

Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

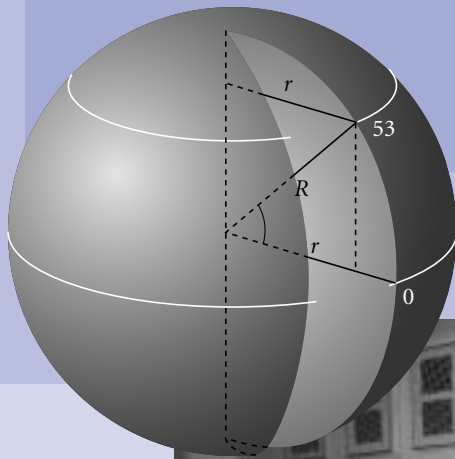
EUCLIDES

V a k b l a d v o o r d e w i s k u n d e l e r a a r

jaargang 72

1996-1997 maart

6

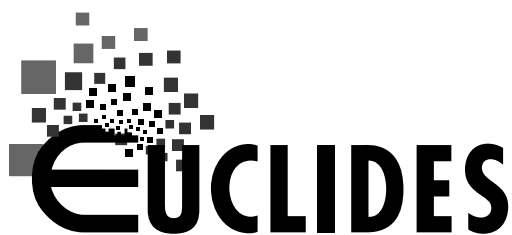


**Verslag Vierkant-
zomerkamp 1996**

**Verslag winter-
symposium 4-1-'97**

Kaartprojecties





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Redactie

Dr. A.G. van Asch
Drs. R. Bosch
Drs. J.H. de Geus
Drs. C.P. Hoogland *hoofredacteur*
Ir. W.J.M. Laaper *secretaris*
N.T. Lakeman
W. Schaafsma
Ir. V.E. Schmidt *penningmeester*
Mw. Y. Schuringa-Schogt *eindred.*
Mw. drs. A. Verweij
A. van der Wal
Drs. G. Zwaneveld *voorzitter*

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem.

Richtlijnen voor aanlevering:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
 - platte tekst op diskette: WP of ASCII
 - illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.
- Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint
Spiekerbrink 25
8034 RA Zwolle
tel. 038-4539985
Secretaris
W. Kuipers
Burg. Bijleveldsingel 38
8052 AP Hattem
tel. 038-4447017
Ledenadministratie
Mw. N. van Bommel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543

Contributie per ver. jaar: f70,00
Studentleden: f47,50
Leden van de VVWL: f50,00
Lidmaatschap zonder Euclides: f50,00
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: f80,00 per jaar. Voor instituten en scholen: f240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor f20,00.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritsshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of naar:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891.

Adresgegevens auteurs

M. Akveld, R. Iemhoff
Mathematisch Instituut
Niels Bohrweg 1
2333 CA Leiden

J. van den Brenk
Freudenthal Instituut
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht

L. van den Broek
Graafseweg 387
6532 ZN Nijmegen

T.H. Chen
4e Binnenvestgracht 44
2311 NV Leiden

M. v. Glabbeek
E. de Boer v. Rijkstraat 15
2331 HH Leiden

V.E. Schmidt
Verlengde Grachtstraat 43
9717 GE Groningen

J. Smit
Houtsnipaan 31
1873 JT Groet

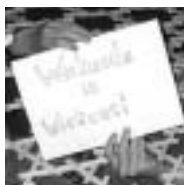
St. Willibrordcollege
Fruitlaan 3
4462 EP Goes

G. Zwaneveld
Bieslanderweg 18
6213 AJ Maastricht

Inhoud



223



236



240

222 Kees Hoogland
Van de redactietafel

223 Jan Smit, Leon van den Broek
Envelop met inhoud (2)

226 Waar zit de fout?

228 Bert Zwaneveld
**Over ICME-8, maar vooral
over het wiskundeonderwijs
in Zuid-Afrika**

INTERVIEW

230 Boekbespreking

231 Boekbespreking

232 Ingezonden brief

233 Reactie

234 T.H. Chen
**Is de wiskunde als een nacht-
kaars uitgegaan?**

236 Meike Akveld, Rosalie Iemhoff
Zomerkampen Vierkant, 1997

238 Aankondiging

239 Brief aan de staatssecretaris

NVvW

240 Jan van den Brink
**Mercatorprojectie en de
centrale projectie**

246 Michel van Glabbeek
TWIN: de stand van zaken

247 Aankondiging

248 Victor Schmidt
Een historische dag

251 40 jaar geleden

252 Werkbladen

254 Recreatie

256 Kalender

Net verschenen bij de SLO is de voorlichtingsbrochure Wiskunde havo/vwo met de actuele stand van zaken bij de invoering van de Tweede Fase. Voor degenen die deze (nog) niet gelezen hebben, hierbij de meest in het oog springende punten.

Grafische rekenmachine

De grafische rekenmachine zal ingevoerd worden bij wiskunde in augustus 1998. De afbakening zal waarschijnlijk gelegd worden bij machines die geen algebraïsche manipulaties kunnen uitvoeren. Desondanks zal dit voor het werken in de klas en het ontwikkelen van allerlei wiskundige begrippen een flinke verandering betekenen.

Examenprogramma's

De examenprogramma's zijn, op goedkeuring in de Tweede Kamer na, nu ook vastgesteld. Het wiskunde B-programma vwo (voor de profielen 'Natuur en Gezondheid' en 'Natuur en Techniek') staat nog niet vast. Daar is het Freudenthal instituut nog mee aan het experimenteren. In de loop van het volgend schooljaar zal daar meer helderheid over komen.

Praktische opdrachten

In de brochure wordt ook nader uitgebreid over het schoolexamen (voorheen schoolonderzoek). Zo'n schoolexamen bestaat uit een examendossier met daarin gewone toetsen, maar ook praktische opdrachten. Daarbij kan gedacht worden aan werkstukken, onderzoeksopdrachten, computeropdrachten, etcetera. Minstens één zo'n opdracht dient uitgevoerd te worden in een groepje van minstens drie leerlingen.

Deze ontwikkeling is niet verrassend te noemen. Wat wel verrassend is, is dat voor alle profielen (behalve Cultuur en Maatschappij, havo) deze praktische opdrachten voor 60% het cijfer voor het

schoolexamen moeten bepalen. Deze verandering in de gangbare werkwijze bij wiskunde lijkt wat aan de aandacht te zijn ontsnapt tot nu toe. De vraag wat nu precies onder een praktische opdracht verstaan moet worden zal, door het grote gewicht dat aan deze opdrachten wordt toegekend, in de komende tijd een belangrijk punt van discussie zijn. Voor de goed orde: in het examenprogramma wordt ook gesproken over een profielwerkstuk, waar wiskunde al dan niet aan mee kan doen. Dit werkstuk heeft niets te maken met de praktische opdrachten. Het profielwerkstuk is een afzonderlijk onderdeel dat ook afzonderlijk op de cijferlijst zal komen. Genoeg maar weer over havo en vwo.

Vbo/mavo

In het verenigingsnieuws een brief van het bestuur van de Vereniging aan de staatssecretaris. In de nieuwe plannen voor de inrichting van vbo/mavo lijkt de situatie weer te kunnen gaan ontstaan dat na de tweede klas veel leerlingen geen wiskunde meer in hun pakket hebben. Dat lijkt toch wel een ernstige verspilling van de expertise die vbo/mavo-docenten wiskunde de afgelopen jaren met veel inspanningen hebben opgebouwd om grote groepen leerlingen naar een vbo/mavo-examen te begeleiden.

Ten slotte

Speciaal aanbevolen in dit nummer het interview van Bert Zwaneveld met Renuka Vithal, een wiskundedocente in Zuid-Afrika. Levensbedreigende situaties in klaslokalen vormen toch een heel andere problematiek daar dan de zorg hier of de leerlingen de haakjes nog wel kunnen verdrijven bij de formules van een kogelbaan.

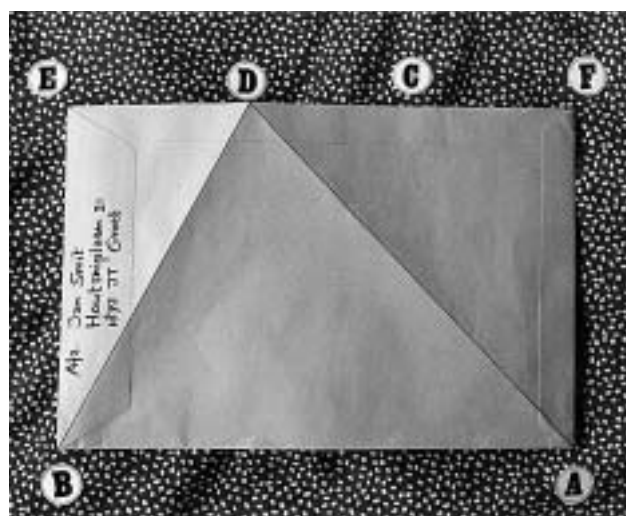
Kees Hoogland

Envelop met inhoud (2)

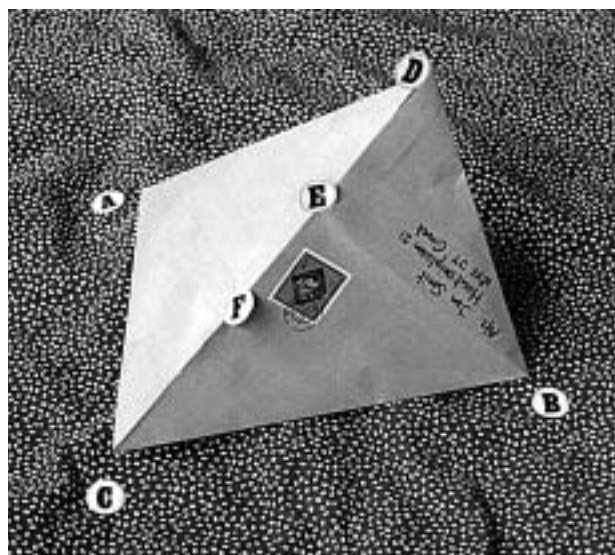
Jan Smit, Leon van den Broek

In de vorige aflevering hebben we een envelop verbouwd tot een viervlak met vier gelijke grensvlakken. Vorm en inhoud van het viervlak hangen af van de keuze van punt C (en D) aan de bovenrand van de envelop (zie figuur 1 en 2). Als ontvanger van de envelop wil je die inhoud graag zo groot mogelijk hebben. Waar moet je dan punt C kiezen?

Een bijzonder geval heeft wel erg mooie eigenschappen: het A -viervlak. Dit viervlak blijkt 'ruimte-vullend' te zijn. Met papieren modellen van dit viervlak als bouw-elementen maken we grotere lichamen.



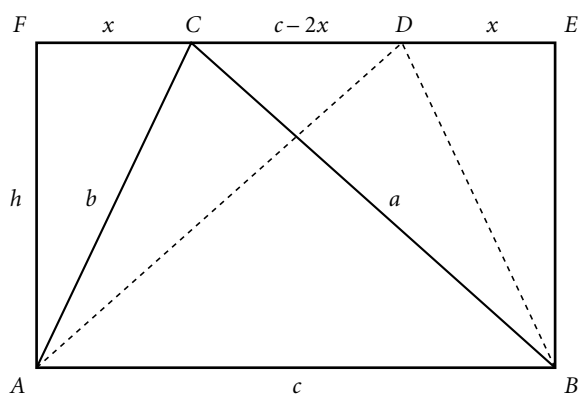
figuur 1 a en b



figuur 2

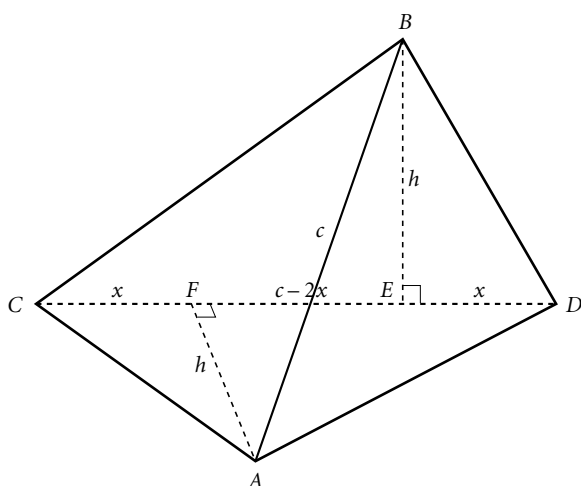
Maximale inhoud van de envelop

In figuur 1 en 2 uit de voorgaande aflevering zie je de envelop als viervlak met vier gelijke grensvlakken. Zeg dat de afmetingen van de envelop c en h zijn. Het punt



figuur 3

C (en daarmee D) aan de bovenrand kan nog willekeurig gekozen worden (als hoek ACB maar scherp is). Voor welke keuze van C krijgt de envelop maximale inhoud? Dat kan door de inhoud met behulp van onze formule uit te drukken in c , h en $x = FC$ en van die functie het maximum te bepalen.



figuur 4

Met $a^2 = h^2 + (c - x)^2$ en $b^2 = h^2 + x^2$ krijgen we na enig herschrijven:

Inhoud² = $\frac{1}{9} \cdot c^2 \cdot (cx - x^2) \cdot (h^2 - (cx - x^2))$. De factoren $cx - x^2$ en $h^2 - (cx - x^2)$ zijn opgeteld h^2 ; hun produkt is dus maximaal als $cx - x^2 = \frac{1}{2}h^2$, dus als $x = \frac{1}{2}c \pm \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 2h^2}$ (tenminste als $c \geq \sqrt{2}h$).

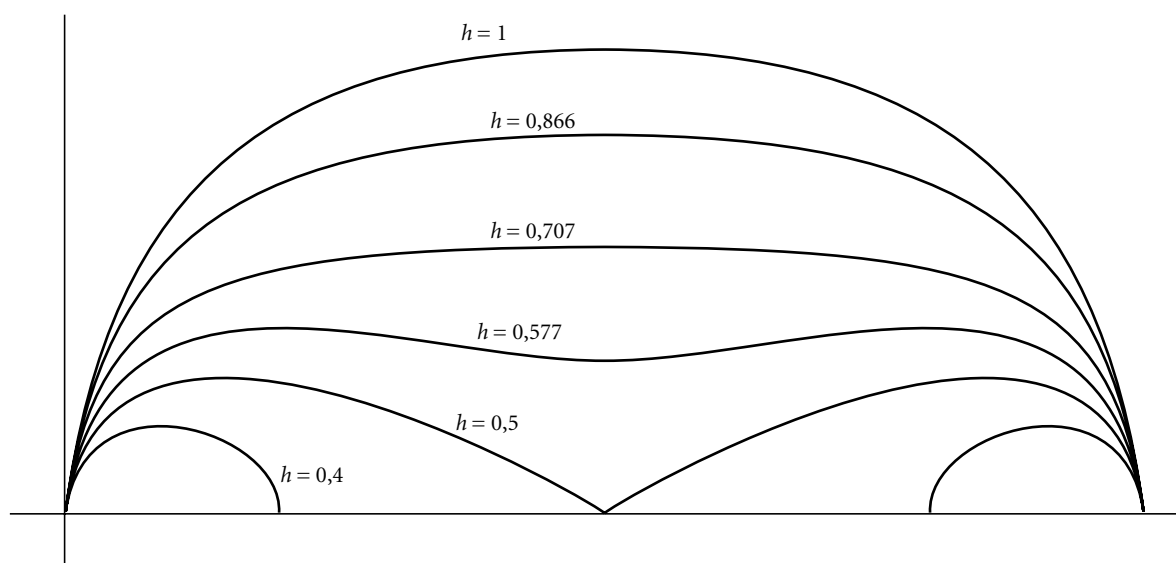
tussen de vlakken ACD en BCD 90° is. Dan is $BE = h$ de hoogte van het viervlak, zodat de maximale inhoud $\frac{1}{6}ch^2$ is. Uit de stelling van Pythagoras volgt dan (zie figuur 4):

$AB^2 = AF^2 + FE^2 + EB^2$ ofwel $c^2 = h^2 + (c - 2x)^2 + h^2$, zodat $(c - 2x)^2 = c^2 - 2h^2$. Dus moet $CF = \frac{1}{2}(CD - FE) = \frac{1}{2}(c - \sqrt{c^2 - 2h^2})$ gekozen worden om maximale inhoud te krijgen. Dit kan alleen als $c^2 \geq 2h^2$.

Als $c^2 < 2h^2$, dan is de standhoek op ribbe CD altijd kleiner dan 90° . De standhoek, en daarmee de inhoud, wordt maximaal als we C (en D) in het midden van de bovenrand van de envelop kiezen. We bekijken hiervan drie speciale gevallen.

- Als de envelop vierkant is: $h = c$. Dan is de inhoud maximaal bij een standhoek van 60° .
- Als $h : c = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,866\dots$ Maximale inhoud geeft dan het regelmatige viervlak.
- Als de envelop een A-formaat heeft: $h : c = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707\dots$ Het viervlak met maximale inhoud heeft standhoek 90° en de ribben verhouden zich als $2 : \sqrt{3} : \sqrt{3}$.

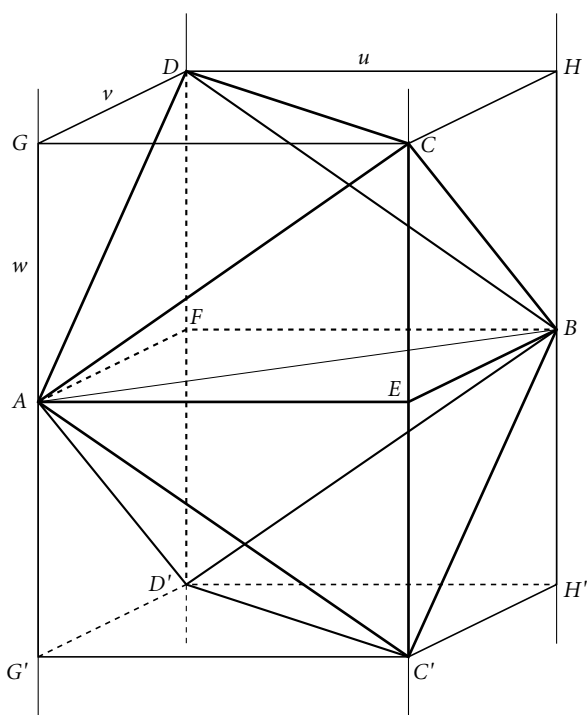
Meer over dit viervlak in de volgende paragraaf.



figuur 5

Er is ook een meetkundige manier om de maximale inhoud te vinden. Daarbij hebben we de formule voor de inhoud niet nodig. We zetten het viervlak met een van zijn grensvlakken op tafel, zeg met driehoek ACD ; zie figuur 4. De zijden AF en BE van de oorspronkelijke envelop zijn hoogtelijnen in de driehoeken ACD en BCD . De inhoud is $\frac{1}{3} \cdot \text{opp. } ACD \cdot \text{hoogte}$. De oppervlakte van driehoek ACD is $\frac{1}{2}ch$. Het is duidelijk dat de inhoud maximaal is als BE loodrecht staat op het grondvlak, dus als de standhoek

In figuur 5 wordt de inhoud van het viervlak als functie van $x = FC$ in beeld gebracht voor verschillende verhoudingen $h : c$ (waarbij voor het gemak $c = 1$ is gesteld). De overgang van een tweetoppige naar een ééntoppige grafiek treedt op bij $h : c = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Het bijbehorende maximale viervlak, het A-viervlak met ribben $a : b : c = \sqrt{3} : \sqrt{3} : 2$, blijkt zeer bijzondere eigenschappen te hebben. Het is ruimtevullend en sterker nog, zelfvullend.



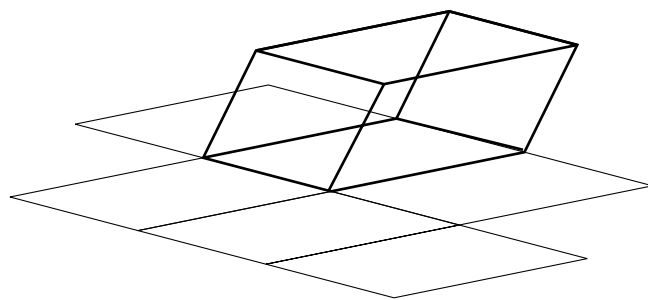
figuur 6

Het A-viervlak

De disphenoïde $ABCD$ met ribben $a = b = \sqrt{3}$ en $c = 2$ past in een doosje $AEBF.GCHD$ met afmetingen $u = v = \sqrt{2}$, $w = 1$. Twee grensvlakken van het doosje zijn vierkant, de andere vier zijn rechthoeken van het A-formaat (de zijden verhouden zich als $1 : \sqrt{2}$). Spiegeling van het doosje in vlak $AEBF$ geeft een doosje $G'C'H'D'.AEBF$ met daarin het A-viervlak $ABC'D'$. Herhalen we dit naar boven en naar beneden, dan ontstaat een vierkante zuil van doosjes. De A-viervlakken in aangrenzende doosjes hebben steeds een ribbe gemeen. Het mooie is nu dat de overblijvende ruimtes in de zuil ook weer A-viervlakken zijn, bijvoorbeeld $CABC'$ in figuur 6. De vierkante zuil is dus helemaal gevuld met A-viervlakken. Maar dan kunnen we ook de hele ruimte vullen met A-viervlakken, namelijk door de zuilen zonder kieren tegen elkaar te plaatsen. Lichamen zoals het A-viervlak waarmee de ruimte volledig opgevuld kan worden zijn tamelijk zeldzaam. Daarom zullen we hier bij stilstaan.

Ruimte-vullend

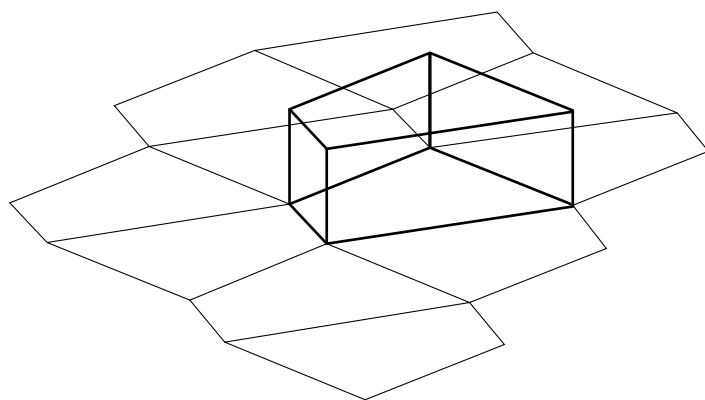
Een kubus, en algemener ieder parallellepipedum, is ruimte-vullend. Dat wil zeggen dat we congruente kopieën van een parallellepipedum zó tegen elkaar kunnen leggen, dat de hele ruimte wordt opgevuld zonder tussenruimten of overlappings (figuur 7). Dit is



figuur 7

het driedimensionale analogon van het bekende begrip *vlakvullend* in twee dimensies.

Ook een willekeurig recht vierzijdig prisma is ruimte-vullend. Dit is een direct gevolg van het feit dat elke vierhoek vlakvullend is (figuur 8).



figuur 8

Maar hoe zit het met viervlakken?

We hebben gezien dat het A-viervlak ruimte-vullend is. Van der Vegt suggereert (zie [1], blz. 58) dat dit de enige ruimte-vullende disphenoïde is. Wij weten niet zeker of dat inderdaad zo is. Wel is bekend dat het regelmatig viervlak niet ruimte-vullend is. (Samen met het regelmatige achthoek vormt het wel een ruimte-vullend koppel, omdat je met twee regelmatige viervlakken en één regelmatig achthoek een parallellepipedum kunt bouwen.)

Er zijn ons nog drie andere ruimte-vullende viervlakken bekend, alle drie af te leiden uit het A-viervlak; zie verderop. We weten niet of er nog meer ruimte-vullende viervlakken zijn.

Dat het A-viervlak geschikt is om te stapelen, blijkt ook als je de standhoeken bepaalt: die zijn 90° (op de ribben met lengte 2) en 60° (op de ribben met lengte $\sqrt{3}$). De lezer moet eigenlijk een paar van zulke A-viervlakken bij de hand hebben. In een volgende paragraaf geven we een bouwvoorschrift voor het A-viervlak. Je kunt

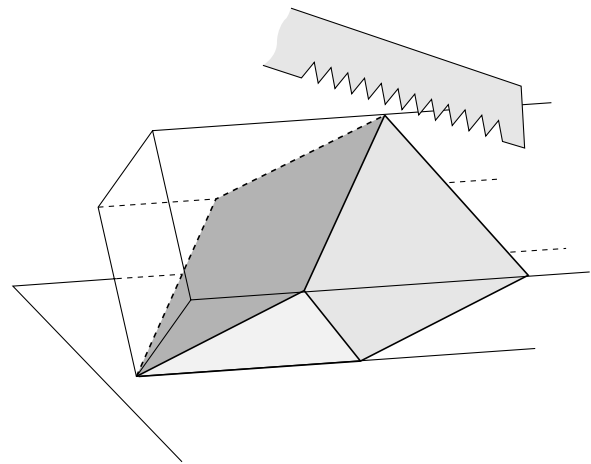
De quizkandidaat

Een quizkandidaat heeft de keuze uit twee gesloten doos. In de doos bevinden zich twee geldbedragen. In de ene doos zit twee keer zoveel als in de andere. De kandidaat kiest een doos. Daarin blijkt een bedrag van 100 gulden te zitten. De quizmaster geeft de kandidaat de mogelijkheid alsnog voor de andere doos te kiezen. Wat moet de kandidaat doen: bij zijn keuze blijven of van doos wisselen?

De kans dat de gesloten doos 200 gulden bevat, is uiteraard gelijk aan $\frac{1}{2}$. De kans dat de gesloten doos slechts 50 gulden bevat, is ook gelijk aan $\frac{1}{2}$. De verwachtingswaarde van de gesloten doos is dus gelijk aan $\frac{1}{2} \times 200 + \frac{1}{2} \times 50 = 125$; van keuze veranderen dus.

Bovenstaande geldt voor ieder bedrag B dat de kandidaat in de doos van zijn keuze vindt. Immers de verwachtingswaarde van de andere doos is dan $\frac{1}{2} \times 2B + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}B = 1\frac{1}{4}B$.

Advies aan de kandidaat:
ga nooit af op uw eerste keuze.

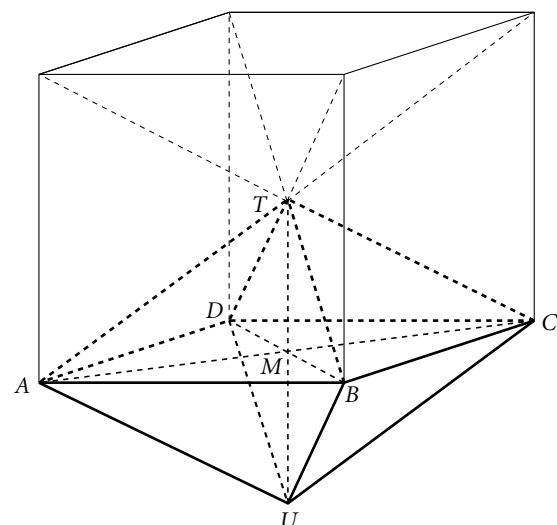


figuur 9

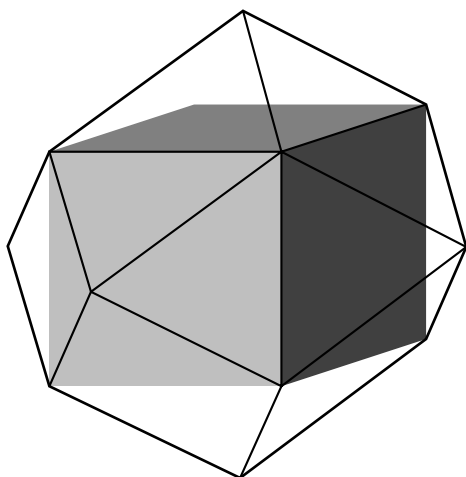
dan zelf constateren dat je zes A-viervlakken (langs de ribbe met standhoek 60°) kunt samenvoegen tot een parallellepipedum, dat begrensd wordt door zes ruiten. Ook een manier om in te zien dat het A-viervlak ruimtevullend is. Nog een andere benadering vind je in [2]. De kunstenaar Popke Bakker laat daar zien hoe je uit een vierkante balk scheve driezijdige prisma's kunt zagen; 'tentjes' noemt hij ze. Zie figuur 9. Zo'n tentje bestaat uit drie A-viervlakken. Omdat een driezijdig prisma ruimtevullend is, is het A-viervlak dat ook. Ook laat Popke Bakker nog zien dat je met acht tentjes een ruitentwaalfvlak kunt maken. En dat het ruitentwaalfvlak ruimtevullend is, zullen nu gaan bekijken.

Het ruitentwaalfvlak

Denk je de ruimte gevuld met kubussen met ribbe 2. In figuur 10 zijn de vier lichaamsdiagonalen van een kubus getekend. Iedere kubus kan zo verdeeld worden



figuur 10



figuur 11

in zes piramides die de grensvlakken van de kubus als grondvlak hebben en het middelpunt van de kubus als top. Op deze manier is de hele ruimte opgevuld met vierzijdige piramides. Door steeds de piramides met gemeenschappelijk grondvlak twee aan twee bij elkaar te voegen krijg je een opvulling van de ruimte met (niet regelmatige) achthoeken. Een voorbeeld is achthoek $UABCDT$. Het achthoek wordt door de diagonaalvlakken $AUCT$ en $DUBT$ verdeeld in vier A-vierhoeken: met ribben 2 , $\sqrt{3}$ en $\sqrt{3}$.

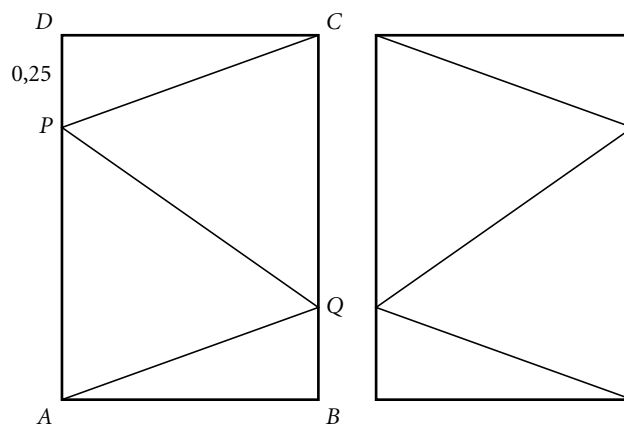
De zes achthoeken die in punt T samenkomen vormen een ruitentwaalfvlak (rombendodecaëder): de twaalf grensvlakken zijn ruiten met diagonalen 2 en $2\sqrt{2}$; zie figuur 11. En deze ruitentwaalfvlakken zijn ruimtevullend. Dat zie je goed als volgt. Kleur de kubussen waarmee we de ruimte gevuld hebben afwisselend zwart en wit, als een driedimensionaal schaakbord. Verdeel de witte kubussen in zes piramides zoals in figuur 10. Elke witte piramide voegen we toe aan de zwarte kubus waaraan hij grenst. Zodoende wordt een witte kubus opgedeeld onder zijn zes zwarte burens; deze zwarte kubussen worden daardoor aangevuld tot ruitentwaalfvlakken.

Uit het bovenstaande blijkt dat we met 24 A-vierhoeken een ruitentwaalfvlak kunnen bouwen. En dat gaan we doen.

Aan de slag in de klas

Materiaal: 48 (eventueel gebruikte) A4-tjes, plakstiften.

Met twee A4-tjes maak je als volgt een A-vierhoek. $ABCD$ is een A4-tje (figuur 12). De lange zijden zijn $\sqrt{2}$ keer zo lang als de korte zijden. Meet op de lange zijden de punten P en Q af op een kwart van de hoeken. Ga na dat $AQCP$ een ruit is met diagonalen in de verhouding $1 : \sqrt{2}$. Maak scherpe vouwen PC , AQ en PQ .



figuur 12

Twee van zulke ruiten aan elkaar geplakt geeft een A-vierhoek; de driehoeken ABQ en PCD dienen als plakranden.

Iedere leerling maakt er minstens een. (Een argument waarom een klas niet groter dan 24 leerlingen mag zijn.) Met 24 A-vierhoeken bouwt de klas dan een prachtig ruitentwaalfvlak. Als van ieder viervak een grensvlak (versierd met de naam van de maker) aan de buitenkant blijft, kan het niet misgaan. Hier en daar een stukje plakband kan helpen het geheel bij elkaar te houden.

literatuur

1 A.K. van der Vegt

Regelmaat in de ruimte

Delftse Uitgevers Maatschappij (1991)

ISBN 90-6562-141-5

2 Popke Bakker, Jan van de Craats, Klaas Lakeman

Zagen, zagen,...

Pythagoras, jaargang 26, nr 5, juli 1987

Over ICME-8, maar vooral over het wiskunde- onderwijs in Zuid-Afrika

Renuka Vithal is lecturer in mathematics education (lerarenopleider) aan de universiteit van Durban-Westville, Zuid-Afrika. Zij spreekt van huis uit Engels en kan Afrikaans en daardoor ook Nederlands lezen.

Zou je, om jezelf bij de Nederlandse lezers te introduceren, iets over je werksituatie willen vertellen?

Vóór het afschaffen van de apartheid waren er vier soorten universiteiten: voor blanken, voor zwarten, voor Indiërs zoals ik, en voor mensen die 'kleurlingen' genoemd worden. Mijn universiteit was oorspronkelijk alleen voor Indiërs, ik ben daar zelf ook opgeleid. Nu is er iets meer dan de helft van de studenten zwart, bijna de helft Indiër en ongeveer 5% blank.

Hoe is de lerarenopleiding globaal georganiseerd?

Er zijn twee manieren binnen de universiteit om tot leraar te worden opgeleid. Er is de vierjarige graad van Bachelor of Education en er is

een eenjarige opleiding na een driejarig voorprogramma in verschillende faculteiten. Het vierjarige programma wordt gedoceerd in de Faculty of Education en leidt op tot leraar of lerares wiskunde voor het basisonderwijs. Het eenjarig programma is voornamelijk bestemd voor studenten die wiskunde hebben gestudeerd en les in het middelbaar onderwijs willen geven. De meerderheid van de leraren en leraressen in Zuid-Afrika wordt echter opgeleid in zogenaamde Colleges of Education en niet aan de universiteit.

Kun je een indruk geven van de scholen waar je studenten tijdens hun stage en later als leraar terecht komen?

Vroeger waren de scholen strikt gescheiden. Hoewel die scheiding nu formeel is opgeheven, is dat in de praktijk nog helemaal niet zo. In de buurt van Durban en in Durban zelf zijn er vooral Indiërs en zwarten, maar de laatste zijn in de meerderheid. De studenten worden in verschillende praktijkscholen geplaatst voor hun stage. Ze hebben zelf ook



inspraak in de keuze. Vaak kiezen zij een school dichtbij huis. Dit betekent dat Indische studenten dikwijls stage lopen op voormalige Indische scholen en zwarte studenten op scholen in de zogenaamde townships. De Indische scholen hebben de laatste jaren grote aantallen zwarte leerlingen aangenomen. De zwarte townshipscholen zijn exclusief zwart. Het personeel van de verschillende scholen is nog vrijwel onveranderd sinds de dagen van de apartheid. Veel van de townshipscholen zijn bepaald niet veilig vanwege de hoge criminaliteit en de armoede in de townships. Een flink aantal scholen zou je ronduit gevaarlijk kunnen noemen. Sommige studenten geven aan dat ze niet op deze scholen stage willen lopen. Zelf bezoek ik die gevaarlijke scholen wel, maar je moet goed oppassen. Laatst zijn er op zo'n school twee leerkrachten doodgeschoten. Er is toen in de hele provincie een staking geweest tot de provinciale regering de veiligheid van het personeel garandeerde. Je ziet nu veel leger en politie in en rond de scholen.

Wat is op dit moment het grootste probleem voor het wiskundeonderwijs in Zuid-Afrika?

Zonder enige twijfel het gebrek aan wiskundedocenten. Er wordt op dit moment in onze provincie onderzocht welke docenten van andere vakken in staat en bereid zijn om wiskunde te gaan geven. Die docenten worden vervolgens omgeschoold van bijvoorbeeld docent geschiedenis tot docent wiskunde. Docenten die niet willen, kunnen, als ze boven een

bepaalde leeftijd zijn, vervroegd met pensioen gaan, anders worden ze werkloos. Dat omscholen is één van mijn taken. Maar dit lost het probleem van het tekort absoluut niet op. Ten eerste is dit een provinciaal initiatief en er vindt geen landelijke coördinatie plaats. Ten tweede zijn er geen goede statistische gegevens beschikbaar. We weten de omvang van het probleem op landelijke schaal helemaal niet. Op een groot aantal middelbare scholen die vroeger alleen door zwarten werd bezocht, kunnen de leerlingen het vak wiskunde niet kiezen door het ontbreken van wiskundeleraars of -leraressen. Op de overige scholen wordt wiskunde heel vaak door onbevoegde docenten gegeven. En de huidige generatie studenten op de universiteiten kiezen dan wel vaak voor de exacte vakken of techniek, maar willen geen leraar worden. Als je daarbij bedenkt dat in de materiële sfeer, zoals gebouwen, lokalen, leerboeken, enz. er ook een gigantisch gebrek is, dan is duidelijk dat de problemen voorlopig niet opgelost zullen zijn.

Wat kun je tegenover dit sombere perspectief aan de positieve kant stellen?

Er heerst in Zuid-Afrika het gevoel dat wij, de burgers, voor het eerst invloed hebben op waar het met ons land naar toe gaat, dat onze stem gehoord wordt en dat we er met elkaar iets goeds van kunnen en zullen maken, althans als ons de tijd wordt gegund.

En concreet?

Er is inmiddels één landelijk project SYSTEM, dat staat voor Students and Youth into Science, Technology, Education and Mathematics. In feite is het een vorm van tweede-kansonderwijs. Leerlingen die niet tot de universiteit voor een exact vak konden worden toegelaten, krijgen aparte cursussen om dat alsnog te bereiken. De 25% beste studenten van

degenen die dat lukt gaan naar de lerarenopleiding en worden wiskundeleraar op een school die geen wiskunde kan aanbieden.

Kun je iets vertellen over de problemen in je eigen onderwijs?

(Na enig nadenken.) Er is in Zuid-Afrika een groot taalprobleem. Voor vrijwel alle zwarten is Engels niet de moedertaal, maar de tweede, of soms zelfs de derde of vierde taal. Er zijn zeer veel talen. Onlangs heeft de regering 11 talen tot officiële taal verklaard. En het probleem is nu hoe we hiermee in de klas moeten omgaan. Veel van die inheemse talen hebben voor veel wiskundige begrippen geen woorden. En ik heb nu vaak discussies met mijn studenten hierover. Moeten Zulu-kinderen nu het Engelse woord leren, of mogen ze ook omschrijvingen in hun eigen taal gebruiken? Mijn studenten zijn daarover verdeeld, en zelf weet ik er ook nog geen definitief antwoord op. Het feit dat een kind het Engelse woord voor een wiskundig begrip niet kent, betekent nog niet dat hij/zij het concept niet begrijpt. Ook in de klassen op school speelt het taalprobleem. Verschillen, zoals verschillen in moedertaal, mogen geen nadruk krijgen, maar er moet juist een accent gelegd worden op de nationale identiteit. De wonden uit het verleden moeten geheeld worden. Na het verdeelde verleden, nu verzoening. Maar dat is niet gemakkelijk, want laten we daarbij niet vergeten dat de aanleiding voor de hevige rellen in Soweto in 1976 de taal was: alle leerlingen moesten toen Afrikaans leren op school.

Wat vind je van ICME-8?

Ik vind het meest problematische van dit congres de ondervertegenwoordiging van de ontwikkelingslanden. Zo zit ik in de werkgroep over wiskundeonderwijs en samenleving. We zijn een kleine groep uit verschillende landen, maar Afrika is slechts door een klein groepje vertegenwoordigd.

En dan is Zuid-Afrika relatief ten opzichte van de rest van Afrika nog oververtegenwoordigd. Een congres als dit is een prima gelegenheid om leraren uit verschillende ontwikkelingslanden bijvoorbeeld met elkaar te laten discussiëren over hoe men omgaat met de situatie waarbij leerlingen uit verschillende leerjaren in één lokaal bij elkaar zitten, omdat er een tekort aan wiskundedocenten is. Veel van de genoemde problemen zullen ook in andere Afrikaanse landen spelen.

Heb je contacten met mensen in de buurlanden?

Ja, via de South-African Association for Research in Mathematics and Science Education. Deze vereniging begint nu contacten met mensen en vergelijkbare verenigingen in de landen in het zuiden van Afrika te leggen. Maar een probleem hierbij is dat men vaak vooral geïnteresseerd is in praktische vragen als 'hoe kunnen wiskundige begrippen het best onderwezen worden?' en minder in vragen van politieke, sociale of culturele aard. Een wiskundeleraar of -lerares moet de maatschappelijke implicaties van zijn of haar wiskundeonderwijs begrijpen. Wiskundeonderwijs is niet neutraal of waarde-vrij.

Renuka, je hebt nu via Euclides de gelegenheid voor een persoonlijke boodschap voor de Nederlandse wiskundedocenten. Wat is die boodschap?

Er is grote behoefte aan persoonlijke contacten tussen wiskundedocenten in Zuid-Afrika en elders, bijvoorbeeld Nederland. En dan bedoel ik één-op-één contacten, via brieven. Want van reizen of via de moderne communicatiehulpmiddelen kan nog nauwelijks sprake zijn. En dat geldt ook voor lerarenopleiders en leraren- en leraressen-in-opleiding. In dit kader zou ik graag brieven willen ontvangen van Nederlandse studenten die wiskundeleraar of -lerares

willen worden. Ik zal ze dan door geven aan Zuid-Afrikaanse studenten die dan zelf kunnen gaan corresponderen. In die contacten zou het ook wel mogen gaan over hoe men elders de problemen oplost, maar meer over het waarom van de gekozen oplossingen. Er zijn in het wiskundeonderwijs immers geen eenduidige oplossingen.

En tot slot?

We zitten hier in Zuid-Afrika midden in een proces van elkaar als mensen leren respecteren. En dat is een langdurig proces. Je merkt nog steeds een vorm van superioriteit van de 'haves' ten opzichte van de 'have-nots'. We zijn pas toe aan het woord 'tolereren' en nog lang niet aan het woord 'waarderen'. Nog steeds wordt bijvoorbeeld in de krant op verhulde wijze naar iemands ras verwezen. En dat gebeurt ook op school. Toen mijn zoontje van drie en half voor het eerst naar school ging, vroeg hij mij na de eerste schooldag: 'Mama, Mpi-ta is black, Johnny is white, but what is my colour?'

Bert Zwaneveld

Noot

Voor wie zelf met Renuka Vithal wil corresponderen, of zijn of haar studenten met haar studenten, is hier haar adres:
Renuka Vithal
Faculty of Education
University of Durban-Westville
Private Bag X 54001
Durban 4000
South-Africa
e-mail: rvithal@pixie.udw.ac.za



J.M.Aarts

**Complexe functies
de eerste stappen**

Epsilon Uitgaven Utrecht 1996

Gecorrigeerde druk 1992, 1996

ISBN 90-5041-027-8

134 pagina's

Prijs f 32,50, BFr 650,-

Dit boek is bedoeld voor mensen die kennis willen maken met complexe functies. De basis voor dit boek is een collegedictaat bij een inleidende cursus Complexe Functietheorie gegeven te Delft aan de Technische Universiteit. De opbouw van het boek is dan ook degelijk en in het algemeen helder. Complexe getallen en wat analyse is alles wat men aan voorkennis nodig heeft. In een aantal stappen worden analytische functies, residuen, machtreeksen en Laurentreeksen ingevoerd. De tekst is gelardeerd met voorbeelden, uitgewerkte vraagstukken en opgaven die echt(!) goed te doen zijn. Achterin staan de antwoorden van en de aanwijzingen bij de opgaven. Kortom dit is een boek dat actief gelezen kan worden.

Op enkele plaatsen in het boek zal het een lezer niet duidelijk zijn waarom dingen worden geïntroduceerd maar dit probleem is op te lossen door verderop in de tekst te kijken of af te wachten waar al dat moois toe leidt. Het enige wat mij nogal verbaasd heeft is de paragraaf met de weidse titel 'Toepassingen'. Ik vrees dat de auteur in een niets ontziende behoefte om iets aan toepassingen te doen een paragraaf gecreëerd heeft met voorbeelden waarvan het een beginner onduidelijk zal zijn waar de complexe functietheorie nu wordt toegepast. Maar dit is het enige minpunt. Het boek is zeer geschikt om de eerste stappen te zetten.

F.J.L. Martens



A.K.Dewdney **200% of nothing: an eye-opening tour through the twists and turns of math abuse and innumeracy**
Chicester: Wiley, 1993 • ISBN 0-471-57776-6 • Prijs £ 12,95 • 182 p.

In 1996 verscheen in de Mededelingen van het Wiskundig Genootschap de volgende recensie. Met toestemming van het Wiskundig Genootschap nemen we deze boekbespreking onveranderd over.

De auteur heeft jarenlang de rubriek 'mathematical recreations' in Scientific American verzorgd. Zoals de titel aangeeft, trekt hij deze keer ten strijde tegen het misbruik van de wiskunde en de 'innumeracy' (een parallel van illiteracy, maar dan voor getallen) zoals in het dagelijks leven talloze malen gepraktiseerd wordt. Enkele voorbeelden om de teneur van het boek aan te geven: - lampen waarvan beweerd wordt dat ze 300% energie besparen; - als je eerst 50% winst maakt en op het resultaat vervolgens 50% verliest ben je weer terug bij af; - een waterzuiveraar maakt water voor 99.44% zuiver; en wat als de rest nu eens strychnine is?; - 96% van de straten in de USA is slecht verlicht; 88% van de misdaad vindt plaats in slecht verlichte straten (in een actie van energiebedrijven om meer stroom voor straatverlichting te verkopen; dat de genoemde getallen voor de goed verlichte straten een driemaal zo hoge misdaadfrequentie aangeven als voor de slecht verlichte, merkt uiteraard niemand op!); - de bekende misvattingen over dobbelstenen en roulettes alsof die geheugen zouden hebben, en andere problemen op het gebied van de waarschijnlijkheidsrekening. Een legertje 'abuse detectives' heeft uit allerlei Amerikaanse bronnen talloze van dit soort zaken bijeengebracht. Maar een en ander is ook zeer herkenbaar uit onze eigen media. Nauwelijks een boek voor wiskundigen, maar niet-wiskundigen en vooral mediamensen kunnen er wel wat van opsteken. Ook leuk als eindexamencadeautje.

A. van der Sluis

Advertentie Thieme
Nieuwe Wiskunde



Ingezonden

4 vwo, 4 havo/b en ook 4 mavo

In najaar 1990 werden tijdens regionale bijeenkomsten het conceptexamenprogramma mavo/lbo C/D en voorbeelden uit het nieuwe wiskundeprogramma 12-16 ter discussie gesteld. Op initiatief van het bestuur van de NVvW zijn daarna 7 werkgroepen, verdeeld over het land, gevormd om het conceptexamenprogramma nader te bestuderen en van commentaar te voorzien. Ook een aantal individuele leraren en vaksecties van scholen, waaronder de wiskundesectie van het Sint Willibrordcollege, hebben na de regionale bijeenkomsten schriftelijk gereageerd.

In het juninummer van 1991 van Euclides werd met name over het conceptindexamenprogramma mavo/lbo C/D gerapporteerd in het artikel 'Wiskunde 12-16 nader bekeken'.

De passage *In bijna alle reacties wordt de aansluiting op het vervolgonderwijs en met name op mto en havo-b als een punt van kritiek naar voren gebracht. Velen zijn bevreesd dat vooral het leren en inoefenen van wiskundige vaardigheden in het nieuwe programma verdwijnt of onvoldoende aandacht krijgt* spreekt boekdelen.

Helaas gaat de tweede helft van deze passage niet alleen voor mavo/lbo op, maar voor het gehele wiskundeonderwijs in de basisvorming. In de schriftelijke reactie van onze sectie aan de NVvW is toentertijd (20-11-1990) aangegeven dat ons inziens de voorgestelde wijzigingen voor het wiskundeonderwijs in de basisvorming veel te rigoreus zijn, dat te weinig tijd wordt ingeruimd voor algebra en dat in het nieuwe programma vooral de technische vaardigheid het moet ontgelden.

Vele wiskundedocenten en wiskundesecties hebben in de jaren voor de invoering van de basisvorming uit betrokkenheid hun zorg over het verwachte tekort aan algebraïsche vaardigheden duidelijk kenbaar gemaakt. De ontwerpers van het programma en COW wimpelden de kritieken vaak weg met de dooddoener dat de leerling in het nieuwe programma op andere onderdelen een grote voorsprong zal hebben en vanwege andere vaardigheden de eventuele achterstanden op gebied van algebra snel zal kunnen bijwerken.

Helaas, de zorg van toen is ook nu weer de zorg van wiskundesecties. De problemen in 4 vwo en 4 havo/b zijn groot. Het optimisme van de ontwerpers van het nieuwe programma is niet terecht gebleken. Ook nu worden nog pogingen ondernomen om het probleem weg te moffelen. Een goed voorbeeld hiervan is het artikel van het APS in het PMVO-journaal van 11 december 1996. Men probeert de kou uit de lucht te halen door het stellen van diagnoses als 'onwennigheid met het nieuwe programma', 'in de planning is iets misgegaan', enz.

Dit gaat echter voorbij aan het echte probleem: in de eerste drie jaar havo/vwo is te weinig tijd ingeruimd voor algebra; de algebraïsche vaardigheden worden veel te weinig ingeslepen.

Qua stof en niveau zit er voor havo/vwo een grote breuk tussen de onderbouw en de bovenbouw. Omdat de leerlingen in de onderbouw op andere onderdelen en vaardigheden worden getoetst, is er ook een breuk in cijfermatige resultaten. Hierdoor raken leerlingen gedesillusioneerd en daardoor ongemotiveerd.

Voor de leerlingen in 4 mavo zijn er nú nog geen problemen. De mavo-abituriënten, die volgend jaar bijvoorbeeld naar havo/b of mto gaan, zullen echter met (haast) onoverkomelijke aansluitingsproblemen te maken krijgen.

In feite zou het werkveld de problemen moeten doorspelen naar de verantwoordelijke personen en instanties. Uiteindelijk heeft men zich destijds niets aange trokken van de geuite zorgen en kritiek.

Zo simpel is dat echter niet. Het zijn toch je leerlingen; je voelt je als wiskundeleraar en als sectie toch verantwoordelijk. Die zorg en verantwoordelijkheid voor je leerlingen voel je zelfs des te feller op momenten waarop het niet goed gaat, zoals nu met de vierde klassen. Dit alles kost veel energie die je als sectie ook nodig hebt om je voor te bereiden op de nieuwe ontwikkelingen in de Tweede Fase.

Ook op het Sint Willibrordcollege wordt geprobeerd om een en ander ten goede te keren:

- voor havo hebben we in de onderbouw de lessentabel 4-3-4; Vanaf dit schooljaar doen we in 3 havo vaardigheidstraining. Het doel hiervan is om reeds in 2/3 havo aangeleerde algebraïsche methodieken en vaardigheden verder in te slijpen en nog wat uit te bouwen.

- voor vwo is de lessentabel 4-3-3. Voor 4 vwo zijn 4 wekelijkse lessen beschikbaar om extra tijd te kunnen besteden aan de keuze WA en WB.

Volgend schooljaar starten we ook in 3 vwo met beperkte vaardigheidstrainingen.

- voor de overstappers van 4 mavo naar 4 havo/b wordt dit schooljaar door de school een forse overstapcursus aangeboden. De cursus is voorwaarde voor de keuze van WB in 4 havo. Wellicht kunnen ook leerlin-

gen die opteren voor een technische vervolgopleiding aansluiten bij deze bijwerkcursus.

Al deze maatregelen zullen ongetwijfeld wel enige vruchten afwerpen.

Toch heeft de sectie de stellige overtuiging dat het eigenlijk lapmiddelen zijn. Het echte probleem zit dieper en is op schoolniveau niet op te lossen.

A. Schenk, namens de wiskundesectie van het Sint Willibrordcollege in Goes



Reactie

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren deelt de zorgen van de wiskundesectie van het Sint Willibrordcollege te Goes. Niet alleen nu, maar eigenlijk al vele jaren lang is er door ons, op allerlei terreinen, kritiek geleverd op overheidsbeleid dat nadelige gevolgen voor het wiskundeonderwijs zou kunnen hebben. Ook in positieve zin hebben wij bijdragen geleverd, onder andere met voorstellen, die tot verbeteringen in programma's konden leiden.

Dankzij de kritiek die wij indertijd gegeven hebben heeft de COW voor de derde klassen havo/vwo extra algebra in het trajectenboek opgenomen.

Het bestuur heeft tijdens de afgelopen jaarvergadering aan alle deelnemers een vragenlijst uitge-reikt, waarop enkele vragen stonden betreffende de vaardigheden van vierde-klassers die de basisvorming achter de rug hadden. De

helaas niet talrijk binnengekomen antwoorden worden momenteel bestudeerd.

Een delegatie van het bestuur heeft de problematiek voor de vbo/mavo-leerlingen besproken met de directie van de CEVO.

Een speciale bijeenkomst met vbo/mavo-docenten in verband met de problemen die zij ontdekt hebben, zowel wat betreft het aanbrengen van de basisvorming als de aansluitingsproblemen met het vervolgonderwijs, is in januari gehouden.

Met de CEVO, het APS, het Fi, het Cito en de inspectie is reeds overleg gaande om te bekijken wat er te doen is voor de havo/vwo-leerlingen die problemen krijgen op grond van het onvoldoende aansluiten van de basisvorming op de vakken wiskunde-B.

Hopelijk ziet men in dat het bestuur van de NVvW op allerlei fronten probeert oplossingen te zoeken en eventueel af te dwingen.

Hans van Lint



Van de redactie

De redactie is zeer geïnteresseerd in reacties van lezers op de ingezonden brief. Hoe staat het er nu mee in de klas, medio maart? Zijn de problemen oplosbaar? Heeft u maatregelen genomen in de onderbouw? Etcetera. Schrijf het ons, bij voorkeur op korte termijn.

Is de wiskunde als een nachtkars uitgegaan?

T.H. Chen

Inleiding

Vorig jaar maakte ik kennis met het nieuwe wiskunde-programma voor de onderbouw. Dat viel bepaald niet mee: de vaste grond die ik jarenlang onder de voeten had gehad, bleek te zijn veranderd in een verraderlijke zee vol klippen waarop ik menigmaal dreigde te verongelukken. Zo trof ik onlangs bij de lesvoorbereiding de onderstaande opgave aan.

(Getal en Ruimte, deel 3HV1, derde druk 1995, hoofdstuk 1, opgave 27, blz. 14).

Met de onderdelen a t/m d had ik geen moeite, maar bij onderdeel e moest ik wel even nadenken. Kennelijk werd verondersteld dat de vlam per seconde een constante hoeveelheid kaarsvet verbrandt, anders zijn alle gegeven antwoorden mogelijk. Bovendien moest aangenomen worden dat direct na het aansteken de hele bovenkant van de kaars smelt, zodat de vlam niet eerst een holletje vormt als bij een brede kaars. Immers, was dat laatste het geval, dan zou de lengte eerst enige tijd constant blijven. Uit de vorm van de grafiek van L was duidelijk, dat de lengte voortdurend minder snel

- 27 De lengte van een brandende kaars is gegeven door de formule $L = 12 - 4\sqrt{t}$. Hierin is L de lengte van de kaars in cm en t het aantal branduren.
- a Hoe lang was de kaars toen hij werd aangestoken?
 - b Hoe lang is de kaars na 2 uur branden? Rond af op mm.
 - c Maak een tabel en teken de grafiek van de kaarslengte.
 - d Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?
 - e Hieronder zie je vier kaarsen. Welke kaars hoort bij de formule?



- f Een andere kaars is juist de bovenste helft van de gegeven kaars. Geef de formule van de kaarslengte.
- g Olaf beweert dat de halve kaars twee keer zo snel is opgebrand als de gegeven kaars. Onderzoek of Olaf gelijk heeft.

afneemt bij toenemende t , zodat alleen kaars III juist kon zijn. En inderdaad, volgens het antwoordenboekje was dat de juiste kaars. Maar de gegeven lengtefunctie heeft een afgeleide die naar min oneindig nadert als t naar 0 daalt, wat betekent dat de kaars geen plat vlak als bovenkant kan hebben, waarmee kaars III weer afviel, of was hij per ongeluk afgebeeld als afgeknotte kegel in plaats van volledige kegel?

Nader bekeken

Aan het twijfelen gebracht ging ik maar eens rekenen. Ik nam aan dat de oplossing een lichaam was dat ontstaat door wenteling van een differentieerbare kromme $K: (x(t), y(t))$ om de y -as, met de eigenschap dat de inhoud $I(t)$ een eerstegraads functie van t is met negatieve richtingscoëfficiënt. De parameter t stelt hierbij de tijd voor en $y(t)$ is de lengte van de kaars op tijdstip t . Verder nam ik aan dat K in het eerste kwadrant ligt en dat $y(t)$ een monotoon dalende functie van t is, zodat x als functie van y geschreven kan worden.

Nu is de afname van de inhoud ΔI gedurende het tijdsinterval Δt evenredig met Δt , dus $\Delta I = -C \cdot \Delta t$. Anderzijds is die afname gelijk aan $\pi x^2 \cdot \Delta y$, de inhoud van een cilindertje met hoogte Δy en straal x . We vinden dus voor zekere positieve C de volgende vergelijking:

$$\Delta I = \pi x^2 \cdot \Delta y = -C \cdot \Delta t$$

Dit leidt tot de differentiaalvergelijking:

$$\pi x^2 \cdot dy = -C \cdot dt \quad (1)$$

Substitutie van de gegeven lengteformule

$$y = 12 - 4\sqrt{t}, \text{ dus van}$$

$$dy = \frac{-2}{\sqrt{t}} dt \text{ in (1) geeft met randvoorwaarde } x(0) = 0:$$

$$\sqrt{t} = \frac{2\pi}{C} x^2 \text{ en } x(t) = \sqrt{\frac{C}{2\pi}} \sqrt[4]{t}.$$

Daaruit kan eenvoudig de vergelijking van de kromme K worden afgeleid:

$$y = 12 - \frac{8\pi}{C} x^2$$

Aldus kwam ik tot de conclusie dat het juiste antwoord er niet bij staat omdat bij de gegeven lengteformule de bijbehorende kaars de vorm van een paraboloid heeft.

En kaars III dan?

Wat zou overigens de lengteformule zijn van kaars III? Deze kaars ontstaat door wenteling om de y -as van de lijn $y = -ax + b$, wat na substitutie van $dy = -adx$ in (1) het resultaat $a\pi x^2 dx = Cdt$ oplevert, welke differentiaalvergelijking als oplossing heeft

$$\frac{1}{3}a\pi x^3 = Ct + D \quad \text{met} \quad D > 0$$

waaruit volgt:

$$x(t) = \sqrt[3]{\frac{3Ct + 3D}{a\pi}} \quad \text{en} \quad y(t) = -a \sqrt[3]{\frac{3Ct + 3D}{a\pi}} + b$$

De opgave kan dus met de gegeven kaarsen correct gemaakt worden, door geschikte keuze van de constanten a , b , C en D , maar dit leidt wel tot een derdemachtswortel in het functievoorschrift van $L(t)$, wat wellicht te moeilijk is voor een derde klas.

Ten slotte

Nu is het op zich niets bijzonders dat er in een wiskundeboek een foutje staat, maar ik vermoed dat de hier signaleerde fout symptomatisch is voor de overgang van de 'oude' naar de 'nieuwe' wiskunde. De schrijvers van Getal en Ruimte proberen de leerling tot het inzicht te brengen dat bij een lengtefunctie die steeds minder steil dalend is een kaars hoort die naar beneden toe breder wordt, maar verliezen daarbij de correcte wiskundige (en natuurkundige) samenhang uit het oog. Voor de docent die een en ander wil controleren kan dit – anders dan vroeger in de onderbouw het geval was – een hoop werk opleveren. Dit lijkt mij een ongewenste ontwikkeling, maar misschien heb ik bij lezing van de kerndoelen het volgende doel over het hoofd gezien: 'Het kritische denkvermogen van ingeslapen wiskundeleraars wakker schudden.'

Met dank aan Jan van de Craats voor zijn commentaar op een eerdere versie.

Zomerkampen Vierkant, 1997

Meike Akveld, Rosalie Iemhoff

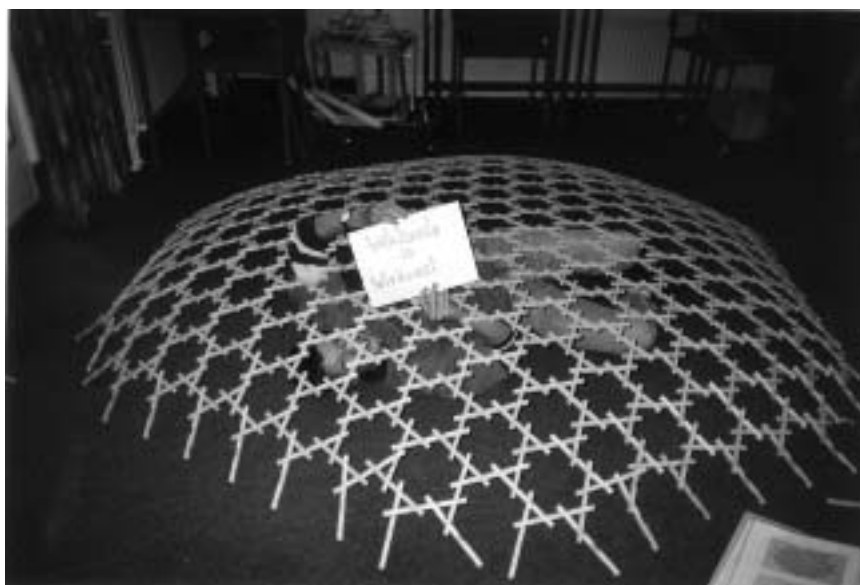
Inleiding

Het is al weer het vierde jaar dat de Stichting Vierkant in de zomer van 1997 wiskundekampen gaat organiseren. De Stichting Vierkant heeft als doel op alle mogelijke manieren middelbare scholieren kennis te laten maken met en te enthousiasmeren voor wiskunde. Niet alleen wordt een verscheidenheid aan gebieden in de wiskunde aangeboden maar ook wordt getracht de leerlingen een fundamentele aanpak aan te leren bij het oplossen van problemen. Dit gebeurt via onder andere het organiseren van wiskundeclubs op scholen, de wiskunde-zomerkampen en het uitgeven van de zogenaamde 'Doe-boekjes', die aan de hand van vragen een bepaald onderwerp, zoals het Koenigsbergen bruggenprobleem van Euler, uitdiepen. Afgelopen zomer organiseerde Vierkant net als in de twee zomers daarvoor twee kampen. Ook in de komende zomer zijn er weer wiskundekampen en dit jaar worden er zelfs drie georganiseerd. Om een indruk te geven van het dagelijks verloop van zo'n zomerkamp volgt hier een verslag van een dag uit een zomerkamp van vorig jaar.

Een dag uit het wiskundekamp

De ochtend is gewijd aan korte problemen. Eén van de begeleiders

geeft een aantal problemen op en vervolgens gaan de leerlingen in groepjes van vijf á zes met twee begeleiders aan de slag. Deze vraagstukken variëren van getaltheorie tot meetkunde, van kansberekenen tot logica. Ze zijn over het algemeen eenvoudig geformuleerd,



binnen niet al te lange tijd op te lossen en trainen de leerlingen in het inventief zijn en het zoeken van nieuwe methoden.

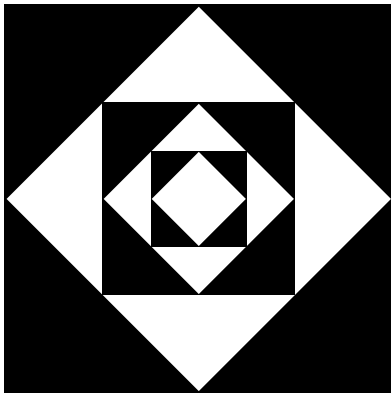
Voorbeelden

- Neem aan dat je de getallen 1 t/m 100 met elkaar vermenigvuldigt. Op hoeveel nullen eindigt het antwoord?
- De som van een aantal (minstens twee) opeenvolgende natuurlijke getallen is gelijk aan 1000. Vind deze getallen.

- Drie echtparen waren uitgenodigd voor een diner. De mensen kwamen achter elkaar aan en ieder gaf een cadeau aan de mensen die voor hem waren gekomen, behalve aan haar/zijn echtgenoot/-note. Nadat iedereen was aangekomen, vroeg John hen hoeveel keer zij een cadeau hadden gegeven. Hij kreeg vijf verschillende antwoorden. Als hoeveelste is John aangekomen?

Na de lunch hebben de leerlingen twee uur voor zichzelf. Er wordt een buitenspel georganiseerd (volleybal, voetbal, etc.), maar leerlingen kunnen ook andere dingen doen; er is bijvoorbeeld veel materiaal om wiskundige kunstwerken

te bouwen (Wiskunst) en de meeste leerlingen maken daar vaak en enthousiast gebruik van. In de middag wordt er niet aan verschillende kleine maar aan een groot probleem, een zogenaamd onderzoeksprogramma, gewerkt. In dezelfde groepjes als die ochtend wordt het desbetreffende onderwerp stap voor stap uitgediept. Zo stond in 1996 knopen op het programma. Knopentheorie is in de laatste tien jaar enorm ontwikkeld, maar het classificeren van knopen

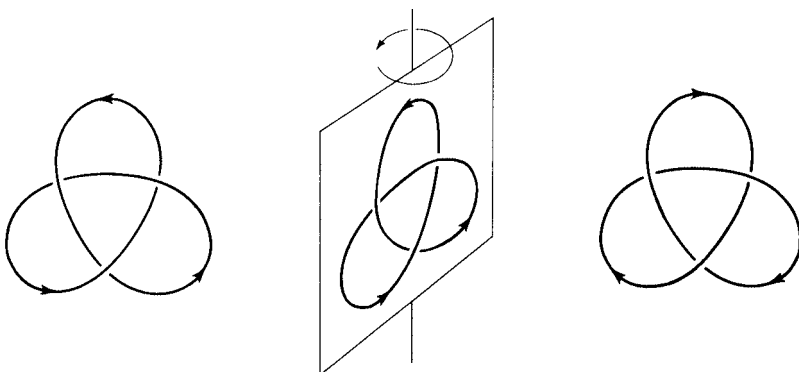


is nog steeds een open probleem. Er wordt begonnen met de leerlingen de 'allerkleinste' knopen te laten bestuderen en er wordt gezocht naar antwoorden op vragen als 'Zijn deze knopen hetzelfde?', 'Wat is hetzelfde?', 'Hoeveel verschillende knopen zijn er met kruisingsgetal drie?'

Al gauw wordt ontdekt dat het niet eenvoudig is om deze vragen te beantwoorden en wordt een begin gemaakt met systematische methoden om knopen te kunnen onderscheiden.

Voorbeeld

- Bepaal van de volgende knopen of ze wel of niet in hun spiegelbeeld omgevormd kunnen worden.



Naast het abstract redeneren geven knopen ook aanleiding tot wiskunst: met veters, touw en raamwerk worden matjes, knopen en bandjes gemaakt.

De avond

Na het eten en de daarop volgende vrije tijd staat er een lezing op het programma: J. Colle vertelt een verhaal over het heelal. Daarbij worden de leerlingen ook even aan het rekenen gezet: als de diameter

met zaklampen joelend in het rond hollen. Nog wat eten, nog wat drinken en dan slapen....

In het eerste nummer van de nieuwe Pythagoras stond een verslag van één van de deelnemers aan een wiskundekamp: 'Dit jaar kwamen



van de aarde 1 cm is, hoe groot is dan de afstand tot de zon? En dan het avondspel! Een getallenstrijd tussen drie partijen. Iedere leerling krijgt een nummer op het hoofd van vier cijfers. Doel is de nummers van de vijandelijke groepen

we voor het eerst niet op radio of tv, ja zelfs niet in de krant. Desalniettemin was het een ontzettend leuk kamp, en als iemand overweegt om er volgend jaar heen te gaan, zou ik zeggen: beslist doen!'



hardop te lezen. Zij zullen dit echter bemoeilijken door het voorhoofd tegen een boom te houden, op de grond te gaan liggen, weg te hollen, enzovoort. Dit alles gebeurt in het donkere bos waar de groepen



Zomerkampen 1997

VIERKANT organiseert in 1997 al voor het vierde jaar zomerkampen voor jongeren die het leuk vinden op hun hersens te laten kraken. Ex-deelnemers (ook meisjes!) vonden de kampen 'leuk, speels, uitdagend'. Dat alles onder het motto: 'Probeer zelf te ervaren dat wiskunde leuk kan zijn voor iedereen!' In het kamp zullen diverse wiskundige activiteiten aangeboden worden:

- het oplossen van spannende vraagstukken;
- onderzoeksprogramma's om de wiskundige horizon te verruimen;
- zelf wiskundige kunstwerken ontwerpen.

De wiskundige activiteiten (circa 5 uur per dag) worden aangevuld met lezingen, spelletjes en sportactiviteiten. Het kamp wordt geleid

door wiskundigen en universitaire wiskundestudenten.

Er komen drie kampen, met verschillende programma's:

kamp A:

4 t/m 8 augustus
voor leerlingen van de basisschool.

kamp C:

4 t/m 8 augustus
met eenzelfde programma als in 1996 voor 12-14-jarigen.

kamp D:

11 t/m 15 augustus met een nieuw programma voor 13-16-jarigen.

Verdere informatie en
aanmeldingsformulieren zijn te
verkrijgen op het Internet:
www.cs.vu.nl/~vierkant/

of bij het VIERKANT secretariaat:

Zsafia Ruttkay

Faculteit W&I

Vrije Universiteit

De Boelelaan 1081a,

1081 HV AMSTERDAM

tel: 020-444 7776,

e-mail: vierkant@cs.vu.nl

School & Computer '97

Voor het vierde achtereenvolgende jaar worden er op verschillende plaatsen in het land vijf beurzen gehouden onder de naam **School & Computer '97**.

Alle belangrijke producenten van educatieve software, maar ook hardware-leveranciers en anderen die zich op de educatieve ICT-markt begeven, zijn vertegenwoordigd.

De School & Computerkrant wordt op alle scholen in Nederland verspreid. In de krant bevindt zich een catalogus van de getoonde software en overige producten met een korte beschrijving.

Nadere informatie over School & Computer:

ESS, Anneke Kok of Wim Illem

tel. 050-5277504

ess@pi.net

www.dds.nl/~ess

Plaatsen en data: Zie kalender achter in Euclides.

Brief aan de staatssecretaris

Hattem, 28 januari 1997

Aan de staatssecretaris van

Onderwijs, Cultuur en

Wetenschap,

Mevr.T. Netelenbos

Betreft:

kerndoelen basisvorming

Kenmerk:VO/BOB-96031677

Op 5 december 1996 heeft het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een brief ontvangen waarin u ons verzoekt voor 15 januari 1997 te reageren op het concept herziene kerndoelen basisvorming. Het was ons helaas, mede door ziekte van betrokkenen, niet mogelijk om binnen de door u gestelde termijn te reageren. Met excuses zenden we U alsnog onze reactie in de verwachting dat U aan het een en ander aandacht wilt schenken.

Wij als bestuur van de NVvW hebben de herziene kerndoelen met belangstelling bestudeerd en gelegd naast het concept examenprogramma VBO/MAVO. Op dit laatste programma zullen wij nog apart reageren. Globaal genomen komt de inhoud van de kerndoelen in de domeinen Algebraïsche verbanden, Rekenen, meten en schatten, Meetkunde en Informatieverwerking en statistiek, overeen met de vergelijkbare domeinen in het examenprogramma voor de beroepsgerichte leerweg: de eindtermen van kern kort.

Tegelijkertijd stellen we vast dat wordt voorgesteld wiskunde alleen in de agrarische en technische sector als eindexamenvak voor te

schrijven. In de beide andere sectoren, economie en zorg en welzijn is wiskunde dus geen verplicht eindexamenvak. Het basisvormingsprogramma wiskunde zal voor deze leerlingen dan ook veelal reeds na twee jaar worden afgesloten.

Wij zijn van mening dat het algemeen vormende karakter van het basisvormingsprogramma wiskunde voor met name deze groep leerlingen van wezenlijk belang is. Straks moeten de vbo/mavo leerlingen na twee jaar kiezen voor een sector.

Juist bij leerlingen met niet te grote reken/wiskundige aanleg zal na 2 jaar nog niet de helft van de inhoud van de herziene kerndoelen verwerkt zijn. In die twee jaar hebben de leerlingen van alle onderwerpen een klein beetje gehad maar de kerndoelen zullen zeker niet bereikt zijn.

Hun meer getalenteerde klasgenoten, die bijv. de technische kant kiezen, doen over het overeenkomende wiskunde-examenprogramma 4 jaar.

Wij betreuren het dat zo de indruk wordt gewekt dat de overheid zelf de basisvorming minder serieus is gaan nemen. De plannen geven aanleiding om te veronder-

Mercatorprojectie en de centrale projectie

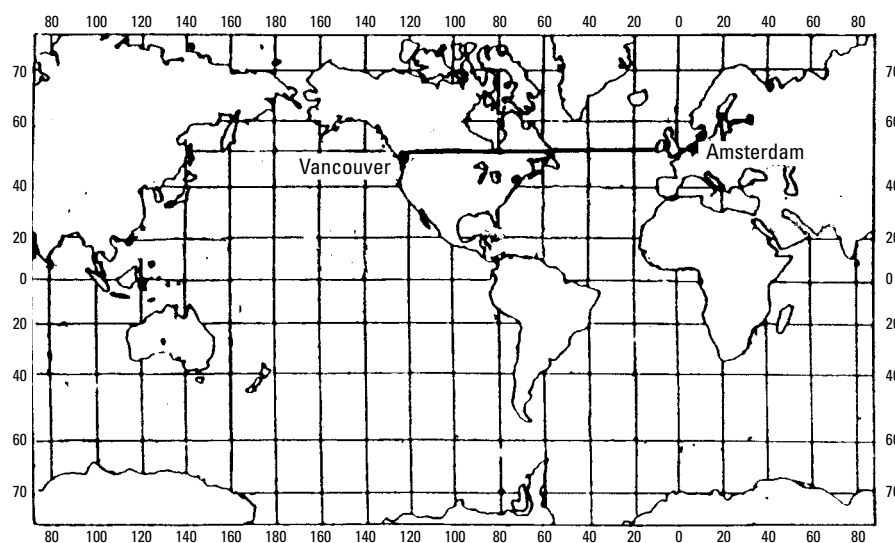
Kaartprojecties - wat doen we ermee?

Jan van den Brink

Twee richtingen op de aardbol

Vanuit Amsterdam naar Vancouver vliegen in een vaste richting west (Amsterdam en Vancouver liggen ongeveer op dezelfde parallelcirkel) lijkt op de mercatorkaart de kortste afstand, maar is op de aardbol toch een behoorlijk eindje om.

Toon de wereldkaart met Amsterdam - Vancouver als rechte lijn naar het westen (fig. 1). Zet op de globe een speelgoedvliegtuigje in Amsterdam, richting west, gericht langs de parallelcirkel naar Vancouver. Vraag: 'Rechtdoor. Ik stuur niet. Zal het vliegtuig rechtdoor langs de parallelcirkel van Amsterdam naar Vancouver gaan?'



figuur 1 Mercatorkaart, Amsterdam-Vancouver

Op de globe merk je dat verschillende 'richtingen' in het geding zijn. Een vaste 'kompasrichting' (zoals constant naar het westen vliegen) spoort *niet* met de 'kortste richting', de richting-met-de-kortste-afstand. Het onderscheid in de twee richtingen kan overtuigend aan de orde komen in een experiment: de richtproef op een globe.

Ik vroeg het op de basisschool, in het vwo, aan studenten. Zonder uitzondering twijfelde iedereen. Ze kenden deze ervaring met de globe niet. Ik deed het voor, maar stuurde het toestelletje moedwillig over de parallelcirkel. Dat werd ontdekt: 'Niet sturen! Opnieuw'. Het vliegtuigje dóók vanaf Amsterdam omlaag, zuidwestwaarts. Verrassend, maar: 'Hoe moeten we nu vanuit Amsterdam in Vancouver komen, zonder te sturen?' Er kwamen suggesties. 'Tetsje hoger richten'. Weer misten we Vancouver.

'Nog hoger, langs de Noordpool'. Toen zag ieder (met een hoeraatje) hoe Vancouver werd getroffen. Met een koers 'recht-vooruit', volg je een 'grootcirkel' over de aarde. Waarom? Omdat je immers links en rechts van je spoor evenveel aardoppervlak houdt. Dat is niet het geval bij de parallelcirkel tussen Amsterdam en Vancouver. Dus rijd je dan in een rondje. Een lijn recht-vooruit (een grootcirkel) levert tussen twee punten op de bol de kortste afstand. Met de richtproef kun je je ook realiseren dat de kompasrichting langs een groot-

cirkel voortdurend verandert. Uit het vliegtuig naar Vancouver dat zo'n grootcirkelkoers volgt, kan je op een gegeven moment beneden het ijzige Groenland voorbij zien trekken: de 'Noordpool' komt voorbij, zoals je een lantaarnpaal passeert langs een rechte weg.

Misverstanden

Er is veel over 'richting' te zeggen. Ik wil me echter beperken tot deze twee, de kompasrichting en de kortste richting op de globe, omdat ze aanleiding zijn tot veel misverstand. En niet alleen in school. Enkele voorbeelden.

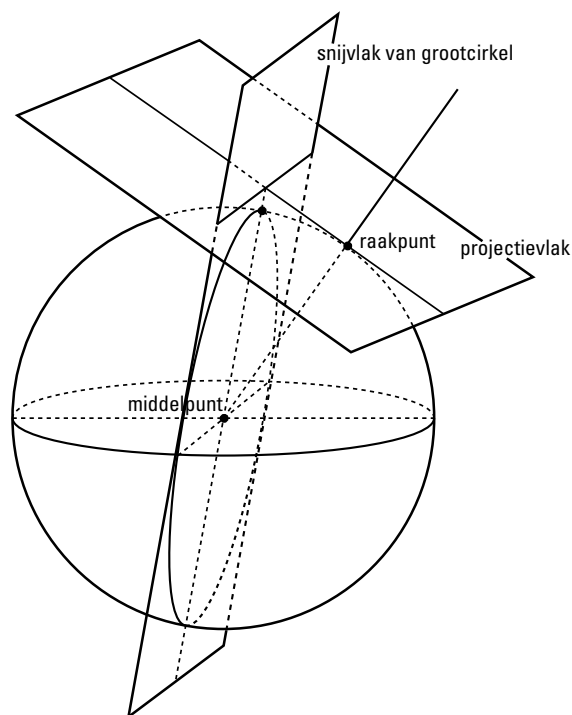
- De wereldkaart als model voor de wereld spreekt leerlingen meer aan dan de globe. Zelfs zo dat enkelen na de richtproef met het vliegtuigje de parallelcirkel tussen Amsterdam en Vancouver tóch als enige juiste richting kozen, zowel op de kaart, als op de globe. Tegen beter weten in. Anderen vonden dat er twee richtingen waren: één op de kaart en één op de wereldbol.
- Omdat de bidrichting naar Mekka, volgens de kompasrichting, niet de kortste richting bleek te zijn, moesten ooit eens in Emmen de bouwplannen voor een moskee worden gewijzigd....
- In een verslag van de zeilwedstrijd om de wereld in een catamaran door Henk de Velde vanaf Macquarie tot Kaap Hoorn schreef een journalist medio maart 1996: 'Hij vaart er de grootcirkel, omdat de loxodroom (vaste kompasrichting) daar onmogelijk is'. Maar het was precies andersom. De Velde moest in een boogje om Antarctica heen, dus met een vaste koers Oost.
- Zelfs in apparaten die officieel voor moderne satelietnavigatie (global positioning system) bedoeld zijn, komt het voor dat een kompasrichting in plaats van de gewenste kortste richting wordt berekend.
- Verwarrend is ook dat de twee richtingen samenvallen als je de aarde lokaal beschouwt of tot enkele uitzonderingsgevallen beperkt. Op de evenaar bijvoorbeeld is de kompasrichting Oost of West ook de richting van de kortste afstand en hetzelfde geldt voor de richting Noord of Zuid vanaf elk punt op een meridiaan. Maar in het algemeen moet je tussen de twee richtingen een onderscheid maken.

Twee richtingen - twee kaartprojecties

Met de twee verschillende richtingen hangen twee kaartprojecties van de aarde samen: de mercatorprojectie en de centrale projectie.

U kent wellicht het probleem waarvoor Mercator zich

gesteld zag: maak een (zee-)kaart met de eigenschap dat de kompasrichtingen op die kaart dezelfde zijn als op de globe. Zijn oplossing is de huidige 'mercator-kaart'. Elke rechte lijn die je op de mercatorkaart trekt tussen twee punten, snijdt de meridianen, die van pool tot pool lopen, onder een zelfde hoek: de rechte heeft een vaste kompasrichting. Een roerganger hoeft dan, om van het ene punt naar het andere te komen, niet voortdurend bij te sturen. Het ging Mercator dus om lijnen op de bol met een vaste kompasrichting, om bolspiraalen ('loxodromen'), en niet om de kortste afstand. In zijn dagen beschikte men nog over voldoende tijd. Een zeereis naar 'De Oost' duurde al gauw twee jaar. Zát tijd dus, zodat men niet om de kortste afstand verlegen zat. Wij wel. Wij hebben zo weinig tijd dat we haast vanzelf onder het begrip 'richting' de richting-met-de-kortste-afstand verstaan. Wij zouden Mercator hebben gevraagd een kaart te maken waarop een rechte lijn tussen twee punten niet een lijn met vaste kompasrichting over de aardbol geeft, maar direct de kortste afstand over de bol. En zo'n kaartprojectie bestaat: de 'gnomische kaart' - een centrale projectie waarin de globe vanuit haar middelpunt wordt geprojecteerd op een raakvlak aan de globe (zie fig. 2).



figuur 2 Snijvlak van grootcirkel, projectievlak, raakpunt, middelpunt.

Rechte lijnen in het projectievlak corresponderen met grootcirkels op de bol: de kortste afstanden.

Overzicht

Hier volgt een overzicht van eigenschappen bij elke richting.

Kompasrichting

- 1 de richting ten opzichte van de noordpool op een globe
- 2 wel sturen (een bocht maken)
- 3 via een 'kromme lijn' over het boloppervlak bewegen
- 4 langs een parallelcirkel of bolspiraal
- 5 vaste richting ten opzichte van de pool
- 6 geen kortste afstand
- 7 een rechte lijn op de mercatorkaart

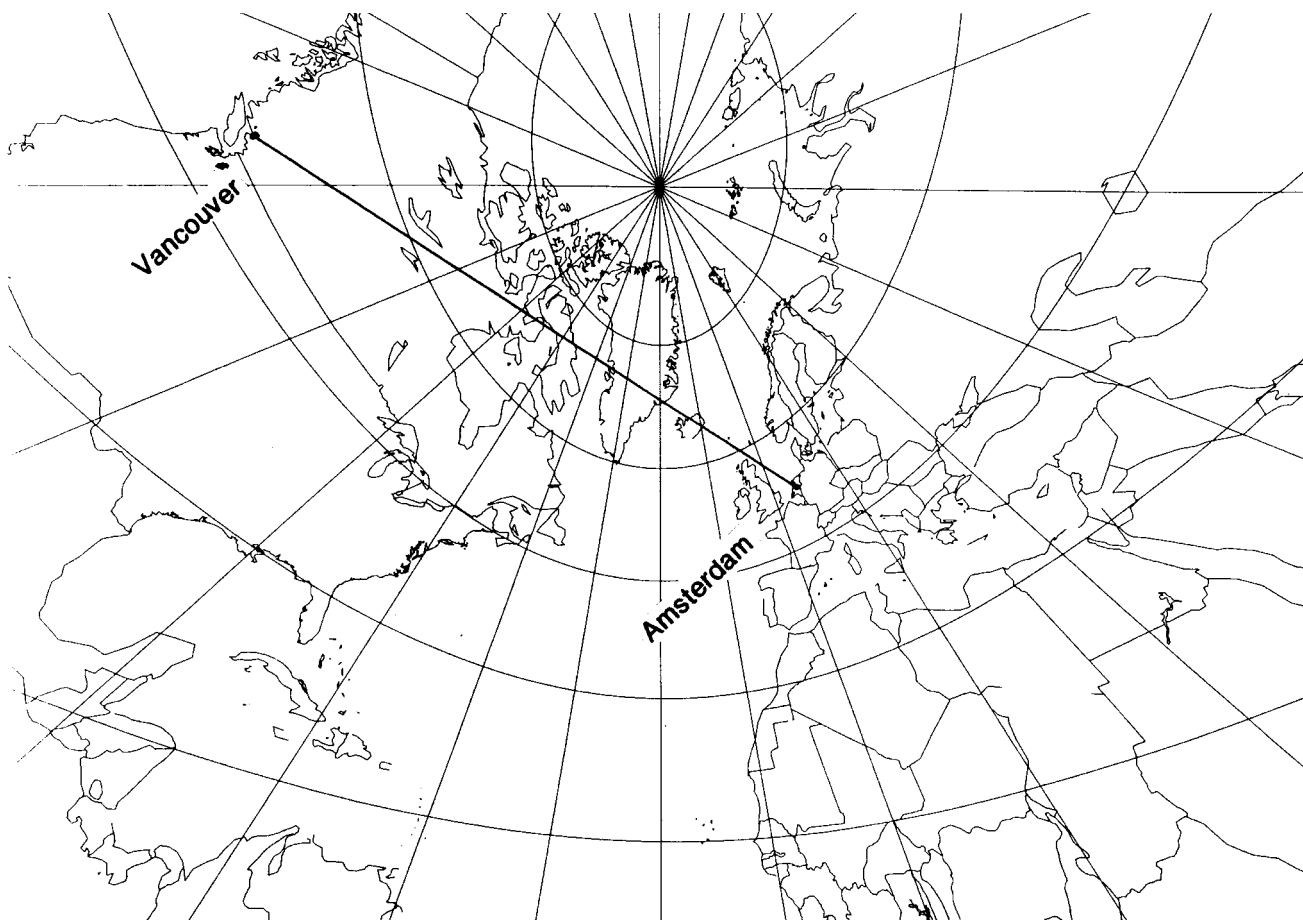
Kortste richting

- 1 de richting 'recht-vooruit' over een bol, ongeacht het coördinatennet
- 2 niet sturen (of: rechtdoor sturen)
3. bewegen in een lijn 'recht vooruit' over het boloppervlak
- 4 langs een grootcirkel op de bol
- 5 veranderende richting ten opzichte van de pool
- 6 wel de kortste afstand
- 7 een rechte lijn op de gnomische kaart (een centrale kaartprojectie)

Kaartprojecties - wat doen we ermee in ons onderwijs?

Hoewel kaartprojecties niet in het wiskundeprogramma voorkomen, zijn er interessante wiskundige activi-

teiten mee te doen (Bert Zwaneveld, 1996). Hier volgen enkele voorbeelden over het afwisselend gebruik van de twee kaartprojecties, het ontwerpen van een lokale mercatorkaart en het onderzoeken van eigenschappen in de gnomische kaart.



figuur 3 Amsterdam / Vancouver

Afwisselend gebruik van verschillende kaartprojecties

Verschiedende kaartprojecties geven verschillende afbeeldingen van de aardbol. Elke kaartprojectie heeft zo zijn sterke en zwakke punten en daarin ligt voor het onderwijs een uitdaging: laat kaartprojecties elkaars gebreken opheffen door ze afwisselend te gebruiken. Wat de één niet toont van de Aarde, kan door de ander worden aangevuld. Neem bijvoorbeeld het volgende vraagstuk over de mercatorkaart en de gnomische kaart.

‘Teken de kortste luchtlijn tussen Amsterdam en Vancouver in beide kaarten.

Welke kaart zou je het eerst gebruiken, de mercatorkaart (fig. 1) of de gnomische kaart (fig. 3)?’

Omdat een rechte lijn in de gnomische kaart een grootcirkel (de kortste afstand) oplevert op de bol, zou ik daarmee beginnen. Die rechte lijn snijdt meridianen. Neem enkele van die snijpunten over op de andere kaart, de mercatorkaart. En verbindt die punten met rechte lijnen. Op de mercatorkaart zijn dat lijnen met een vaste koers. Je vliegt dus met een vaste koers van het ene punt van de grootcirkel naar het andere punt. Deze ‘samengestelde koers’ is een compromis tussen de eisen van de ‘vaste koers’ en de ‘kortste afstand’. Hij wordt tot op de dag van vandaag in de zeevaart toegepast, zij het met modernere middelen.

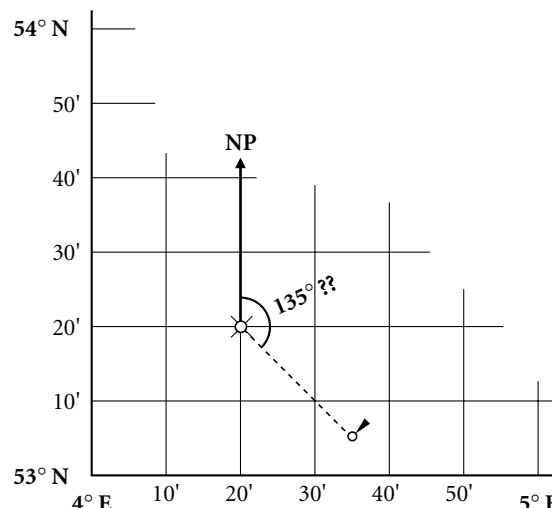
Een lokale mercatorkaart maken

Een manier om de essentie van het probleem waarvoor Mercator stond te voelen, is om leerlingen zelf zo’n kaart te laten ontwerpen voor een relatief klein gebied. Neem bijvoorbeeld het volgende vraagstuk:

‘Je nadert met je schip Den Helder. Je positie is $53^{\circ} 20'$ NB / $4^{\circ} 20'$ OL (ergens op de Noordzee). Alle instrumenten doen het nog. Maar - dom, dom - je zeekaart is over boord gewaaid. Je zult zelf een kaart moeten maken.

Voor Den Helder liggen gevaarlijke zandbanken te dreigen: de Noorder Haaks, de Razende Bol. En ook langs Texel is het niet pluis. Daar moet je niet komen.

Er liggen gelukkig boeien langs het eiland. En de coördinaten van die boeien staan in een almanak. Bijvoorbeeld een boei op $53^{\circ} 05'$ NB / $4^{\circ} 35'$ OL, die je links moet houden om Texel te mijden.



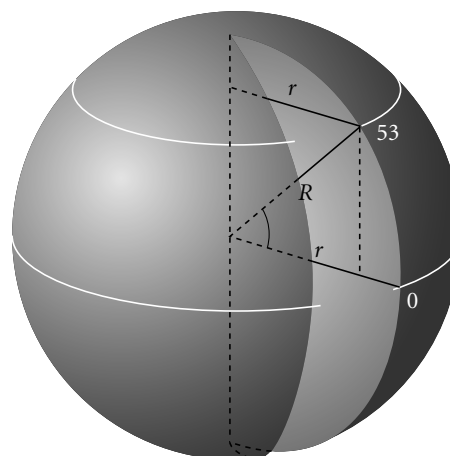
figuur 4 Rooster met posities ($53^{\circ} 20'$ NB / $4^{\circ} 20'$ OL) en ($53^{\circ} 05'$ NB / $4^{\circ} 35'$ OL)

Weet je nu in welke richting je moet varen om bij die boei te komen? Kompasrichting 135° zoals hier op de kaart?

De coördinaten van de boeien in de almanak zijn de coördinaten op de aardbol. Niet op een platte kaart. Hoe zorgen we ervoor dat de richting op de kaart dezelfde is als die op de bol?

Een oplossing is: maak een lokale mercator-kaart voor dit gebied rondom de 53° NB’.

Daarmee wordt klassikaal of groepsgewijs een onderzoek begonnen. Allereerst op de globe met haar parallelcirkels en meridianen.



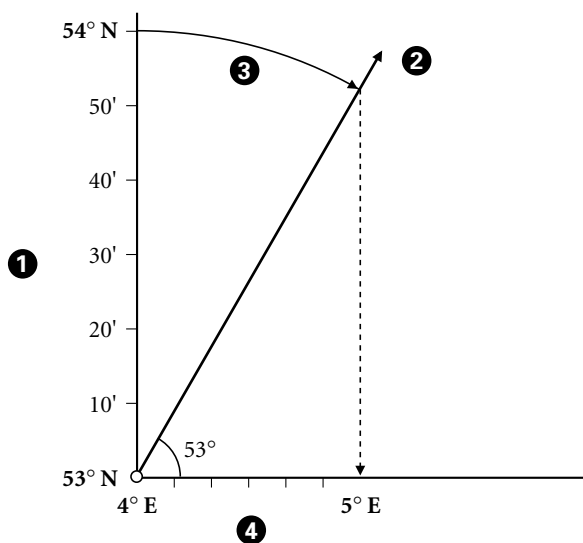
figuur 5 Bol-inkijkje, met krimpende parallelcirkels

krimpde parallelcirkels op de bol

Op de globe zie je dat de parallelcirkels kleiner worden naarmate ze dichter bij de pool liggen: 'krimpde' parallelcirkels. De meridiaan-cirkels van pool tot pool veranderen daarentegen niet. Die blijven even groot als de evenaar. Dit verschil tussen parallelcirkels en meridianen op de globe zien we niet terug in het platte rooster. De maateenheden van de x -as en de y -as zijn daar overal even groot. Om de kompasrichting op de bol ook op de kaart te krijgen, moeten we de maateenheden van de x -as laten krimpen (ten opzichte van die van de y -as) in dezelfde mate als de parallelcirkels krimpen (ten opzichte van de meridiaan).

Om de krimp van de parallelcirkel op 53° NB te bepalen is wat 'gonio' nodig.

Het inkijkje in de bol (fig. 5) toont de straal (r) van de parallelcirkel op de breedte van 53° en de straal (R) van de aarde. Je kan zien dat $\cos 53^\circ = r/R$. Dus $r = R \cos 53^\circ$. De omtrek van de parallelcirkel op 53° NB is $2\pi r = 2\pi R \cos 53^\circ$. Hij is met een factor $\cos 53^\circ$ kleiner geworden ten opzichte van de evenaar of ten opzichte van een meridiaancirkel. Zo'n verhouding moeten we dus ook op de kaart krijgen tussen de x -as en de y -as.



figuur 6 Kaart met 1, 2, 3, 4.

De constructie voor het gebied rond 53° NB gaat aldus:

- 1 Kies een 'graad' als maat-eenheid op de y -as (verticaal van 53° NB tot 54° NB).
- 2 Trek een hulplijn die een hoek van 53° maakt met de x -as.
- 3 Cirkel de graad op de y -as om op de hulplijn.
- 4 Projecteer de graad op de hulplijn loodrecht op de x -as.

De 'graad' op de x -as is nu de $\cos 53^\circ$ van die op de y -as, zoals ook op de bol het geval is. De mercatorkaart is eigenlijk geen 'projectie' in de zin zoals de centrale projectie er een is, met een centrum van projectie en dergelijke. Hij is meer een 'constructie' om een kaart met 'krimpde ooster- of westerlengte' te maken, zoals de parallelcirkels krimpen op de bol.

krimpde lengte of wassende breedte

Je kan ook, naar een idee van Henk Bezemer (1988) - zeezeiler van beroep en roeping - eerst op de x -as een 'graad' kiezen en de eenheid op de y -as *rekken* met een factor $1/(\cos 53^\circ)$ via de hulplijn. Daarmee wordt de gewenste verhouding tussen x - en y -as ook bereikt. Je krijgt dan een kaart met een 'wassende breedte' in plaats van een met 'krimpde lengte'. Maar het effect is hetzelfde: de kompasrichting op de kaart is gelijk aan die op de bol rondom 53° NB.

wassende breedte

Plaatsen we nu het schip en de boei uit het vraagstuk in deze lokale mercatorkaart en meten we de kompasrichting waarin we naar die boei moeten varen, dan is die niet 135° , maar 136° . Met 135° zouden we noordelijker uitkomen en dichter bij de gevaarlijke zandbanken voor Texel.

Rond de mercatorkaart zijn vraagstukken van verschillend niveau te bedenken waarbij men op de 'wassende breedte' van de kaart stuit. Beschouw bijvoorbeeld de bolspiralen in fig. 7.

Eigenschappen in de gnomische kaart onderzoeken via de centrale projectie

De gnomische kaart (fig. 3) is ontstaan door een centrale projectie vanuit het middelpunt van een globe op een raakvlak aan die globe (fig. 2). De kaart is als het ware het raakvlak aan een denkbeeldige globe. Het raakpunt van de kaart is het punt (45° NB, 30° WL). Je weet dat de straal van de globe in dat punt loodrecht op de kaart staat. Bij deze constellatie kun je tal van vragen stellen:

- Waarom is elke rechte lijn op deze kaart een grootcirkel op de bol? En geldt het omgekeerde ook?
- Is de straal van de globe te construeren?
- Welke vorm hebben de parallelcirkels in deze kaart? (Het zijn, afhankelijk van de breedte, verschillende soorten kegelsneden: ellipsen, hyperbolen of een parabool).
- Hoe dichter de parallelcirkel bij de pool ligt, des te scherper moet je opsturen om langs de parallelcirkel te blijven rijden. Hoe zie je dat in de kaart? En hoe zit het met een bolspiraal? (Gebruik daarbij de mercatorkaart weer.)



figuur 7 Escher 'Boloppervlak met vissen'

Tot slot

Er is in dit artikel over twee richtingen op de aardbol gesproken die elk door twee verschillende kaartprojecties als rechte lijn in beeld kunnen worden gebracht. Er zijn wiskundige activiteiten met de projecties bekeken die, afhankelijk van de belangstelling van leerling en docent, tot nader onderzoek kunnen leiden. Ten behoeve van bijvoorbeeld een GWA-werkstuk, -spreekbeurt of -scriptie vormen bolmeetkunde en kaartprojecties een gebied vol verrassingen.

Verwijzingen

H. Bezemer

Handboek Astronavigatie

Antares, Amsterdam (1988)

F.J. van den Brink

Informatieboek bij de poster Bolmeetkunde

Freudenthal instituut (1995)

B. Zwaneveld

De Mercatorprojectie

Euclides 71-5, blz. 155-158 & 180 (1996)



figuur 7b Boloppervlak met spiralen zonder vissen

TWIN: de stand van zaken

Michel van Glabbeek

Iedereen die de situatie in het MTO kent zal het met me eens zijn dat er een enorme cultuurschok, ter grootte van een flinke aardbeving, teweeg gebracht gaat worden. Om dit te illustreren heb ik bij dit artikel twee contrasterende voorbeelden gekozen. Links sommetjes die representatief zijn voor de soort wiskunde zoals die de afgelopen twee decennia in het MTO voorkwam. Rechts ziet u TWIN-materiaal. Niet helemaal hetzelfde zoals u ziet.

De trouwe lezer van Euclides zal het niet ontgaan zijn: het MTO is in beweging en dat geldt ook voor het wiskundeonderwijs dat daarbij hoort. De afgelopen jaren zijn er eindtermen ontwikkeld en op basis daarvan een leerplan¹. Ook het daarop aansluitende examenprogramma is zeer ingrijpend gerestyled².

Na de zomervakantie worden de nieuwe eindtermen van kracht. Tot op heden is er bij mijn weten door geen uitgever een bij het nieuwe examenprogramma passende wiskundemethode voor het MTO ontwikkeld: een ongelukkige situatie.

Hoe nu verder?

In januari is het TWIN-project³ officieel van start gegaan. Gelukkig is er al flink veel voorwerk verricht. Een schrijfgroep onder supervisie van het Freudenthal instituut is al sinds juli '96 bezig met het ontwikkelen van wiskundemateriaal. Dat materiaal wordt uitgetoetst op de vijf kernscholen van het TWIN. Kritiek en ervaringen van docenten worden verwerkt en vervolgens ontstaat een definitieve versie rond een onderwerp. Dit nieuwe materiaal komt snel ter beschikking van de kernscholen, de volgscholen en de abonnementscholen van TWIN. Praktisch het hele MTO-veld kan zo op de hoog-

te komen en blijven van de naderende veranderingen⁴.

Er doemen nog genoeg problemen op: docenten moeten zich goed

$$2 \quad -\frac{2}{15} \times 1\frac{2}{3} = \quad 2\frac{1}{3} : 9 = \quad 1\frac{1}{5} : \frac{5}{6} = \quad 1\frac{1}{7} \times \frac{1}{8} =$$

$$3 \quad 2\frac{1}{5} \times 2\frac{1}{3} : 1\frac{2}{5} = \quad -\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4} : 2\frac{1}{8} = \quad 1\frac{2}{7} \times 2\frac{1}{3} : 5\frac{1}{4} =$$

$$4 \quad \frac{a^2c}{a-b} \times \frac{a+b}{ac} : \frac{a^3}{a-b} =$$

Les 4 1 $-2ab^4c \times 5b^2c^2 =$

$$6ab^2 \times \frac{1}{3}b^2c =$$

$$10x^2z^4 : 5xz^3 =$$

$$15a^3b^6 : -2ab^5 =$$

$$2 \quad (-2ab^2)^5 \times (-\frac{1}{2}a^2b)^3 =$$

$$(-ab^2)^7 \times (\frac{1}{3}a^2b)^5 =$$

$$(2x^3y)^4 : (3xy^2)^2 =$$

$$(2a^2b^2)^4 : (-2a^3b)^2 =$$

3 Maak de volgende berekeningen:

$$2\frac{1}{2}a^5b \times 1\frac{1}{5}b^5 =$$

$$3\frac{3}{7}abc \times 2\frac{1}{3}b^2c =$$

$$-3\frac{1}{3}xy^2z : 1\frac{1}{3}yz =$$

$$\frac{3}{4}x^5 : 1\frac{1}{3}x =$$

$$4 \quad \frac{(x^3yz)^3 \times (4x^2y^2)^2 : (-2x^3z)^3}{(x^2y^3)^3 : (-2xy^2)^2} =$$

Les 5 Maak de volgende berekeningen:

$$1 \quad 7^{-1} + 7^0 =$$

$$2^5 : (2^{-2} \times 2^{-5}) =$$

$$3^6 : (3^2)^5 =$$

$$5^{-6} : (5^{-2} \times 5^{-4}) =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} : \frac{1}{16} = 2^{\dots} =$$

$$\frac{4}{36} \times \frac{8}{216} = 3^{\dots} =$$

$$2 \quad 3^{-2} + 3^3 + 3^{-1} + 3^0 =$$

$$3 \quad \frac{1}{2} \times 16 \times \frac{1}{64} \times \frac{1}{25} \times 125 \times \frac{1}{5} = 2^{\dots} \times 5^{\dots} =$$

$$4 \quad \sqrt{x^8} \cdot y^{-3} : xy =$$

$$a^{-3} : a^{-5} : a^{-4} =$$

$$(\frac{1}{2}x^4y^2)^2 \cdot (4x^{-3}y^{-4}z^{-3}) =$$

A.J. Pigmans **Algebraïsche vormen** Stam Techniek, 1993

kunnen voorbereiden. Dit kan op de regionale dagen van onze vereniging, op de regionale dagen van TWIN en op een informatiedag van het APS. De invoering van Wiskunde 12-16 is niet zonder slag of stoot gegaan, maar uiteindelijk wordt de invoering door het overgrote deel van het onderwijsveld gedragen. Voor TWIN gelden wat

andere randvoorwaarden waaronder de moordende tijdsdruk. Maar wat bij W12-16 lukte moet ook bij TWIN kunnen slagen: invoering van realistische wiskunde die aansluit bij de beleavingswereld van de leerling en die een transfer van wiskundige inzichten en technieken naar andere vakken in het onderwijs mogelijk maakt.

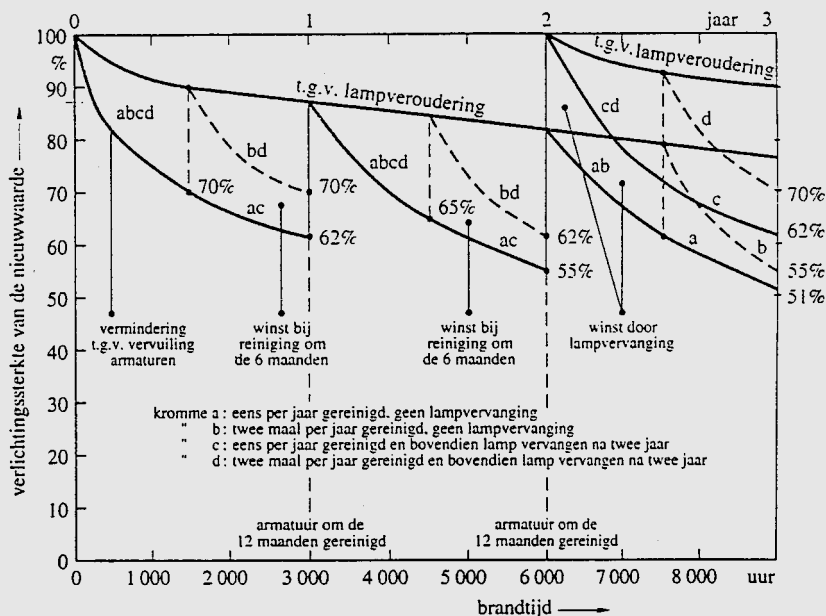
Noten

- 1 De eindtermen en leerplannen wiskunde zijn ontwikkeld onder auspiciën van de SLO. Inmiddels zijn de eindtermen overgenomen in de derde generatie eindtermen van de belangrijkste richtingen in het MTO.
- 2 Deze operatie komt op naam van het LICA en is volledig buiten SLO en Platform tot stand gekomen. In een volgend nummer wil ik nader ingaan op het nieuwe examenprogramma.
- 3 TWIN staat voor Techniek, Wiskunde, Informatietechnologie en Natuurkunde. TWIN is een samenwerkingsverband tussen Fi, SLO, ROC Eindhoven en HvU.
- 4 Al het TWIN-materiaal wordt door SMD uitgegeven en zal op tijd beschikbaar zijn voor docenten in het MTO.

Wat grafieken te zeggen hebben

3.4 De grafiek nader belicht

Grafieken in de technische literatuur zien er soms heel ingewikkeld uit. Het kost dan nogal wat inspanning om de gewenste informatie uit zo'n grafiek te halen. Een voorbeeld:



19 Bekijk de grafiek, lees alle tekst en formuleer drie vragen over deze grafiek die je zelf op het eerste gezicht niet kunt beantwoorden.

De grafiek gaat over de lichtopbrengst (verlichtingssterkte) van lampen op een school. Er zijn twee factoren die deze lichtopbrengst beïnvloeden:

- Veroudering van de lamp zelf.
Daar is niets aan te doen. Als de veroudering te sterk is, moet je de lamp vervangen.
- Het vuil worden van de lamp en de armatuur.
Daar is wel iets aan te doen: schoonmaken.

Zowel lampen vervangen als lampen schoonmaken, kost geld. De school moet dus een keuze maken wanneer wat gebeurt.

20 Eigenlijk staan in deze figuur vier afzonderlijke grafieken getekend. Teken de vier mogelijkheden a, b, c en d ieder in een eigen diagram. Dat lukt door de grafieken over te trekken! Aan het eind van dit hoofdstuk, op pagina 27 en 28, kun je je tekeningen maken.

21 Zet bij alle grafieken de percentages bij de 'tanden' en omcirkel de laagste waarde in iedere grafiek.

Symposium 1997 Historische Kring Reken- en Wiskunde- Onderwijs (HKRWO)

Op 31 mei van 10.15 - 16.00 uur organiseert de HKRWO haar jaarlijkse symposium in de Hogeschool Domstad te Utrecht met als thema:
Rekenhulpmiddelen in het onderwijs

Sprekers:

Thijs van Ruiten:

Onbekende schatten in het Nationaal Schoolmuseum.

Martin Traas:

De rekenliniaal in het Nederlandse wiskundeonderwijs.

Hessel Pot:

Zin en (vooral) onzin in Meneer van Dalen.

Christoph Selter:

Johannes Kühnel en de kracht van 5.

Deelname door overmaking van f 35,- (incl. lunch) op giro 4657326 tnv HKRWO te Utrecht.
Informatie: 030 - 2611611
D. de Haan / E. de Moor

Op de eerste zaterdag van het nieuwe jaar houdt het Wiskundig Genootschap traditioneel zijn Wintersymposium. Dit symposium is met name bedoeld voor leraren uit het voortgezet onderwijs. Het thema van dit jaar was de geschiedenis van de wiskunde.

Een historische dag

Victor Schmidt

Op de *vierde januari* van dit jaar werd er historie geschreven, niet alleen in het Johan van Oldenbarneveltgymnasium te Amersfoort, waar het Wiskundig Genootschap haar wintersymposium hield, maar ook in Friesland, waar na elf jaar een Elfstedentocht werd gehouden. Dat schaatsevenement was er de oorzaak van dat organisator Rob Bosch de avond voor het symposium geplaagd werd door verontruste telefoontjes, vooral uit het Noorden van ons land. Hij kon iedereen gerust stellen: *'it giet oan'*, zodat ongeveer 150 deelnemers de weg wisten te vinden naar het statige gebouw in een villawijk in Amersfoort. Het thema van het symposium was geschiedenis van de wiskunde. Het genootschap had drie sprekers bereid gevonden hun licht te laten schijnen over de historie van hogeregraads vergelijkingen, de diffe-

rentiaal- en integraalrekening en de handel en wandel van de uit Zwitserland afkomstige gebroeders Benoulli.

Infinitesimaalrekening

Newton en Leibniz worden beschouwd als de grondleggers van de differentiaal- en integraalrekening, die tezamen infinitesimaalrekening worden genoemd. Beide geleerden hebben onafhankelijk van elkaar de fundamenteën onder de infinitesimaalrekening ontdekt. De eerste spreker, professor Duparc uit Delft, gaf een met humor doorkruide voordracht over de wijze waarop met name Newton zijn bijdrage heeft geleverd aan de theorie van differentiaal- en integraalrekening. Het uitgangspunt van Newton was de cirkelbeweging van een deeltje om

een ander. Inspiratiebron voor dit probleem vormde de beweging van planeten om de zon of de maan om de aarde. Newton bedacht dat een deeltje in een cirkelbaan een snelheid heeft die gericht is volgens de raaklijn aan die cirkel. Het deeltje wil de cirkel verlaten, maar iets dwingt het tot het volgen van die cirkel. Dat iets is een kracht waarvoor Newton een formule kon afleiden met behulp van een oneindig kleine toename van de tijd.

Aan de hand van de formule voor de kracht waarmee een deeltje in zijn baan wordt gedwongen kon Newton zijn algemene gravitatiewet afleiden en vervolgens de tweede wet van Kepler. Deze natuurkundige wetten zijn afgeleid met behulp van een wiskundige redenering. Zonder wiskunde geen natuurkunde!

Naderhand is men zich gaan realiseren dat de baan van bijvoorbeeld de maan een ellips is met de aarde in één van de brandpunten. Maar ook voor een ellips kon een vergelijkbare redenering gevolgd worden met eveneens opvallende resultaten.

Een manco in de gedachtegang van Newton was dat hij hemellichamen als puntmassa's veronderstelde. De vraag was of die veronderstelling terecht was. Newton paste de integraalrekening toe bij de beantwoording van deze vraag. Hij verdeelde de aarde in oneindig veel puntmassa's die elk een aantrekkingskracht uitoefenen op de maan. Vanwege symmetrie volgde dat die kracht altijd naar het middelpunt van de aarde wijst. Het enige wat Newton hoefde te doen is de aantrekkingskracht van alle aarddeeltjes bij elkaar op te tellen. De integraalrekening was geboren. Newton bleek in staat zijn inzichten op het terrein van de infinitesimaalrekening ook op andere problemen toe te passen. Voorbeelden hiervan zijn de bepaling van de





lengte van een kromme en van allerhande oppervlakten en inhouden. Ook onderkende Newton reeds differentiaalvergelijkingen. Bovendien heeft Newton bekendheid verworven met zijn iteratieve benaderingsmethode voor de nulpunten van een kromme, die tegenwoordig naar Newton en Raphson wordt vernoemd. Duparc vermeldde ook nog het bestaan van de zogenaamde Sommen van Newton, die in het verleden een rol speelden in het voortgezet onderwijs. De som van de eerste, van de tweede en van de n -de machten van de wortels van een tweede-grads vergelijking kan worden uitgedrukt in de coëfficiënten uit deze vergelijking. Op menig HBS-examen prijken vraagstukken die kennis van deze Sommen vereisen. Tenslotte zijn er van Newton interpolatieformules bekend, die in zijn tijd van groot belang waren om gecompliceerde berekeningen uit te voeren. Kom daar nu nog eens om in het informatica-tijdperk! De theorie van Leibniz verschilt van die van Newton. Laatstgenoemde onderkende alleen veranderingen in de tijd, omdat zijn blikveld beperkt was tot de hemelmechanica. Leibniz onderzocht het effect van een oneindig kleine verandering van een willekeurige variabele op andere variabelen. Hij introduceerde de ons bekende notatie dy/dx voor de afgeleide functie. Newton schreef $\dot{y}$ en noemde dat de 'fluxie van y '.

Hogeregraads vergelijkingen

De aangekondigde spreker professor Grootendorst was wegens ziekte verhinderd en werd vervangen door Van de Craats. Daardoor bleef de geschiedenis van met name de oplossing van de derde-grads vergelijking wat op de achtergrond. De kwadratische vergelijking kon reeds ver voor onze jaartelling opgelost worden, maar een algemeen geldend oplossings-algoritme voor een derde-grads vergelijking was tot aan de Renaissance tijd onbekend. Rond die tijd

Het betoog concentreerde zich op een methode van Morley, die de wortels van een derde-grads vergelijking door middel van een meetkundige constructie kon bepalen. In het geval het niet mogelijk is om de vergelijking te transformeren in de gedaante $(x - a)^3 = 0$ en er evenmin sprake is van een dubbele wortel blijkt een herleiding van de vergelijking tot de gedaante $\lambda(x - h_1)^3 + \mu(x - h_2)^3 = 0$ interessante resultaten op te leveren. De parameters zijn zo nodig complex. Indien deze herleiding lukt, is het niet moeilijk meer x te vinden.



Spreker Jan van de Craats

werd het probleem door diverse Italiaanse wiskundigen als Scipio del Ferro en Cardano met vallen en opstaan opgelost. Niet zelden ging dat gepaard met onderlinge ruzies en intriges. In die zin verschildte de wereld van de wiskunde niet veel van de echte wereld in het Italië in de vijftiende en zestiende eeuw. Van de Craats wist te vertellen dat de zoektocht naar de wortels van een derde-grads vergelijking de aanleiding is geweest tot de ontdekking van de complexe getallen.

Het bepalen van de parameters kost nogal wat rekenwerk. Het blijkt evenwel dat h_1 en h_2 oplossingen zijn van een kwadratische vergelijking. Zijn h_1 en h_2 eenmaal bekend, dan kunnen λ en μ uit een lineair stelsel vergelijkingen berekend worden. Of h_1 en h_2 reëel of complex zijn wordt bepaald door de discriminant van de vergelijking waarvan ze de wortels zijn. Op basis van deze discriminant kan een uitdrukking worden berekend die op zijn beurt als discriminant beschouwd kan worden

van de derdegraads vergelijking. Het teken van deze discriminant bepaalt of er één reële en twee complexe wortels zijn of dat de vergelijking drie reële wortels heeft. Dat laatste geval heeft in de historie menig wiskundige de nodige hoofdbrekens gekost. Wat is er nu meetkundig aan het bovenstaande? De herleiding van een derdegraads vergelijking tot een som van twee derde machten kan in verband gebracht worden met de zogenaamde Möbius-transformaties. Het drietal wortels van de vergelijking kan door een geschikt gekozen Möbius-transformatie worden afgebeeld op een drietal complexe getallen van de vorm 1 , ρ en ρ^2 die elk op de eenheidscirkel liggen. De parameters h_1 en h_2 blijken onder deze transformatie afgebeeld te worden op nul respectievelijk oneindig. Aan de hand van deze constatering kan de plaats van de beide parameters in het complexe vlak met behulp van een meetkundige constructie opgespoord worden.

Lunch en winnaar

Na afloop van de voordracht vond de lunch plaats in de kantine van het schoolgebouw. De deelnemer die tijdens het betoog van Van de Craats besmuikt met een walkman in de weer was, kon meedelen wie de Elfstedentocht had gewonnen.

Bernoulli

Terwijl bij de vorige sprekers het accent meer op de wiskunde lag, legde de derde spreker, Jan van Maanen uit Groningen, in zijn lezing een sterker accent op de geschiedenis. Zijn voordracht was doorspekt met jaartallen. Bovendien liet hij overdrukken zien van geschriften en portretten. Van Maanen leidde de toehoorders

rond door de geschiedenis van de wiskunde vanaf de oudheid tot aan de zeventiende eeuw. De Babyloniërs waren in staat berekeningen te doen, vergelijkingen op te lossen en hadden kennis van de meetkunde. De Grieken legden de nadruk op deductieve meetkundige constructies. Voor hen was het rekenen van minder belang. De Griekse wiskunde is in West-Europa terecht gekomen via de Arabieren. Laatstgenoemden voegden daar de algebra aan toe, waardoor de meetkunde op de achtergrond raakte. In de Renaissancetijd vindt er een doorbraak plaats in de algebra als gevolg van de uitvinding van de symbolische algebra. Pronkstuk van deze tijd is de oplossing van de derdegraads vergelijking. Men was tot die tijd wel in staat de wortels van een dergelijke vergelijking meetkundig te construeren, maar numerieke resultaten waren onbekend. Cardano gaf een oplossingsmethode in zijn 'Ars Magna'. In de zeventiende eeuw weet Descartes een koppeling te maken tussen algebra en meetkunde. Hij kon van krommen vergelijkingen opstellen. Het werk van Descartes vormde op zijn beurt de aanzet tot de ontwikkeling van de infinitesimaalrekening culminerend in het werk van Newton en Leibniz. De geschiedenis van de gebroeders Jakob en Johann Bernoulli kan niet los gezien worden van de ontdekkingen van Leibniz. Laatstgenoemde is grondlegger van de differentiaal- en integraalrekening in de vorm zoals we die nu kennen. De publicatie van zijn ontdekking blijkt slechts een handvol pagina's te omvatten. Leibniz beschreef al vlot de ons bekende differentieerregels en kon daarmee bijvoorbeeld de brekingswet van Snellius afleiden. De praktische toepasbaarheid van de theorie bleek van belang voor de verspreiding en uitdieping ervan, onder andere door de gebroeders Bernoulli.



Jan van Maanen aan het woord.

Deze broers stammen uit een invloedrijke handelsfamilie uit het Zwitserse Basel. De familie telde verschillende generaties van geleerden en schilders. Jakob was dertien jaar ouder dan zijn broer Johann. Hij studeerde theologie, maar maakte zich zelfstandig de wiskunde eigen. Hij wordt in 1687 hoogleraar in zijn geboortestad en blijft dat tot zijn dood. Johann was voorbestemd tot een carrière in de handel. Dat maakt hij niet waar, want hij wenst in de voetsporen van Jakob te treden. Zijn oudere broer treedt in die jaren op als zijn leermeester.

De relatie tussen beide broers is rond 1690 nog goed te noemen. Zo publiceerde Jakob een bewijs voor de divergentie van de harmonische reeks, maar schrijft hij het toe aan Johann. Van Maanen gaf een korte schets van dit elegante bewijs.

In de loop van de tijd ontstaan er fricties tussen beide broers. Er zijn brieven bekend van Johann aan Jakob waarin eerstgenoemde op een pesterige toon het probleem van de kettinglijn uiteenzet en

oplost. Het heeft er de schijn van dat Johann aast op de leerstoel van zijn broer.

Zover is het nog niet. Johann trekt, zoals gebruikelijk voor mensen van zijn afkomst, een aantal jaren door Europa. Hij is tijdelijk de leermeester van l'Hôpital, wiens stelling feitelijk door Johann is ontdekt. In 1695 bekleedt Johann door voorpraak van zijn broer een leerstoel aan de Universiteit van Groningen. Zijn aanstelling bleek het resultaat van onderhandelingen tussen de vrijzinnige en orthodoxe theologen aan deze universiteit. In 1696 leidt het zogenaamde brachystochroonprobleem ('welke vorm moet een glijbaan hebben om zo snel mogelijk beneden te zijn') tot een definitieve verwijdering tussen de broers. Johann had het probleem opgelost en enkele vakbroeders, waaronder Jakob, uitgedaagd hem de oplossing op te sturen. Hij laat zijn nieuwjaarswensen voor 1697 vergezeld gaan van een ironisch bedoelde herinnering aan het brachystochroonprobleem. Dat steekt vooral zijn broer in Basel.

De oorzaak van de verslechtering van de relatie tussen beide broers moet volgens Van Maanen gezocht worden in het verschil in stijl tussen beide broers. Jakob, de oudste van de twee, vat zijn vak serieus op en onderzoekt vaak de principes achter een probleem. Johann is meer de man van geniale ingevingen en snelle oplossingen.

In 1705 keert Johann terug naar Basel. Hij bekleedt een leerstoel Grieks en na het overlijden van zijn broer diens leerstoel.

Ten slotte

Hiermee eindigde het wintersymposium. Om half drie werd iedereen bedankt voor zijn aanwezigheid en aandacht. Het was een leerzame dag geweest.

40 jaar geleden

Analytische Meetkunde

(30 augustus, 13.30 - 16.30 uur).

1. *Bepaal alle vlakken door de oorsprong, die het tweede-graadsoppervlak H volgens een orthogonale hyperbool snijden. Bepaal ook de kegel waaraan de gevonden vlakken raken.*

H heeft tot vergelijking

$$x^2 - xz - 4x + 12y + 3z + 21 = 0.$$

Opl. De richtingsgetallen van de asymptoten van de hyperbool volgens welke H gesneden wordt door het vlak $ax + by + cz = 0$ door de oorsprong, zijn de oplossingen van de beide vergelijkingen in x , y en z :

$$\begin{aligned} x^2 - xz &= 0, \\ ax + by + cz &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Deze oplossingen zijn

$$(0, c, -b) \text{ en } (b, -a-c, b).$$

De hyperbool is dus orthogonaal als

$$c(a + c) + b^2 = 0. \tag{2}$$

In (2) is stellig $c \neq 0$. Immers, uit $c = 0$ zou volgen $b = 0$. De vergelijking (1) wordt dan (wegens $a \neq 0$): $x = 0$ en dit vlak snijdt H niet volgens een hyperbool, want het is een richtvlak van H . Voor (1) en (2) mogen we dus schrijven (als $ac^{-1} = \alpha$ en $bc^{-1} = \beta$):

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + z &= 0, \\ \alpha + 1 + \beta^2 &= 0. \end{aligned}$$

De gezochte vlakken vormen dus het stelsel met punt-index 2 aangewezen door

$$(\beta^2 + 1)x - \beta y - z = 0.$$

Daaruit volgt, dat zij de kegel met vergelijking

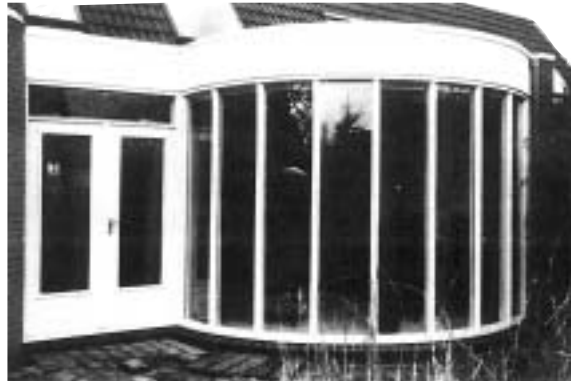
$$y^2 = 4x(x - z), \text{ of}$$

$$4x^2 - y^2 - 4xz = 0 \quad \text{omhullen.}$$

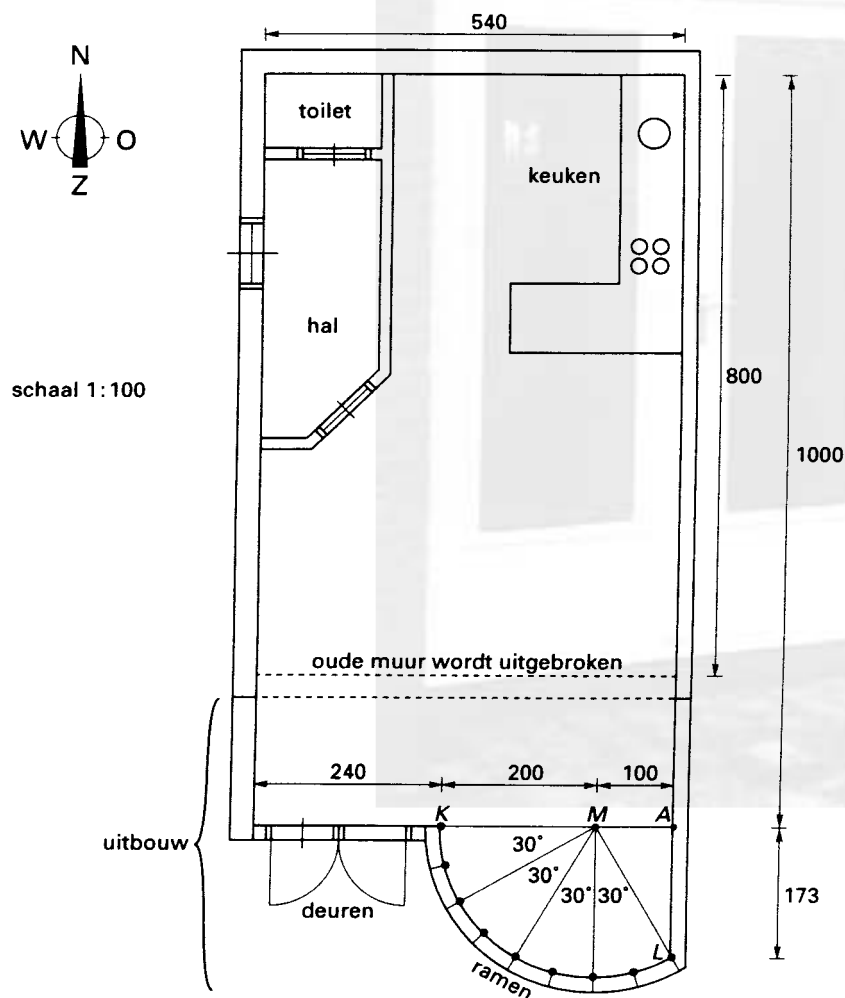
Uit: Bespreking examen KV 1956, door Prof.dr. G.R. Veldkamp, in Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 44 (1956-1957).

Verbouwing

De heer en mevrouw Scheffer hebben hun huis laten verbouwen. Het aangebouwde gedeelte ligt precies op het zuiden. Zie de foto van de uitbouw en de plattegrond van hun nieuwe woonkamer/keuken op deze bladzijde.



- 16** Bereken het totaal aantal m^2 vloeroppervlak dat er is bijgekomen door de verbouwing. Schrijf de berekening op.



Werkblad

Voor de ramen en deuren van het nieuwe gedeelte worden gordijnen gemaakt. Voor de plooien is er extra stof nodig. Vuistregel is dat je daarvoor aan totale stofbreedte ongeveer 1,5 keer de lengte van de gordijnrail neemt.

De boog van *K* tot *L* is 4,20 m.

Mevrouw Scheffer koopt stof van 120 cm breed. Elke baan moet 270 cm lang zijn (de zomen meegerekend).

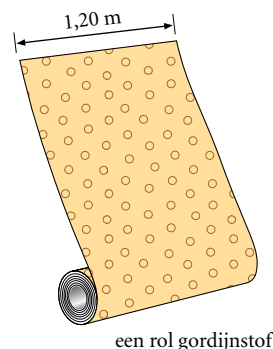
- 17** Bereken hoeveel meter stof zij moet kopen.
Schrijf de berekening op.

Als de zon op 21 april in het zuiden staat, schijnt zij 3 meter ver de kamer in.

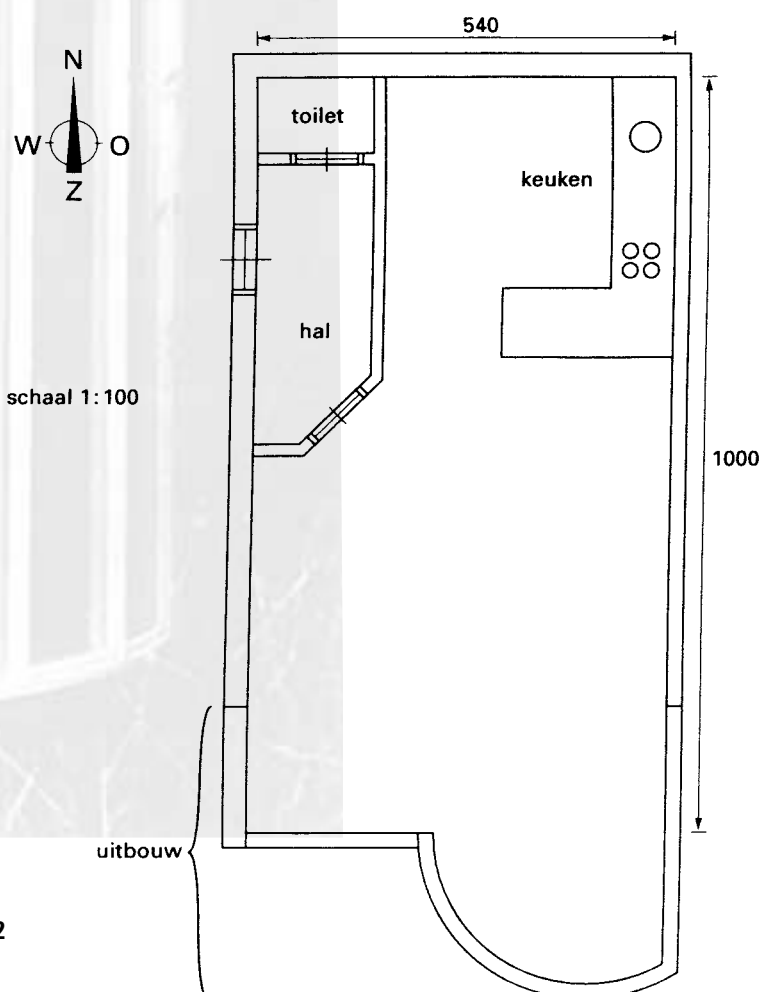
- 18** Teken in de plattegrond hieronder tot hoe ver het zonlicht op de vloer valt.

Vandaag is het 18 juni. De zon staat in het zuiden, 61° hoog. Het glas van de uitbouw komt tot 2,60 m boven de vloer.

- 19** Bereken hoe ver de zon de woonkamer in schijnt.
Schrijf de berekening op.



een rol gordijnstof



Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A, 2563
EB Den Haag

Recreatieve

Als dit nummer bij u in de bus valt, is het bijna 1 april. Als vanouds de dag waarop veel mensen (vooral leerlingen!) elkaar proberen voor de gek te houden. Deze traditie is al vóór 1572 ontstaan, toen Alva zijn 'Brielle' op 1 april verloor. In andere landen viert men ook 'April Fools Day', waarbij de komst van de lente en de 'voorjaarsschoonmaak' iets te maken hebben met deze voor-de-gekhoudelij. Ik weet niet of het Nationaal 1 April Genootschap nog bestaat dat elk jaar een Loeres toekende voor de beste humor.

Bij de wiskundige grappen komen we al snel bij de kinderraadsels terecht:

'Hoeveel dm^3 aarde zit er in een gat van 1433 mm bij 3,5 m bij 438 cm?'

Ook zo'n bekende is de puzzel over de touwladder die over de reling van een schip hangt: 2 treden onder water en 28 treden boven water. Daarna worden er allerlei maten en getallen gegeven. Tot slot stijgt het water, als gevolg van de vloed, 2 meter. Hoeveel treden hangen er nu nog onder water?

Of ons probleem van de maand ook een 1 april grap is, mag u zelf bepalen. Misschien is het te kinderachtig, misschien ook niet. Ik ben zeer benieuwd naar uw reacties.

De bedoeling is om het getallenvierkant over de roosterlijntjes in drie stukken te verknippen. U moet dat zó doen dat de som van de getallen op de drie stukken aan elkaar gelijk zijn. Simpel toch?

Probeer u het nu nóg eens, maar dan op een andere manier. Ook nu is de som van de getallen op de drie stukken aan elkaar gelijk. Moeilijk?

En nu doet u het nóg eens op weer een andere manier! Onmogelijk?

2	5	6
9	1	8
4	3	7

Als u binnen 1 maand na verschijning inzendt kunt u maximaal 5 punten behalen voor de doorlopende ladderwedstrijd.

Even serieus, zend nú maar uw oplossing in.

Oplossing 674

Is er een functie $f(x)$ te bedenken, die voor elke $x \in \mathbb{R}$, behalve voor $x = 0$ en $x = 1$, voldoet aan

$$f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x?$$

‘Geen puzzel, maar échte wiskunde’, vonden sommige inzenders. Misschien is dat de reden dat er een record aantal nieuwe inzenders aan deze ladderwedstrijd is gaan deelnemen.

Door het bijzondere karakter van de functie

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x} \text{ is deze opgave eenvoudig op te lossen.}$$

We gaan iteraties toepassen:

$$g^2(x) = g(g(x)) = 1 - \frac{1}{g(x)} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 - x}$$

$$g^3(x) = g(g^2(x)) = 1 - \frac{1 - x}{1} = x.$$

Na drie iteraties ontstaat de identiteit.

Voor ons probleem geldt dan:

$$f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x$$

$$f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1 - x}\right) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f\left(\frac{1}{1 - x}\right) + f(x) = \frac{1}{1 - x}$$

$$\text{Dus } f(x) = \frac{1}{2} \left(x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x} \right) =$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{2x^2 - 2x}$$

Verskillende lezers bewezen nog dat de gevonden functie $f(x)$ de enige is, die aan de gegeven eis voldoet.

Chris Zaal (5 punten), Amsterdam noemde de gegeven iteratie een Möbius-transformatie.

R
e
c
t
e
a
t
i
e

Met 66 punten is winnaar van een boekenbon van f 25,-:

Leo H. van den Raadt
Raadhuisplein 8
2101 HB Heemstede

Heel hartelijk gefeliciteerd!

Euclides verschijnt dit schooljaar nog op 30 april en 15 juni. In de nieuwe jaargang verschijnen de eerste drie nummers rond 1 september, 15 oktober en 1 december.

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Data melden bij de hoofdredacteur uiterlijk twee maanden voor de verschijningsdatum. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

Beurzen: School en Computer
wo. 19 maart 1997: Arnhem
wo. 26 maart 1997: Eindhoven
wo. 2 april 1997: Groningen
wo. 16 april 1997: Rotterdam
wo. 23 april 1997: Amsterdam
Zie aankondiging blz. 238

Kangoeroe-wedstrijd
vr. 21 maart 1997
TUE: 040 - 2472738

Eerste ronde Wiskunde Olympiade
vr. 11 april 1997
Cito: 026 - 3521294
Zie aankondiging blz. 208 in 72-5

APS-conferentie Grafische rekenmachine
wo. 16 april 1997
APS: 030 - 2856722
Zie advertentie 72-2

APS-conferentie Schoolonderzoek vbo/mavo
wo. 23 april 1997
APS: 030 - 2856722
Zie advertentie 72-2

Masterclass voor 5 en 6 vwo
do. 29 en vr. 30 mei 1997
RUL: 071 - 5277100/04
Masterclass over onderwerpen uit de discrete wiskunde.

Historische Kring Rekenen Wiskunde-Onderwijs Symposium: Rekenhulpmiddelen in het onderwijs.
za. 31 mei 1997
Fi: 030 - 2611611
Zie aankondiging blz. 247

Lezingenserie Hogeschool van Utrecht
wo. 18 juni 1997: 20.00 u
HvU: 030 - 2547230
dr. Marjolijn Witte: Het geslacht van de wiskunde-knobbel.

Vierkant Wiskudekampen
4 t/m 8 augustus 1997: groep 7/8 basisschool.
4 t/m 8 augustus 1997: 12-14 jaar (herh. 1996).
11 t/m 15 augustus 1997: 13-16 jaar (nieuw progr.).
VU: 020 - 4447776
Zie ook artikel blz. 236

Mathematische Modelleercompetitie
vwo 4, 5 en 6.
za. 31 januari 1998
Maastricht
Aankondiging volgt later.

Internet-sites voor wiskundedocenten:

Een prachtige internetsite voor wiskundedocenten en leerlingen is: www.cybermath.com

Andere suggesties zijn welkom.
Zie ook kalender 72-3, 72-4 en 72-5.

Pascal

wiskunde voor de tweede fase

Pascal is nieuw en *Pascal* is vernieuwend. Dat laatste komt vooral tot uiting in de unieke opsplitsing in informatieboeken en verwerkingsboeken. Deze verwerkingsboeken gidsen uw leerlingen doelgericht door het informatieboek: een opzet die de zelfstandigheid van uw leerlingen doorlopend prikkelt. Daarnaast zijn de informatieboeken waardevolle naslagwerken voor de examenkandidaat. Als u een katern van *Pascal* wilt ontvangen, kunt u onze Docentenlijn (0575-594880) bellen of ons een e-mail sturen: info@thieme.nl

Pascal verschijnt in het voorjaar van 1998. Toch kunt u op de Nationale Onderwijs Tentoonstelling van 21 t/m 25 januari 1997 al het één en ander inzien. Tot dan.


Thieme
2^e FASE

vernieuwing die werkt

NIEUW

Leerlingenboek bij VU-Stat

Basisvorming

Met *VU-Stat Leerlingenboek* kunnen leerlingen vanaf de brugklas zelfstandig aan de slag. Leerlingen komen stapsgewijs met diverse facetten van de beschrijvende statistiek in aanraking en werken met de grote databestanden van *VU-Stat*. Al doende gaan de leerlingen om met statistiek en leren zij de mogelijkheden en onmogelijkheden van het vak kennen.



De eerste vier hoofdstukken staan in het teken van de presentatie van data. Deze hoofdstukken zijn bedoeld voor de onderbouw. De volgende vier hoofdstukken gaan dieper op de materie in en hebben betrekking op de manipulatie van data, simulaties, het doen van statistisch onderzoek en het opzetten van databestanden. Deze hoofdstukken zijn bedoeld voor mavo 4 en voor de bovenbouw. Het doen van onderzoek waarbij de computer functioneel wordt ingezet, is een nieuw item in zowel mavo 4 als in de Tweede Fase. Hierbij moet zeker worden gedacht aan vakoverstijgende onderwerpen als het opzetten van en het werken met databestanden.

Bestellen

VU-Stat Leerlingenboek

ISBN 90 01 09017 6
gen 48 p f 19,50

VU-Stat Basisvorming

ISBN 90 01 09015 x
3,5 inch diskette en
handleiding
f 350,00

VU-Stat Leerlinglicentie

(incl. practicum)
3,5 inch diskette
ISBN 90 01 09019 2
f 175,00 per school

Alleen verkrijgbaar in
combinatie met VU-Stat
Basisvorming

Ook verkrijgbaar via de

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

**Wolters
Noordhoff**