigen bibliografie heeft, terwijl er ook een lange bibliografie (18 pagina's) aan het eind van het boek staat. Enig heen en weer bladeren leert dat er geen enkele integratie tussen de opgaven en de editie uit 1981 heeft plaatsgevonden. De bibliografie aan het eind loopt tot 1979, de acht stukken met *Selected Readings* hebben gelukkig veel titels van na 1979, maar er staan ook titels tussen die in de algemene bibliografie voorkomen. Van enige ordening, alfabetisch op auteur of thematisch, is in de *Selected Readings* geen sprake, en daardoor gebeurt het zelfs dat een publicatie na drie andere titels opnieuw vermeld wordt (p. 73 en 74). Het blijkt typerend voor de nonchalance of de haast waar-

mee deze Study Edition blijkbaar geproduceerd is. Je merkt het niet bijgewerkt zijn ook doordat de auteurs bij herhaling uitspraken doen over de wiskunde 'van vandaag'. Met stijgende verbazing heb ik geconstateerd dat 'vandaag' in het boek (afgezien van de opgaven) ophoudt in 1979. Zo zijn er cijfers over de omvang van de (Amerikaanse) 'Mathematical Community', maar die betreffen 1977 en 1978. Van het vermoeden van Goldbach (Elk even getal vanaf 4 is de som van twee priemgetallen) wordt vermeld dat het in 1979 een nog onbewezen vermoeden was. Ook de laatste stelling van Fermat passeert de revue: 'at the time of this writing a great unsolved problem', zo staat het zelfs in de woordenlijst aan het einde van het boek. Er is een mooie beschouwing over heuristiek en daarin staat terecht het werk van Pólya centraal. Pólya, geboren in 1888, overleed in 1985. Dat bericht heeft de beeldredacteur wel verwerkt in het onderschrift bij Pólya's portret (p. 317), maar de tekstregels naast het portret beginnen met 'George Pólya (1888-)'. Verder kon je in 1981 'Academia Scientiarum Petropolitana' toelichten met de mededeling dat Petropolitana 'in het huidige taalgebruik' verwijst naar 'Leningrad', maar de kaart van Europa en het taalgebruik zijn intussen echt veranderd. Ook de bladzijnummering is veranderd, al is het alleen maar omdat er opgaven toegevoegd zijn. De axioma's van de verzamelingenleer, waarnaar op p. 255 verwezen wordt met 'see page 138' staan intussen op p. 154. Vaak benadrukken de auteurs de tijdloze schoonheid en kracht van de wiskunde en dan maken vijftien jaar niet zoveel uit, maar sommige zaken kunnen echt niet door de beugel, tenzij je het boek wilt lezen als een historisch document, als een tijdsbeeld van het eind van de jaren '70. Neem bijvoorbeeld de laatste zin uit het stukje over het computergebruik door wiskundigen. Er staat: 'Nevertheless, it is true, even today, that most mathematical research is carried on without any actual or potential use of computers.' Niet alleen de kaart van Europa is veranderd, ook de wiskundige kaart.

Jan van Maanen

Toetsen basis- vorming De eerste generatie afsluitings- toetsen basisvorming wiskunde

H. Boertien, J.B. Kuhlemeier

Inleiding

De invoering van de basisvorming in het schooljaar 1993/94 is ontegenzeggelijk een van de meest omvangrijke operaties in het voortgezet onderwijs sinds de invoering van de Mammoetwet. Er is een ingrijpende vernieuwing van de vakinhouden en de vakdidactiek in gang gezet. Ter ondersteuning van dit vernieuwingsproces krijgen de scholen de beschikking over afsluitingstoetsen. De eerste generatie afsluitingstoetsen is in december 1994 aan het voortgezet onderwijs ter beschikking gesteld. De afname van de eerste generatie afsluitingstoetsen stelde scholen voor een aantal problemen (Commissie Toetsing Basisvorming, 1996). Tot deze problemen behoorden het grote aantal verplichte toetsen (het volumeprobleem), de moeilijkheid van de toetsen en de taalbarrière (het niveauprobleem), de minder goede aansluiting van bepaalde toetsen bij het gegeven onderwijs (het aansluitingsprobleem) en de organisatorische en financiële problemen van het kopiëren (het kopieerprobleem). In dit artikel

wordt beschreven hoe vaak de eerste toetsen voor wiskunde, ondanks de genoemde problemen, in het onderwijs gebruikt zijn. Bovendien wordt nagegaan hoe goed of slecht de leerlingen in de verschillende opleidingstypen de toetsen gemaakt hebben.

De eerste generatie afsluitingstoetsen basisvorming

De eerste generatie afsluitingstoetsen bestond uit 70 toetsen voor in totaal 20 vakken. Dit omvangrijke en gevarieerde pakket was bedoeld voor het eerste basisvormingscohort. Dat is de groep leerlingen die in het schooljaar 1993/94 in de brugklas kwam en waarvan de meesten anno 1997 in de vierde klas zitten. Onder meer om gebruik voor selectiedoeleinden tegen te gaan, kreeg het Cito de opdracht één toets te maken voor de volle breedte van het voortgezet onderwijs. Voor het vak wiskunde bestond deze ene toets uit drie deelttoetsen van 1 lesuur. Samen bestreken de deelttoetsen bijna alle kerndoelen. De toetsen 1, 2 en 3 bevatten opgaven die in

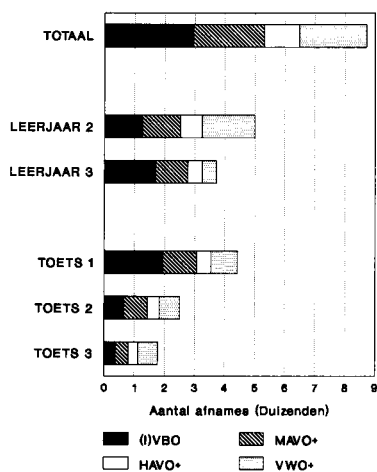
deze volgorde geleidelijk meer complexe en/of abstractere vaardigheden vereisen. De eerste toets is daarmee wat beter te doen dan de tweede, die op zijn beurt weer wat gemakkelijker is dan de derde.

Scholen waren in schooljaar 1994/95 – behoudens vrijstellingen – wettelijk verplicht de basisvorming wiskunde met alle drie de deelttoetsen af te sluiten. In het schooljaar 1995/96 hoefden de docenten daarentegen slechts één toets te kiezen, waarbij men alleen over deze ene toetsafname aan het Cito moest rapporteren. Het moment van afsluiting en toetsing bepaalde de school echter zelf. Dit betekent dat het eerste basisvormingscohort de toetsen deels in de tweede klas maakte (in het schooljaar 1994/95) en deels in de derde klas (in het schooljaar 1995/96).

Voor de rapportage aan het Cito kregen de scholen de beschikking over optisch leesbare scoreformulieren. Bij iedere afname van een toets in een klas diende de school het formulier voor één leerling in te vullen, te weten de alfabetisch zevende leerling uit die klas. Uiteraard was deze rapportage alleen zinvol als er niet in de toetsen 'geknipt en geplakt' werd.

Het gebruik van de afsluitingstoetsen

In de wet is vastgelegd dat scholen de basisvorming met een door de overheid ter beschikking te stellen afsluitingstoets moeten afsluiten. Het wekt dan ook geen verbazing dat de toetsen wiskunde in de schooljaren 1994/95 en 1995/96 massaal gebruikt zijn. Tachtig procent van de scholen voor voortgezet onderwijs heeft één of meer scoreformulieren aan het Cito geretourneerd. Voor het vak wiskunde gaat het in totaal om 8721 afnames in evenzoveel klassen. Wiskunde behoort hiermee tot de vijf vakken waarvoor de meeste toetsen zijn afgenomen.



Figuur 1 Aantal afnames per leerjaar en per toets

Leerjaar en maand van afname

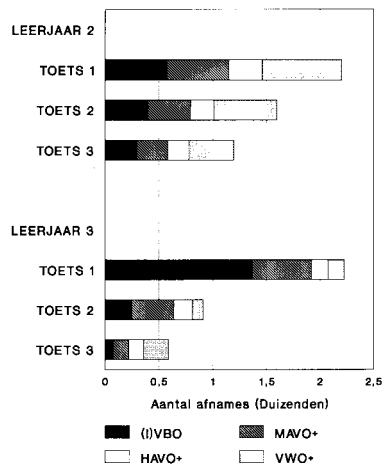
Figuur 1 toont hoe het totale aantal afnames verdeeld is naar leerjaar, toets en opleidingstype. In het tweede leerjaar hebben veel meer afnames plaatsgevonden dan in het derde leerjaar (57% versus 43%). Dit heeft ongetwijfeld ook te maken met de tussentijdse versoepeling van de afname- en rapportageverplichting. Dit verklaart ook het verschil in het moment van afname. In het tweede leerjaar blijkt de eerste toets vooral in april te zijn afgenomen, de tweede toets vooral in mei en de derde toets vooral in juni. In het derde leerjaar was er geen verschil in de spreiding van de drie toetsen over het schooljaar: alle drie toetsen kenden hun piek in de maand juni.

Toetsen

Uit figuur 1 blijkt dat de eerste toets duidelijk vaker afgenomen is dan de tweede en die is op zijn beurt weer veel vaker afgenomen dan de derde (resp. 51%, 29% en 20%). Dit afnemende gebruik is deels te verklaren vanuit de wijze waarop de toetsen zijn samengesteld. De eerste en tweede toets zijn namelijk meer gericht op elementaire vaardigheden dan de derde.

Opleidingstypen

Zoals gezegd waren de drie wiskundetoetsen bestemd voor de volle breedte van het voortgezet onderwijs. Figuur 2 laat zien hoe vaak de

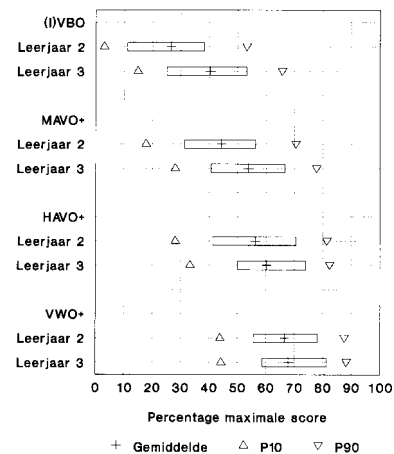


Figuur 2 Aantal afnames per leerjaar per opleidingstype

toetsen in het tweede en derde leerjaar van de onderscheiden opleidingstypen zijn afgenomen. Hierbij staat (i)vbo voor (individueel) voorbereidend beroepsonderwijs (eventueel in combinatie met avo), mavo+ voor mavo en mavo/havo, havo+ voor mavo/havo/vwo en havo en vwo+ voor havo/vwo en vwo.

Kijken we naar hoe de scoreformulieren van leerlingen uit de vier opleidingstypen verdeeld zijn naar leerjaar, dan blijkt dat het havo+ en vwo+ vooral in het tweede leerjaar sterk vertegenwoordigd is. In het derde leerjaar komen we juist de leerlingen uit het (i)vbo relatief vaak tegen. Kennelijk wordt wiskunde in de basisvorming in de 'hogere' opleidingstypen wat eerder afgesloten dan in de 'lagere opleidingstypen' (zie ook Kuhlemeier, Kremers & Kleintjes, 1997).

In het tweede leerjaar verschilt de verdeling naar opleidingstype niet van toets tot toets (zie figuur 1). Een mogelijke verklaring hiervoor is dat in het schooljaar 1994/95 alle drie de wiskundetoetsen verplicht waren. In het derde leerjaar (schooljaar 1995/96), toen de scholen één van de drie toetsen moesten kiezen, zien we daarentegen wel een verschil. In het (i)vbo blijkt men dan vooral voor de eerste, relatief gemakkelijke toets te kiezen, terwijl men in het vwo+ vooral de derde, relatief moeilijke toets kiest.



Figuur 3 Gemiddelde prestaties en spreiding per leerjaar per opleidingstype

De maakbaarheid van de toetsen wiskunde

Figuur 3 laat zien hoeveel moeite de tweede- en derdeklassers hadden met de afsluitende toetsing voor wiskunde. Het gemiddelde percentage goed gemaakte opgaven per opleidingstype is weergegeven door middel van een plusteken. De horizontale staaf met dit gemiddelde geeft het gebied aan waarbinnen zich 50% van de leerlingen bevindt. De beide driehoekjes ▲ (P10) en ▼ (P90) begrenzen het gebied waarbinnen zich 80% van de leerlingen bevindt. Derhalve bevindt zich buiten de driehoekjes aan weerszijden van de verdeling nog 10% van de leerlingen.

		Toetsnummer			Totaal
		1	2	3	
Leerjaar 2					
(i)VBO	p'	36	24	12	27
	N	567	392	288	1247
MAVO+	p'	50	48	27	44
	N	574	391	283	1248
HAVO+	p'	61	63	40	56
	N	307	219	192	718
VWO+	p'	69	72	54	67
	N	728	573	412	1713
Leerjaar 3					
(i)VBO	p'	41	38	25	40
	N	1369	244	73	1686
MAVO+	p'	57	56	34	54
	N	555	391	143	1089
HAVO+	p'	64	66	48	60
	N	152	175	139	466
VWO+	p'	73	76	62	68
	N	149	99	232	480
Totaal	p'	52	54	39	50
	N	4401	2484	1762	8647

Tabel 1 Gemiddelde P'-waarden per opleidingstype per toets

Opleidingstype

Niet onverwacht blijken leerlingen in het vwo+ gemiddeld de meeste opgaven goed te hebben, gevolgd door havo+, mavo+ en (i)vbo. Dit ondanks het feit dat de docenten in elk opleidingstype (zeker in leerjaar 3) de meest geschikte toets voor hun leerlingen gekozen zullen hebben. In vwo+ hebben leerlingen vaker Toets 3 en in (i)vbo vaker Toets 1 gemaakt. In tabel 1 is dit te zien. Daarin zijn voor elke toets de prestaties per leerjaar en per opleidingstype weergegeven met de aantallen scoreformulieren waarop de p'-waarden (= gemiddeld behaald aantal scorepunten in procenten van de maximaal te behalen punten) gebaseerd zijn.

De grote gemiddelde prestatieverschillen tussen de opleidingstypen nemen overigens niet weg dat er ook binnen ieder opleidingstype grote verschillen tussen leerlingen bestaan. De prestatieverdelingen in figuur 3 overlappen elkaar namelijk ten dele, zeker waar het 'naastliggende' opleidingstypen betreft. Hierbij moet men echter wel bedenken dat deze overlap gebaseerd is op slechts een beperkt aantal wiskunde-opgaven. Hadden we de leerlingen meer en langere wiskunde-toetsen voorgelegd, dan zou de overlap vrijwel zeker kleiner zijn uitgevallen.

Leerjaar en sekse

In het vwo+ doen derdeklassers het nauwelijks beter dan tweedeklassers (67% goed versus 68% goed), in het havo+ is het verschil in het voordeel van derdeklassers al iets groter (4%), en in het mavo+ en (i)vbo is het verschil ten gunste van derdeklassers aanzienlijk (respectievelijk 9% en 14%).

Jongens doen het op de toetsen wiskunde iets beter dan meisjes. De voorsprong van jongens bij wiskunde is ongeveer even groot als die bij de vakken natuur- en scheikunde, natuur geïntegreerd en techniek.

Discussie

De afsluitingstoetsen wiskunde blijken, ondanks een groot aantal startproblemen, massaal in het onderwijs te zijn gebruikt. Het werkelijke aantal afnames zal echter nog hoger liggen. Een deel van de scholen heeft de wiskundetoetsen namelijk afgenomen zonder daarover aan het Cito te rapporteren.

Een punt van zorg is de geringe maakbaarheid van de eerste generatie wiskundetoetsen voor leerlingen in het (i)vbo. De geconstateerde grote gemiddelde prestatieverschillen tussen opleidingstypen vormen een verdere ondersteuning voor het ontwikkelen van toetsvarianten. In de tweede en derde generatie afsluitingstoetsen wiskunde (in schooljaar 1996/97, respectievelijk schooljaar 1997/98 beschikbaar) is de opzet van de toetsing dan ook veranderd. In het kader van de afsluiting basisvorming hoeven scholen slechts één van de drie deelttoetsen wiskunde af te nemen. Daarom is ervoor gekozen elk van de deelttoetsen van de eerstvolgende generaties afsluitingstoetsen af te stemmen op een specifieke populatie leerlingen. Toets 1 zal afgestemd worden op de zwakkere leerlingen, Toets 2 op middelmatige leerlingen en Toets 3 op de betere leerlingen. In dat geval zal de aansluiting van de toekomstige afsluitingstoetsen bij de diverse opleidingstypen verbeterd worden vergeleken met die van de eerste generatie toetsen.

De geconstateerde overlap van de prestatieverdelingen geeft aanleiding om deze toetsvarianten los te koppelen van het opleidingstype. In elke opleidingstype zullen zich immers klassen bevinden die qua prestaties op 'een gemiddelde wiskundetoets' niet onderdoen voor klassen uit aangrenzende opleidingstypen. Ook in het (i)vbo zijn

er klassen die zich qua prestaties op de afsluitingstoetsen kunnen meten met avo-klassen. En ook in het vwo+ bevinden zich klassen die aan een wat minder moeilijke toetsvariant nog hun handen vol zullen hebben.

Extra aandacht verdient ook de grote voorsprong van derdeklassers op tweedeklassers in het (i)vbo en mavo+. De inhoud en de moeilijkheidsgraad van het totale pakket afsluitingstoetsen is afgestemd op het aantal lesuren zoals vermeld in de adviesurentabel (MOW, 1993b). Veel wiskundeleraars lijken de afsluitingstoetsen -om overigens plausibele redenen- voor te leggen aan leerlingen die minder onderwijs hebben ontvangen in de kerndoelen dan de adviesurentabel aangeeft. Zeker in het (i)vbo speelt het dilemma dat de scholen de beperkte onderwijstijd moeten verdelen over de basisvorming en de beroepsgerichte vakken. Het is begrijpelijk dat veel leerlingen uit het (i)vbo en mavo aan het einde van het tweede leerjaar nog onvoldoende in de gelegenheid zijn gesteld zich de getoetste kerndoelen eigen te maken. Zo zijn de wiskundetoetsen afgestemd op afname na drie jaar wiskunde-onderwijs (tien lesuren). Na twee leerjaren hebben de leerlingen dikwijls nog slechts (3+3=) zes of (4+3=) zeven lesuren wiskunde ontvangen. Het zullen vooral de 'snelle' leerlingen (met name vwo) zijn die de basisvorming wiskunde in twee jaar kunnen afronden. Voor het merendeel van de leerlingen uit (i)vbo en mavo lijkt dit echter geen haalbare kaart. Het geringe verschil tussen de prestaties van derde- en tweedeklassers in het vwo+ en havo+ doet vermoeden dat de docenten in deze opleidingstypen goed in staat zijn te bepalen wanneer leerlingen voldoende zijn voorbereid om de toetsen wiskunde met succes te kunnen maken.

Lees verder op blz.312

→

Jaarvergadering / studiedag 1997

Eerste uitnodiging

Eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 1997 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op
zaterdag 15 november 1997

in het gebouw van
Het Nieuwe Lyceum
Jan Steenlaan 38
3723 BV Bilthoven
tel: 030 2283060
Aanvang :10.00 uur
Sluiting:16.00 uur

Agenda

Huishoudelijk gedeelte

- a Opening door de voorzitter dhr. dr. J. van Lint.
- b Jaarrede door de voorzitter.
- c Notulen van de jaarvergadering 1996 (zie volgende Euclides).
- d Jaarverslagen (zie volgende Euclides).
- e Décharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie. Het bestuur stelt kandidaat: mw. J. Warners-de Bruin en dhr. H.G.M. Gerats.*
- f Bestuursverkiezing in verband met periodiek aftreden van dhr. S. Garst, mevr. M. Kollenveld, dhr. W. Kuipers en dhr. J. van Lint. Zij stellen

zich herkiesbaar en het bestuur stelt hen kandidaat.*

- g Vaststelling contributie '98-'99.

* Tot achtentwintig dagen na het verschijnen van deze oproep kunnen eveneens andere leden van de vereniging schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door tenminste vijf leden.

Themagedeelte

Studiedag met als thema:

Veranderingen: b(l)oeiend?!

Het themagedeelte van de jaarvergadering gaat over de veranderingen die ons, docenten wiskunde, te wachten staan. We zullen onze rol in het klaslokaal moeten veranderen, van een sturende naar een begeleidende rol. Maar, dat kan alleen als ook onze lesmaterialen veranderen, en wel zó dat het materiaal uitnodigt tot het hanteren van andere werkvormen, inspelend op de verschillen tussen de leerlingen die we in de klas hebben. Het klinkt allemaal zo 'gelikt', vindt u ook niet? Hoe stellen we ons dat dan concreet voor, zonder al die

mooie verhalen? En over welke wiskunde gaan we het hebben? Natuurlijk, wiskunde vanuit de context, bruikbare wiskunde, geschikt voor meisjes en jongens, is dat het dan? Er moet toch ook echt gerekend worden, en dan niet met de GR, maar gewoon **UIT HET HOOFD**, vindt u niet? En dan dit, waar wordt er nog wel eens **EEN BEWIJS** geleverd binnen de schoolwiskunde? Niet 'gegeven - te bewijzen - bewijs', maar wel op een zodanige manier dat elke leerling zeker weet dat hij of zij het bij het rechte eind heeft. En wat verstaan we dan precies onder bewijzen? Niet alleen maar redeneren, het moet toch over exactheid gaan, dus over nauwkeurigheid. Of vindt u dat helemaal niet nodig, vindt u dat echt onzin? Hoe is de stand van zaken als we praten over ondersteuning van ons wiskundeonderwijs met behulp van computers? Wat is de meerwaarde en welke mogelijkheden zijn voorhanden? Kom dan vooral naar de centrale lezing in het ochtendgedeelte en de tweede lezing in het middagedeelte van de vergadering.

In de workshops laten docenten van de Hogeschool Windesheim u zelf ontdekken welke onderdelen van de schoolwiskunde uw leerlingen in het vervolgonderwijs nodig hebben, en hoe ze daarmee omgaan. De docenten komen uit vijf verschillende faculteiten, allen houden ze zich met wiskunde bezig. Het startniveau van heel wat opleidingen gaat niet ver boven het basisvorming-gebied uit, juist daar ontstaan kennelijk de problemen, die later desastreus blijken te zijn.

Ook ICT (Informatie- en Communicatie- Technologie)-ontwikkelingen zullen u niet kunnen ontgaan. Op de Hogeschool Windesheim zijn al een paar jaar ervaringen opgedaan met het gebruik van toetsbanken voor wiskunde, teleleren en research via Internet, u kunt er zelf mee experimenteren, de Vereniging is, zoals u gewend bent, actueel en bij de tijd. In andere workshops kunt u heel concreet ervaren hoe het is, om eens een volstrekt andere werkvorm te hanteren in uw eigen klas. Zes VO-scholen uit de regio Zwolle houden hun eigen verhaal, misschien ook een idee voor u?

En natuurlijk laat de Profi-groep zich ook dit jaar niet onbetuigd, evenals de SLO, denkt u maar aan de gevolgen van het rapport 'van Veen' voor vbo/mavo.

Leden die in het MTO werken zullen in een workshop ervaringen uitwisselen en opdoen. In het volgende nummer van Euclides kunt u gedetailleerd lezen wat u kunt verwachten op **15 november 1997**.

→ *Vervolg van blz.310*

Ten slotte zij nog opgemerkt dat de hier gepresenteerde gegevens niet representatief zijn voor de subpopulaties per opleidingstype per leerjaar in Nederland, maar hooguit voor de groepen leerlingen aan wie de afsluitingstoetsen zijn voorgelegd.

Literatuur

Commissie Toetsing Basisvorming (1996)

De toets der kritiek

Zoetermeer: Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen.

J.B. Kuhlemeier, E.J.J. Kramers & F.G.M. Kleintjes (1997)

De eerste generatie afsluitingstoetsen: gebruik, betrouwbaarheid en maakbaarheid

Arnhem: Instituut voor Toetsontwikkeling.

Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen (1993)

Besluit kerndoelen en adviesurentabel basisvorming 1993-1998

Zoetermeer: Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen.

Brief aan de staatssecretaris

Hattem, 15 april 1997

De staatssecretaris van

Onderwijs, Cultuur en

Wetenschappen

Mw. T. Netelenbos

Postbus 25000

2700 LZ Zoetermeer

Betreft:

nader uitgewerkt advies

3^e concept examen-

programma's vbo/mavo

wiskunde

Kenmerk: VO/BOB-96035044

Geachte mevrouw Netelenbos,

Op 13 maart 1997 hebben wij u een eerste reactie gestuurd op het derde concept examenprogramma's vbo/mavo. Het was ons toen nog niet mogelijk om een afgerond oordeel te geven over de meningen van de door ons geraadpleegde leden aangaande alle aspecten van dit concept. Hieronder vindt u onze nader uitgewerkte reactie, waarin de punten uit onze reactie van 13 maart 1997 opgenomen zijn.

Vakkenpakketten

Reeds eerder (in onze brieven van december 1994 en juli 1996) hebben wij onze verbazing uitgesproken over het voorstel om wiskunde geen verplicht examenvak te maken in de sector economie.

Immers, bij het ontwikkelen van het sterk vernieuwde 'COW'-wiskunde C/D-examenprogramma is uitgegaan van realistische wiskunde die nuttig en bruikbaar is in beroep en maatschappij. Vanuit dezelfde visie is door het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum een vbo wiskunde-B examenprogramma ontwikkeld, dat qua inhoud ongeveer overeenkomt met de huidige kerndoelen van de basisvorming.

Deze vernieuwde B/C/D-programma's zijn, bij voldoende lesuren, in principe haalbaar voor alle leerlingen die nu B/C/D-examen doen; zij zijn

de basis van de in dit derde concept uitgewerkte kern-delen lang en kort.

Zonder beheersing van wiskunde op examenniveau zullen leerlingen in een vervolopleiding in de sector economie *onnodige* moeilijkheden ondervinden.

Het argument dat wiskunde toch in elke sector gekozen *kan* worden spreekt ons niet aan. Indien wiskunde geen verplicht examenvak wordt zullen waarschijnlijk, evenals nu, veel leerlingen die nog geen duidelijk omschreven toekomstverwachting hebben, wiskunde laten vallen, en daardoor sterk in hun doorstroommogelijkheden beperkt worden.

Dit geldt voor doorstroming zowel van het 2e naar het 3e niveau bve als van lang-mbo naar hbo.

**** Huidige leerlingen, die met een vbo/mavo-examen zonder wiskunde de meao doorkomen, zijn toelaatbaar tot bijvoorbeeld de heao en zelfs iedere lang-mbo (ook mdgo!) gediplomeerde kan zonder wiskunde naar de pabo. Bij deze hbo-opleidingen is wiskunde weer een apart vak, dat voor deze te weinig wiskundig geschoolden helaas vaak een oorzaak is van afhaken.**

Slecht wiskundig voorbereide pabostudenten leveren later weer hele generaties slecht rekenende mensen af. Onvoldoende basisschoolrekenvaardigheid wrekt zich

de rest van het leven. Wij ervaren als wiskundeleraars, dat wij dit gebrek, in de basisvorming of later, niet meer op kunnen heffen: de 'gevoelige periode' hiervoor is voorbij.

In de maatschappij tekent zich bovendien de tendens af dat bijscholen het hele leven nodig blijft. In het volwassenenonderwijs blijkt overduidelijk dat (ook best intelligente) cursisten die vroeger niet in de gelegenheid waren om een redelijke wiskundebasis te leggen, de grootste moeite hebben om zich stof eigen te maken, waar een wiskundige manier van handelen en denken voor nodig is. Cursisten die "niets meer van wiskunde weten", maar ooit (al is het 30 jaar geleden) een redelijke basis legden, pikken volkomen nieuwe leerstof wel op.

****** *Wij ervaren dat er een 'kritische ondergrens' aan zo'n wiskundebasis is: twee jaar op vbo/mavo-niveau 'ruiken' aan de basisvorming ligt hier onder!*

In beide bovengenoemde brieven hebben wij u tevens gevraagd te laten onderzoeken in hoeverre wiskunde als verplicht examenvak in de sector zorg en welzijn zinvol zou zijn. Bijvoorbeeld als basis voor de vervolgpopleiding tot apothekersassistent en doorstroming naar hbo lijkt ons 'gecijferd'-zijn essentieel. Voor niveau 1/2 is wiskunde-examen in deze sector wellicht minder nodig. Helaas hebben wij op geen van beide brieven een reactie van u mogen ontvangen.

****** *Aangezien in alle havo-profielen meer of minder wiskunde verplicht is, is doorstroming naar 4 havo zonder kerndeel-lang en een passend verrijksdeel ons inziens onmogelijk.*

Vroegere, minder concrete, B/C/D wiskunde-examenprogramma's waren wellicht niet voor elke B/C/D-leerling zinvol en haalbaar. Zo'n belemmering is er nu niet meer.

***** *De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars (NVvW) adviseert u om wiskunde verplicht te stellen in de sector Economie en als nog grondig te laten onderzoeken in welke leerwegen van de sector Zorg & welzijn verplichte wiskunde zinvol is.*

Preambule

Wordt werkelijk - wij halen hier de kern van de eerste zin aan - 'elke leerling in een periode van examinering beoordeeld op de beschreven kwaliteiten'? Dit lijkt ons volkomen onmogelijk. Hier staan teveel mooie algemeenheden, waarvan een aantal zaken zeker discussabel zijn.

***** *De NVvW adviseert u de tekst van de preambule te herzien.*

Wij onderschrijven wel een deel van de inhoud, bij voorbeeld 'het centraal stellen van een actieve, zo zelfstandig mogelijk leren-de leerling'. Het belang van wiskunde voor de doorstroming, vereist echter de grootst mogelijke vakbekwaamheid

in de begeleiding. Zelfstandig wiskunde leren dient met name in het vmbo dan ook te gebeuren onder aanwezigheid van een wiskundeleraar die op het juiste moment de (groepjes) leerlingen verder kan helpen en de nodige reflectie op het gemaakte werk kan leveren.

Wij vragen ons af hoe voorkómen kan worden dat scholen dit begeleiden van het zelfstandig leren overlaten aan een toevallig beschikbare leraar van een heel ander vak. In dat geval verwordt, voor deze vmbo-leerlingen, zelfstandig wiskunde leren tot zelfstandig werken zonder veel te leren. Voor het vak wiskunde zullen altijd veel contacturen nodig blijven.

***** *De NVvW adviseert u, via de advies-urentabel of anderszins, aan de scholen duidelijk te maken dat te weinig wiskunde-contacturen te weinig doorstroming naar de gewenste vervolgpopleidingen impliceert.*

Basisdeel

Wij stemmen in met de expliciete aandacht voor vaardigheden in het leren gebruiken van wiskundige werkwijzen bij het oplossen van problemen. Ter bevordering van de continuïteit in de examenprogramma's, pleiten wij voor afstemming van de vaardigheden op de havo/vwo-programma's.

***** *De NVvW adviseert u de vaardigheden van het basisdeel te beschrijven als eindtermen behorend tot het domein vaardigheden.*

Kerndeel-kort

Wij vinden dit een weloverwogen, afgerond geheel, dat globaal genomen overeenkomt met de kerndoelen van de basisvorming. Wij zouden slechts de meest eenvoudige toepassingen van de stelling van Pythagoras willen toevoegen. Dit onderdeel is relevant voor beroepsopleidingen in met name de technische sector.

De ervaring is dat leerlingen uit het ivbo, vso-lom en de huidige vbo-B-stroom aan de basisvorming en dus ook aan het voorgestelde programma kern-kort, vier jaar lang hun handen vol hebben. In onze reactie d.d. 28-1-1997 op de herziene kerndoelen hebben wij reeds gewezen op het feit dat deze leerlingen, wanneer zij wiskunde niet als examenvak hebben en dus de basisvorming na twee, hooguit drie jaar moeten afsluiten, onmogelijk de wiskundekerndoelen kunnen halen.

De beluisterde mening dat het kerndeel kort verzwaaard zou kunnen worden 'omdat de basisvorming na hooguit drie jaar afgesloten wordt' delen wij dan ook niet.

***** *De NVvW adviseert u aan het kerndeel kort slechts de meest eenvoudige toepassingen van de stelling van Pythagoras toe te voegen en de mogelijkheid te geven om de Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten voor het kerndeel-kort sectoraal in te kleuren, zoals ook voor kerndeel-lang is omschreven.*

Het op pagina 6 genoemde verrijksdeel in de beroepsgerichte leerweg

'kort' dat 'extra stof bevat die niet verplicht is', is ons onduidelijk. Volgens pagina 7 kan dit maximaal 6 uur extra beslaan. Geldt dit deel ook voor wiskunde? Zo ja, dan vermoeden wij dat er nauwelijks leerlingen in deze leerweg aan toe zullen komen.

De onderkant

Het kerndeel-kort zal niet voor alle leerlingen haalbaar zijn. De bestaande situatie, waarbij de per school verschillende A/B-examens verschillend civiel effect hebben, verbeterd door invoering van landelijk vastgestelde certificaten die duidelijk maken welke delen van de stof de leerling beheerst.

** De NVvW adviseert u om vast omschreven certificatenverzamelingen in te stellen die toelating tot de beroepsopleidingen niveau 1 van de bve regelen.*

Kerndeel-lang

Het voorgestelde kerndeel-lang is, vergeleken met de huidige vernieuwde C/D-programma's een 'Cmin'-programma, met minder inhoud dan het huidige, vernieuwde C-programma. Verdwenen onderwerpen die wij bij voorbeeld terug willen zien zijn: berekeningen met rente op rente, het gebruik van de machttots, vergroten en verkleinen van figuren, en het begrip kans (zonder kans heeft het systematisch tellen weinig toepassing meer!).

In onze bovengenoemde brief van juli 1996 gaven wij te kennen dat door tijdge-

brek van de vakontwikkelgroep het precieze niveau onvoldoende was uitgetast. Dit is in het 3e concept niet verbeterd, aangezien de vakontwikkelgroep sinds het 2e concept geen gelegenheid kreeg om hier verder aan te werken.

** De NVvW adviseert u nogmaals de vakontwikkelgroep in de gelegenheid te stellen het werk af te maken, inclusief een veldadvisering.*

Afhankelijk van de sector zal voor succesvolle doorstroming naar lang-mbo meer of minder verzwarende van het voorgestelde 'Cmin'-niveau nodig zijn, zo bleek ons uit diverse reacties.

Met name vanuit het TWIN-project, dat het wiskundeonderwijs binnen het mto herzielt, wordt met nadruk gesteld dat voor een succesvolle doorstroming een niveau vergelijkbaar met het huidige, vernieuwde D-programma noodzakelijk is. Wij vragen ons dan ook af hoe leerlingen het moeten redden in de sector techniek van het lang-mbo met een 'Cmin'-programma.

Bestudering van de urentabel maakt duidelijk dat voor de leerlingen in de beroepsgerichte leerweg naar het lang-mbo minder uren wiskunde beschikbaar zijn dan momenteel het geval is. Wij vermoeden daarom dat ook in de sectoren zonder techniek, de leerlingen in de beroepsgerichte leerweg problemen zullen krijgen met de doorstroming naar het lang-mbo. Dit hoeft dan minder te maken te hebben met de capaciteiten van de leer-

lingen, maar meer met de geringe tijd die voor de leerlingen beschikbaar is, om een goede basis te leggen voor het vak wiskunde.

De gevraagde verzwarende kan op twee manieren plaatsvinden:

a Vanuit de beroepsgerichte leerweg zijn, volgens dit concept, leerlingen met het kerndeel-lang, zonder verrijksdeel, toelaatbaar tot het lang-mbo (naast het beroepsgerichte programma is ook geen tijd beschikbaar voor verrijking van wiskunde). Willen deze leerlingen een reële kans maken in vervolopleidingen, dan zal de verzwarende in het kerndeel-lang moeten worden geplaatst. Dit heeft naar onze mening onmiddellijk als consequentie dat meer uren voor het vak wiskunde in deze leerweg beschikbaar moeten komen. Een groot nadeel is, dat dan de verzwarende voor iedere sector geldt, ook voor de sectoren waarvoor de verzwarende minder relevant is.

b De verzwarende kan ook worden aangebracht in het verrijksdeel. Dit heeft consequenties voor de inhoud, vormgeving en examinering van het verrijksdeel, waarop we verderop nog uitgebreider in zullen gaan. Voordeel van plaatsing in het verrijksdeel is, dat differentiatie naar zwaarte en onderwerpen per sector mogelijk wordt. Verzwarende hoeft dan alleen daar te worden aangebracht

waar die ook echt noodzakelijk is: bij de sectoren techniek en landbouw. Een belangrijke consequentie van deze keuze is, dat het niet meer haalbaar wordt om vanuit de beroepsgerichte leerweg, dus met alléén kerndeel-lang, door te stromen naar lang-mbo sectoren techniek en landbouw. Wij vermoeden namelijk dat het lang-mbo zich, in deze sectoren, zal richten op leerlingen uit de gemengde en theoretische leerweg, die dus wel de verrijking gedaan hebben. Zeker in deze sectoren zal daarom, naar onze mening, voor doorstroming naar lang-mbo, de gemengde leerweg geschikter zijn dan de beroepsgerichte.

** De NVvW adviseert u om de, door havo en (landbouw-) technische vormen van lang-mbo gevraagde, verzwarende van het kerndeel lang, onder te brengen in het verrijksdeel. Maatwerk naar sector wordt hierdoor mogelijk.*

Verrijksdeel

Het voorstel in de vorm van 3 opdrachten waarborgt geen aansluiting naar het havo.

Als voorbereiding op de natuurprofielen van het havo en de sector techniek van het lang-mbo is het huidige, vernieuwde D-programma een absoluut minimum. Hiervoor moet, vanaf het 'Cmin'-niveau, nog een aanzienlijke hoeveelheid stof worden verwerkt.

Wij vinden de voorgestelde inhoud van het verrijksdeel onduidelijk en de vorm

van drie opdrachten, zonder centrale toetsing, onvoldoende garantie bieden dat de wiskundige kennis en vaardigheden van de leerling werkelijk verrijkt zijn.

** De NVvW adviseert u, om in de verrijksdelen eindtermen te formuleren die centraal worden geëxamineerd. Dit schept duidelijkheid over de wiskundige kennis en vaardigheden die noodzakelijk zijn voor doorstroming naar de verschillende sectoren van het lang-mbo en profielen van het havo.*

Bij de havo/vwo-profielen is terecht gekozen voor zwaardifferentiatie in het wiskundeprogramma van de verschillende profielen.

** De NVvW adviseert u differentiatie naar zwaarte en onderwerpen ook toe te passen in de verrijksdelen van de vier sectoren van het vmbo.*

Dat hierdoor vier verschillende verrijksdelen ontstaan, doet ons inziens geen afbreuk aan de duidelijkheid die de nieuwe examens moeten gaan brengen. Integendeel, het maatwerk per sector zal de aansluiting op het lang-mbo en het bijbehorende havo-profiel ten goede komen.

** De NVvW adviseert u de verrijksdelen als volgt in te vullen:*

- sectoren Techniek en Landbouw: aanvullen tot D-niveau, met extra aandacht voor die onderdelen die wel in 3havo, maar niet in het huidige D-programma voorkomen,

- sectoren Economie en Zorg & welzijn: afhankelijk van de precieze verdere invulling van het kerndeel-lang, speciale aandacht voor voortgezet rekenen en statistiek, met toepassingen gericht op de verschillende vervolgoopleidingen.

** De NVvW adviseert u om in de adviesuren tabel rekening te houden met de, in onze opzet, veel grotere studielast van het verrijksdeel voor Techniek en Landbouw dan voor Economie en Zorg & welzijn.*

Voor elk verrijksdeel is in totaal slechts één jaaruur uitgetrokken in het korte examenjaar, dwz (naast de schoolonderzoekweken) ongeveer 25 lessen! Dit is zeker onvoldoende om de noodzakelijke extra leerstof voor de sectoren techniek en landbouw door te werken. Een oplossing zou kunnen zijn:

** in de derde klas van de sectoren techniek en landbouw reeds een deel van de verrijksstof aanbieden. Voordeel van deze constructie is, dat voor de leerlingen sneller duidelijk wordt of overstap naar met name het lang-mto en -mao of een havo-natuurprofiel haalbaar is.*

Specificatie van de eindtermen

Bij de formulering van dit conceptprogramma is niet uitgegaan van het huidige, in verband met de centrale examens vrij nauwkeurig geformuleerde, C/D-programma, maar van het, veel globalere, minder nauwkeurig beproefde, B-programma.

1e De algemene inleidingen, die de samenhang tussen de verschillende onderdelen aangeven zijn verdwenen.

2e De eindtermen hebben niet meer elk een eigen nummer, hetgeen communicatie erover bemoeilijkt.

3e Veel eindtermen zijn voor verschillende interpretaties vatbaar.

Bijvoorbeeld staan in het concept onder WI/K/1 punt 6, zes eindtermen, waarvan bij de eerste alleen staat:

‘-lineaire verbanden herkennen en gebruiken’

Huidige eindterm 26 geeft echter:

‘-lineaire verbanden herkennen en gebruiken;

(in het bijzonder:

- een formule van de vorm $y = ax + b$ herkennen en opstellen;
- een bijbehorende grafiek tekenen en interpreteren;
- de parameters a en b herkennen als steilheid, respectievelijk verticale verschuiving.)’

Naast deze essentiële afbakening die, ons inziens, zeker in het examenprogramma thuisheeft, geeft de huidige syllabus nog een belangrijke toelichting.

4e Een aantal formuleringen is incorrect.

Er staat bijvoorbeeld:

‘- hoofdbewerkingen in de wiskundig juiste volgorde toepassen’, terwijl er geen ‘wiskundig juiste’ volgorde bestaat, maar het slechts gaat om een ‘afgesproken’ volgorde.

** De NVvW adviseert u bij de eindtermen weer de vorm en formuleringen uit het beproefde, huidige C/D-pro-*

gramma over te nemen; de verschillen tussen kern-kort en -lang duidelijker aan te geven dan met de cursivering in het concept, en de door de NVvW voorgestelde eindtermen van de onderling verschillende verrijksdelen in aparte bijlagen toe te voegen.

Deze en een heel aantal andere punten zijn reeds gemeld naar aanleiding van de vorige concepten. Vermoedelijk omdat de vakontwikkelgroep geen gelegenheid kreeg nog bij elkaar te komen is slechts een klein deel van onze punten na het vorige concept aangepast. Dit versterkt ons advies bij kerndeel-lang.

Syllabus

De wiskunde C/D-syllabus bij het huidige programma wordt door de docenten zeer op prijs gesteld. Deze geeft de nodige precisering en toelichting. Een syllabus bij het huidige B-programma bestond nog niet. Leraren die nu alleen leerlingen opleiden op A/B-niveau hebben nog geen ervaring met verplichte centrale examens. Voor hen is een uitgebreide, duidelijke syllabus bij het nieuwe programma zeker essentieel.

** De NVvW adviseert u de huidige C/D syllabus te laten uitbreiden en aanpassen, zodat de precieze afbakening tussen kerndeel-kort, kerndeel-lang en verrijking nader verrijnd kan worden. Hierdoor kan ook zo nodig, na enige examenervaring, een afbakening iets verschoven worden zonder de hele procedure van het veranderen van de programma's.*

Haalbaarheid/nascholing

Bij de invoering van de basisvorming, samenvallend met het begin van de huidige programma's, is op veel scholen het totale aantal wiskunde-uren verkleind. Een door ons uitgevoerde enquête geeft het vermoeden van 10 à 15% vermindering. Bij de inspectie zijn geen officiële cijfers bekend, maar de wiskunde-inspecteur drs. W. Kleijne bevestigt ons vermoeden.

Voor welk deel van de leerlingen welk programma haalbaar is, is duidelijk gekoppeld aan het aantal beschikbare uren, maar ook aan de mate van bijscholing van de docenten. Het overgrote deel van hen is niet opgeleid in het begeleiden van leerlingen, bijvoorbeeld in zaken, zoals vermeld in het basisdeel.

In de media komt telkens naar voren dat te weinig jongeren een exacte opleiding kiezen. Bij een groter aantal wiskunde-(advies)uren zullen meer jongeren in staat zijn door te gaan in een technische sector.

** De NVvW adviseert u om in de adviestabel van de sectoren techniek en landbouw zowel in de 3e als de 4e klas extra wiskundetijd op te nemen voor het verrijkingdeel.*

** De NVvW adviseert u om voldoende budget ter beschikking te stellen voor nascholing.*

Invoering

De resultaten van de eerste landelijke wiskunde B/C/D-

examens volgens de huidige programma's in 1996/'97 en 1997/'98 zouden wel eens bepalend kunnen zijn voor wat wenselijk en haalbaar is voor respectievelijk kerndeel-kort, -lang en verrijking. Wij beseffen echter het probleem dat de landelijke B-examens nog niet verplicht zijn, waardoor een zuivere analyse hiervan wellicht niet mogelijk is.

** De NVvW adviseert u om een grondige analyse te laten maken van de resultaten van de wiskunde B/C/D-examens in 1996/'97 en 1997/'98, en op grond daarvan zonodig aanpassingen door te voeren.*

In eerdere brieven hebben wij onze bezorgdheid uitgesproken over de snelheid waarmee de nieuwe examenprogramma's moesten worden ontwikkeld en de tijdsdruk waaronder de vakontwikkelgroep moest werken. De leerlingen in het vso-lom, ivbo, vbo en mavo maken meer dan 60% uit van het aantal leerlingen in het voortgezet onderwijs. Hoe evenwichtiger, beter afgewogen, hun examenprogramma wordt, hoe betere basis zij kunnen leggen voor de rest van hun leven.

Gaarne zouden wij in de gelegenheid gesteld worden over het bovenstaande mondeling met u van gedachten te wisselen,

namens het bestuur van de NVvW,

W. Kuipers, secretaris

Nationale Wiskunde Dagen 1998

Op vrijdag 30 januari en zaterdag 31 januari 1998 zullen inmiddels voor de vierde keer de Nationale Wiskunde Dagen worden gehouden. Dit jaar zullen, onder voorbehoud, de volgende thema's aan de orde komen:

- Wiskunde om de wiskunde;
- Wiskunde en geschiedenis;
- Wiskunde en taal;
- Wiskunde en luchtvaart;
- Wiskunde en medische wetenschap;
- Wiskunde en sterrenkunde.

De Nationale Wiskunde Dagen worden georganiseerd door het Freudenthal instituut.

Aanmeldingsformulieren worden in augustus aan de scholen verzonden. Wilt u op uw huisadres een aanmeldingsformulier ontvangen, dan kunt u een briefje of een e-mail zenden aan:

Nationale Wiskunde Dagen
t.a.v. Ank van der Heiden
Freudenthal instituut
Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht



Vermeldt u: naam, privé-adres,
naam en adres school en telefoonnummer.
e-mail: nwd@fi.ruu.nl [www: www.fiu.nl/nwd](http://www.fiu.nl/nwd)

Drie korte cursussen voor wiskunde-docenten door de TU Delft

Achtergronden van de Vlakke Meetkunde in het vwo-profiel Natuur & Techniek

door prof. dr. J.M. Aarts en mw. drs. A. Verweij,
vier dinsdagmiddagen van 15.00 uur tot 18.00 uur, op
30 september, 28 oktober, 18 november en 9 december 1997
Kosten: f 300,-

Computergebruik bij Wiskunde in de bovenbouw van havo en vwo

door dr. H.J. Smid en mw. drs. A. Verweij
drie dinsdagmiddagen van 15.00 uur tot 18.00 uur, op
6 januari, 27 januari en 17 februari 1998 Kosten f 225,-

Achtergronden van de Voortgezette Kansrekening in de vwo-profielen Natuur & Techniek en Natuur & Gezondheid

door dr. G. Hooghiemstra en mw. drs. A. Verweij
twee dinsdagmiddagen van 15.00 uur tot 18.00 uur,
op 10 maart en 31 maart 1998 Kosten: f 150,-

Informatie en inschrijving:

Secretariaat van de Vakgroep Algemene Wiskunde
mw. C.A. van Baar
Mekelweg 4, 2628 CD Delft, tel. 015 - 278 7221
fax 015 - 278 7245 e-mail C.A.vanBaar@twi.tudelft.nl

De XXXVIIe Internationale Wiskunde Olympiade 1996

J.G.M. Donkers

Inleiding

In 1996 werd de 37e Internationale Wiskunde Olympiade gehouden van 5 tot 17 juli in Mumbai (Bombay), India. Er waren 424 deelnemers uit 75 landen. De Nederlandse ploeg bestond uit de volgende leerlingen:

Dion Gijswijt, Almere	18
Roel Harbers, Margraten	18
Gerben de Klerk, Middelburg	18
Erik Postma, Eemnes	17
Mark Reinders, Scheemda	18
Kees van Schenk Brill, Eindhoven	17

De wedstrijd vond plaats op 10 en 11 juli in de gebouwen van het Atomic Centre in Mumbai. De deelnemers kregen op beide dagen vierenhalf uur voor drie opgaven. Van de 424 deelnemers kregen er 200 een prijs (medaille + oorkonde); 35 goud (28 t/m 42 punten), 66 zilver (20 t/m 27 punten) en 99 brons (12 t/m 19 punten). Verder ontvingen nog 20 deelnemers een eervolle vermelding. (Degenen die buiten de prijzen vallen maar wel voor ten minste één opgave de maximale score van 7 punten hebben behaald krijgen een eervolle vermelding.)

Alleen Ciprian Manolescu uit Roemenië behaalde de maximale score van 42 punten. In het officiële landenklassement kwam Roemenië op de eerste plaats met 187 punten, gevolgd door de Verenigde Staten met 185 en Hongarije met 167 punten. Nederland kwam op de 59e plaats met 26 punten. Tijdens de slotbijeenkomst nodigde de vertegenwoordigster van Argentinië alle landen uit in 1997 aanwezig te zijn bij de 38e Olympiade in Mar del Plata in Argentinië.

De Nederlandse ploeg

De scores van de Nederlandse deelnemers waren als volgt:

Opgave:	1	2	3	4	5	6	tot
Dion	2	0	2	0	0	0	4
Roel	2	0	1	1	0	0	4
Gerben	1	0	1	0	0	0	2
Erik	2	0	1	0	0	1	4
Mark	4	0	1	0	1	0	6
Kees	4	0	1	0	0	1	6
tot	15	0	7	1	1	2	26

Dit jaar werd de ploeg begeleid door Jan Donkers en Sander van

Rijnswou, beiden werkzaam aan de Technische Universiteit in Eindhoven. Hoe is de Nederlandse ploeg tot stand gekomen? Uit de 3037 deelnemers aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1995 (afkomstig van 264 scholen) werden de 105 beste toegelaten tot de tweede ronde die in september 1995 gehouden werd aan de Technische Universiteit in Eindhoven. De beste vijftien van de tweede ronde kregen een uitnodiging om deel te nemen aan de training voor de Internationale Wiskunde Olympiade. De training, die evenals voorgaande jaren werd verzorgd door J. Donkers, begon met een trainings-weekend in november 1995 en werd vervolgd door middel van lesbrieven. Ten slotte was er in de eerste week van juni nog een vijfdaags trainingskamp. Direct na het laatste kamp werd de samenstelling van de ploeg bekend gemaakt. De trainingskampen worden ieder jaar gehouden in de jeugdhierberg in Valkenswaard. Een belangrijk deel van de trainingsactiviteiten tijdens deze kampen en van de organisatie is in handen van oud-olympiade-winnaars. Dit jaar waren dat: Ronald de Man (AIO, TUE), Wim Oudshoorn (AIO, RUG) en Sander van Rijnswou (AIO, TUE).

Voor de leden van de ploeg was er in de eerste week van juli nog een kort trainingskamp van twee dagen aan de TU in Eindhoven.

De selectie van de opgaven

Dat het een bijzondere olympiade zou worden was vooraf al duidelijk. Tot februari leefden we in de veronderstelling dat de olympiade in New Delhi zou plaats vinden. Plotseling kregen we een e-mail dat de organisatie nog niet rond was. Ontsteltenis alom. Eind februari kregen we te horen dat de wedstrijd in Bombay zou worden gehouden. Alle reeds

geboekte reizen moesten worden aangepast. Alle juryleden waren ondergebracht in het luxueuze hotel The Retreat aan de Erangel

Dat het een moeilijke olympiade zou worden stond voor ons wel vast. Dat er slechts één deelnemer de maximale score van 42 punten

blijven van het Atomic Centre. Dit is een groot researchinstituut, eigenlijk een stad op zich, helemaal ommuurd, met eigen woonwijken,

SCORE										
opg	0	1	2	3	4	5	6	7	tot (stud.)	gem score
1	65	30	98	26	111	17	12	63	422	3,19
2	173	124	10	5	11	6	2	88	419	2,06
3	48	176	73	22	14	19	19	52	423	2,40
4	177	109	11	17	11	7	6	86	424	2,12
5	307	74	18	7	4	4	0	6	420	0,50
6	195	79	16	15	3	6	10	99	423	2,25

Beach in het noordwesten van de stad. Ieder deelnemend land heeft één lid in de jury, die vijf dagen voor de wedstrijd bijeenkomt om de zes opgaven te selecteren. Tot en met de tweede wedstrijddag blijven de juryleden gescheiden van hun ploegen. Uit de 106 opgaven die door de verschillende landen waren ingezonden had de vraagstukkencommissie, bestaande uit wiskundigen van het organiserende land, er 30 geselecteerd; 9 opgaven algebra, 9 meetkunde, 5 getaltheorie en 7 combinatoriek. Daaruit moest de jury zes opgaven selecteren voor de wedstrijd. Er volgden enkele dagen van verhitte discussies. Enkele malen werd de vergadering uitgesteld omdat de leden meer tijd nodig hadden om de opgaven zelf te maken. Enkele opgaven vielen af omdat ze bekend waren of te veel gelijkenis vertoonden met reeds bekende opgaven. Anderen vielen af omdat ze te ‘eenvoudig’ werden bevonden. Er resteerden zo’n twintig opgaven waaronder er enkele waren die geen enkel jurylid had kunnen oplossen. Maar dat is geen criterium om zulke opgaven niet te selecteren. De topleerlingen zijn beter in het oplossen van olympiade-opgaven dan de meeste juryleden, waarvan er verschillende zelf olympiade-deelnemer zijn geweest.

zou halen en slechts zes deelnemers de maximale score voor opgave vijf, kwam als een verrassing. Daarmee is opgave vijf één van de moeilijkste olympiade-opgaven ooit. Om u enig idee te geven van het scoreverloop staat hierboven de scorematrix. Daarin kunt u zien dat bijvoorbeeld van de 420 leerlingen die opgave vijf hebben ingeleverd er slechts zes zijn die het maximum van 7 punten hebben gescoord.

Rondom de olympiade

Op zondag 7 juli kwam onze ploeg in Bombay aan. Alle ploegen werden ondergebracht in de gastenver-

winkelcentra, scholen en zelfs een eigen ziekenhuis. Het onderkomen was sober. De eerste dagen heeft ons team de stad bezocht. Dat was een hele belevenis. In Bombay leven ongeveer 14 miljoen mensen op een beperkte ruimte (schiereiland), er zijn nauwelijks snelwegen op verschillend niveau en er is geen ondergrondse. Kortom, er heerst een voortdurende verkeerschaos. Ongeacht het vervoermiddel kost het verplaatsen veel tijd. Bovendien was het er warm en vochtig. Toen ook het eten niet goed viel, meldde zich al snel de eerste zieke. Waren er op woensdag, de eerste wedstrijddag, slechts twee leden van de ploeg zonder klachten, de volgende



In de tuin van het Tata Instituut. V.l.n.r.: Sander, Mark, Erik, Kees, de gids, Gerben, Dion en Roel.

dag, de tweede wedstrijddag, voelde iedereen zich ziek; buikkramp, diarree en misselijkheid. De andere westerse teams hadden allen in meer of mindere mate met dezelfde problemen te kampen. Al met al maakte dit de wedstrijd extra zwaar. Na de wedstrijd voelden de meesten zich slap. De mogelijkheden tot ontspanning waren zeer beperkt. Toch bewaart onze ploeg goede herinneringen aan de vele hartelijke contacten met verschillende andere teams. De grote excursie voerde na een bustocht van 4 à 5 uren naar de tempels van de stad Puna, stad van de vele religieuze sekten en goeroes, alwaar een Indiaas echtpaar pogingen in het werk stelde hun 14-jarige dochter aan een stoere, gezonde, blonde Hollandse jongen uit te huwelijken. Tevergeefs. De scherpe contrasten en de voor ons vreemde cultuur hebben diepe indruk gemaakt. De bustochten door Bombay voerden soms langs eindeloze krottenwijken, maar ook zagen we vele vrouwen en meisjes in hun prachtige sari's, schoolgaande kinderen in keurige schooluniformen om weer later te moeten stoppen voor een groep runderen op de weg. De slotbijeenkomst was in het mooie en beroemde Tata Institute of Fundamental Research in het centrum van Bombay, waar verschillende bekende Indiase wiskundigen en natuurkundigen hun domicilie hebben. Ook bij deze bijeenkomst liep niet alles op rolletjes; de jury en alle begeleiders, in vier grote bussen om één uur vertrokken vanaf het hotel voor een tocht van zo'n 25 km door de stad, arriveerden pas tegen vijven bij het Tata Instituut, waar de prijsuitreiking om vier uur was begonnen. Zoals u inmiddels zult hebben begrepen vereist het organiseren van een olympiade de nodige improvisatie, speciaal wanneer men die in een stad als Bombay organiseert. Wat wel op rolletjes liep waren de

HET LANDENKLASSEMENT

1	Roemenië	187	39	Finland	58
2	de Verenigde Staten	185	40	Zweden	57
3	Hongarije	167	41	Moldavië (5)	55
4	Rusland	162	42	Oostenrijk	54
5	Engeland	161	43	Zuid-Afrika	50
6	China	160	44	Mongolië	49
7	Vietnam	155	45	Slovenië	49
8	Zuid-Korea	151	46	Colombia	48
9	Iran	143	47	Thailand	47
10	Duitsland	137	48	Denemarken	44
11	Bulgarije	136	49	Macao	44
12	Japan	136	50	Macedonië	44
13	Polen	122	51	Spanje	44
14	India	118	52	Brazilië	36
15	Israël	114	53	Mexico	34
16	Canada	111	54	Sri Lanka	34
17	Slovakië	108	55	Estland	33
18	Oekraïne	105	56	IJsland (4)	31
19	Turkije	104	57	Bosnië-Herzegovina (4)	30
20	Taiwan	100	58	Azerbeidzjan	27
21	Wit-Rusland	99	59	Nederland	26
22	Griekenland	95	60	Trinidad\Tobago	25
23	Australië	93	61	Ierland	24
24	Joegoslavië	87	62	Zwitserland (4)	23
25	Italië	86	63	Portugal	21
26	Singapore	86	64	Kazachstan	20
27	Hongkong	84	65	Marokko	19
28	Tsjechië	83	66	Cuba (1)	16
29	Argentinië	80	67	Albanië (4)	15
30	Georgië	78	68	Kirgizië	15
31	België	75	69	Cyprus (5)	14
32	Litouwen	68	70	Indonesië	11
33	Letland	66	71	Chili (2)	10
34	Armenië	63	72	Maleisië (4)	9
35	Kroatië	63	73	Turkmenistan (4)	9
36	Frankrijk	60	74	de Filippijnen	8
37	Nieuw-Zeeland	60	75	Koeweit (3)	1
38	Noorwegen	60			

correctiebesprekingen. De Indiase wiskundigen beheersten de opgaven perfect en de correctie evenals het toekennen van de waarden was objectief.

Hierboven staat nog het landenklassement.

De opgaven staan op de volgende pagina afgedrukt.

De opgaven met uitwerkingen zijn eerder verschenen in het tijdschrift Pythagoras.

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur

Version: Dutch

1. Een rechthoekig bord $ABCD$ met $AB = 20$ en $BC = 12$ is verdeeld in 20×12 eenheidsvierkanten. Op dit bord zijn alleen de volgende zetten toegestaan: men mag van een eenheidsvierkant naar een ander indien de afstand tussen de twee middelpunten van deze vierkanten gelijk is aan $\sqrt{r}$, waarin r een gegeven geheel getal is groter dan nul. Men probeert nu een serie zetten te vinden die, achtereenvolgens uitgevoerd, leidt van het eenheidsvierkant met hoekpunt A naar het eenheidsvierkant met hoekpunt B .

- (a) Laat zien dat zo'n serie zetten niet bestaat als r deelbaar is door 2 of door 3.
 (b) Bewijs dat zo'n serie zetten wel bestaat als $r = 73$.
 (c) Bestaat er zo'n serie zetten als $r = 97$?

2. P is een punt binnen driehoek ABC zodanig dat

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

D en E zijn de middelpunten van de ingeschreven cirkels van respectievelijk de driehoeken APB en APC .

Bewijs dat AP , BD en CE elkaar in één punt snijden.

3. $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ is de verzameling van de niet negatieve gehele getallen. Bepaal alle functies f die gedefinieerd zijn op S en waarvan de functiewaarden ook tot S behoren, zó dat

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n) \text{ voor alle } m, n \text{ in } S.$$

Voor elk probleem maximaal 7 punten.

37^e INTERNATIONALE WISKUNDE OLYMPIADE, Bombay 1996
 Tweede dag (11 juli, 1996)

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur

Version: Dutch

4. De gehele getallen a en b met $a > 0$ en $b > 0$, zijn zodanig dat de getallen $15a + 16b$ en $16a - 15b$ kwadraten zijn van positieve gehele getallen. Bepaal de kleinste waarde die kan worden aangenomen door het minimum van deze twee kwadraten.
5. $ABCDEF$ is een convexe zeshoek in het vlak, zodanig dat AB evenwijdig is met ED , BC evenwijdig met FE en CD evenwijdig met AF . Laat R_A , R_C en R_E de stralen zijn van de omgeschreven cirkels van de driehoeken FAB , BCD en DEF respectievelijk en laat p de omtrek zijn van de zeshoek. Bewijs dat
- $$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}.$$
6. De gehele getallen n , p en q zijn allen groter dan nul en $n > p + q$. $x_0, x_1, \dots, x_n$ zijn gehele getallen die aan de volgende voorwaarden voldoen:
- (a) $x_0 = x_n = 0$;
 (b) voor ieder geheel getal i , met $1 \leq i \leq n$, geldt

$$x_i - x_{i-1} = p \text{ of } x_i - x_{i-1} = -q.$$

Toon aan dat er een paar (i, j) van indices bestaat met $i < j$ en $(i, j) \neq (0, n)$ zodanig dat $x_i = x_j$.

Voor elk probleem maximaal 7 punten.

H.J. Smid

EEN ONBEKOOKTE NIEUWIGHEID? Invoering, omvang, inhoud en betekenis van het wiskundeonderwijs op de Franse en Latijnse scholen 1815-1863

Delft University Press

ISBN 90-407-1442-8

Harm Jan Smid is op 22 april jongstleden in Delft gepro-moveerd op een studie onder bovengenoemde titel. In zijn proefschrift doet hij verslag van zijn naspeuringen in de archieven van een groot aantal scholen, in het Rijks-archief, zowel dat in Den Haag als in een aantal provin-ciehoofdsteden. Ook heeft hij een behoorlijk aantal schoolboeken uit die tijd grondig bekeken. Het resultaat is een goed leesbaar verhaal waarin de lezer een beeld wordt gegeven van de invoering, omvang, inhoud en betekenis van het wiskundeonderwijs in de Franse en Latijnse scholen.

In 1815 werd door koning Willem I een koninklijk besluit getekend waarin de organisatie van het hoger onderwijs werd geregeld. De Latijnse scholen werden als eerste trap van het hoger onderwijs beschouwd. Zij het hadden het recht om leerlingen die de school voltooid hadden te promoveren naar de universiteit. En de regeling van deze scholen werd dan ook in dit besluit vastgelegd. Op de Latijnse scholen moest, behalve in de oude talen, onder-wijs gegeven worden in de beginselen van de wiskunde, de nieuwe en oude geschiedenis, de nieuwe en oude aardrijkskunde en de Griekse en Latijnse fabelkunde. Voor het eerst werd hier voor een onderdeel van wat wij nu het algemeen voortgezet onderwijs noemen, wiskun-de als verplicht vak opgevoerd. Toch betekende dit niet zo heel veel. Het werd aan het eind van de dag na afloop van het dagelijks onderwijs in de oude talen gegeven: een soort rest-onderwijs dus. De Franse school was een verzamelaar voor een groot aantal scholen die wij tot het middelbaar onderwijs zouden rekenen. Sommige Franse scholen leidden op voor het toelatingsexamen van een aantal beroepsscholen: de artillerie- en genie-school te Delft, de Koninklijke Militaire Akademie te Bre-da, de opleiding van de Marine te Medemblik en de Koninklijke Akademie te Delft. In 1863 werd de m.o.-wet van Thorbecke van kracht: de HBS was geboren. Daar was wiskunde het belangrijkste vak.

In zijn studie probeert de auteur de volgende vraag te beantwoorden. Werd het wiskundeonderwijs vanaf 1863 vrijwel uit het niets gecreëerd, of was er sprake van een continuïteit, gegeven wat er tussen 1815 en 1863 was gebeurd? Het antwoord vindt hij door de volgende aspecten te bespreken. Welke invloeden waren op het wiskundeonderwijs werkzaam, wat waren de motieven van de betrokken partijen, welke invloed had hun hande-len? Hoe zag het wiskundeonderwijs eruit (programma, urenaantallen, schoolboeken, leerlingenaantallen, oplei-ding en achtergrond van de docenten)? Wat was de betekenis van en waardering voor het wiskundeonder-wijs (vergeleken met Pruisen, de relatie met het beroepsonderwijs en de maatschappelijke functie)?

Na een schets van de voorgeschiedenis en het culturele klimaat in de achttiende en begin negentiende eeuw, het handelen van de overheid en de publieke discussie rond het wiskundeonderwijs (onder andere over de vormende waarde ervan) wordt in drie periodes een beeld van de feitelijke gang van zaken in het wiskundeonderwijs op de Latijnse scholen geschetst.

De eerste periode liep van 1815 tot 1826. In deze periode was er weinig of geen sturing door de overheid. De lokale overheden voerden hun eigen beleid. In Deventer, zo blijkt uit de staat van inlichtingen van 1816 (de scholen waren verplicht een dergelijke staat regelmatig naar Den Haag te sturen) werd 'er verder geen onderwijs dan voor het verstaan van de (antieke) schrijvers nodig is' gege-ven. In Amsterdam werd in datzelfde jaar een uitvoerige 'tafel voor het onderwijs in de wiskunde' opgesteld, inclu-sief verwijzingen naar paragrafen uit schoolboeken:

Klas 1

Onderwijs in de aard en het uitspreken van de decimale breuken: het adderen, subtraheren, multipliceren en divideren derzelve (*het decimale stelsel voor maten en gewichten was in de Franse tijd ingevoerd en nadien gehandhaafd*).

Herhaling van dat onderwijs, met bijvoeging van de ver-wisseling van gewone breuken in decimale, en omge-keerd. Onderwijs in de leer van de evenredigheden, daar-toe een enkel getal gebruikende; voorts uitlegging van het nieuwe matenstelsel, enkel voor de lange maten (*dit laatste was met de hand onderstrept*).

Klas 2

Beginnelen der meetkunde. Enkele denkbeelden van de algebra en van de vier species daarin.

Klas 3

Leer der rechte lijnen en driehoeken; verder onderwijs in de algebra, betrekkelijk de leer van de evenredigheden en van de machten.

Klas 4

Leer van de veelhoeken, de leer van het nieuwe matenstelsel voor de maten van oppervlakte en de landmaten. In de algebra tot de beginsels van de vergelijkingen en het trekken van de kwadraatwortels.

Klas 5

Leer van de lichamen. Hierbij de uitlegging van het nieuwe matenstelsel voor de inhoudsmaten en de gewichten. In de algebra de leer van de vergelijkingen, oplossing van vraagstukken; trekken van de kubiekwortels. Hierbij te voegen de wiskundige geografie en het gebruik van de globe.

In de tweede periode, 1826-1838, heeft de overheid veel sturing: nadere precisering van het programma en een poging tot het stellen van bevoegdheidseisen. Door de overheidsbemoeienis én door de schoolboeken en geschriften van Jacob de Gelder kwam er redelijk wat eenheid. Daarbij richtte De Gelder zich vooral op het wiskundeonderwijs op de Latijnse scholen. Hij was van mening dat wiskunde hier wel degelijk thuis hoorde: 'wiskundige studieën, verenigd met de letterkunde, beschaven het verstand, vormen de smaak, geven aan het gehele uiterlijk van de mens een beminnelijke ingetogenheid en een ongemaakt deftig voorkomen'. De geschriften van De Gelder riepen overigens heel wat weerstand op. Zo meende in 1826 een criticus dat 'de wetenschappelijke oefeningen niet reeds op de Latijnse scholen begonnen moesten worden: dit houden wij voor een zeer schadelijke en alleszins ondoelmatige en onbekookte nieuwigheid'.

De laatste periode, 1838-1863, werd gemarkeerd door de opkomst van de gymnasia, scholen met twee afdelingen: de eerste afdeling was in feite de voortzetting van de Latijnse school, de tweede afdeling een school zonder Latijn en Grieks en met wiskunde op de eerste plaats. Soms waren het volkomen gescheiden scholen, soms was er wat wij een gemeenschappelijk brugjaar zouden noemen. Onder invloed van de tweede afdeling nam ook het wiskundeonderwijs op de Latijnse scholen en de eerste afdelingen toe. De auteur zegt zelfs dat er voor het programma teveel uren waren. Hij leidt dat af uit het feit dat veel leerlingen al aan het eind van de voorlaatste klas via het staatsexamen toegang tot de universiteit verwierven. In deze periode groeide het beroep van wiskundeleraar tot een volwaardig beroep. In de eerste en tweede periode waren het veelal de klasdocenten (docenten klassieke talen) of onderwijzers uit het lager onderwijs met belangstelling voor wiskunde die het wiskundeonderwijs verzorgden. Een voorbeeld van een leerplan uit deze periode is dat van het Haags gymnasium uit 1852:

Klas 1

Rekenkunde: de vier 'hoofdregels', deelbaarheidkenmerken, gewone en decimale breuken, het decimale stelsel van maten en gewichten en het begin van de evenredigheden; begin van de stekunde (algebra): worteltrekkingen (mogelijk) iets van vergelijkingen en meetkunde, waaronder de stereometrie.

Klas 2

Stekunde: het bewijzen van de stekundige formules en de vergelijkingen; begin van de meetkunde: een soort vormleer.

Klas 3

Vlakke meetkunde: evenwijdige en loodrechte lijnen, gelijke en gelijkvormige driehoeken. Uitbreiding van de stekunde en toepassing op allerlei vraagstukken. De cijferkunde werd herhaald en uitgebreid met reeksen en logaritmen (meestal via rekenkundige en meetkundige rijen).

Klas 4

Afronding van vlakke meetkunde, voortgezet in de stereometrie, gonio- en trigonometrie; herhaling stekunde en cijferkunde; uitbreiding van de stekunde met het binomium van Newton, exponentiële vergelijkingen en de leer van de combinaties.

Opmerkelijk is dat korte tijd in deze derde periode, van 1845 tot 1850, slagen voor het staatsexamen verplicht was voor toelating tot de universiteiten. In het betreffende Koninklijk Besluit worden onderwijskundige argumenten aangevoerd: de studenten kwamen te slecht voorbereid op de universiteit, het staatsexamen zou leiden tot meer 'gelijkvormigheid en gepaste strengheid'. Wiskunde was één van de vakken van het staatsexamen. Het programma omvatte cijfer- en stekunde en meetkunde. Echter, na het aan de macht komen van Thorbecke in 1848 werd in 1850 het slagen voor het staatsexamen als voorwaarde voor toelating afgeschaft, de deelname bleef verplicht tot ook die verplichting in 1852 verviel. Een dergelijke inmenging van de overheid paste niet in de liberale visie.

Na ook het wiskundeonderwijs op de Franse scholen en de situatie op de Latijnse scholen, gymnasia en de hbs-en na 1863 beschreven te hebben beantwoordt Harm Jan Smid aan het eind van zijn studie de centrale vraag: kwam in 1863 het wiskundeonderwijs min of meer uit het niets of was er eerder sprake van een continuïteit? Zijn antwoord is eenduidig: er is sprake van continuïteit. Het wiskundeonderwijs op de Latijnse en Franse scholen was niet onbeduidend of achterlijk. Wel was de creatie van de HBS voor het wiskundeonderwijs een belangrijke stap vooruit, met name door de betere scholing van de docenten en de instelling van het eindexamen (voor de HBS, pas in 1935 kwam dat er ook voor de gymnasia). De essentiële overgang naar een modern systeem met vakken en vakleer-

krachten had zich al in de veerti-
ger jaren van de negentiende
eeuw voltrokken.

Tot slot geeft de auteur de naar
zijn inzicht belangrijkste factoren
voor de opkomst van het wiskun-
deonderwijs. Dat waren: niet het
praktisch belang van wiskunde
voor de aanstaande beroepsuitoefening, wel de vormende waarde,
in de zin van het gebruik en de
waarde van wiskunde voor de
opvoeding; voorts de selectiefunc-
tie die wiskunde steeds meer
kreeg, overigens ten koste van de
vormingswaarde. Als reden voor
dit laatste voert de auteur aan de
overgang van een standenmaat-
schappij, waar geboorte allesbe-
palend was, naar een klassen-
maatschappij, waarin in principe
en lang niet zonder problemen
opleiding toegang tot een hogere
klasse kon verschaffen.

Opvallend is dat de centrale over-
heid bij het hele proces maar een
beperkte invloed heeft gehad: zij
nam wel belangrijke initiatieven,
maar had nauwelijks invloed op
het feitelijke verloop.

Zoals gezegd geeft het boek een
goed beeld van de ontwikkeling
van wiskundeonderwijs en de
achtergronden daarvan in een
groot deel van de vorige eeuw.
De lezer zal de neiging niet kun-
nen onderdrukken om dat te ver-
gelijken met wat er nu aan de
hand is. De auteur doet dat maar
heel af en toe. Het hoort ook niet
bij de onderzoeksvraag.

Hoewel de geschiedenis zich niet
herhaalt, zijn er voor nu uit de stu-
die een aantal lessen te trekken.
Voor mij was zo'n les dat ook zon-
der een sterke centrale aansturing
er vooruitgang in wiskundeonder-
wijs geboekt kan worden.

Bert Zwaneveld

40 jaar geleden

3707. Op een rechthoekig assenstelsel is gegeven de
parabool p met vergelijking $y^2 = 4ax$. Men beschouwt
alle puntenparen (A, B) van p met de eigenschap, dat
de afstand van de projecties van zo'n puntenpaar op de
topraaklijn van p constant is. Bepaal de meetkundige
plaats van het snijpunt S van de normalen in A en B .
Schets de gevonden meetkundige plaats voor het geval
de bedoelde afstand a is ($a > 0$).

3708. Op een rechthoekig assenkruis zijn gegeven een
orthogonale hyperbool en een cirkel, opvolgend met
vergelijkingen $x^2 - y^2 = k^2$ en $x^2 + y^2 - 2kx = 0$. In
de cirkel beschrijft men driehoeken, wier zijlijnen aan
de hyperbool raken. Bepaal de meetkundige plaats van
de hoogtepunten van deze driehoeken.

3709. Van een driehoek ABC , waarvan de zijden vol-
doen aan $c^2 = 4ab$ zijn de hoekpunten A en B vast en
het hoekpunt C veranderlijk. De raaklijn in C aan de
omgeschreven cirkel van zo'n driehoek snijdt AB in C_1 .
Het raakpunt van de omgeschreven cirkel met de van
 C_1C verschillende raaklijn uit C_1 zij P . Bepaal de meet-
kundige plaats van P .

3710. Als men voor een scherphoekige, niet-gelijkzij-
dige driehoek ABC met hoeken α , β en γ de scherpe
hoek φ zo bepaalt, dat $8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \cos^2 \varphi$, is
het verschil tussen de grootste en de kleinste hoek van
 ΔABC kleiner dan φ . Bewijs dit. Toon verder aan, dat
elk van de hoeken van ΔABC gelegen is tussen $\arccos \frac{1}{2}(1 + \sin \varphi)$ en $\arccos \frac{1}{2}(1 - \sin \varphi)$.

3711. Als n een natuurlijk getal is en $n - 1$ en $n + 1$
priemgetallen zijn, is $n^2(n^2 + 16) \equiv 0, \text{ mod. } 720$.
Bewijs dit.

Vraagstukken uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 44 (1956-1957)

Kranten en kakkerlakken

BRASILIA Arme Brazilianen zijn eerder deze week massaal op jacht gegaan naar kakkerlakken. Een laboratorium in de stad Brasilia wendt de beesten aan voor onderzoek. Het bedrijf is bereid voor een ons kakkerlakken 45 gulden op tafel te leggen. Voor het onderzoek, dat is bedoeld om een nieuw vaccin tegen allergie te ontwikkelen, is vooralsnog vijf kilo nodig. Omgerekend zou het om een aantal van 600 duizend kakkerlakken gaan.

Hiernaast zie je een stukje uit de Volkskrant van februari 1997. Of eigenlijk, je ziet een vergroting. Ik heb het stukje vergroot, omdat ik het dan beter leesbaar vind.

Het is eigenlijk heel raar, maar als je op het kopieerapparaat op onze school iets wil vergroten, dan staan daar rare getallen: 115, 122, 141.

Dit vergrote stukje is vergroot met 141. Dat betekent dat alle zijden tot 141% vergroot zijn vergeleken met het stukje, zoals het in de krant stond.

- 12** Je moet nu nauwkeurig het stukje gaan meten en berekenen wat de afmetingen van het stukje in de krant waren.

Een krantenpagina heeft de afmetingen 59 x 42 cm. Om de tekst is een witte lijst van 2 cm breed. (Zie de schets op de volgende bladzijde.)

- 13** Wat is de oppervlakte van de witte lijst van een krantenpagina?

Het kakkerlakkenverhaaltje stond op een pagina in de Volkskrant. Ik had zoiets ook al gelezen in het NRC-Handelsblad. Da's een krant waar bijna geen foto's of tekeningen in staan: bijna alleen maar tekst. Als dit stukje in NRC-Handelsblad had gestaan...

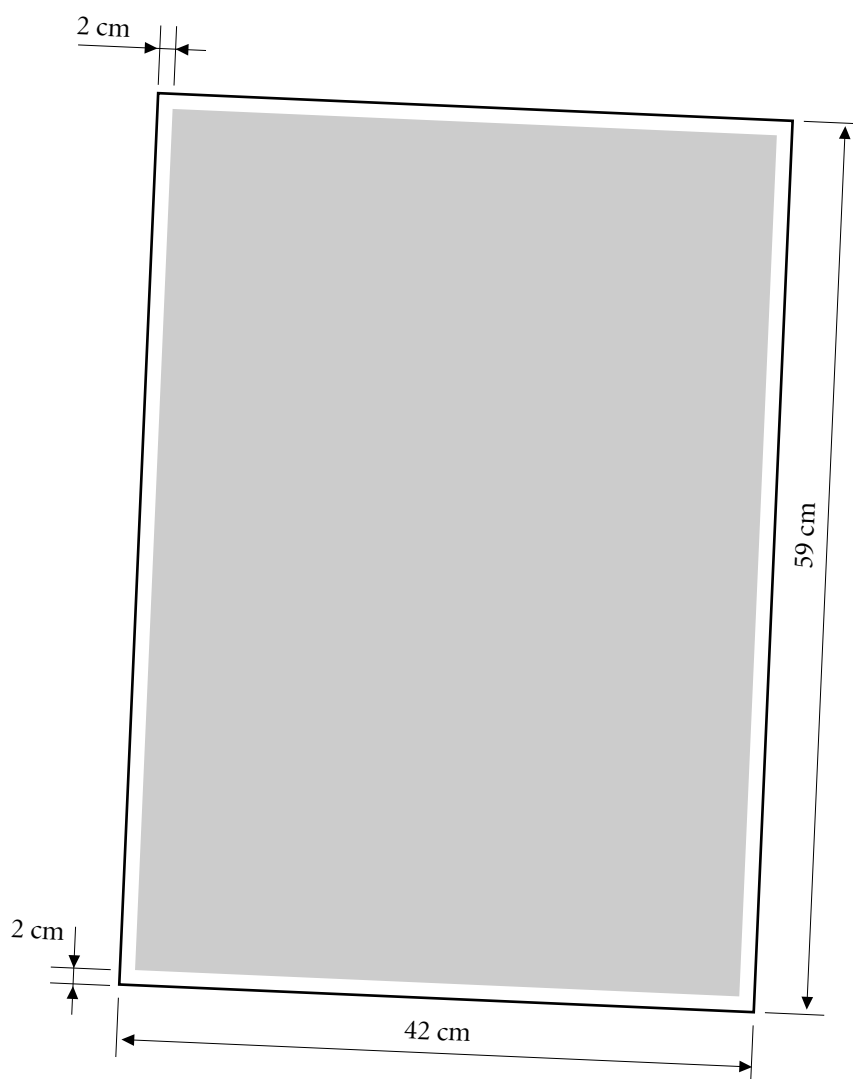
Werkblad

- 14** Hoeveel letters (+ spaties) zouden er dan op een hele krantenpagina in het NRC-Handelsblad staan?

Volgens de lerares machine-schrijven van onze school, mevrouw Braskamp, haalt een geroutineerde typiste zo'n 200 aanslagen per minuut (aanslagen = letters inclusief spaties).

- 15** Hoe lang doet een geroutineerde typiste dan over deze bladzijde?

- 16** Lees de tekst van het krantenartikeltje nog eens goed.
Hoeveel betaalt het laboratorium per kakkerlak?



Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

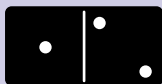
Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

Recreatieve

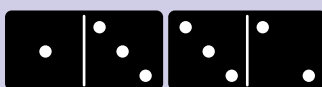
Als verzamelaar van wiskundige puzzels en spelletjes ben ik vooral geïnteresseerd in relatiegeschenken op dit gebied. Ook weggevertjes bij produkten zijn vaak een puzzeltje of spelletje. Afgelopen maanden was er een actie van de firma Nestlé. In elke minizak van de merken KitKat, Nuts, Bros, Lion, Rolo en Smarties zat een gratis setje van 4 verschillende dominostenen. Zeven verschillende setjes vormen precies de 28 “101 Dalmatiërs” dominostenen, naar aanleiding van de gelijknamige film.

In de loop der jaren heb ik al verschillende boeken over dominospelen gelezen. Zelden worden er éénper-soonsspelen met dominostenen beschreven. Toch is er met de 28 stenen een leuk spel te spelen.

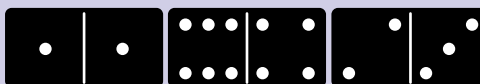
Neem de 28 stenen van dubbel-blank tot en met dubbel-zes. Leg de stenen in de lengte tegen elkaar. De ogenaantallen hoeven niet te kloppen. Probeer nu vanaf 1 zover mogelijk door te tellen, waarbij aangrenzende velden mogen worden opgeteld. Met één steen kunnen we dan tot 3 tellen: 1, 2 en 1+2.



Met twee stenen komen we al tot 9:
1, 2, 3, 1+3, 3+2, 3+3, 1+3+3, 3+3+2 en 1+3+3+2.



Met drie dominostenen kunnen we al tot 17 tellen.



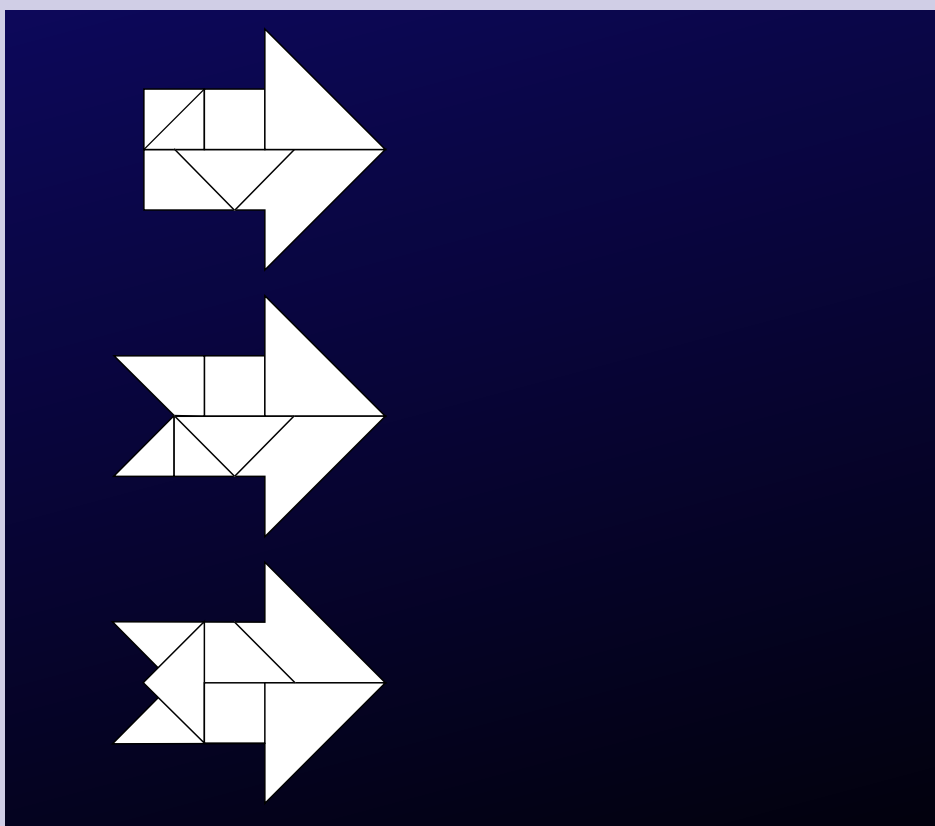
In het tijdschrift ‘Natuur & Techniek’ van april 1997 vindt u op bladzijde 56 de prijsvraag om met vier dominostenen zo ver mogelijk te tellen, uiteraard zonder getallen over te slaan.

De komende vakantiemaanden kunt u proberen om zover mogelijk te tellen met resp. 5 en 6 dominostenen. Als u uw resultaten binnen TWEE maanden inzendt, dan verdient u 5 punten voor de doorlopende ladderwedstrijd. Heel veel domino-plezier!

Oplossing 676

Naar aanleiding van de tentoonstelling in Mechelen over de Richter's Anker steenbouwdozen was er een alternatieve tangram gegeven van 7 stukjes. De bedoeling was om met deze stukjes drie verschillende pijlen te maken.

Van verschillende collega's heb ik begrepen dat ze de opgave gebruikt hebben op hun eigen school voor de leerlingen-puzzelwedstrijd. Zoals met zovele tangram puzzels zijn ook deze figuren vrij snel te leggen.



De meeste inzenders sturen een briefkaartje op met de drie oplossingen. Dat was dat. Gelukkig zijn er ook lezers die verder puzzelen. Hiervan wil ik er twee noemen. *René Meulemans* (15 punten), Brasschaat vond in totaal 18 verschillende oplossingen voor de drie pijlen. Helaas ontbreekt de ruimte om ze allemaal te tekenen. Desondanks heel veel dank hiervoor. Dank ook voor de vele nieuwe pijl-ontwerpen, die René instuurde. Ook *Monica Woldinga* (15 punten), Amstelveen vond vele alternatieve oplossingen. Ook hiervoor veel dank. Een veel moeilijker vraag is: hoeveel convexe figuren zijn er met de zeven puzzelstukjes te maken?

R
e
c
t
e
a
t
i
e

Met 68 punten is winnaar van een boekenbon van f 25,-:

Pieter Torbijn
Dignaland 7
2591 CA Den Haag

Hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

In de nieuwe jaargang verschijnen de nummers van Euclides rond 1 september, 15 oktober, 1 december, 15 januari, 15 februari, 15 maart, 30 april en 15 juni.	Vierkant Wiskundekampen 4 t/m 8 augustus 1997: groep 7/8 basisschool. 4 t/m 8 augustus 1997: 12-14 jaar (herhaling 1996). 11 t/m 15 augustus 1997: 13-16 jaar (nieuw progr.). VU: 020 - 4447776	Jaarvergadering en studiedag NVvW za. 15 november 1997 Thema: Veranderingen b(1)oeiend !? <i>Zie aankondiging blz. 311</i>	Internetsites voor wiskundedocenten: Wilt u de Tweede Kamer volgen bijvoorbeeld in verband met de beslissingen rond de Tweede Fase? www.parlement.nl
<i>In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Data melden bij de hoofdredacteur uiterlijk zes weken voor de verschijningsdatum.</i> <i>Dit kan ook via e-mail:</i> cph@xs4all.nl	Vakantiecursus 1997 Amsterdam: vr. 22 en za. 23 augustus 1997 Eindhoven: do. 28 en vr. 29 augustus 1997 Thema: Rekenen op het Toeval SMC/CWI: 020 - 5924172 <i>Zie aankondiging blz. 301</i>	Wiskunde A-lympiade vr. 28 november 1997 Freudenthal instituut: 030 - 2611611 <i>Aankondiging volgt later</i> Mathematische Modelleercompetitie za. 31 januari 1998 Voor 4, 5 en 6 vwo Maastricht <i>Aankondiging volgt later</i>	Bent u benieuwd naar de laatste berichten over de Nationale Wiskunde Dagen? www.fi.ruu.nl/nwd Zomerkampen en wiskundeclubs, van de zomer en volgend schooljaar? www.cs.vu.nl/~vierkant
Data in het nieuwe schooljaar <i>Wil iedereen die al data voor interessante bijeenkomsten heeft vastgelegd in het nieuwe schooljaar, deze zo snel mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur.</i> <i>Adres: zie colofon</i> <i>e-mail: cph@xs4all.nl</i>		Nationale Wiskunde Dagen vr. 30 januari/za. 31 januari 1998 Freudenthal instituut: 030 - 2611611 <i>Zie aankondiging blz. 316</i>	

H.G. Dehling en J.N. Kalma

Kansrekening, het zekere van het onzekere

Epsilon uitgaven: 36, Utrecht, 1995,

ISBN 90-5041-041-3

Boeken in het Nederlands over kansrekening zijn schaars, dus de bespreking van dit nieuwe boek was een goede aanleiding om eens te kijken wat er op dat gebied voorhanden is. Dat is nog verrassend veel. Onder de trefwoorden 'kansrekening' en 'waarschijnlijkheidsrekening' vond ik meer dan twintig titels, waaronder enkele onverwachte. Naast goede bekenden als (bijvoorbeeld) de boeken van J. Fabius en W.R. van Zwet, H. Freudenthal, A.G.P.M. Nijst en J.Th.M. Wijnen en A.J. Stam, en een aantal intreedes trof ik verschillende mij onbekende werken aan: twee proefschriften over toepassing van de waarschijnlijkheidsrekening in de natuurkunde (P.C. van Arkel (1922), RUL en D.H. Prins (1933), UvA) en, het meest verrassende van allemaal, J.M. Pool, *Leerboek der Waarschijnlijkheidsrekening en haar Toepassingen op de Theorie der Waarnemingsfouten*, Kon. Mil. Akad., Breda, 1938.

Tenslotte vermeld ik nog het boekje van een bekende Nederlandse wiskundige: F. Schuh, *Kansrekening*, Noordhoff, Groningen, 1922, dus ruim tien jaar voor het verschijnen van de axioma's van Kolmogorov, die ook ten grondslag liggen aan het boekje dat ik hieronder zal bespreken.

Bij het opzetten van een kennismakingscursus in de kansrekening heeft men maar weinig vrijheid; in de dertien hoofdstukken waaruit het boek bestaat, worden de volgende onderwerpen behandeld (niet precies de namen van deze hoofdstukken):

1. axioma's; 2. combinatoriek; 3. (on)afhankelijkheid; 4. discrete stochasten; 5. verwachting; 6. meerdimensionale discrete stochasten; 7. voortbrengende functies; 8. continue stochasten en hun verwachtingen; 9. meerdimensionale continue stochasten, momentenvoortbrengende functie; 10. centrale limietstelling; 11. Poisson-process; 12. statistische toepassingen; 13. sterke wet van de grote aantallen.

De laatste drie hoofdstukken kunnen als toevoegingen worden beschouwd op een standaardcursus; de eerste tien hoofdstukken laten maar weinig variatie toe. Ik beperk me daarom voornamelijk tot de vorm van het boek. Het is vlot geschreven en het zit degelijk in elkaar; er is een goed evenwicht tussen de wiskunde en de toepassing en er zijn veel goedgekozen voorbeelden en opgaven. Er zijn een paar opmerkelijke 'extra's': convergentie in totale variatie, iets over vertakingsprocessen en een bewijs van de sterke wet van de grote aantallen. Het boekje is wat veel toegespitst op een gehoor van Groningse eerste-jaars wiskundestudenten; de lezer wordt getutoteerd en krijgt van tijd tot tijd mededelingen als, 'Meer hierover hoor je in een college maattheorie' (iets wat niet iedere wiskundestudent in Nederland kan verwachten).

Een paar kritische opmerkingen. De naam Laplace wordt twee maal 'ijdel' gebruikt: op bladzijde 8 heet de symmetrische kansruimte 'Laplace-ruimte' en op bladzijde 68 wordt de term Laplace-verdeling, waarmee doorgaans de tweezijdige exponentiële verdeling wordt aangeduid, gebruikt voor de discreet-homogene verdeling. Soms worden onnodig 'deftige' termen gehanteerd: 'continu differentieerbaar, bijjectief' op bladzijde 61 en 'diffeomorfisme' op bladzijde 176. In opgave 5.5 wordt het paradoxale van de St.Petersburg paradox niet duidelijk. De spelling Chebychev voor Chebyshev is ongelukkig; in het Russisch is de eerste 'che' een andere dan de tweede. De boeken van Breiman en van Laha en Rohatgi zouden niet misstaan hebben in de literatuurlijst.

Het boek bevat een groot aantal plaatjes, sommige nuttig, sommige alleen als decoratie; de met de hand (niet met een tekenprogramma) gemaakte plaatjes geven het boek soms een wat rommelige aanblik. Fouten of drukfouten heb ik niet opgemerkt.

Op de eerste bladzijde staat een foto van Kolmogorov, grondlegger van de wiskundige kansrekening, met een korte levensbeschrijving. Het voorwoord wordt gevolgd door een afbeelding van Christiaan Huygens, auteur van de eerste verhandeling in het Nederlands over kansrekening, met een korte toelichting.

De wat lange opsomming van kleine bezwaren neemt niet weg dat dit een aardige en nuttige inleiding is tot de kansrekening met, ondanks de geringe speelruimte die zo'n boek kan bieden, een paar (aangenaam) verrassende bijzonderheden. Een welkome aanvulling op de Nederlandse kansrekeningliteratuur!

F.W. Steutel

Voorjaar 1998 verschijnen de nieuwe edities van **Moderne wiskunde** en **Netwerk**

- **Herziening basisvorming**

Gereed in het voorjaar van 1998:

- 4 nieuwe delen voor leerjaar 1:
(i)vbo, vbo-mavo, mavo-havo(vwo) en havo-vwo

- **Tweede fase havo-vwo**

Gereed in het voorjaar van 1998:

- 2 delen voor vwo-gemeenschappelijk
- 5 delen voor havo-profielen

*Na de zomervakantie
hoort u meer van ons....*

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

*Ook verkrijgbaar
via de boekhandel*

**Wolters
Noordhoff**