Orgaan van de

Nederlandse Vereniging

van Wiskundeleraren

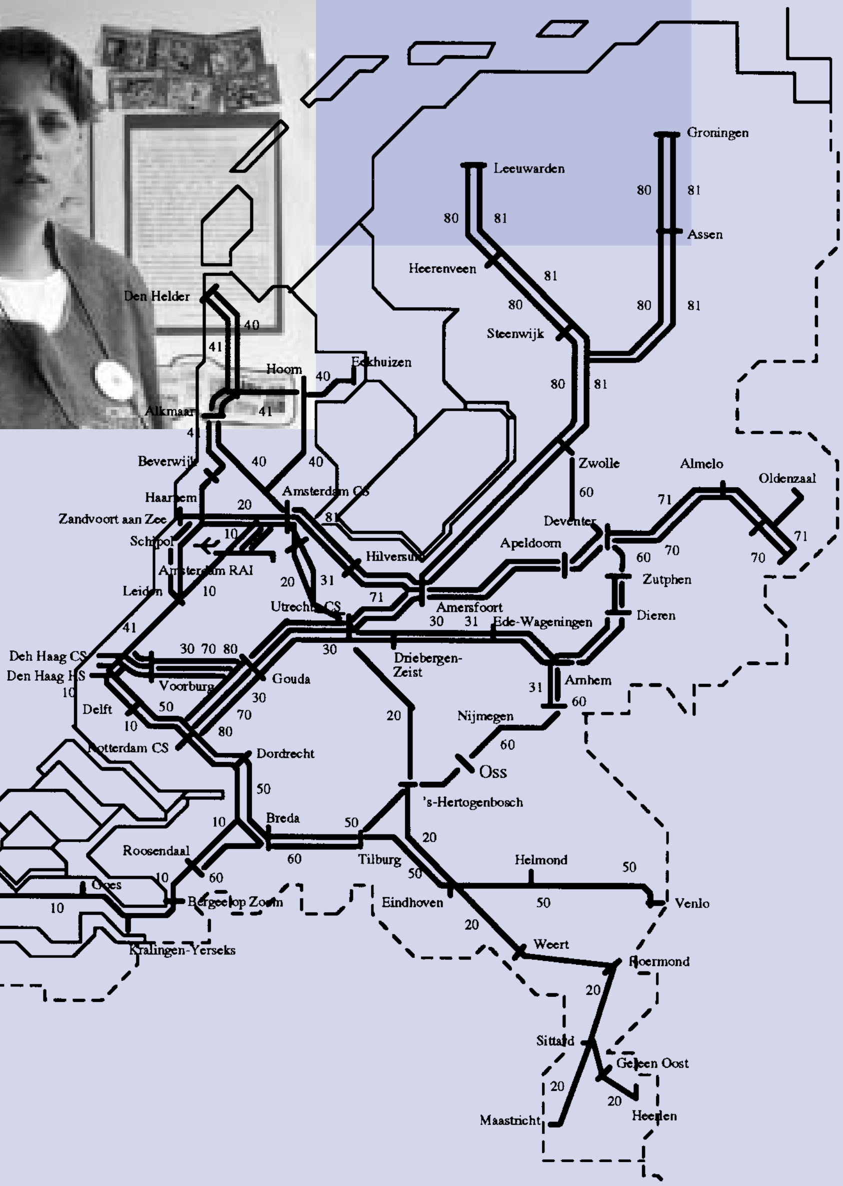
EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 72

1996-1997 januari

4



Getaltheorie:

natuurlijke getallen

Max-Plus Algebra

Inzicht in chaos

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem.

Richtlijnen voor aanlevering:
- goede afdruk met illustraties/foto's/ formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP of ASCII
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint
Spiekerbrink 25
8034 RA Zwolle
tel. 038-4539985
Secretaris
W. Kuipers
Burg. Bijleveldsingel 38
8052 AP Hattem
tel. 038-4447017
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543

Contributie per ver. jaar: ƒ70,00
Studentleden: ƒ47,50
Leden van de VVWL: ƒ50,00
Lidmaatschap zonder Euclides: ƒ50,00
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: ƒ80,00 per jaar. Voor instituten en scholen: ƒ240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor ƒ20,00.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of naar:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6145522.

Adresgegevens auteurs

I. Dalm
Veersedijk 19
3341 LK H.I.Ambacht

G.J. Olsder
TU Delft, Fac. TWI
Postbus 5031
2600 GA Delft

V.E. Schmidt
Verlengde Grachtstraat 43
9717 GE Groningen

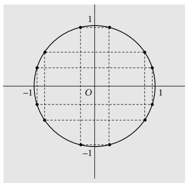
R. Tijdeman
RU Leiden, Math. Inst.
Postbus 9512
2300 RA Leiden

A. Verweij
Noord Rundersteeg 10
2312 VN Leiden

B. Zwaneveld
Bieslanderweg 18
6213 AJ Maasstricht

Inhoud


156


171


175

van de redactietafel

In dit stukje dit keer niet zoveel over de inhoud van dit nummer. U kunt zelf wel vinden wat van uw gading is. Dit keer volgt hier een aantal actuele zaken rond het wiskundeonderwijs in havo en vwo.

APS-Hoorzitting 4 havo B / 4 vwo

Op donderdag 12 december jongstleden organiseerde het APS een hoorzitting over de situatie bij wiskunde in 4 vwo en 4 havo B naar aanleiding van vragen en opmerkingen die binnengekomen waren bij het informatiepunt. Circa 70 docenten waren hiervoor naar Utrecht getogen. Belangrijkste conclusie was dat het nieuwe wiskundeprogramma in de onderbouw nog niet goed uitgekristalliseerd is. Dat betreft dan de weergave in de schoolboeken, de verdeling van de leerstof over de jaren, de manier waarop docenten en leerlingen door de boeken heengaan, de kennis bij de bovenbouwdocenten van het nieuwe programma, de cijfergeving in 3 havo en de voorbereiding van de leerlingen op de bovenbouw. Een andere belangrijke conclusie was ook dat het havo wiskunde B-programma erg moeilijk is voor havo-leerlingen. Slechts ruim 25% van de leerlingen kan het enigszins aan. Leerlingen hierop goed voorbereiden zou wel eens kunnen betekenen dat 75% van de leerlingen al ergens in de eerste of tweede klas duidelijk gemaakt moet worden dat wiskunde niets voor hen is. Dat lijkt toch ook geen wenselijke situatie. Het is te hopen dat het juiste evenwicht de komende jaren wordt gevonden in boeken, in secties én in programma's en examens.

TIMSS

TIMSS staat voor Third International Mathematics and Science Study, een internationaal vergelijkend onderzoek naar de opbrengst en inhoud van het onderwijs in wiskunde en science (biologie, natuurkunde, scheikunde). Zoals in de nationale media al gemeld, scoren de Nederlandse wiskundeleerlingen in de top tien van 41 onderzochte landen. Ook vijftien jaar geleden deden ze dat al. De nu onderzochte groep bestaat echter wel uit leerlingen die opgeleid zijn volgens het nieuwe leerplan wiskunde. Het onderzoek gaat in die groep over de volle breedte! Twee voorzichtige (en persoonlijke) conclusies. Ten eerste: wiskundedocenten in Nederland geven internationaal gezien gewoon goed wiskundeonderwijs. Ten tweede: de problematiek onder het vorige kopje heeft misschien vooral ook te maken met de inhoud en de stijl van de huidige wiskunde B-programma's. Zorgvuldiger conclusies en meer aandacht voor dit onderzoek hopen we in deze jaargang nog aan de orde te stellen.

Grafische Rekenmachine

Inmiddels zijn er ook enige onderzoeksresultaten over het effect van het gebruik van de grafische rekenmachine. Hieronder volgen enkele voorzichtige resultaten uit het project Handwerk en Technologie (RU Groningen). Leerlingen die de beschikking hebben over een GR blijken beter te scoren op inzichtelijke vragen over kenmerken van grafieken en de afgeleide in allerlei betekenissen. Leerlingen met een GR proberen vaker tot een goede oplossing te komen en dat lukt ook vaker. Maar ook, en dat was te verwachten, leerlingen hebben een minder vaststaand repertoire aan algebraïsche technieken.

Tenslotte

Uit de drie vorige paragrafen blijkt duidelijk dat er de komende jaren, ook bij de invoering van de Tweede Fase, nog veel denkwerk verzet zal moeten worden om bij wiskunde een goed evenwicht te vinden tussen de technisch-algebraïsche kant van wiskunde en de exploratief-analytische kant. En dan hebben we het nog niet eens gehad over de uitvoering van dit alles in het nieuwe Studiehuis.

Kees Hoogland

Enkele lessen getaltheorie *Les 2:* De structuur van de natuurlijke getallen

Rob Tijdeman

Inleiding

De eerste les verscheen in Euclides 71-7, blz. 223-227, en ging over getallenstelsels. Ook de tweede les verschaft materiaal dat in aangepaste vorm op school gebruikt kan worden. In de examenprogramma's voor de Tweede Fase is hernieuwde aandacht voor redeneren en bewijzen. In het profiel Natuur en Techniek voor het vwo wordt bij het domein Voortgezette Analyse voorgesteld aandacht te besteden aan onder andere volledige inductie. In deze les komt dat onderwerp aan de orde. Ongetwijfeld zijn er op dit moment leerlingen in het vwo bij wiskunde B die dit onderwerp aankunnen en interessant vinden. Met die leerlingen aandacht besteden aan dit stukje mooie wiskunde kan gelijk een goede voorbereiding zijn op die nieuwe Tweede Fase.

Volledige inductie

Als kind hebben we leren tellen 1, 2, 3, 4,… . We noemen deze getallen de *natuurlijke getallen.* (0 wordt dus niet als een natuurlijk getal beschouwd.) De rij ontstaat door met 1 te beginnen en telkens 1 bij het voorgaande getal op te tellen. Elk natuurlijk getal wordt dus met één soort bouwstenen gebouwd, het getal 1, waarbij bouwen neerkomt op optellen.

Als we willen aantonen dat alle natuurlijke getallen een zekere eigenschap hebben, dan kunnen we eerst laten zien dat 1 die eigenschap heeft, dan het bewijs leveren voor 2, dan voor 3, enz., maar zo zouden we nooit klaar komen. Daarom wordt vaak het volgende principe toegepast dat in eindige tijd kan worden voltooid:

a we bewijzen dat 1 de eigenschap heeft,
b we bewijzen voor elk natuurlijk getal n groter dan 1 dat n de eigenschap heeft als elk natuurlijk getal kleiner dan n die eigenschap heeft.

Een bewijs volgens dit principe heet een *bewijs met volledige inductie.* Stap **b** noemen we de *inductiestap*; de aanname dat elk natuurlijk getal kleiner dan n de eigenschap heeft heet de *inductiehypothese.*

Als oefening gaan we enkele beweringen met behulp van volledige inductie bewijzen.

Stelling 2.1.
De som van de eerste n natuurlijke getallen is $n(n+1)/2$.

Bewijs:
a De som van het eerste natuurlijke getal is 1. (Onder de som van één getal verstaan we het getal zelf.) Als we $n = 1$ invullen in $n(n+1)/2$ krijgen we ook 1. Het is dus waar voor $n = 1$.
b Stel de bewering is juist voor alle natuurlijke getallen kleiner dan n. Dan is de som van de eerste $n-1$ natuurlijke getallen dus $(n-1)n/2$.
Hieruit volgt:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = n(n-1)/2 + n = n(n+1)/2. \qquad \square$$

Het teken □ geeft aan dat het bewijs geleverd is. Volgens **a** geldt de bewering voor $n = 1$, volgens **b** dan ook voor $n = 2$, volgens **b** dan ook voor $n = 3$, volgens **b** dan ook voor $n = 4$, enz. Zo komt elk natuurlijk getal aan de beurt en wordt de bewering voor dat getal aangetoond.

Stelling 2.2.
Als n een natuurlijk getal is en r een reëel getal met $r \neq 1$*, dan is*
$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = (r^{n+1} - 1)/(r - 1)$.

Bewijs:
Met volledige inductie naar n:

a Als $n = 1$, staat links $1 + r$ en rechts $(r^2 - 1)/(r - 1) = r + 1$.

b Volgens de inductiehypothese geldt $1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = (r^n - 1)/(r - 1)$.

Hieruit volgt:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{(r^n - 1)}{(r - 1)} + r^n =$$

$$\frac{r^n - 1 + r^{n+1} - r^n}{r - 1} = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \qquad \square$$

Vraag:
Waaraan is $1 + r + r^2 + \ldots + r^n$ gelijk als $r = 1$? Waarom klopt de bovenstaande formule dan niet?

Kijk eens naar de volgende opmerkelijke gelijkheden:

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1^2 \\ 1^3 + 2^3 &= 3^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 &= 6^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 10^2 \end{aligned}$$

Zou het waar zijn dat de som van de derdemachten van de eerste n natuurlijke getallen voor elke n een kwadraat is?

Opgave 1:
Probeer regelmaat in de rij 1, 3, 6, 10,... te vinden, een inductiehypothese op te stellen en deze met volledige inductie te bewijzen.

Opgave 2:
Bewijs met volledige inductie dat

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$
voor $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Opgave 3:
Vind de fout in het volgende inductiebewijs:

Stelling:
Als je een getal van n cijfers opschrijft, zijn alle cijfers gelijk.

Bewijs:
a Als je een getal van 1 cijfer opschrijft, zijn alle cijfers van dat getal hetzelfde. De bewering is dus waar voor $n = 1$.

b Stel de bewering is waar voor alle natuurlijke getallen kleiner dan n met $n > 1$. Neem een willekeurig getal van n cijfers. Als je het laatste cijfer weglaat, houd je een getal van n - 1 cijfers over en volgens de inductiehypothese zijn alle cijfers van dat getal aan elkaar gelijk. Het getal ziet er dus uit als *aaa … ax*. Als we het eerste cijfer weglaten, krijgen we ook een getal van $n - 1$ cijfers, nl. *aa … ax*. Volgens de inductiehypothese zijn daarvan alle cijfers gelijk zodat $a = x$. Het getal is dus van de vorm *aaa … aa* en de inductiestap is voltooid. □

Priemgetallen

Als je twee natuurlijke getallen vermenigvuldigt, is het product ook een natuurlijk getal. We kunnen de natuurlijke getallen ook opbouwen met vermenigvuldigings-bouwstenen. Het getal 1 is als bouwsteen niet erg bruikbaar, want een getal verandert niet als het met 1 vermenigvuldigd wordt. Door telkens met 2 te vermenigvuldigen krijgen we de rij

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, … .

De rij is oneindig lang, maar de verschillen tussen de termen worden steeds groter. Het kleinste natuurlijke getal dat ontbreekt is 3. Voegen we 3 als vermenigvuldigings-bouwsteen toe, dan kunnen we de volgende getallen opbouwen:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 48,… .

Er ontbreken nog steeds getallen. Als we weer het kleinste ontbrekende getal toevoegen, dat is 5, kunnen we de volgende getallen maken:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30,… .

De rij is weer dichter geworden, maar nog steeds missen er getallen.

Natuurlijke getallen die niet het product zijn van twee kleinere natuurlijke getallen noemen we *priemgetallen*, waarbij we afspreken dat 1 geen priemgetal is. Een priemgetal wordt ook wel eens *ondeelbaar* genoemd. Een geheel getal a heet een *deler* van n, en n heet een *veelvoud* van a, als er een geheel getal b is met $n = a \cdot b$. Dus 30 is een deler van 120 en een veelvoud van 6. De bouwstenen die we boven vonden, 2, 3, 5 en 7, zijn priemgetallen. Als we verder gaan, vinden we dat de priemgetallen tot 100 gegeven worden door:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Als we afspreken dat het product van nul priemgetallen gelijk is aan 1 en dat het product van één getal het getal zelf is, dan kan elk natuurlijk getal opgebouwd worden met priemgetallen:

Stelling 2.3.
Elk natuurlijk getal is het product van priemgetallen.

Bewijs: met volledige inductie:

a) Het getal 1 is het product van nul priemgetallen.

b) Neem een natuurlijk getal n met $n \geq 2$. Als n een priemgetal is, is n het product van één priemgetal, namelijk n. Als n geen priemgetal is, is n het product van twee natuurlijke getallen, zeg a en b, die beide kleiner zijn dan n. Volgens de inductiehypothese zijn zowel a als b het product van priemgetallen. Door deze producten te vermenigvuldigen krijgen we een product van priemgetallen dat gelijk is aan $ab = n$. □

Standaardontbinding

Voorbeelden van ontbindingen in priemgetallen zijn:

$$12 = 2 \cdot 3 \cdot 2$$
$$100 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2$$
$$1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$$

We hadden ook kunnen schrijven dat $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, of kortweg
$100 = 2^2 \cdot 5^2$.
Om eenheid in de schrijfwijze te brengen introduceren we het begrip *standaardontbinding*. We noemen

$$p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \cdot \cdot p_r^{k_r}$$

een standaardontbinding van n als n gelijk is aan die uitdrukking en $p_1, \ldots, p_r$ priemgetallen zijn met $p_1 < p_2 \ldots < p_r$ en $k_1, \ldots, k_r$ positieve gehele getallen zijn. Als de exponent 1 is, laten we deze weg. De bovengenoemde ontbindingen corresponderen dus met de volgende standaard-ontbindingen:

$$12 = 2^2 \cdot 3, \quad 100 = 2^2 \cdot 5^2, \quad 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Men kan bewijzen dat elk getal maar één standaardontbinding heeft. Daarom spreken we wel over *de* standaardontbinding van n.

Je kan de standaardontbinding van een getal vinden door de priemgetallen 2, 3, … zo vaak mogelijk op dat getal te delen tot je 1 overhoudt. Bijv. het getal 145773540.

145773540	2
72886770	2
36443385	2 niet, 3 wel
12147795	3
4049265	3
1349755	3 niet, 5 wel
269951	5 niet, 7 niet, 11 wel
24541	11
2231	11,13,17 en 19 niet, 23 wel
97	

Dus $145773540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 23 \cdot 97$.

Je kan ophouden als het resterende getal kleiner is dan het kwadraat van het aan de beurt zijnde priemgetal, omdat het resterende getal dan zeker niet samengesteld is. Toch zal het ontbinden van grote getallen op deze manier meestal veel tijd kosten, omdat veel getallen meer dan één grote priemfactor hebben.

Opgave 4:
Bepaal de standaardontbinding van 47775168 en van 75149316.

Hoeveel priemgetallen zijn er?

Houdt de rij van priemgetallen op of gaat deze eindeloos door? Euclides bewees omstreeks 300 v.C. dat er oneindig veel verschillende bouwstenen voor de vermenigvuldiging zijn:

Stelling 2.4.
Er zijn oneindig veel priemgetallen.

Bewijs. Stel de bewering is onjuist en er zijn maar eindig veel priemgetallen $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Beschouw dan $N = p_1 p_2 \ldots p_r + 1$. Volgens Stelling 2.3 is N het product van priemgetallen. Dus $N = p \cdot m$ voor een priemgetal p en een geheel getal m. Omdat p een priemgetal is, is het een van de getallen $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Maar als N deelbaar is door een priemgetal p, kan $N - 1$ niet door p deelbaar zijn. Deze tegenspraak bewijst de stelling. □

Zwart of wit

Een zak bevat twee knikkers. Deze kunnen zowel zwart als wit zijn. Kunnen we zonder verdere informatie iets zeggen over de kleur van de twee knikkers? Ja, één is zwart en de andere is wit. Deze uitspraak bewijzen we op de volgende wijze.

Neem een zak met drie knikkers waarvan er twee zwart zijn. De kans om nu een zwarte knikker te pakken is $\frac{2}{3}$. Deze kans van $\frac{2}{3}$ geldt alleen in dit geval, dat wil zeggen: geen andere kleurverdeling van de knikkers geeft een kans van $\frac{2}{3}$ op een zwarte knikker. De kansen dat de gegeven zak met twee knikkers bestaat uit *ZZ*, *ZW*, *WW* zijn respectievelijk $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$. Doe een extra zwarte knikker in de zak. De kansen op *ZZZ*, *ZZW*, *WWZ* zijn weer $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$. De kans om nu een zwarte knikker te pakken is $\frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Dus bevat de zak *ZZW* (geen andere kleurverdeling geeft immers deze kans). Voordat de zwarte knikker was toegevoegd bevatte de zak *ZW*, dus één zwarte en één witte.

Opgave 5.
Bewijs dat het r-de priemgetal kleiner is dan 2 tot de macht 2^r.

Enige achtergrondinformatie

Het aantal priemgetallen $\leq x$ wordt genoteerd met $\pi(x)$. De rij priemgetallen lijkt vrij regelmatig te groeien:

$\pi(10^2)$	=	25	
$\pi(10^3)$	=	168	
$\pi(10^4)$	=	1.229	
$\pi(10^5)$	=	9.592	
$\pi(10^6)$	=	78.498	
$\pi(10^7)$	=	664.579	
$\pi(10^8)$	=	5.761.455	*(Meissel, 1870)*
$\pi(10^9)$	=	50.847.478	*(Bertelsen, 1893)*
$\pi(10^{10})$	=	455.052.511	
$\pi(10^{12})$	=	37.607.912.018	
$\pi(10^{14})$	=	3.204.941.750.802	
$\pi(10^{16})$	=	279.238.341.033.925	*(Lagarias, Miller & Odlyzko, 1985)*

Uitdaging:
Op welke eenvoudige functie van x lijkt $x/\pi(x)$?

Open problemen

Terwijl $\pi(x)$ globaal een gladde functie lijkt, is de verdeling van de priemgetallen toch heel grillig. Hier volgen enkele eeuwenoude, nog open problemen:

Vermoeden over priemgetaltweelingen:
er bestaan oneindig veel priemgetallen p zó dat $p + 2$ ook een priemgetal is.

Voorbeelden van priemgetaltweelingen:
11 en 13, 101 en 103, 10005427 en 10005429, $4650828 \cdot 1001 \cdot 10^{3429} \pm 1$ *(Deubner, 1993)*.

Opgave 6:
Laat zien dat er maar één priemgetal p is zó dat $p + 2$ en $p + 4$ beide priemgetallen zijn.

Vermoeden van Goldbach (1742):
Elk even getal groter dan 3 kan geschreven worden als som van twee priemgetallen.

Het is duidelijk dat niet elk natuurlijk getal de som is van twee priemgetallen. Neem bijv. 35. Het is wel bewezen dat elk oneven getal boven een zekere grens de som is van drie priemgetallen, en wel door Vinogradov in 1937.

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90
101	64	63	62	61	60	59	58	57	56	89
102	65	36	35	34	33	32	31	30	55	88
103	66	37	16	15	14	13	12	29	54	87
104	67	38	17	4	3	2	11	28	53	86
105	68	39	18	5	0 →	1	10	27	52	85
106	69	40	19	6	7	8	9	26	51	84
107	70	41	20	21	22	23	24	25	50	83
108	71	42	43	44	45	46	47	48	49	82
109	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120 →

lichtgrijs: kwadraat
grijs: $n(n+1)$
donkergrijs: priemgetal

Waar of niet waar?: als we vanuit 0 *a* hokken naar rechts en *b* hokken omhoog gaan is het gevonden getal door *d* deelbaar als *a* en *b* beide door d deelbaar zijn ($a,b \in \mathbb{Z}$). Bewijs?

Vermoeden over Mersenne-priemgetallen (1644):
Er zijn oneindig veel priemgetallen van de vorm $2^p - 1$, *waarbij p een priemgetal is.*

Zij $M_p = 2^p - 1$. Niet elke M_p is priem, bijvoorbeeld $M_{11} = 23 \cdot 89$. Tot nog toe zijn de volgende Mersenne-priemgetallen bekend:

M_p voor p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 132049, 216091, 756839, 859433, 1257787.

Het getal $M_{1257787}$ is het grootste priemgetal dat expliciet bekend is. *(Slowinski, 1996).*

Opgave 7:
Laat zien dat M_{23} deelbaar is door 47.

Opgave 8:
Laat zien dat $2^{2n} - 1$ voor $n = 1, 2, \ldots$ geen priemgetal is.

Toelichting bij de opgaven

1 $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = n^2(n+1)^2/4$.

3 Het inductieargument is alleen correct voor $n > 2$. Voor $n = 2$ is de conclusie 'zodat $a = x$' ongegrond.

4 $47775168 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17^2 \cdot 41$
$75149316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 61^2$.

5 Met volledige inductie naar r. Gebruik Stelling 2.2 met $r = 2$.

Uitdaging.
Voor $x = 10^n$ lijkt $x/\pi(x)$ op een lineaire functie van n, om precies te zijn $n \ln 10 - 1$ voor grote waarden van n. Meer algemeen lijkt $x/\pi(x)$ op $\ln x - 1$ als x groot is.

6 Eén van de drie getallen is door 3 deelbaar.

8 Verschil van twee kwadraten.
(Een ingewikkelder bewijs geeft dat p priem is als $2^p - 1$ priem is.)

INTERVIEW

‘Ik heb goede wiskundedocenten gehad. Zij gaven mij het gevoel dat ik dat vak aankon.’

Toen **Ingeborg van Leeuwen** 4 jaar oud was verhuisde zij met haar ouders naar Spanje. Inmiddels is ze 23. Na haar middelbare school is zij in Granada wiskunde gaan studeren. In september 1996 heeft zij haar laatste tentamen gehaald en nu mag zij zich *Licenciada in Matematicas* (drs in de wiskunde) noemen. Tijdens ICME-8 was zij één van de ongeveer 250 ‘stewards’ en ‘stewardessen’ die als vraagbaak voor de congresgangers, werkgroepvoorzitters en inleiders optraden. Alle stewards en stewardessen waren studenten wiskunde uit heel Spanje die hun werk totaal 2 weken, inclusief de voor- en nafase van het congres, hebben gedaan, met als vergoeding kost en inwoning op een studentenkamer, vrij gebruik van de stadsbus en voorzover mogelijk toegang tot het congres. Omdat er eigenlijk 400 nodig waren, schoot dat laatste er meestal bij in. Een ander gevolg van dat tekort was dat de werktijden vaak lang waren: soms van 7 uur ‘s morgens tot 12 uur ‘s nachts.

Hoe zit globaal het Spaanse onderwijs in elkaar? Hoe heb je je schooltijd ervaren?
Het lager onderwijs duurt 8 jaar, voor kinderen van 6 tot 14 jaar. Daarna kies je voor een beroepsopleiding of voor de 4 jaar durende middelbare school die onder andere voorbereidt op de universiteit. Na het eindexamen moet je toelatingsexamen voor de universiteit doen.
De eerste twee jaar van de middelbare school zijn algemeen. In het derde jaar heb je vakken gericht op òf letteren òf science. Mijn eindexamenvakken waren: Spaans, Engels, wiskunde, natuurkunde, scheikunde, biologie en filosofie.
De school loopt van eind september tot en met 20 juni, 6 lessen per dag, die ‘s zomers in verband met de warmte wat korter duren dan ‘s winters. Op de lagere school vond ik het niet zo leuk, maar dat kwam vooral doordat ik nog maar net uit Nederland gekomen was. Tijdens mijn middelbare-schooltijd had ik veel contact met de docenten. We zaten met 30 tot 40 leerlingen in de klas. Of we huiswerk hadden hing van de leraar af.

Welke wiskundeonderwerpen heb je op school gehad?
Van de eerste twee jaar weet ik het niet precies meer, veel trigonometrie, veel meetkunde, zowel in het vlak als in de ruimte, en ik had, in mijn herinnering, heel vaak de stelling van Pythagoras nodig. Het derde jaar werd in beslag genomen door limie-

ICME 8
SEVILLA 1996

ten, afgeleiden, integralen en grafieken. In het laatste jaar kwamen de examenonderwerpen aan de orde: matrixrekening, inclusief determinanten, en veel analyse-theorie in de vorm van stellingen met hun bewijs, bijvoorbeeld de stelling van Rolle, dat een functie die continu en differentieerbaar is op [a, b] met f(a) = f(b) minstens één punt c in [a, b] heeft met f'(c) = 0. Op het examen werd alleen de theorie gevraagd.

Waarom ben je wiskunde gaan studeren?
Ik heb goede wiskundedocenten gehad. Zij gaven mij het gevoel dat ik dat vak aankon. Ook vond ik wiskunde het laatste jaar, met al die theorie, een prima vak. Het maken van sommetjes in de eerdere jaren, vooral statistiek met de rekenmachine, vond ik heel saai. Je leerde niet veel meer dan het indrukken van de knopjes. Maar ik geloof dat mijn nieuwsgierigheid: wiskunde, wat is dat voor een vak? de doorslag heeft gegeven.

Vertel eens wat meer over je studie. Heb je bijvoorbeeld de computer als hulpmiddel gebruikt om wiskunde te doen?
De opzet van de studie was de eerste drie jaar vergelijkbaar met de middelbare school: elke dag 6 uur college. Er waren geen opgavenpractica. Het vierde jaar was vooral bedoeld om je scriptie te schrijven.
Ik vond van alle vakken die ik heb gehad de meetkunde van Riemann het leukst. Verder heb ik veel werk, maar ook plezier gehad aan het maken van mijn scriptie over het probleem van Dirichlet. Er bleek in het bewijs in een boek een fout te zitten. Eerst dacht ik dat het aan mij lag, maar uiteindelijk bleek het echt een fout te zijn. Die heb ik dus kunnen verbeteren. Het schrijven van die scriptie was overigens het enige moment tijdens mijn studie dat ik met een computer heb gewerkt. Het werken met een computer en met bepaalde programma's heb ik mezelf geleerd.

Wat ga je na je afstuderen doen?
Ik probeer een promotieplaats te krijgen, want ik wil graag onderzoek gaan doen. Naast mijn studie wiskunde heb ik elk jaar een paar vakken biologie gedaan, daaardoor kreeg ik het aanbod om daar met de computer onderzoek naar proteïnen te doen. Ze denken daar dat een afgestudeerd wiskundige 'alles' van het werken met computers weet. De komende jaren hoop ik te werken aan mijn promotieonderzoek en proefschrift. Ik ben in de gelukkige omstandigheid de kans te hebben gekregen om als wiskundige mee te werken aan een onderzoek, dat gewoonlijk alleen door biologen en scheikundigen wordt gedaan. Als ik mijn doctoraat behaald heb hoop ik dat ik aan de universiteit kan blijven werken. Nee, wiskundelerares zal ik waarschijnlijk niet worden.

Wat vind je van het congres?
Zoals al gezegd, doordat we met te weinig stewards en stewardessen zijn komt het volgen er nauwelijks van. Toch vond ik het een leuke ervaring. Vandaag heb ik bij werkgroep 8 (over wiskunde voor studenten met speciale behoeften) me heel nuttig kunnen maken. Er waren inleiders, zoals een Russische mevrouw, die alleen Engels of Duits konden spreken. Dat gaf voor de aanwezige Spanjaarden zulke grote problemen dat ze dreigden weg te lopen. Ik heb toen door als tolk op te treden de zaak kunnen sussen. Op het eind van de zitting was er ook nog een Spaanse spreker: een oud-leraar van mij. Dat was een heel leuke ervaring.

Heb je, tot slot, nog een verzoek aan de Nederlandse wiskundeleraren en -leraressen?
Mensen die het leuk vinden om op dit interview te reageren kunnen mij via e-mail bereiken: inge@pmplab2.ugr.es.

Bert Zwaneveld

Dienstregelingen en de Max-Plus Algebra*

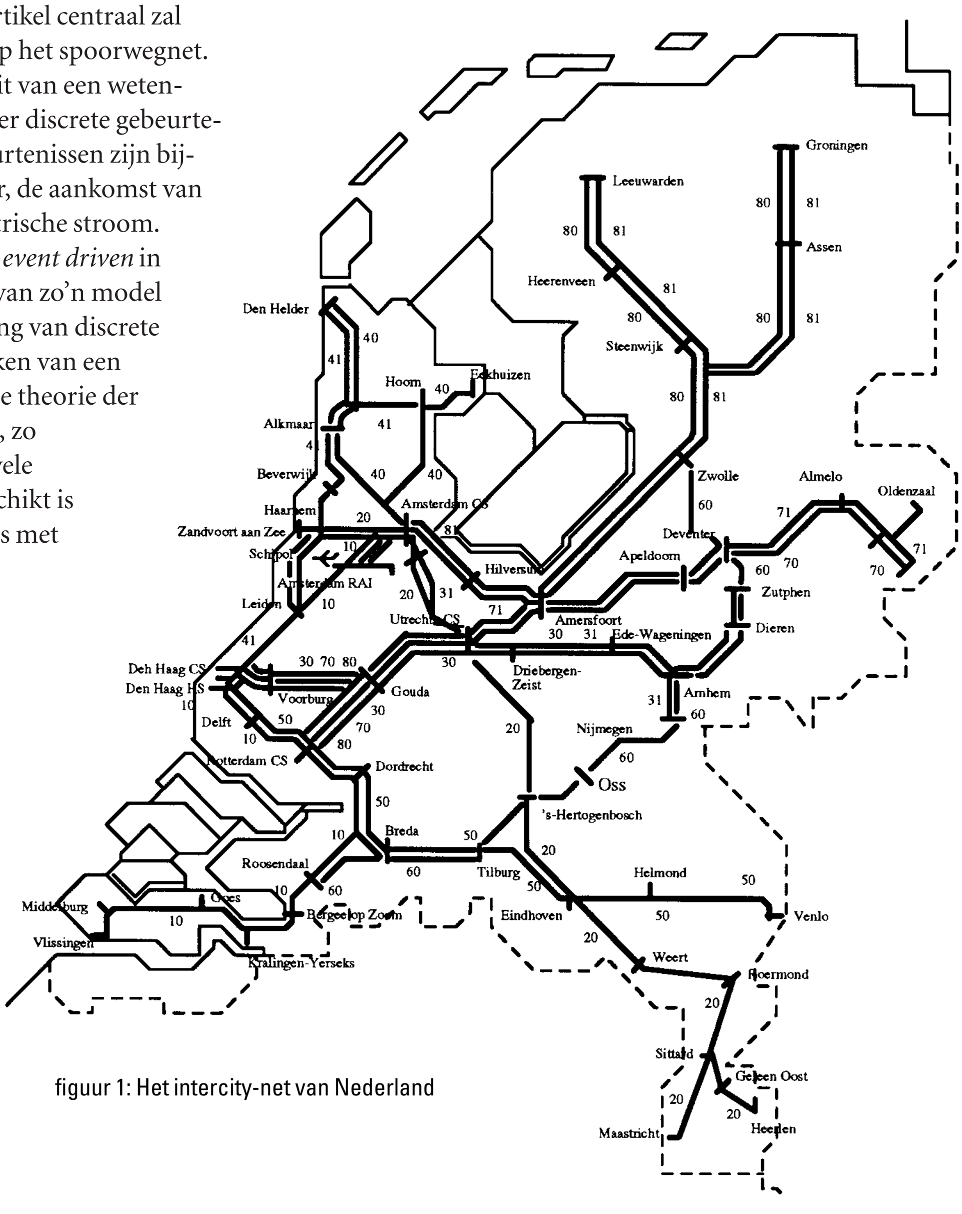
Geert Jan Olsder

Inleiding

In dit artikel zullen we kennismaken met een 'exotische' algebra. De conventionele algebra, die ons zo bekend is, bestaat uit de reële getallen en de operaties optellen en vermenigvuldigen. Als we daarin de optelling vervangen door maximalisatie en de vermenigvuldiging door de optelling, dan krijgen we de Max-Plus algebra. Deze nieuwe algebra blijkt toepassingen te hebben bij het bestuderen van discrete stromen op netwerken. Het verzenden van bits langs bedradingen is zo'n discrete stroom. Het voorbeeld dat in dit artikel centraal zal staan heeft te maken met treinen op het spoorwegnet. De Max-Plus algebra maakt deel uit van een wetenschapsgebied dat men de theorie der discrete gebeurtenissen noemt. Zulke discrete gebeurtenissen zijn bijvoorbeeld het openen van een deur, de aankomst van een trein, het uitvallen van de elektrische stroom. Modellen binnen deze theorie zijn *event driven* in plaats van *time driven*; het gedrag van zo'n model wordt bepaald door de opeenvolging van discrete gebeurtenissen en niet door de tikken van een klok. Het moge duidelijk zijn dat de theorie der gewone differentiaalvergelijkingen, zo geschikt voor het beschrijven van vele natuurkundige processen, niet geschikt is voor het modelleren van een proces met discrete gebeurtenissen.

Probleemstelling

Laten we het intercity-net van Nederland bekijken, zie figuur 1. Er zijn elf lijnen (een voorbeeld is lijn 10 van Vlissingen naar Amsterdam en terug). We nemen aan dat alle lijnen 'cirkels' zijn; op het eindpunt rijdt de trein terug naar het begin. We zullen hier geen rekening houden met treinen die naar of uit het buitenland gaan respectievelijk komen. Zo krijgen we een gesloten netwerk. Op iedere lijn rijdt een vast aantal treinen op en neer. Stel nu eens dat er geen dienstregeling is, maar dat de treinen op ieder station op elkaar wachten om passagiers over te laten stappen en na het overstappen vertrekken naar het volgende station, daar weer op elkaar wachten om passagiers te laten overstappen, enzovoort. Hoe snel kan het intercity-net functioneren onder alleen deze 'spelregels'?



figuur 1: Het intercity-net van Nederland

We weten dat de werkelijke dienstregeling op een halfuur basis werkt. Immers, met een tussentijd van een half uur kunnen we in alle richtingen vertrekken (althans wat betreft de intercity treinen). Daarom moet ons gesimplificeerde model minstens even snel of zelfs sneller kunnen werken. Stel dat die 'snelheid' λ minuten is, dan moet dus $\lambda \leq 30$. Later zullen we zien dat λ ruim 27 minuten is. Het verschil tussen λ en 30 geeft een maat voor de flexibiliteit in het systeem welke er voor zorgt dat vertragingen en hun doorwerkingen na verloop van tijd verdwijnen. We kunnen nu vele vragen stellen. Enkele ervan zijn:

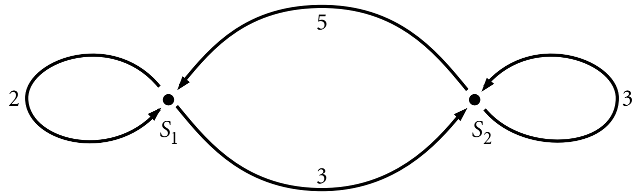
- Hoe werken verstoringen door in het systeem en hoe lang duurt het voordat zij zijn uitgestorven?
- Als we vijf minuten aan overstaptijden zouden toevoegen, is dan nog steeds een halfuur dienstregeling mogelijk?
- Wat zijn de cruciale onderdelen in het geheel waardoor die λ bepaald wordt? Als men extra treinen zou kunnen inzetten, waar zouden die dan moeten worden ingezet opdat λ kleiner wordt?
- Is het mogelijk een regelmatig dienstrooster te hebben met λ als de tijd tussen twee opeenvolgende vertrekken in alle richtingen?
- De lijnen (zoals lijn 10, lijn 80) zijn verondersteld gegeven (en vast) te zijn. Als we ook de lijnen zouden mogen ontwerpen is er dan een 'optimaal' ontwerp?

De meeste van deze vragen zullen met behulp van de Max-Plus algebra beantwoord (kunnen) worden.

Voorbeeld van een eenvoudige dienstregeling

In een stedelijk gebied zijn er twee stations, S_1 en S_2, die met elkaar verbonden zijn door sporen zoals in figuur 2 is aangegeven. Dit spoorwegsysteem bestaat uit een binnenlus en twee buitenlussen. De treinen op deze buitenlussen vervoeren passagiers in de buitenwijken (denk bij zo'n lus bijvoorbeeld aan de Zoetermeerlijn die verbonden is met Den Haag Centraal). De stations aan deze buitenlussen zijn niet getekend omdat ze geen rol in de te formuleren probleemstelling zullen hebben.

Laten we veronderstellen dat er vier treinen zijn; twee rijden alleen op de binnenlus en langs iedere buitenlus rijdt er één trein. Laten we verder aannemen dat de vier treinen de stations op tijdstip 0 verlaten. De twee trei-



figuur 2: Voorbeeld met twee stations

nen die op een station aankomen moeten op elkaar wachten opdat passagiers kunnen overstappen. Veronderstel dat er geen dienstregeling is en dat twee treinen op een station weer vertrekken direct na het overstappen van de passagiers. (Gemakshalve zullen we aannemen dat de overstaptijd reeds verwerkt is in de rijtijden.) De treinen moeten bij binnenkomst op een volgend station opnieuw op elkaar wachten, vertrekken weer gezamenlijk, enzovoort. Als de vertrektijd voor de $k+1$-ste vertrekken van de twee treinen op station S_i wordt aangegeven met $x_i(k+1)$, dan voldoen de vertrektijden aan

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \max(x_1(k)+2, x_2(k)+5) \\ x_2(k+1) &= \max(x_1(k)+3, x_2(k)+3) \end{aligned} \qquad (1)$$

voor $k = 0, 1, 2, \ldots$.
Met als beginvoorwaarde $x_1 = 0, x_2 = 0$ ziet de oplossing van deze vergelijking er uit als

$$\underset{x(0)}{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} \to \underset{x(1)}{\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}} \to \underset{x(2)}{\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}} \to \underset{x(3)}{\begin{pmatrix}13\\11\end{pmatrix}} \to \underset{x(4)}{\begin{pmatrix}16\\16\end{pmatrix}} \to \ldots$$

waarbij de notatie $x(i)$ de vector van de twee vertrektijden $x_1(i)$ en $x_2(i)$ voorstelt. Het patroon van de achtereenvolgende vertrektijden laat een periodiek gedrag bovenop een lineaire drift zien. De *periode* is gelijk aan twee en de gemiddelde tijdsduur tussen twee opeenvolgende vertrekken is 4. Vanuit het standpunt van dienstregelingen, die zo regelmatig mogelijk moeten zijn, is bovenstaande rij van vertrektijden geen fraaie oplossing. Het zou dan beter zijn om als beginvoorwaarde $x_1 = 1, x_2 = 0$ te kiezen, omdat de oplossing dan als volgt wordt:

$$\underset{x(0)}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \to \underset{x(1)}{\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}} \to \underset{x(2)}{\begin{pmatrix}9\\8\end{pmatrix}} \to \underset{x(3)}{\begin{pmatrix}13\\12\end{pmatrix}} \to \ldots$$

De tijdsduur tussen twee opeenvolgende vertrekken is nu precies 4 voor ieder station en de vertrektijden zijn nu heel regelmatig; de *periode* is 1. Door verder nog met wat andere beginvoorwaarden te spelen blijkt dat,

mogelijk na een kort onregelmatig stuk in het begin (een inschakelverschijnsel), steeds een oplossing resulteert met periode 1 of 2, en steeds met een (gemiddelde) tijdsduur van 4 tussen twee opeenvolgende vertrekken. Deze tijdsduur zullen we de *intervertrektijd* noemen.
De lezer kan gemakkelijk verifiëren dat een *intervertrektijd* kleiner dan 4 onmogelijk is. (Een trein op de binnenlus heeft minstens 8 minuten nodig om rond te gaan. Er zijn twee treinen op de binnenlus en daarom is de (gemiddelde) intervertrektijd naar beneden begrensd door 8/2 = 4.)

Extra treinen

Als men toch een snellere dienstregeling wil zal men het probleem moeten aanpassen door bijvoorbeeld een extra trein op de binnenlus toe te voegen zodat er dan op deze lus steeds drie treinen aanwezig zijn. Veronderstel dat in de beginsituatie deze extra trein zich bevindt in S_1. Dan worden de vergelijkingen die de vertrektijden vastleggen gegeven door

$$x_1(k+1) = \max(x_1(k)+2, x_2(k)+5) \qquad (2)$$
$$x_2(k+1) = \max(x_1(k-1)+3, x_2(k)+3) \qquad (3)$$

die als een stelsel eerste orde vergelijkingen geschreven kunnen worden als

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \max(x_1(k)+2, x_2(k)+5) \\ x_2(k+1) &= \max(x_3(k)+3, x_2(k)+3) \\ x_3(k+1) &= x_1(k) \end{aligned} \qquad (4)$$

Met de beginvoorwaarde $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ wordt de oplossing van deze vergelijking

$$\underset{x(0)}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}} \to \underset{x(1)}{\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}} \to \underset{x(2)}{\begin{pmatrix}8\\6\\5\end{pmatrix}} \to \underset{x(3)}{\begin{pmatrix}11\\9\\8\end{pmatrix}} \to \underset{x(4)}{\begin{pmatrix}14\\12\\11\end{pmatrix}} \to \ldots$$

Na een inschakelverschijnsel, is er een regelmatig gedrag met *periode* 1 en *intervertrektijd* 3. Deze intervertrektijd wordt bepaald door de buitenlus aan S_2; de trein op deze lus heeft 3 tijdseenheden nodig om een keer rond te rijden. De binnenlus is nu niet de ‘bottleneck’ meer, zoals in de oorspronkelijke probleemstelling wel het geval was. Om de intervertrektijd nog sneller (kleiner dan 3) te maken, zou men de volgende extra trein moeten inzetten op de buitenlus aan S_2. Stel dat we dat zouden doen, dan worden de nieuwe vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \max(x_1(k)+2, x_2(k)+5) \\ x_2(k+1) &= \max(x_3(k)+3, x_2(k-1)+3) \\ x_3(k+1) &= x_1(k) \end{aligned} \qquad (5)$$

die weer als volgt als een stelsel eerste orde vergelijkingen geschreven kunnen worden:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \max(x_1(k)+2, x_2(k)+5) \\ x_2(k+1) &= \max(x_3(k)+3, x_4(k)+3) \\ x_3(k+1) &= x_1(k) \\ x_4(k+1) &= x_2(k) \end{aligned} \qquad (6)$$

Als we als beginvoorwaarde weer $x_i = 0$ voor alle i nemen, dan wordt de oplossing

$$\ldots \to \underset{x(3)}{\begin{pmatrix}10\\8\\8\\3\end{pmatrix}} \to \underset{x(4)}{\begin{pmatrix}13\\11\\10\\8\end{pmatrix}} \to \underset{x(5)}{\begin{pmatrix}16\\13\\13\\11\end{pmatrix}} \to \underset{x(6)}{\begin{pmatrix}18\\16\\16\\13\end{pmatrix}} \to \underset{x(7)}{\begin{pmatrix}21\\19\\18\\16\end{pmatrix}} \to \ldots \qquad (7)$$

Deze oplossing heeft *periode* 3 en de gemiddelde *intervertrektijd* is 8/3, die veroorzaakt wordt door de treinen op de binnenlus. We krijgen een andere oplossing, maar nu met een exacte intervertrektijd van 8/3 door als beginvoorwaarden $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 8/3$, $x_3(0) = 7/3$, $x_4(0) = 0$ te nemen. Dan kan de oplossing geschreven worden als $x_i(k+1) = x_i(k) + 8/3$, $i = 1, 2, 3, 4$ en $k = 0, 1, \ldots$ en de bijbehorende periode is 1.

Formalisering

De algemene vorm van vergelijkingen die we gaan bestuderen is

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= \max(a_{i1} + x_1(k), a_{i2} + x_2(k), \ldots, a_{in} + x_n(k)) \\ &= \max_j(a_{ij} + x_j(k)), \; i = 1, \ldots, n \end{aligned} \qquad (8)$$

Het is gebruikelijk om de notatie van deze vergelijking te veranderen. In plaats van het symbool + voor de optelling schrijven we $\otimes$ en voor de maximalisatie schrijven we $\oplus$. Deze nieuwe notatie maakt de gelijkenis met de conventionele lineaire differentievergelijking zichtbaar:

$$x_i(k+1) = \bigoplus_j (a_{ij} \otimes x_j(k)), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (9)$$

hetgeen in vectorvorm geschreven kan worden als:

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \qquad (10)$$

Men noemt (10) een lineaire differentievergelijking in de Max-Plus algebra. Voor alle duidelijkheid: voor het uitrekenen van de oplossing maakt het geen verschil of men de notatie (8) dan wel (9) gebruikt. Als uit de context duidelijk is dat we het over vergelijkingen in de Max-Plus algebra hebben, wordt zelfs $x(k+1) = Ax(k)$ in plaats van $x(k+1) = A \otimes x(k)$ geschreven.

Als de beginvoorwaarde voor (10) is $x(0) = x_0$ dan geldt

$$x(1) = A \otimes x_0,$$

$$x(2) = A \otimes x(1) = A \otimes (A \otimes x_0) = (A \otimes A) \otimes x_0 = A^2 \otimes x_0$$

Men kan bewijzen dat inderdaad $A \otimes (A \otimes x_0) = (A \otimes A) \otimes x_0$. In plaats van $A \otimes A$ schrijven we A^2. Voor het algemene geval,

$$x(k) = \underbrace{(A \otimes A \otimes \ldots \otimes A)}_{k \text{ keer}} \otimes x_0 = A^k \otimes x_0$$

De matrices $A^2, A^3, \ldots$, kunnen direct worden berekend. Laten we eens (1) nemen, die we nu als volgt schrijven:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\text{Omdat} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

geldt

$$A^2 = \begin{pmatrix} \max(2+2, 5+3) & \max(2+5, 5+3) \\ \max(3+2, 3+3) & \max(3+5, 3+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

In het algemeen

$$(A^2)_{ij} = \bigoplus_l a_{il} \otimes a_{lj} = \max_l (a_{il} + a_{lj}) \tag{13}$$

In termen van het spoorwegvoorbeeld kan $(A^2)_{ij}$ worden geïnterpreteerd als het maximum van alle verbindingen van station S_j via één tussenstation naar station S_i. Men spreekt van paden van lengte twee tussen de stations S_j en S_i. In de terminologie van de grafentheorie: de stations zijn knopen en de verbindingen zijn pijlen van een gerichte graaf. In het algemeen geeft $(A^k)_{ij}$ het maximum aan van alle paden bestaande uit k aaneensluitende pijlen, beginnend in knoop S_j en eindigend in knoop S_i.
In vele netwerken, zoals het intercity-net, zal niet tussen elk tweetal knopen een rechtstreekse verbinding bestaan. Als er geen pijl is van S_j naar S_i, dan worden de vertrektijden op S_i niet rechtstreeks beïnvloed door die van S_j. In zo'n situatie is het gebruikelijk aan het element a_{ij} de waarde $-\infty$ toe te kennen. Dit 'getal' $-\infty$ is het neutrale element met betrekking tot de maximalisatie omdat $\max(p, -\infty) = p$ voor elk reëel getal p. Als we bijvoorbeeld (6) beknopt weergeven als $x(k+1) = A \otimes x(k)$, dan heeft A de omvang 4×4 en is gelijk aan

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 3 & 3 \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & -\infty \end{pmatrix}.$$

Kort samengevat gelden de volgende notaties in de Max-Plus algebra:

	conventionele algebra	**Max-Plus algebra**
grootheden	reële getallen	reële getallen en $-\infty$
optelling	$+$	$\oplus$ (= max)
vermenigv.	$\times$	$\otimes$ (= +)
neutraal element $+$	0	$-\infty$
neutraal element $\times$	1	0
machtverheffen x^n	$x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ keer}}$	$x^n = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ keer}} = n \times x$
eenheidsmatrix	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$I = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & \cdots & -\infty \\ -\infty & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\infty \\ -\infty & \cdots & -\infty & 1 \end{pmatrix}$
matrixverm. $C = AB$	$c_{ij} = \Sigma_k (a_{ik} \times b_{kj})$	$c_{ij} = \bigoplus_k (a_{ik} \otimes b_{kj})$

Een schijnbare generalisatie van (10) is de vergelijking

$$x(k+1) = A_1 x(k) \oplus \ldots \oplus A_{l+1} x(k-l) \qquad (14)$$

met $l > 1$. In de terminologie van de treinen stelt de vector $x(i)$ de vertrektijden voor, vanaf alle stations, van de i-de trein. Vergelijking (14) geeft aan dat de $k+1$-ste trein niet altijd wacht op de k-de treinen die aankomen, maar dat dat ook wel eens de $k-1$-ste trein, of nog een vroegere trein, kan zijn. Zo bijvoorbeeld zal de $k+1$-ste vertrekkende trein uit Utrecht moeten wachten op de $k-1$-ste aankomende trein vanuit Rotterdam. De k-de trein op dit stuk rail, die zich bevindt tussen de $k+1$-ste en de $k-1$-ste trein, zal aansluiting moeten geven op de $k+2$-de vertrekkende treinen. De scalaire vergelijkingen (2) en (3) kunnen in vectorvorm direct als (14) geschreven worden, met

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -\infty & 3 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ 3 & -\infty \end{pmatrix}.$$

Vergelijking (14) kan als een stelsel eerste orde vergelijkingen worden herschreven door meer componenten aan de vector x toe te kennen zoals dat reeds gebeurd is bij de eenvoudige voorbeelden in de vorige paragraaf.

Eigenwaarden

We gaan het hier hebben over het bestaan van eigenvectoren en eigenwaarden van de vierkante matrix A in de Max-Plus algebra, oftewel het bestaan van een reëel getal λ en een vector $v \neq -\infty$ (niet alle elementen zijn $-\infty$) zodat

$$Av = \lambda v \qquad (15)$$

Deze vergelijking geldt in de Max-Plus algebra; de uitdrukking λv betekent dan dat bij ieder element van v het getal λ wordt opgeteld. We zijn reeds voorbeelden tegen gekomen van eigenwaarden en eigenvectoren; v correspondeert met een beginvoorwaarde in een oplossing met *periode* 1 en λ is dan de *intervertrektijd*! Als de componenten van v de vertrektijden weergeven van de k-de treinen op alle stations, dan zullen precies λ tijdseenheden later alle $k+1$-ste treinen vertrekken.
Voordat we de belangrijke stelling 1 gaan formuleren, zullen we eerst enkele begrippen uit de grafentheorie ophalen. In de volgende definitie is het uitgangspunt een vierkante matrix A waarvan de elementen weer $-\infty$ kunnen zijn.

Definitie 1 *De graaf $G(A)$ van een $n \times n$ matrix A is een gewogen gerichte graaf met n knopen en een pijl (j,i) als $a_{ij} \neq -\infty$, in welk geval het gewicht van de pijl a_{ij} is.*

Zo stelt figuur 2 de graaf voor die hoort bij de matrix A van (12). Een pad in een graaf is een aantal aaneengesloten pijlen en een circuit is een rondgaand pad (waarvan begin- en eindknoop dus dezelfde zijn). Een graaf heet sterk samenhangend als er een pad bestaat (van willekeurige lengte) van elke knoop naar elke andere knoop. Laten we een specifiek pad (of circuit) bestuderen en het de naam ρ geven. Het gewicht van dit pad wordt aangegeven door $|\rho|_W$ en is gedefinieerd door de optelling van alle a_{ij} langs het pad. De lengte van het pad wordt aangegeven door $|\rho|_1$ en is gelijk aan het aantal pijlen waaruit het pad bestaat.

Stelling 1 *We gaan uit van een vierkante matrix A van $n \times n$. Als $G(A)$ sterk samenhangend is dan bestaat er één en slechts één eigenwaarde en tenminste één eigenvector. De eigenwaarde is gelijk aan het 'maximale circuit gemiddelde' van de graaf:*

$$\lambda = \max_{\zeta} \frac{|\zeta|_w}{|\zeta|_l},$$

waarbij ζ alle circuits uit $G(A)$ doorloopt. Een efficiënte methode om de eigenwaarde te berekenen is

$$\lambda = \max_{i=1,\ldots,n} \; \min_{k=0,\ldots,n-1} \frac{(A^n)_{ij} - (A^k)_{ij}}{n-k}, \; \forall j, \qquad (16)$$

welke formule naar Karp genoemd wordt. In deze vergelijking moeten A^n en A^k berekend worden in termen van de Max-Plus algebra; de andere operaties (aftrekken en delen) zijn conventioneel.

Er bestaan ook algoritmen die de eigenvector(en) v berekenen.

De resultaten van de Max-Plus algebra op het intercity-net

De probleemstelling is in de inleiding gegeven. Met behulp van de beschreven theorie kunnen antwoorden op de meeste van de vragen gegeven worden. Het model van het intercity-net kan direct uit het spoorboekje gehaald worden en heeft dan de vorm (14), waarbij de vector x 53-dimensionaal is (dit is expliciet beschreven in [2]). Na herschrijven in de vorm (10) resulteert een model waarbij de matrix A de omvang 79×79 heeft. De eigenwaarde van deze matrix is $\lambda = 27\frac{1}{12}$, hetgeen betekent dat intervertrektijden tot dit getal verkleind zouden kunnen worden. De huidige halfuur dienstregeling geeft dus wat flexibiliteit om verstoringen op te vangen. Het kritieke circuit (niet te verwarren met een lijn in het net) is van Venlo via Eindhoven via Utrecht via Amsterdam naar Zandvoort en net zo weer terug. Als men een sneller dienstregeling zou willen dan zou men extra treinen kunnen inzetten op een lijn die deel uitmaakt van dit kritieke circuit (d.w.z. de lijnen 20 en 50).

Als men $5\frac{2}{3}$ minuten zou toevoegen aan alle overstaptijden, dit wordt in het model gerealiseerd door de elementen van A aan te passen, dan wordt de eigenwaarde precies 30 minuten. Verstoringen langs het kritieke circuit, nu van Venlo via Eindhoven via Utrecht via Amsterdam via Haarlem via Den Haag HS via Breda via Eindhoven terug naar Venlo, kunnen dan niet meer worden opgevangen.

Een onvriendelijke manier om met passagiers om te gaan is door niet op hen te wachten. Iedere trein stopt simpelweg op ieder station om passagiers uit te laten en om reeds wachtende passagiers in te laten stappen. Zo krijgen we een snellere dienstregeling. Dan blijkt dat $\lambda = 26\frac{2}{11}$. Het kritieke circuit is nu van Venlo via Eindhoven via Breda naar Den Haag CS en terug.

De vraag naar een optimale lijn-struktuur (waarom laten we de treinen vanuit Vlissingen, lijn 10, altijd via Rotterdam naar Amsterdam gaan en weer terug; waarom zouden we geen andere lijnen ontwerpen zodat bijvoorbeeld de treinen vanuit Vlissingen via Eindhoven naar Maastricht gaan en weer terug?) kan niet rechtstreeks met de behandelde theorie beantwoord worden. Men zou de λ's van verschillende lijn-strukturen met elkaar kunnen vergelijken; verschillen zijn er zeker!

Uitbreidingen en conclusies

De niet-conventionele algebra met de operaties optellen en maximaliseren blijkt zeer geschikt te zijn voor het bestuderen van dienstregelingen. Speciaal het eigenwaarde-probleem in de Max-Plus algebra blijkt direct gekoppeld te zijn aan een regelmatig dienstrooster. Ook vanuit alleen wiskundige zin is de Max-Plus algebra interessant; zij is gecompliceerder dan de conventionele algebra. Een van de problemen is dat de inverse van het maximaliseren niet bestaat; in de gewone algebra is de vergelijking $x + 4 = 3$ wel oplosbaar, in de Max-Plus algebra is $\max(x, 4) = 3$ niet oplosbaar. De inverse van een vierkante matrix in de Max-Plus algebra (in de zin van: vind een matrix X zodat $AX = I$) zal in het algemeen niet bestaan.

Er bestaan vele uitbreidingen. In bovenstaande intercity-net voorbeelden gingen we er bijna stilzwijgend van uit dat het net gesloten is; bij de grens keren de treinen weer terug. Internationale treinen kan men ook integreren in het model door hen bij binnenkomst in het land als 'input' aan het model toe te voegen. Zo kan men ook netten van verschillende landen aaneen koppelen. Daarbij is de theorie van de z-transformaties (het discrete-tijd-equivalent van Laplace transformaties) aangepast aan de Max-Plus situatie een hulpmiddel. Het is verheugend te melden dat de Europese Unie in het voorjaar van 1996 een internationaal samenwerkingsproject heeft goedgekeurd en gaat financieren om onder andere deze problemen nader te bestuderen. De Technische Universiteit Delft treedt hierbij op als coördinator.

Noot

* Dit artikel is gebaseerd op een lezing welke werd gehouden tijdens de Nationale Wiskunde Dagen, 2 en 3 februari 1996 in Noordwijkerhout.

Literatuur

1 *F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat*
Synchronization and Linearity
Wiley, 1992

2 *J.G. Braker*
Algorithms and applications in timed discrete event systems
PhD thesis, Delft University of Technology, 1993

Samenvatting

Wie de algebra bestudeert waarin elke vermenigvuldiging door een optelling en elke optelling door een maximalisatie vervangen wordt, heeft een krachtig hulpmiddel in handen voor het beschrijven van zogenaamde discrete gebeurtenissen. De auteur past deze Max-Plus algebra toe op de dienstregeling van de intercity-treinen in Nederland en kan enkele verrassende conclusies trekken over de mogelijkheden verstoringen in de treinenloop op te vangen en het inzetten van extra treinen op bepaalde trajecten. Het blijkt dat bekende begrippen als matrixvermenigvuldiging, eigenwaarden en eigenvectoren in de Max-Plus algebra een heel eigen betekenis hebben.

Stage-week 3-mavo

Irene Dalm

Inleiding

Vorig schooljaar gaf ik wiskunde aan een derde klas mavo op het Develsteincollege, lokatie Hendrik Ido Ambacht. Deze klas liep qua samenstelling en motivatie nogal uiteen. Het was namelijk het eerste jaar waarin de leerlingen verplicht wiskunde moesten volgen in de derde klas. Hierdoor waren er nogal wat leerlingen in die klas die er flink de balen van hadden dat zij dit vak niet konden laten vallen zoals voorgaande jaren. Ook waren er nogal wat zittenblijvers in deze groep terechtgekomen die nu ineens in de basisvorming zaten of die het voorgaande jaar helemaal geen wiskunde hadden gehad. De motivatie was in deze groep (30 leerlingen) vaak ver te zoeken en ik kreeg heel vaak de vraag: 'Waarvoor hebben we dit nodig?'
Op het Develsteincollege is al zeven jaar de gewoonte om de leerlingen van mavo-3 een week stage te laten volgen. De leerlingen mogen zelf een stageplaats zoeken, maar de bedoeling is wel om wat ervaring op te doen in het beroep waarvan de leerlingen verwachten dit later uit te gaan oefenen. Dit is in de derde klas belangrijk omdat aan het einde van dit jaar het definitieve vakkenpakket wordt gekozen. Bij het vak Maatschappijleer wordt hierover gepraat en bij het vak Nederlands moeten de leerlingen zelf een sollicitatiebrief schrijven, die ze dan naar hun stageplaats moeten opsturen.
Toen kreeg ik een idee. Aan alle leerlingen heb ik gevraagd bij welk bedrijf, instelling of school ze zouden gaan werken in die week. Ik ben toen naar die bedrijven, basisscholen, kinderdagverblijven, dierenartsen, winkels etc. gegaan en heb me aldaar laten informeren over bepaalde handelingen die de werknemers daar uitvoeren. Naar aanleiding van mijn bevindingen heb ik per leerling een dubbel A4-tje gemaakt met wiskundige vraagstukjes en opdrachten toegespitst op hun stageplaats.

De opdrachten

Hieronder volgen een paar van die opdrachten gekoppeld aan de volgende beroepen/stageplaatsen.

Reisbureau
(hierbij kregen de leerlingen een kopietje van een bladzijde uit de prijsbijlage van reisgids)
- Hoe lang duurt de reis in totaal van Schiphol naar Kos/stad?
- Met drie personen naar hotel Bristol op 4 augustus voor 15 dagen kost per persoon f...... Dezelfde reis maar dan voor 22 dagen kost per persoon f...... Hoe groot is het verschil? Kun je dit verschil verklaren?
- Een echtpaar wil in mei, op 9 of 18 mei, 8 dagen naar Kos.Welke datum beveel jij ze aan en waarom? (let op alle extra kosten en aanbiedingen)

Asielzoekerscentrum
- Vraag aan 20 willekeurige bewoners uit welk land zij komen. Vraag ook welke taal zij spreken.
- Maak een staafdiagram van de landen. Welk land is de modus?
- Maak een staafdiagram van de talen. Welke taal is de modus?
- Is de modus van de landen dezelfde als de modus van de talen? Waarom wel of niet?
- Waarom zijn bovenstaande gegevens belangrijk voor de leiding van het asielzoekerscentrum?

Supermarkt
Hierbij kregen de leerlingen een plaatje uit de Consumentengids met de vergelijking van A-merken en huismerken.
- Wat wordt bedoeld met A-merk?
- Bij welk product ligt het grootste verschil tussen A-merk en huismerk?

Verder liet ik ze 10 artikelen kopen uit de tabel en moesten ze uitrekenen hoeveel meer geld ze kwijt waren als ze alles van de A-merken hadden gekocht in plaats van de huismerken.

Kledingzaak
- Vraag aan 15 klanten welke maat zij zoeken. Maak hiervan een staafdiagram.
- Wat is de gemiddelde maat?
- Welke maat is de modus?
- Waarom zijn bovenstaande gegevens belangrijk voor de eigenaar?
- De inkomsten van de verkoop vormen niet het salaris van de eigenaar. Er gaan nogal wat kosten vanaf. Geef drie van die mogelijke kosten.

Activiteitenbegeleider
- Je moet voor 100 mensen een bezigheid verzinnen. Je laat ze de keuze tussen: lappenpop maken, baby-truitje breien, gordijntje haken of pluche beertje maken. De eerste 20 mensen die je de keuze geeft kiezen als volgt:

lappenpop	5
truitje	3
gordijntje	4
beertje	8

Als de rest van de 100 mensen kiest zoals in verhouding van de eerste 20, bereken dan het aantal mensen per keuze.

• Voor een lappenpop heb je een lapje nodig van 45 cm bij 50 cm. Je neemt daarvoor katoen dat 90 cm breed is. Hoeveel meter stof heb je dan nodig om alle gevraagde lappenpoppen te maken?

De uitwerkingen

De meeste leerlingen vonden het leuk om de opdrachten te maken. Hieronder wat uitwerkingen van verschillende opdrachten en stageplaatsen.

- reis naar Kos 3.30 uur (is alleen vliegtijd)
- reis naar Kos 3.30 + 60 minuten transfertijd is 4.30 uur
- kosten van een winkel: loonkosten, b.t.w. 17,5%, huur, telefoonkosten, advertenties, reclame, voer voor eten in de dierenzaak.
- de gemiddelde maat (in een kledingzaak) is 39,1. Maar dat bestaat niet dus maat 40.

De beoordeling

Dit werk te beoordelen was niet eenvoudig. Toch vond ik het nodig voor de motivatie om de leerlingen een cijfer toe te kennen. Ik heb cijfers gegeven van 6 tot en met 8, omdat de opdrachten ook niet dezelfde zwaarte hadden bij elk stage-adres. Er waren wel 5 leerlingen van de 60 in totaal (de parallelklas heb ik ook opdrachten meegegeven, hoewel ik deze zelf geen les gaf) die er wel heel weinig aan hadden gedaan en zomaar een antwoord hadden neergezet en ook opdrachten niet gemaakt hadden omdat ze daar geen zin n hadden. Deze leerlingen heb ik een 5 gegeven. Ik kon zien aan de uitwerkingen dat sommige leerlingen er erg veel werk van hadden gemaakt; de staafdiagrammen met kleurtjes, uitwerkingen uitgebreid op een extra blad, goede verwoording van de open vragen. Deze leerlingen hadden een 8 verdiend. Daartussen heb ik per leerling bekeken hoe de uitwerkingen eruit zagen en of de gesloten vragen goed beantwoord waren. Na bespreking met de leerlingen waren ze over het algemeen goed te spreken over hun cijfer.

Conclusie

De leerlingen heb ik op deze manier willen laten zien dat wiskunde niet alleen in de wiskundeles gebruikt wordt. Aan de reacties van de leerlingen heb ik gemerkt dat ze de opdrachten leuk vonden om te maken en het gaf hun tijdens hun stageweek wat houvast om dingen te vragen aan hun 'werkgever'. Ik vond het zelf erg leuk om te doen hoewel ik er bij het opstarten van dit idee niet aan gedacht had dat het erg veel tijd vergde. Maar mijn ervaring van dit schooljaar kan ik goed gebruiken in de volgende jaren.

Noot van de redactie

Op blz. 180 en 181 vindt u voorbeelden van de opdrachten.
Op de Nationale Wiskunde Dagen zal Irene Dalm dit project nader toelichten.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Regionale NVvW-studiebijeenkomsten

Een plezierige vorm van korte nascholing, niet te ver weg, met certificaat.
Dit jaar bent u welkom in:

ZWOLLE **dinsdag 11/3**
GSG Greijdanus, Campus 5
NS uitgang Zuid
(10 min. lopen): rechtsaf, schuin over parkeerterrein, onder tunnel door, rechtsaf, achter HS Windesheim.

LEIDEN **donderdag 13/3**
Visser 't Hooftlyceum, Kagerstraat 1
NS uitgang Rijnsburgerweg
(8 min. lopen): links, 3e straat rechts.

EINDHOVEN **dinsdag 18/3**
HS Eindhoven, Rachelsmolen 1
NS uitgang Noord
(10 min. lopen): parkeerterrein schuin rechts over, weg over, na 300m langs Kennedylaan linksaf
(dus niet TU!), gebouw R1.

We zij erg blij dat wederom een aantal mensen bereid is gevonden om geheel belangeloos hun speciale expertise aan u uit te dragen. Wij hopen dat er weer 'voor elck wat wils' is. Dit jaar is er niet alleen de nieuwe lokatie Leiden, centraal in de Randstad, maar ook een nieuwe programma-indeling met plenair gedeelte.

15.45-16.00	**ontvangst, koffie/thee**
16.00-16.45	**plenaire voordracht**
16.45-18.00	**middagwerkgroepen**
18.00-18.45	**eenvoudige maaltijd en verkoop van posters en 'juwelen van de wiskundekoningin'**
18.45-20.00	**vooravondwerkgroepen**

Plenaire voordracht
Nieuwe technologie: nu bij de eindexamens havo, vwo en mto, in de toekomst ook bij vbo en mavo.
Zw: Paul Drijvers (Fi); Le: Agnes Verweij (TUD); Ei: Jan van de Craats (Ou/UvA).
In augustus 1998 start de vernieuwde Tweede Fase havo/vwo. Dan moet elke leerling over een grafische rekenmachine beschikken. Voor het mto is dit al in augustus 1997 het geval. De technologische ontwikkelingen gaan echter zó snel dat de vraag rijst of en zo ja wanneer een symbolische rekenmachine zoals de TI-92 of een PC waarop computeralgebra en meetkundeprogramma's zijn geïnstalleerd, bij de eindexamens gebruikt mogen/moeten worden. In de voordracht wordt op deze problematiek ingegaan. Ook zal aan de hand van enkele examenopgaven worden onderzocht welke invloed een 'algebra-machine' op de vraagstelling en de examenresultaten kan hebben.

Middagwerkgroepen
A
Zelfstandig leren in de onderbouw
Wegens succes herhaling van november '96. Gerrit v/d Heuvel (Revius SG, Deventer) en Harm Udding (SG Huizermaat, Huizen)
Zelfstandig leren is niet exclusief voor de Tweede Fase havo/vwo. Deze docenten vertellen over hun ervaringen in de onderbouw v/m/h/v. Wat ging er goed? Wat ging er mis? Zij willen de deelnemers een beetje ondergrond, inspiratie, ideeën en materiaal geven voor een experiment in de eigen klassenpraktijk.

B
Kennismaken met de grafische rekenmachine (GRM), door leden van het mto-platform.
In augustus 1997 treedt het nieuwe, drastisch veranderde, mto-wiskundeleerplan in werking. Hiermee wordt een goede overgang bereikt van de nieuwe W12-16 wiskunde naar het mto: realistische wiskunde waarbij de GRM een grote rol speelt. In deze bijeenkomst zullen voor de liefhebbers de voornaamste mogelijkheden van de GRM worden belicht [1]).

C
Informatie en Communicatie Technologie (ICT) in het wiskundeonderwijs,
Ries Kock (SLO).
In dit SLO-project zijn een aantal computerprogramma's geselecteerd die de moeite waard lijken voor de Tweede Fase havo/vwo, waarbij nu lesvoorbeelden ontwikkeld worden. De demonstratie zal met beeld en geluid worden ondersteund. Demoversies van deze programma's zullen beschikbaar zijn om thuis mee te experimenteren.

De volgende drie werkgroepen worden elk maar in één plaats gegeven:

D
Zwolle *Speltheorie: winnaar van de Nobelprijs economie 1994*,
Bert Schoonbeek (RUG).
Bij veel vraagstukken waar economen zich mee bezig houden is er sprake van een

wederzijdse beïnvloeding van de betrokken partijen. Speltheorie bestudeert de gevolgen van zulke wederzijdse afhankelijkheden en het daaruit voortvloeiende strategische gedrag. De theorie heeft een enorme invloed op de moderne beoefening van de economie. Aan de hand van een aantal eenvoudige voorbeelden zal worden geïllustreerd dat deze theorie tot interessante en verrassende inzichten kan leiden.

D
L e i d e n *Wat zijn precies exponentiële functies?*, Hessel Pot.
Een exponentiële functie maakt van optellen een vermenigvuldiging (hoofdeigenschap). Maar ook functies waar deze hoofdeigenschap niet voor geldt, worden wel exponentieel genoemd. Er is (meestal) ook sprake van het grondtal. Weinig wordt gewezen op het essentiële verschil tussen het expressie-grondtal (van een macht of een logaritme) en het functie-grondtal: het verschil tussen vorm en inhoud. Tenslotte komt de vraag aan de orde waarom bij de mooiste, de natuurlijke, exponentiële functie toch zo'n allerdrakerigst grondtal hoort. Hoe essentieel is die e?

D
E i n d h o v e n *De relativiteitstheorie veranderde het middelbaar onderwijs ingrijpend*, Henk Klomp.
Inleider hoopt hierop op 27 maart te promoveren en zet voor ons op 18/3 de standpunten uiteen:

- de theorie vereist verwerping van euclidische didactiek in meetkunde en mechanica (Kohnstamm, Ehrenfest-Afanassjewa);
- de euclidische didactiek moet desondanks behouden blijven (Dijksterhuis);
- meetkunde en mechanica zijn empirische vakken (Freudenthal).

Vervolgens wordt gekeken naar de implicaties hiervan voor het voortgezet onderwijs.

Vooravondwerkgroepen

Q
Geen meerkeuzevragen… maar hoe geef je nu gerichte training in de laatse 2 maanden vóór de nieuwe vbo/mavo-examens?, Wim Kuipers en Wim Schaafsma (GSG Greijdanus, Zwolle).
De opgaven op het examen zijn veel minder voorspelbaar dan voorheen. Deze onzekerheid geeft spanning en vergt inspanning om de puntjes op de juiste plaats boven de i te zetten. Daar zal in de werkgroep nog een laatste handreiking voor gedaan worden. Welke lastige onderwerpen en aspecten zijn het waard om nog eens nadrukkelijk in de training te betrekken? Een slotoffensief aan de hand van concreet materiaal.

R
Goed gebruik van de GRM in de mto-klas, door leden van het mto-platform.
Aan de hand van recent ontwikkeld materiaal kan de docent ervaren hoe leerlingen straks met de GRM om zullen gaan[1].

S
Zelfstandig studeren in het Montessori-onderwijs, door de wiskundesectie Herman Jordanlyceum (h/v), Zeist. Wegens succes herhaling van november 1995.
In het Montessori-onderwijs bestaat al jarenlang expertise met betrekking tot individuele leerwegen en zelfstandig studeren. Deze wiskundesectie wil geen revolutie preken, maar wil wel uit de doeken doen hoe binnen klassenverband aandacht geschonken kan worden aan de individuele leerweg en het zelfstandig studeren.

T
Nieuwe wiskunde in de vwo-profielen, door leden van het Profiteam (Fi).
Evenals vorig jaar meegenieten met de laatste ontwikkelingen in analyse en vlakke meetkunde[1].

Noot

1 Wegens beperkte voorraad demonstratiemachines wordt u verzocht een (geleende) GRM mee te nemen.

Certificaat
Wilt u een nascholingscertificaat ontvangen, vermeld dan bij uw aanmelding uw voorletters en uw geboortedatum. U krijgt na afloop van de studiebijeenkomst het certificaat uitgereikt op vertoon van een identiteitsbewijs. U hebt alleen recht op een certificaat als u de gehele bijeenkomst hebt bijgewoond. Certificaten kunnen niet worden nagestuurd.

Kosten
Voor leden van de NVvW, en degenen die bij aanmelding lid worden, is de bijeenkomst gratis. Van niet-leden wordt een bijdrage van ƒ50,– gevraagd. Voor de maaltijd en koffie of thee dient elke deelnemer ƒ15,– te betalen. Nieuwe leden betalen ƒ35,– contributie tot augustus 1997 (halfjaar) en ontvangen als welkomstpakket het vademecum, de heruitgave van drie brochures van Joop van Dormolen en Bert Zwaneveld, de jubileumbouwplaten en de nummers van Euclides van deze jaargang (voor zover voorradig). De overschrijving van ƒ15,– , ƒ50,– of ƒ65,– op giro 4470718 t.n.v. NVvW, Boxtel **MOET VOOR 20 FEBRUARI** binnen zijn. Ter plaatse aanmelden is niet mogelijk.

Hoe aanmelden
Iedereen kan één middag- en één vooravondwerkgroep bijwonen. Voor elk dient men een eerste en tweede keuze op te geven. Wie zich het eerst meldt krijgt de eerste keuze.

A. *aanmelden via school*
Aan elke school wordt ook nog een aankondiging

gestuurd. Breng uw collega's die nog geen lid zijn mee. Het is een mooie gelegenheid om hen lid te maken! Maakt uw school het bedrag over, dan moet u het schoolopgavebiljet inzenden.

B. *privé aanmelden*
Geschiedt de afschrijving van een rekening op uw eigen naam, vermeld dan de plaatscode Zw, Le of Ei; daarna de eerste en tweede keuze van respectievelijk de middag- en de vooravondwerkgroepen. Vervolgens uw telefoonnummer, uw voorletters en, als u een certificaat wilt, uw geboortedatum.

Voorbeeld:
LeBDRS071-5123456JJ1-1-'50
(N.B. Banken geven maximaal 30 tekens aan de giro door).

Bij vragen of problemen kunt u zich wenden tot het organiserende bestuurslid

Freek Mahieu
Dommeldal 12
5282 WC Boxtel
tel. 0411-673468

of in noodgeval tot

Agneta Aukema
tel. 0320-226518.

Ten slotte
Uw inschrijving wordt niet bevestigd. Bij binnenkomst vindt u uw sticker met codes voor uw werkgroepen.
Wij wensen u alvast veel genoegen.

Verschenen

S. Kemme, P. van Wijk, K.J. Wieringa
De Computer in de wiskundeles

In veel scholen wordt al jaren geëxperimenteerd met het gebruik van de computer in de wiskundeles. Drie praktijkdeskundigen hebben nu hun ervaringen in dit boekje op papier gezet. Ze behandelen drie onderwerpen:
- de didactische aspecten van het werken met de computer in de klas;
- een overzicht van de nu beschikbare software met een beoordeling van de bruikbaarheid;
- voor de vier grootste wiskundemethoden wordt beschreven hoe het gebruik van de computer geïntegreerd kan worden.

Prijs: ƒ 40,–.

Besteladres
APS/VODA
Postbus 85475
3508 AL Utrecht
onder vermelding van 400.120

Verschenen

Marcel Snel
TI-82 in de klas

In deze bundel is een dertigtal werkbladen opgenomen, waarmee leerlingen snel leren de TI-82 bij het oplossen van wiskundige vraagstukken te gebruiken.
In de bundel staat steeds op de linkerbladzijde een knoppeninstructie en op de rechterbladzijde een aantal opgaven om met die knoppen te oefenen.
Deze opgaven lopen op van eenvoudig toepassen tot open opgaven. Er is een bijbehorend docentenboek.

Prijs per vijf exemplaren: ƒ 78,75

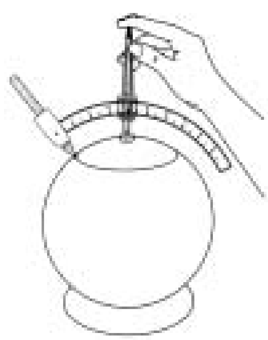
Meer informatie:
Thieme, tel. 0575-594880
of
http://www.thieme.nl

bespreking

István Lénárt
Non-euclidean adventures on the Lénárt Sphere
Lénárt Sphere Construction Materials
1996 Key Curriculum Press
ISBN 1-55953-103-7
204 pagina's
Prijzen:
boek: $ 15.95
basisset van het tekenmateriaal: $ 59.95

De Lénárt-bol

Bolmeetkunde op school? Je moet ervoor 'op jaren zijn' om met een zekere weemoed te spreken over boldriehoeksmeting, over cosmografie. De oude 'Molenbroek' wijdt er twee hoofdstukken aan. Het vak is echter uit school verdwenen. Als er nu meetkunde wordt gedaan is het euclidische meetkunde. Maar dat is slechts één van de verschillende soorten meetkunde binnen de huidige wiskunde.
In 1996 is in de VS een poging ondernomen om meetkunde nieuw leven in te blazen. István Lénárt, Hongaars wiskundige, heeft een boek geschreven en materiaal ontworpen dat door Key Curriculum wordt uitgegeven. In het boek (Non-euclidean adventures on the Lénárt Sphere) staan tekenopdrachten. Het bijbehorende tekenmateriaal (Lénárt Sphere Construction Materials) bestaat uit onder andere de Lénárt-bol, een doorzichtige bol van hard plastic met een doorsnede van 20 cm. Daarnaast zit er in de doos: een torus waarop de bol kan rusten zonder weg te rollen, 6 boltransparanten die de helft van de bol bedekken, een hoepel om van twee boltransparanten een nieuwe bol te maken, een bolpasser met voetpunt om cirkels te trekken, en een bolliniaal annex bolhoekmeter om 'lijnen recht vooruit' (grootcirkels) te tekenen en hoeken te meten. Dan zijn er nog 4 viltstiften met afwasbare inkt van verschillende kleur. De stiften zijn met kragen in de bolpasser vast te zetten. Er is een kaart van de aarde waarmee de Lénárt-bol tot globe is te behangen.
Het boek bevat werkbladen voor leerlingen van high-school-niveau (grade 9 - 12; 16 - 18 jaar) met docent-aanwijzingen per blad. Dat laatste werkt uitstekend, omdat je direct kan controleren of je de opgaven zelf goed begrijpt. Het blijft toch een nieuw vak, bolmeetkunde. De werkbladen kunnen gekopieerd worden voor gebruik in de klas.
Er zijn 11 hoofdstukken. Elk hoofdstuk heeft dezelfde opbouw. Het begint met 'Adventure cards', onderzoeksopdrachten die zelfstandig door de leerlingen worden uitgevoerd. Bijvoorbeeld: 'Probeer twee gelijkvormige veelhoeken op de bol te tekenen'. Dan volgt de 'Student's guide to adventure', een tekst die de leerling in stapjes op onderzoek uitstuurt. Bijvoorbeeld: Construeer verschillende gelijkvormige veelhoeken op het platte vlak, voorspel of zoiets ook op een bol zou kunnen, construeer veelhoeken op de bol, maak vergelijkingen tussen vlakke en 'bolle' veelhoeken. Na deze onderdelen waaruit elk hoofdstuk is opgebouwd, volgt de 'Teacher's guide', een blad met aanwijzingen, antwoorden en hints voor de docent.
De ondertitel van het boek geeft de kern aan: 'Activities comparing planar and spherical geometry'. In de eerste zes hoofdstukken worden platte en bolle basisbegrippen en eigenschappen vergeleken. In hoofdstuk 1 komt bijvoorbeeld de rechte lijn in het platte vlak aan de orde met zijn pendant op de bol: de grootcirkel. De overige hoofdstukken gaan over loodlijnen en evenwijdige lijnen, veelhoeken, gelijkvormige en congruente figuren. Cirkels en oppervlakte wor-



den zowel op het platte vlak als op de bol getekend en onderzocht. Lastige onderwerpen zijn evenwijdige rechte lijnen en gelijkvormige figuren, want die bestaan niet op de bol. Anderzijds zijn er bolfiguren te tekenen die niet in het platte vlak kunnen voorkomen. Een driehoek met drie rechte hoeken bijvoorbeeld.
Dan volgt een hoofdstuk met een toepassing. De Lénárt-bol kan namelijk met een kaart tot globe van de aarde worden gemaakt. De vraagstukken in dat hoofdstuk gaan over plaatsbepaling, tijdzones, aardbevingsgebieden en de reis van Columbus. De laatste vier hoofdstukken betreffen speciale bolmeetkundige onderwerpen: de omgeschreven cirkel van een boldriehoek, vlakverdelingen op een bol (voetbal), pooldriehoeken en spiegelingen op het boloppervlak.
Het boek is een pleidooi voor andere soorten meetkunde. Euclidische meetkunde geldt reeds lang als één van de vele axioma-systemen. Maar een axioma wordt pas zinvol door minstens twee systemen met elkaar te vergelijken die in dat axioma verschillen. Daarom is het belangrijk, aldus Lénárt, om verschillende soorten meetkunde te onderwijzen. Bolmeetkunde en vlakke meetkunde vormen daartoe een ideaal stel. Het tekenboek en tekenmateriaal is ontworpen voor leerlingen van 16 tot 18 jaar.Dus voor de hogere leerjaren van het voortgezet onderwijs. Veel van de activiteiten zouden mijns inziens ook in de basisvorming passen. Of in het beroepsonderwijs, later.
Tenslotte valt op dat in sommige landen bolmeetkunde verplicht wordt gesteld. In de VS bijvoorbeeld is kennis over grootcirkels 'standard'. In Nederland is dit niet het geval. De Lénárt-bol nodigt echter uit tot serieus meetkundeonderzoek door leerlingen. Misschien in het kader van GWA of in een 'Zebraboekje'?

Jan van den Brink

Inzicht in chaos

Victor Schmidt

Wat vooraf ging

In een vorig artikel is een niet-lineair model voor het gedrag van een populatie gepresenteerd. De gedragsvergelijking van dit model heeft de volgende gedaante

$$x_n = \mu x_{n-1}(1 - x_{n-1})$$

In deze vergelijking stelt x_n de omvang van de populatie voor in tijdsinterval n. De populatie-omvang wordt uitgedrukt in een getal tussen 0 en 1, waarbij 1 overeenkomt met een theoretische bovengrens.
De parameter μ heeft een waarde tussen 1 en 4. Zou μ kleiner dan 1 zijn, dan sterft de bevolking uit; ook de situatie met $\mu = 1$ blijft buiten beschouwing. Is μ groter dan 4, dan kan x_n waarden aannemen die groter zijn dan 1.

Het systeem kent een evenwichtstoestand bij een bevolkingsomvang van 1 - 1/μ. Als de parameter μ kleiner blijft dan 3, is deze toestand stabiel. Bij $\mu \geq 3$ treedt er *chaos* op. We zullen inzicht in dit verschijnsel verschaffen door de gedragsvergelijking bij $\mu = 4$ aan een nader onderzoek te onderwerpen.

Een oplossingsmethode

Als $\mu = 4$, dan luidt de gedragsvergelijking voor het systeem

$$x_n = 4x_{n-1}(1 - x_{n-1})$$

Deze vergelijking kan in een andere vorm worden gezet door de substitutie $x_n = \sin^2\phi_n$ toe te passen. Voor ϕ_n gelden er daarbij geen beperkingen, omdat het kwadraat van een sinus te allen tijde een waarde tussen 0 en 1 heeft, de waarden 0 en 1 niet uitgesloten. Als we in de gedragsvergelijking x_n vervangen door $\sin^2\phi_n$, dan geldt voor ϕ_n de vergelijking

$$\begin{aligned}\sin^2\phi_n &= 4\sin^2\phi_{n-1}(1 - \sin^2\phi_{n-1})\\ &= 4\sin^2\phi_{n-1}\cdot\cos^2\phi_{n-1}\\ &= (2\sin\phi_{n-1}\cos\phi_{n-1})^2\\ &= \sin^2 2\phi_{n-1}\end{aligned}$$

Met behulp van deze betrekking en volledige inductie kan bewezen worden dat $\sin^2\phi_n = \sin^2 2^n\phi_0$. Omdat $x_n = \sin^2\phi_n$, mogen we de conclusie trekken dat

$$x_n = \sin^2 2^n\phi_0\text{, waarbij } x_0 = \sin^2\phi_0$$

Er treedt bij deze oplossing een klein probleem op: de waarde van ϕ_0 kan niet eenduidig bepaald worden als x_0 gegeven is. De vergelijking $x_0 = \sin^2\phi_0$ heeft oneindig veel oplossingen. De keuze van ϕ_0 blijkt echter niet van invloed te zijn op de waarden van x_n. Daarom zullen we ϕ_0 bij voorkeur in het eerste kwadrant kiezen en wordt de oplossing x_n volledig bepaald door het bovenstaande.

De evenwichtsoplossing

Voor de evenwichtsoplossing geldt $x_{n+1} = x_n$ voor elke waarde van n. Wordt x_n vervangen door $\sin^2 2^n\phi_0$, dan gaat de bovenstaande evenwichtsvergelijking over in

$$\sin^2 2^{n+1}\phi_0 = \sin^2 2^n\phi_0$$

Daaruit mogen we concluderen dat

$$2^{n+1}\phi_0 = 2^n\phi_0 + k\pi \quad \text{of}$$
$$2^{n+1}\phi_0 = -2^n\phi_0 + k\pi$$

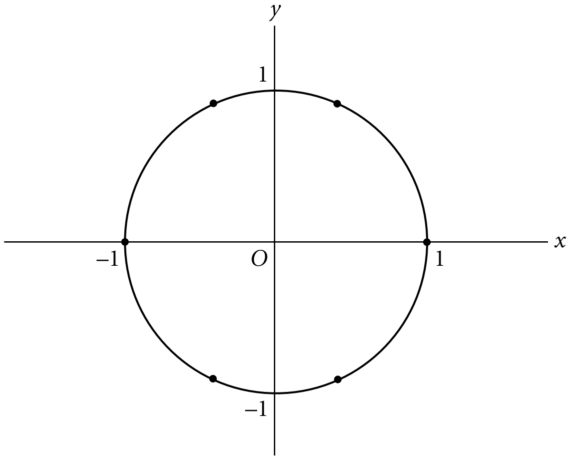
In deze vergelijkingen stelt k telkens een geheel getal voor. We kunnen het bovenstaande vereenvoudigen tot

$$2^n\phi_0 = k\pi \quad \text{of}$$
$$3\cdot 2^n\phi_0 = k\pi$$

Voor $2^n\phi_0$ geldt daarom

$$2^n\phi_0 = \tfrac{1}{3}k\pi$$

Ter illustratie zijn deze waarden van $2^n\phi_0$ in een eenheidscirkel weergegeven. (figuur 1)



figuur 1

Uit deze figuur blijkt dat er twee verschillende waarden voor $x_n = \sin^2 2^n\phi_0$ voorkomen, namelijk 0 en $\frac{3}{4}$. De nuloplossing was eerder als niet interessant terzijde geschoven, zodat $x_n = \frac{3}{4}$ als enige evenwichtsoplossing gerekend wordt.

Tamelijk eenvoudig is in te zien dat de evenwichtstoestand instabiel is. Als ϕ_0 iets afwijkt van $\frac{1}{3}\pi$, dan wordt deze afwijking in de formule $x_n = \sin^2 2^n\phi_0$ door de factor 2^n versterkt. Het systeem zal dan meer en meer divergeren van de evenwichtstoestand.

Periodieke oplossingen

De gedragsvergelijking heeft oplossingen met elke willekeurige periode. Bij wijze van voorbeeld onderzoeken we oplossingen met een periode van 3. Voor dergelijke oplossingen geldt $x_{n+3} = x_n$ en bovendien $x_{n+1} \neq x_n$, waaruit volgt dat

$$\sin^2 2^{n+3}\phi_0 = \sin^2 2^n\phi_0 \quad \text{en} \quad 2^n\phi_0 \neq \tfrac{1}{3}k\pi$$

Ook nu kunnen we uit de gelijkheid van het kwadraat van beide sinussen voor $2^n\phi_0$ een aantal waarden afleiden. Allereerst volgt (met k een geheel getal)

$$2^{n+3}\phi_0 = 2^n\phi_0 + k\pi \quad \text{of}$$
$$2^{n+3}\phi_0 = -2^n\phi_0 + k\pi$$

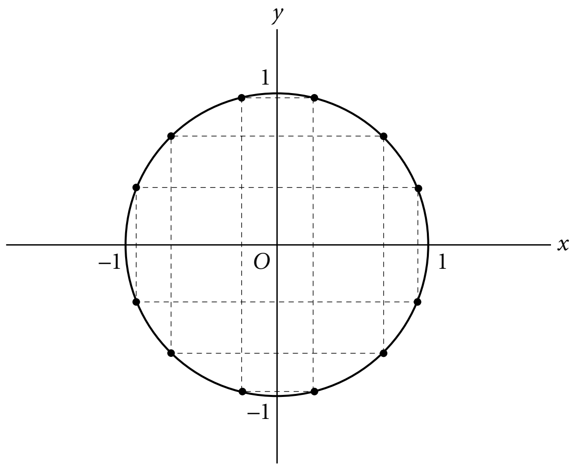
en dus

$$7 \cdot 2^n\phi_0 = k\pi \text{ of}$$
$$9 \cdot 2^n\phi_0 = k\pi$$

Voor $2^n\phi_0$ geldt daarom

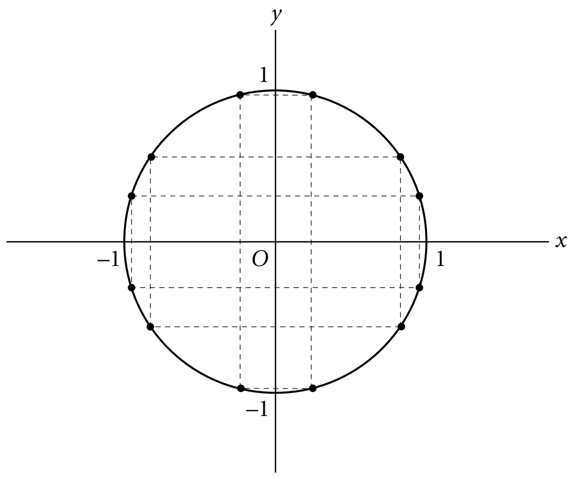
$$2^n\phi_0 = \tfrac{1}{7}k\pi \text{ of}$$
$$2^n\phi_0 = \tfrac{1}{9}k\pi$$

Daarbij mag $2^n\phi_0$ niet gelijk zijn aan $\frac{1}{3}k\pi$, want dan zou niet voldaan worden aan de eis dat $x_{n+1} \neq x_n$. Voor $2^n\phi_0$ vinden we dan de volgende mogelijke waarden:
$\frac{1}{7}\pi, \frac{2}{7}\pi, \frac{3}{7}\pi, \frac{4}{7}\pi, \frac{5}{7}\pi, \frac{6}{7}\pi$, enzovoorts en
$\frac{1}{9}\pi, \frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{5}{9}\pi, \frac{7}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi$, enzovoorts.
Merk op dat $\frac{3}{9}\pi$ en $\frac{6}{9}\pi$ niet in deze opsomming voorkomen. In de figuren 2 en 3 zijn deze waarden in een eenheidscirkel weergegeven. Punten waarbij $x_n = \sin^2 2^n\phi_0$ gelijk is, zijn met elkaar verbonden.



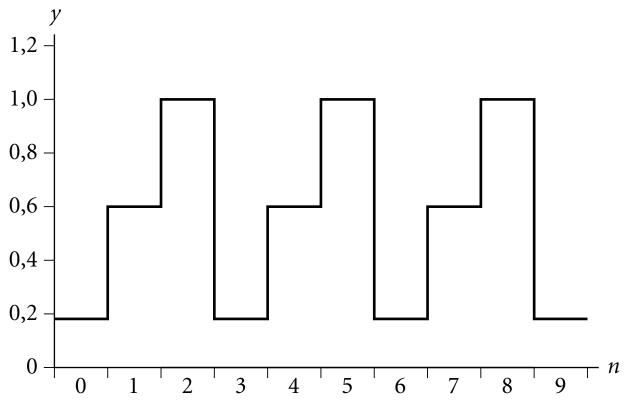
figuur 2

Uit figuur 2 blijkt dat er slechts drie verschillende waarden van x_n voorkomen: $\sin^2\frac{1}{7}\pi$, $\sin^2\frac{2}{7}\pi$ en $\sin^2\frac{3}{7}\pi$. Tezamen vormen zij één oplossing met periode 3, want:
kies $x_0 = \sin^2\frac{1}{7}\pi$
dan is $x_1 = \sin^2 2\cdot\frac{1}{7}\pi = \sin^2\frac{2}{7}\pi$
en $x_2 = \sin^2 2^2\cdot\frac{1}{7}\pi = \sin^2\frac{4}{7}\pi = \sin^2\frac{3}{7}\pi$
en ook $x_3 = \sin^2 2^3\cdot\frac{1}{7}\pi = \sin^2\frac{8}{7}\pi = \sin^2\frac{1}{7}\pi = x_0$

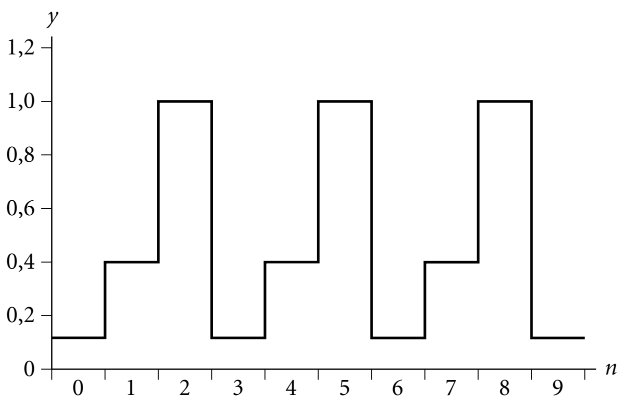


figuur 3

In figuur 3 zijn ook drie waarden te ontdekken, te weten: $\sin^2\frac{1}{9}\pi$, $\sin^2\frac{2}{9}\pi$ en $\sin^2\frac{4}{9}\pi$, die samen weer één oplossing vormen. De beide oplossingen zijn in de figuren 4 en 5 tegen de tijd uitgezet.



figuur 4



figuur 5

Het hoeft geen betoog dat de periodieke oplossingen eveneens instabiel zijn. Elke kleine afwijking van ϕ_0 wordt evenals bij de evenwichtsoplossing versterkt.

Duidelijk moge zijn dat de gedragsvergelijking ook oplossingen heeft met andere perioden dan 3.

Het voorkomen van periodieke oplossingen kan nu als volgt worden samengevat.
Voor elke waarde van h kan de vergelijking $x_{n+h} = x_n$ opgelost worden met als resultaat twee eindige rijtjes getallen van de vorm $\sin^2 1/N\pi$, $\sin^2 2/N\pi$, …, $\sin^2 1/2(N-1)/N\pi$. Hierbij is N gelijk aan $2^h - 1$ of aan $2^h + 1$. De argumenten van de sinussen liggen telkens in het eerste kwadrant. Van deze getallen maken sommige mogelijk deel uit van een oplossing met een kleinere periode dan h. Die kleinere periode is dan een deler van h. In dat geval is de breuk met noemer N te vereenvoudigen tot een breuk waarvan de noemer van de vorm $2^d - 1$ of $2^d + 1$ is met d een deler van h.

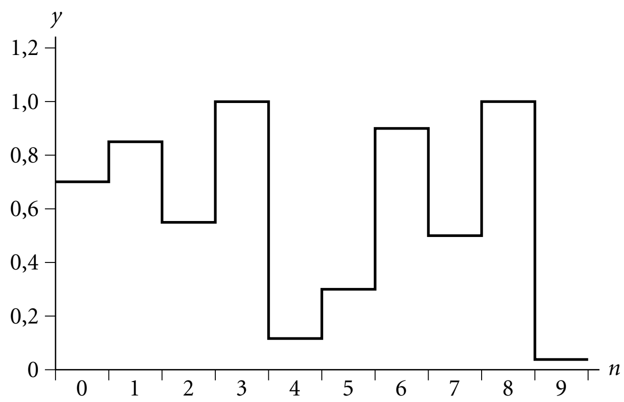
De resterende getallen uit de rij vormen samen één of meer oplossingen met periode h.

We kunnen dit resultaat ook als volgt omschrijven: Een oplossing is periodiek als de startwaarde x_0 gelijk is aan $\sin^2\phi_0$, waarbij $\phi_0 = m/N\pi$, met $N = 2^h - 1$ of $N = 2^h + 1$ en $m \leq \frac{1}{2}(N-1)$. De periode van de oplossing is gelijk aan h of een deler van h. De beperking die aan m wordt gesteld is overigens niet essentieel. Ook hoeken uit andere kwadranten dan het eerste kunnen een startwaarde opleveren.

In een vervolgartikel zullen we dit resultaat gebruiken om een aantal meer of minder bekende deelbaarheidsstellingen uit de getaltheorie te formuleren.

Andere oplossingen

De gedragsvergelijking van het model heeft een evenwichtsoplossing en oneindig veel periodieke oplossingen. Daarnaast bestaan er oplossingen zonder enige regelmaat of orde. Indien bijvoorbeeld voor ϕ_0 de waarde 1 wordt gekozen, dan is ϕ_0 geen rationale fractie van π en vertonen de opeenvolgende waarden van x_n geen enkele regelmaat, zoals uit het voorgaande blijkt. In figuur 6 is dit in beeld gebracht.



figuur 6

Opmerkelijk zijn oplossingen die bijna periodiek zijn. Wie voor ϕ_0 bijvoorbeeld de waarde $\frac{1}{28}\pi$ kiest, zal zien dat x_2 gelijk is aan $\sin^2\frac{1}{7}\pi$. Zoals vermeld is $\sin^2\frac{1}{7}\pi$ een startwaarde voor een oplossing met periode 3, en volgt de oplossing vanaf peilmoment 2 dit verloop. Na een aanloopperiode blijkt de oplossing alsnog periodiek te zijn.

Alle gepresenteerde oplossingen zijn zoals eerder beschreven instabiel. Elke verstoring, hoe klein ook, wordt door het voorkomen van een factor 2^n in de oplossing versterkt.

Andere waarden van μ

Voor $\mu = 4$ ontaardt het systeem in een *chaos* met een oneindig aantal mogelijke toestanden. Ook voor andere waarden van $\mu \geq 3$ treedt er chaos op. Niet altijd is het aantal mogelijke toestanden oneindig groot. De voordracht van Takens op de studiedag van '94 richtte zich met name op de relatie tussen de waarde van μ en de aard van de chaotische verschijnselen. Jammer genoeg is het niet mogelijk deze relatie te verhelderen met behulp van expliciete oplossingen. Past men de substitutie $x_n = \sin^2\phi_n$ toe op de algemene gedragsvergelijking $x_n = \mu x_{n-1}(1 - x_{n-1})$, dan volgt $\sin^2\phi_n = \frac{1}{4}\mu\sin^2 2\phi_{n-1}$. Hoewel deze betrekking niet al te ingewikkeld oogt, is het in het algemeen niet mogelijk voor ϕ_0 een eenvoudige uitdrukking te vinden.

Mededeling

Schooltv voor wiskunde: 'Wat en waar is wiskunde'

Met ingang van maandag 17 februari 1997 om 11.00 uur, TV2, start Teleac/NOT met de nieuwe schooltv-serie 'Wat en waar is wiskunde', bestemd voor leerlingen in de brugklas van het voortgezet onderwijs. De gekozen thema's sluiten nauw aan bij bestaande methoden. Elk programma bestaat uit twee afgeronde delen van elk tien minuten. De opbouw van elk programma is steeds hetzelfde. We zien eerst beelden van de wereld om ons heen, en daarna volgt een grafische bewerking tot wiskunde.

De nieuwe serie gaat vergezeld van een docentenhandleiding met kopieerbare leerlingbladen, op twee niveaus: vbo/mavo en havo/vwo.

Hieronder volgen de acht thema's:
Kijken
Ruimtelijke figuren
Symmetrie en regelmaat
Verhoudingen
Vuistregels
Tabellen en grafieken
Hoeken
Plaatsbepalen

Wanneer uitgezonden?
Het schema van de uitzenddata op Nederland 2 is:
Aflevering 1, 17/02/1997 11.00 uur
Aflevering 2, 10/03/1997 11.00 uur
Aflevering 3, 17/03/1997 11.00 uur
Aflevering 4, 24/03/1997 11.00 uur
en de blok-uitzending op dinsdag 8 april vanaf 9.00 uur

De docentenhandleiding (24 pagina's) is verkrijgbaar via de afdeling verkoop van
Teleac/NOT telefoon (035) 6236260 Kosten: *f* 22,50

Meer informatie vindt u in de schooltv-gids (editie januari-juni 1997), die Teleac/NOT begin december 1996 gratis naar alle scholen voor basis- en voortgezet onderwijs heeft gestuurd.

Voor meer informatie **035-6723611**
Magda Bruin, Projectleider wiskunde TELEAC/NOT

Studiedag 1996 Een verslag

Agnes Verweij en Bert Zwaneveld

Op zaterdag 16 november 1996 kwamen zo'n 350 wiskundeleraren en -leraressen bijeen voor de jaarlijkse studiedag van de Vereniging. Het thema was: Vernieuwing, nuttig en recreatief. De organisator van de studiedag, Aad Goddijn, had inleiders en sprekers gezocht die in hun bijdragen vooral op (het nut van) allerlei lopende vernieuwingen ingingen: met name de examens in het vbo/mavo en het programma van de bovenbouw havo/vwo. In de afsluitende plenaire lezing en in een werkgroep onder leiding van de puzzelredacteur van Euclides werd het recreatieve aspect van wiskunde aan de orde gesteld. Dit aspect is natuurlijk niet nieuw, maar kan voor de schoolwiskunde misschien wel vernieuwend zijn.
De plaats van de studiedag, het Nieuwe Lyceum in Bilthoven, is bekend. Toch was er ook hier iets nieuws: het gebouw wordt ingrijpend gerenoveerd. De belangrijkste winst hiervan was dat er nu, behalve de aula, nog een geschikte zaal voor plenaire lezingen is met goede faciliteiten voor overhead-projectie.

De openingslezingen

In plaats van één openingslezing waren er twee parallellezingen: één door Prof. R. Tijdeman, Rijksuniversiteit Leiden, over hoe hij vindt dat aankomende studenten in een exact vak met wiskunde hebben moeten leren omgaan en één door Marianne Lambriex en Wim Kuipers, voorzitter en lid van de ontwikkelgroep wiskunde, over de veranderingen van het programma voor wiskunde in het vbo/mavo naar aanleiding van de voorstellen van de commissie Van Veen.

Organisator Aad Goddijn

Abstraheren, modelleren en redeneren

Deze vaardigheden worden door prof. Tijdeman van een aankomend student verwacht. Hij probeerde uit te leggen hoe daaraan op school gewerkt kan worden, al zei hij erbij dat hij geen ervaring heeft met onderwijs op het vwo.
Over abstraheren merkte hij op dat de mens een onbeperkt abstraherend vermogen heeft. In de wiskundelessen op school kan op dit vermogen een beroep gedaan worden, maar daarbij zijn wel drie punten van belang: abstracte begrippen moeten goed voorbereid worden, er moet precies gezegd worden wat bedoeld wordt - dus bijvoorbeeld niet 'oneindig klein' maar 'willekeurig klein' bij het limietbegrip - en de leerlingen moeten tijd voor verwerking krijgen.
Modelleren is het maken van een bruikbaar model van een complexe structuur. En dat is niet hetzelfde als werken met contextrijke wiskunde. Problemen met een niet-wiskundige context zijn vaak veel te ingewikkeld om ze door leerlingen te laten modelleren. Dit wordt nogal eens opgelost door leerlingen via een serie sturende vragen stap voor stap naar het gewenste model te leiden. Maar dat is geen modelleren.
Tijdeman gaf twee voorbeelden van modelleren die volgens hem geschikt zijn voor het vwo, het eerste met een niet al te moeilijke natuurkundige context: een vallende steen, het tweede met een wiskundige context: een stukje getaltheorie. In beide voorbeelden gaat het er om een functievoorschrift $y(x)$ te vinden op basis van een gegeven serie getallenparen (x, y). De context speelt een bescheiden rol: hierdoor wordt betekenis gegeven aan de getallenparen en het functievoorschrift. In beide gevallen bleek transformatie van het assenstelsel de sleutel tot de oplossing te zijn.

Over redeneren zei Tijdeman dat niet alleen in het hoger onderwijs wordt aangedrongen op meer nadruk voor redeneren en bewijzen. Dit geluid klinkt ook onder wiskundeleraren getuige de enquête die door de Studiecommissie wiskunde B is gehouden. Zonder goede definities kun je niet redeneren. Dus niet zoals in een schoolboek voorkomt: ‘gegeven $x(t) = \cos t$ en $y(t) = 2\cos t$; plot deze beweging met een grafische rekenmachine; de kromme die zo ontstaat heet een ellips’. Verder bepleitte Tijdeman dat definities op school gegeven worden zoals dat in de wiskunde gebruikelijk is. Anders gaan de voordelen van wiskunde als universele taal verloren. Van de wiskundetaal moeten de leerlingen ook de grammatica leren. Als voorbeeld liet hij zien hoe de betekenis van ‘als A, dan B’ behandeld kan worden.
Tijdeman sloot af met een voorbeeld van redeneren voor het vwo. Eerst met de grafische rekenmachine de abc-formule ‘ontdekken’, daarna bewijzen dat het waar is. Ook hierbij speelde transformatie van het assenstelsel een belangrijke rol. Tijdeman plaatste hier, evenals bij de modelleervoorbeelden, de kanttekening dat leerlingen er zelf misschien niet helemaal uit zullen komen. Maar zij moeten dan toch wel het gevoel krijgen dat zij het zelf gevonden zouden kunnen hebben.
De invalshoek van de lezing, het wiskundeonderwijs beschouwen vanuit de drie genoemde wiskundige activiteiten, sluit goed aan bij aspecten die bij de komende veranderingen in de bovenbouw belangrijk zullen zijn. Bij de voorbeelden kunnen twee opmerkingen gemaakt worden. De eerste, die ook in de wandelgangen te horen was, is dat die voorbeelden, ondanks de verklaring van het tegendeel, toch iets hadden van: zo moet het. De tweede opmerking is dat aankomende studenten blijkbaar over goede algebraïsche vaardigheden moeten beschikken. En de vraag is dan waarom Tijdeman dat niet aan de orde heeft gesteld.

Een vernieuwend examen op maat?

Het komende examen vbo/mavo is nieuw. Maar, ondertussen is men bezig dat alweer te veranderen. Door de plannen van de commissie Van Veen zal vanaf 1998 in klas 1 het programma en vanaf 2002 het examen anders worden. Er komen dan vier leerwegen, elk met een eigen examenprogramma: de theoretische (met doorstroommogelijkheid naar havo), de gemengde (met doorstroommogelijkheid naar lang-mbo), de beroepsgerichte naar kmbo en leerlingwezen en de beroepsgerichte leerweg naar lang-mbo. En in elke leerweg komen vier sectoren: zorg/welzijn, economie, landbouw en techniek. Bij de eerste twee is wiskunde keuzevak. Er wordt voor wiskunde niet naar sector gedifferentieerd. ‘Een gemiste kans’, verzuchtte Wim Kuipers.
De lezing was eigenlijk een toneelstukje met als spelers Marianne Lambriex, die verslag deed van de wederwaardigheden van de ontwikkelgroep wiskunde, Wim Kuipers, die daarop reflecteerde en (af en toe) Sjoerd Schaafsma, die de beleidsaanwijzingen van het ministerie van OCenW verwoordde. De ontwikkelgroep is een jaar geleden begonnen met als opdracht een samenhangende, consistente verzameling examenprogramma’s voor het vbo/mavo te maken waaraan 80 % van de leerlingen in 80 % van de geïndiceerde tijd kan voldoen. Daarbij moet gebruik gemaakt worden van de bestaande examenprogramma’s, de kerndoelen van de basisvorming en de instroomeisen van het vervolgonderwijs (kmbo, mbo en havo). In elk programma moeten een basisdeel, een kerndeel en een verrijkingsdeel zitten.
Wat vooral uit het verslag naar voren kwam, was dat de ontwikkelgroep vrijwel steeds als ze dacht een stap verder te zijn, door nieuwe richtlijnen van het ministerie een andere richting uit gestuurd werd. Het inmiddels ontwikkelde concept kon dan de prullenbak in.
Met veel moeite was er in maart iets klaar (een halffabrikaat) dat in een veldraadpleging aan docenten en deskundigen werd voorgelegd. De docenten maakten zich grote zorgen over de haalbaarheid voor de i-leerlingen en zij vroegen zich af waar de geïntegreerde wiskundige activiteiten gebleven waren. De deskundigen hadden veel kritiek. Waarom is er geen tijd voor evaluatie ingeruimd? Waarom moet het huidige programma, waar veel tijd en energie aan besteed is, alweer op de helling?
In mei bleek dat de plannen van de ontwikkelgroep opnieuw bijgesteld moesten worden. Nieuw was bijvoorbeeld dat het verrijkingsdeel een werkstuk moet bevatten en afgesloten moet worden in het schoolonderzoek. Er is uiteindelijk niet met alle richtlijnen van het ministerie rekening gehouden; niemand kon hier ook meer echt wijs uit worden.
Wat er nu ligt, wordt door de ontwikkelgroep als een samenhangend pakket gekwalificeerd met een beter kort programma dan het huidige B-programma en een beter op het mbo toegesneden lang programma. Maar de aansluiting op het havo, waar wiskunde straks in alle vier profielen verplicht is, zal echt een gat worden. De ontwikkelgroep had dit havo-gat willen dichten door ook in alle vier sectoren van de theoretische en de gemengde leerweg op vbo/mavo wiskunde verplicht te maken, door meer uren voor verrijking beschik-

Werkgroep

baar te krijgen dan één lesuur per week in het vierde leerjaar en in het verrijkingsdeel de aanstaande havo-leerlingen geen werkstuk te laten maken, maar een stoomcursus te geven. Helaas, het ministerie wilde hier niet aan. Het ministerie beraadt zich nog wel over een tekst die, vrij vertaald, de bedoelde stoomcursus toch mogelijk maakt, als deze wordt ingekaderd in de complexe eindopdrachten waaruit het verrijkingsdeel bestaat. En misschien kunnen scholen er zelf toe overgaan wiskunde in alle vier de sectoren verplicht te stellen.
De ontwikkelgroep is tenslotte redelijk tevreden over de voorstellen, ondanks het bijna dramatische verloop van de wordingsgeschiedenis. Het ministerie is nu aan zet.

De werkgroepen

‘s Morgens en ‘s middags kon iedere deelnemer een werkgroep bezoeken. Er waren er een kleine 20. Hier volgt een impressie uit drie ervan.

En de A/B-leerlingen dan?

Deze werkgroep met Truus Dekker (Freudenthal instituut) als inleider en Ineke Humblé (Kandinsky College, Nijmegen) als gespreksleider was een soort vervolg op de hiervoor beschreven openingslezing. De nadruk lag op het B-examen, over de A-leerlingen werd nauwelijks gesproken.
Om in de stemming te komen moesten de aanwezigen eerst een aantal opgaven van het experimentele examen 1996 maken. Over de ervaringen hiermee werd levendig gediscussieerd.
Vervolgens werd informatie gegeven over de stand van zaken. Het komend jaar kunnen alle scholen gebruik maken van de ‘landelijke’ B-examens. In de wijze van meetellen zijn ze vrij. Op een vraag uit de zaal of de wiskundeleraren het een gewenste ontwikkeling vinden dat ook het B-examen landelijk wordt, misschien zelfs centraal, dus onder verantwoordelijkheid van de CEVO met bindende normen, was het antwoord voorzichtig positief. ‘Het civiel effect van het diploma neemt toe’, ‘het is overzichtelijker voor de leerkrachten’, waren een paar antwoorden.
Naar aanleiding van de in 1996 afgenomen experimentele B-examens werd opgemerkt dat met name de zwakke leerlingen de moeilijkheidsgraad van een opgave slecht inschatten. Omdat het om een probleem in een context gaat, denken ze dat een opgave makkelijk is en zien ze de wiskundige aspecten ervan over het hoofd. De leerlingen zijn ook nog niet gewend aan de opbouw van de opgaven: eerst een context, dan een of meer deelvragen, dan een bijstelling of precisering van de context met weer een aantal deelvragen, enz.
Voor leerlingen, maar ook voor leerkrachten, is belangrijk dat ze leren beoordelen wanneer een antwoord goed is. Positief is dat leerlingen soms al echt kritisch zijn ten aanzien van hun eigen antwoorden: ‘ik weet dat dit fout is, want ..., maar ik kan de fout niet vinden’.
Aan het eind werd er (gelukkig) toch nog iets over de A-leerlingen gezegd. Er is een bundel in de maak met opgaven waaruit examenopgaven gehaald kunnen worden. Die bundel geeft minstens impliciet aan waaraan een A-examen moet voldoen. In de praktijk zal het vaak uitdraaien op vereenvoudigde opgaven uit B-examens.

Zelfstandig leren met de computer in 4 vwo

Sieb Kemme begon met een inleiding over zelfstandig leren en gaf vervolgens aan hoe hieraan in het PRINT-project ‘Informatietechnologie in het studiehuis wiskunde’ gewerkt wordt. In dit project (nu voor het tweede jaar) doen naast PRINT, het Freudenthal instituut en het APS vijf scholen met hun vwo 4 mee. Er worden opdrachten

ontwikkeld die passen binnen het huidige programma, waarbij leerlingen bestaande software zoals VU-Grafiek, Ruimfig, Doorzien, enz. gebruiken. De opdrachten moeten zo zijn dat leerlingen kunnen 'klungelen', dus iets kunnen uitproberen, initiatief kunnen nemen, uitgedaagd worden tot onderzoek, de computer als slaaf voor teken-, reken- en tekstwerk kunnen gebruiken. De opdrachten moeten aansluiten bij het boek, of zelfs delen ervan kunnen vervangen, wat overigens lang niet altijd lukt. Ze mogen geen extra (les)tijd vergen. Het resultaat kan een verslag, advies, rapport, poster of noem maar op zijn.
De opdrachten worden voordat ze in de klas komen op een aantal middagbijeenkomsten met de docenten doorgenomen. Daarbij is de inbreng van de docenten groot. De opdrachten worden niet steeds op alle vijf scholen gebruikt; de docenten maken zelf een selectie. De tien opdrachten die er nu liggen, een tussenproduct, zijn beschreven in een (bij het Fi verkrijgbare) publicatie die ook docentenhandleidingen bevat. Het leerlingenmateriaal heeft een open vorm: eerst de opdracht, dan een bijlage met bronnenmateriaal, een handleiding voor de te gebruiken software en suggesties voor de aanpak.
Michiel Doorman liet een aantal voorbeelden van opdrachten en leerlingresultaten zien. Daarna ontstond een levendig vraag- en antwoordspel. Uit de vele vragen volgen er hier een paar met de antwoorden. Hoeveel lesuren kost één onderwerp? Ongeveer 3. Kom je klaar met het reguliere programma? Ja, maar je moet de opdrachten dan wel als vervangend behandelen. Hoe wordt een resultaat beoordeeld? Aan de hand van een scoreformulier met maximumscores per aspect. Deze worden aan de leerlingen bekend gemaakt. Kan het ook in havo 4? Ja, maar niet in deze vorm (de havo-leerlingen maken zich er te snel vanaf). Hoe zit het met de belasting van de docent, bijvoorbeeld wat het nakijken betreft? Daar moet je goed op letten en bijvoorbeeld niet elk verslag beoordelen.
De aanwezigen hebben dit als een goed gepresenteerde, informatieve werkgroep ervaren met veel interactie met de zaal.

De grafische rekenmachine, een kennismakingspracticum

Jo Smits en Alfred Plante, twee docenten van het Geert Grootecollege te Deventer, presenteerden in deze werkgroep hun ervaringen met het gebruik van de grafische rekenmachine bij een stukje leerstof uit Wiskunde Lijn 4 vwo. Eerst moesten de deelnemers via een paar opdrachten de TI-81 leren kennen. En dan ging het om uitvergroten (bij het nagaan of een vergelijking oplossingen heeft en zo ja, wat die bij benadering zijn), het kiezen van de schaalverdeling op de assen en het werken met de benadering $g(x) = (f(x + 0.001) - f(x - 0.001))/0.002$ voor de afgeleide $f'(x)$. Daarna volgden opdrachten waarin de deelnemers (en dus ook de leerlingen) een voorschrift $v(x)$ voor $g(x)$ moesten gokken op basis van de grafiek van $g(x)$ en door het quotiënt $g(x)/v(x)$ te laten tekenen moesten nagaan of de gok goed was. Uit de inleiding bleek dat het hier om een verkennende fase gaat die vooraf gaat aan algoritmisch bepalen van de afgeleide.
Door de Rijksuniversiteit Groningen is een klein onderzoeksproject aan dit 'experiment' gekoppeld. Daaruit blijkt dat de goede leerlingen erop vooruitgaan, maar dat de zwakke leerlingen er veel meer op vooruit gaan. (Wat hier precies met elkaar vergeleken is en hoe hard deze conclusie is, werd niet zo duidelijk.) Als vermoedelijke verklaring werd naar voren gebracht dat zwakke leerlingen meer visueel zijn ingesteld en zich door de grafische ondersteuning zekerder en meer gemotiveerd voelen. (Waarom zwakke leerlingen meer visueel zijn ingesteld, werd evenmin duidelijk.) Aan het eind kwam er wat discussie op gang. Opgemerkt werd onder andere dat heel vroeger bij differentiëren de nadruk op het algoritmische lag, dat er vervolgens veel aandacht werd gegeven aan rekenen en tekenen (wat veel tijd kostte) en dat dat nu vervangen wordt door het werken met de grafische rekenmachine. Dat kost misschien wel minder tijd, maar is op een TI-81 toch nog behoorlijk bewerkelijk. Een goede leerling is, zo werd vermoed, al gauw geneigd in de hiervoor genoemde functie g 0.001 te vervangen door h en met de limiet te werken. Wat overigens niets afdoet aan het feit dat in de klas aan de betekenis van de afgeleide veel aandacht besteed moet worden.

Ægle Hoekstra

De slotlezing

De studiedag werd afgesloten door een zeer onderhoudende lezing door Ægle Hoekstra van het Lorentz-Casimir-Lyceum uit Eindhoven. Hij presenteerde tien wiskundige puzzels, waarbij de zaal steeds de gelegenheid kreeg kort over de oplossing na te denken. Dan gaf hij de oplossing. Voor degenen die het beste scoorden was er een Brabants ‘slokje’. En passant gaf hij zijn mening over de waarde van dergelijke puzzels voor leerlingen (bijvoorbeeld dat dat goed is voor de motivatie, dat leerlingen het gewoon leuk vinden), eenvoudige criteria voor de opgaven (er moet iets onverwachts inzitten, zoals dat bijvoorbeeld ook met humor het geval is) en hoe het komt dat er bij hem op school zoveel leerlingen aan Kangoeroe-wedstrijden, Vierkantkampen, wiskunde-olympiades en A-lympiades meedoen (hij organiseert puzzelmiddagen, de school geeft een subsidie in de kosten van een en ander, hij organiseert een gezellige wiskundeclub, hij houdt een wekelijkse ladderwedstrijd, de resultaten bij Kangoeroe en olympiades laat hij meetellen in het rapportcijfer, de school geeft een schoolprijs bij deze wedstrijden). Hierbij benadrukte hij dat het (tot dit jaar) om een vwo-school gaat. Hoewel Hoekstra deed of het om de tien puzzels ging, vormden zijn opmerkingen tussendoor de essentie van de lezing. Tot slot daaruit nog een citaat. ‘Bij leerlingen moet je benadrukken dat er bij dit soort activiteiten geen verliezers zijn, dat meedoen het belangrijkste is.’ Hoewel de lezing als ‘luchtig’ overkwam, wat na een inspannende dag eerder positief dan negatief is, zei organisator Aad Goddijn na afloop desgevraagd: ‘voor mij was dit misschien wel het belangrijkste onderdeel van de studiedag’.

40 jaar geleden

1033 Van een oneindige meetkundige reeks is de eerste term 1 en de reden 2. Men interpoleert tussen elke twee opvolgende termen van deze reeks een positieve term, zodat een nieuwe meetkundige reeks ontstaat. Het produkt van de eerste n termen der oorspronkelijke reeks is P, dat van de eerste n termen der nieuwe reeks is Q.

Voor welke waarden van n is $\frac{P}{Q} \geq 8$?

1034 Van een reeks is de algemene term $t_n = n.{}^{10}log^n 9$. Voor welke waarden van n is $t_{n+1} > t_n$? Wat is het rangnummer van de grootste term van de reeks?

1035 In ΔABC is $\angle C = 90°$; uit het midden D van BC trekt men $DE \perp AB$. Als CF de deellijn is van $\angle C$, bewijs dan, dat $\angle ECF > \frac{1}{2}\angle B$ is.

1036 Men verbindt een punt P met de hoekpunten van ΔABC; de loodlijn in P op PA snijdt de zijlijn BC in D, die in P op PB snijdt CA in E en die in P op PC snijdt AB in F. Bewijs, dat de punten D, E en F collineair zijn.

1037 Gegeven zijn drie punten A, B en C (niet op één rechte gelegen) en twee elkaar snijdende vlakken V en W. Beschrijf de constructie van een punt P dat even ver van V als van W verwijderd is en zo gelegen is, dat PA gelijke hoeken maakt met AB en AC en dat $\angle APB$ recht is. Wat is het grootste aantal oplossingen dat men kan vinden, als dit aantal eindig is?

Vraagstukken uit:
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 44 (1956-1957)

Werkblad

Stage Basisschool

1 **a** Schrijf de schooltijden op.
maandag ....
dinsdag ....
woensdag ....
donderdag ....
vrijdag ....

b Hoeveel uur zitten de kinderen per week op school?

2 **a** Schrijf op hoeveel kinderen er in jouw groep zitten.
jongens ....
meisjes ....
b Je wilt in groepjes werken en moet dus de kinderen verdelen in kleine groepjes. De groepjes moeten even groot zijn en niet groter dan 6 kinderen. De meisjes en de jongens moeten eerlijk verdeeld worden over de groepjes. Maak een groepsindeling.

3 Je wilt de kinderen in jouw groep trakteren op poffertjes.
Wat kost deze traktatie jou?

4 Na een steekproef bij verschillende scholen is bekend geworden dat 15% van de kinderen uit een groep tussen de middag op school overblijft.
Is dat in jouw groep ook zo? (laat een berekening zien)

5 Je wilt met elk kind een klein gesprekje hebben. Je hebt elke ochtend en elke middag dat de kinderen op school zijn tijd om één gesprekje te voeren.
Hoeveel weken duurt het voordat je elk kind gesproken hebt?

6 Je gaat met de kinderen van jouw groep een dagje uit naar de dierentuin.
Je kan kiezen tussen de twee dierentuinen A en B.

Entree A:	volwassene	*f* 15,00
	kind t/m 14 jaar	*f* 10,00
	kind t/m 6 jaar	*f* 7,50
Entree B:	volwassene	*f* 17,50
	kind t/m 14 jaar	*f* 9,00
	kind t/m 6 jaar	*f* 6,50

a Er gaan 4 volwassenen mee als begeleiders.
Naar welke dierentuin ga je? (leg uit waarom.)
b De kinderen moeten voor dit uitstapje geld van thuis meenemen. Ze betalen ook de helft voor de begeleiders.
Hoeveel moet elk kind betalen? (berekening laten zien.)

Zie ook het artikel op bladzijde 164.

Werkblad

Stage Reisbureau

Bij deze vragen horen tabellen. Bekijk deze goed.

1 Wat betekenen de volgende afkortingen?
LG ....
HP ....
PP ....

2 Hoelang duurt de reis in totaal van Schiphol naar Kos\stad?

3 **a** Met 3 personen naar Bristol op 4 augustus voor 15 dagen kost per persoon ƒ.........
b Dezelfde reis, maar dan voor 22 dagen kost per persoon ƒ.........
c Hoe groot is het verschil? ƒ.........
d Kan je dit verschil verklaren?

4 Een echtpaar wil in mei, op 9 of 16 mei, 8 dagen naar Kos.
Welke datum beveel jij ze aan en waarom?

5 Bereken de reissom per persoon voor een reis naar Hotel Palm Beach voor 2 personen op 23 juni voor 15 dagen.

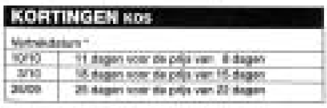
6 Een gezin: vader, moeder, jongen van 13 jaar, meisje van 6 jaar gaat op 7 juli voor 15 dagen naar Albatros. Ze sluiten ook een annuleringsverzekering af; deze bedraagt 4% van de reissom. Bereken hun totale reissom.


KORTINGEN per persoon HOTEL PALM BEACH

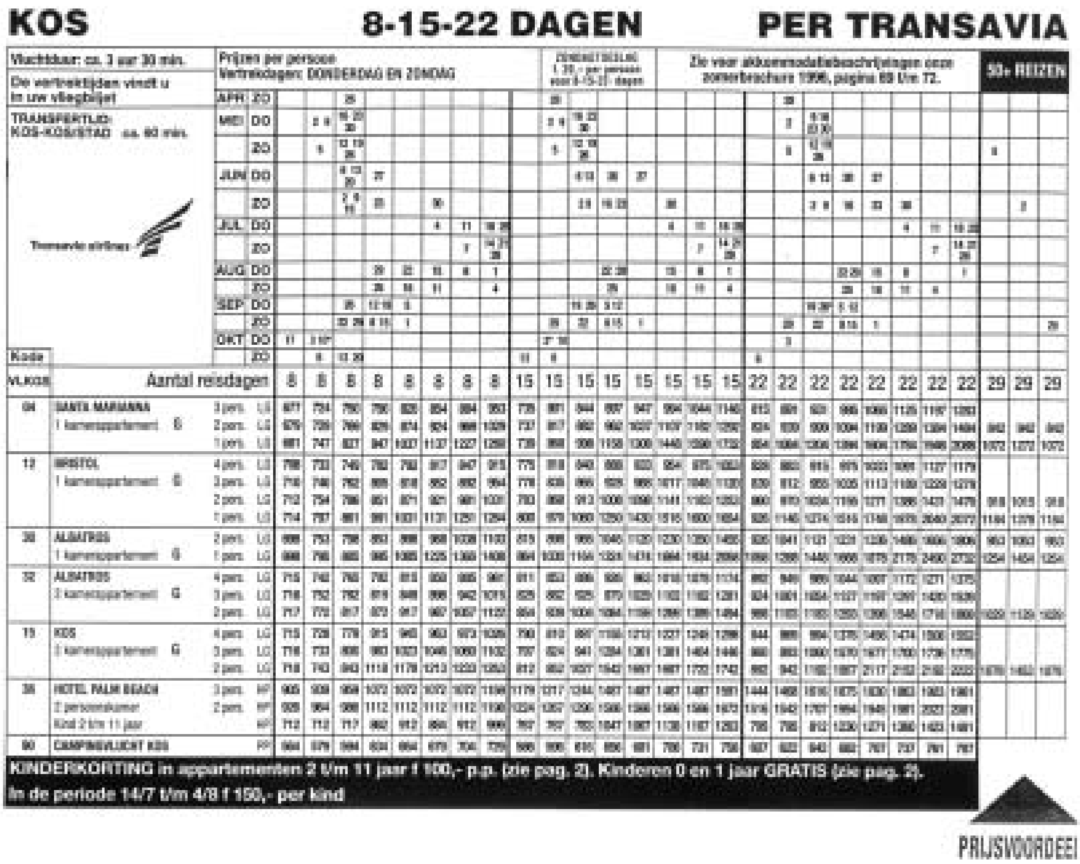
Aantal dagen	Korting	Vertrekdata
8	40	02/05
8	15	05/07
8	95	23/06, 27/06
11	140	20/06
12	155	18/06
12	120	23/06
15	185	15/05, 20/09
15	150	23/06
15	100	09/05, 16/05, 20/09
15	88	23/09
15	155	20/06
15	115	12/09
22	128	09/05, 13/05, 16/05
22	109	19/05
22	88	23/09
22	40	26/09
22	245	16/06
22	100	20/06
22	109	23/06
22	105	12/09
22	158	15/09
22	120	26/09


MEERPRIJZEN per persoon HOTEL PALM BEACH

Aantal dagen	Korting	Vertrekdata
8	80	22/08
11	100	18/08
12	80	22/08
15	135	18/08
15	75	22/08
22	80	04/08
22	80	01/08


KORTINGEN KOS

Vertrekdatum *	
10/10	11 dagen voor de prijs van 8 dagen
3/10	18 dagen voor de prijs van 15 dagen
26/09	26 dagen voor de prijs van 22 dagen



Recreatie

Opgave 675

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A
2563 EB Den Haag

In de vorige jaargang stond steeds een column van ons bestuurslid *Sjoerd Schaafsma* te Son over het getal 70. Prachtige eigenschappen ontdekte Sjoerd over dit getal. Ik wist werkelijk niet dat 70 zoveel in zich verborg.

Voor het getal 72 (de lopende jaargang van Euclides) bestaan er veel minder eigenschappen.
De leukste vind ik:

$72^5 = 19^5 + 43^5 + 46^5 + 47^5 + 67^5$

Dit is de kleinste vijfdemacht die te schrijven is als de som van 5 vijfdemachten.

Voor het getal 71 geldt onder andere:

$71^2 = 7! + 1$

$71^3 = 357911$, de oneven getallen op volgorde.

Verder heeft 71 nog een eigenschap, die alleen nog de getallen 83 en 86 bezitten.
Bestudeert u maar eens de volgende vermenigvuldigingen:

$$\begin{array}{r} 8 \\ 86 \\ \hline 688 \end{array} \times$$

$$\begin{array}{r} 4109589041096 \\ 83 \\ \hline 341095890410968 \end{array} \times$$

$$\begin{array}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 71 \\ \hline 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots7 \end{array} \times$$

Dus: we zoeken een getal, dat vermenigvuldigd met 71 datzelfde getal oplevert voorafgegaan door een 1 en eindigend met een 7. (Het aantal puntjes zegt niets over de lengte van dat getal!)

Een juiste inzending, binnen één maand ingestuurd, levert 5 punten op voor de doorlopende ladderwedstrijd. Hiermee kunt u ALTIJD beginnen, bijvoorbeeld nu.

Oplossing 672

Recreatie

Wat is terugtellen toch leuk ! Velen reageerden op het verzoek om *Hessel Pot* (15 punten), Woerden te helpen bij de voortzetting van 3, 2, 1, …
In het volgende overzicht vermeld ik de leukste resultaten van lezers en van Hessel zelf. Namens Hessel heel veel dank voor uw reacties en nieuwe vondsten.

3, 2, 1, 0	kardinaalgetallen
3, 2, 1, 0, 89	TV zenders Haagse kabelnet
3, 2, 1, 0, 23	etmaal - uren
3, 2, 1, 0, -1	lift
3, 2, 1, 0, één rood	die 1 is rood geschreven !
3, 2, 1, 0, één tekort	giro-afschrift
3, 2, 1, 0, 00	negatieffilms: 2 1 0 00 X XXA
3, 2, 1, 0, /	ASCII-codes: 1 0 / . - , +
III, II, I	ordinaalgetallen
3, 2, 1,	eenendertig, dertig
3, 2, 1, 100	jaartallen: 1902 1901 1900
3, 2, 1, 52	weeknummers in een agenda
3, 2, 1, 12	wijzerplaat
3, 2, 1, 6	brievenbuslichting: 1= zondag
3, 2, 1, 1	1 ná Chr., 1 vóór Chr.
3, 2, 1, blank	dominospel; schaatsen: 34 blank
3, 2, 1, af	start bij hardlopen
3, 2, 1, zero	lancering
3, 2, 1, O	Engelse jaren: nineteen-o-six
3, 2, 1, -	centennotatie: ƒ 25,–
3, 2, 1, F	negatieffilms: 2 1 F K S
3, 2, 1, parterre	lift
3, 2, 1, koning/heer	kaartspel
3, 2, 1, voor	sport: voorronde, 1e ronde
3, 2, 1, R	versnelling in auto

De Stichting IVIO startte in 1943 de cursus Algemene Ontwikkeling (de huidige AO-boekjes).
De start was als volgt:

No. 0	- 17 september 1943	- Spitsbergen
No. 00	- 24 september 1943	- De taal van Friesland
No. 1	- 15 october 1943	- De breker der zonnelijnen
No. 2	- 22 october 1943	- Trekvogels

Met 62 punten is deze maand winnaar van een boekenbon van ƒ 25,–:

Harm Bakker
Zuiderbuuren 32
9363 HK Marum

Hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

Euclides verschijnt dit schooljaar op 15 februari, 15 maart, 30 april en 15 juni.

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Data melden bij de hoofdredacteur uiterlijk twee maanden voor de verschijningsdatum. Dit kan ook via e-mail:

cph@xs4all.nl

Cursus (Lénárt-) Bolmeetkunde
di. 28 januari /di. 18 maart 1997
APS: 030 - 2856722
Zie ook recensie blz. 170

Nationale Wiskunde Dagen
vr. 31 januari/za. 1 februari 1997
Fi: 030 - 2611611
Zie aankondiging blz. 19 (72-1)

School TV: Wat en waar is wiskunde?
ma. 17 febr. 1997: 11.00, Ned 2
ma. 10 maart 1997: 11.00, Ned 2
ma. 17 maart 1997: 11.00, Ned 2
ma. 24 maart 1997: 11.00, Ned 2
TELEAC/NOT: 035 - 6723611
Zie aankondiging blz. 174

Lezingenserie Hogeschool van Utrecht
ma 3 maart 1997: 20.00 u
HvU: 030 - 2547230
Prof.dr. Ferdinand Verhulst: Denken en rekenen over atmosferen en oceanen.

Lezing + discussie
do. 6 maart 1997: 19.30 u
VU: 020 - 4445670
Margaret Wertheim: Pythagoras had een broek aan: mystiek, mathematiek en de uitsluiting van meiden.

Regionale bijeenkomsten NVvW
di. 11 maart 1997 Zwolle
do. 13 maart 1997 Leiden
di. 18 maart 1997 Eindhoven
NVvW: 0411 - 673468
Zie aankondiging blz. 167

Gebruikersdag Netwerk
vr. 14 maart 1997 Nieuwegein
WN: 050-5226311

Kangoeroe-wedstrijd
vr. 21 maart 1997
TUE: 040 - 2472738
Aankondiging volgt later

Eerste ronde Wiskunde Olympiade
vr. 11 april 1997
CITO: 026 - 3521294
Aankondiging volgt later

APS-conferentie Grafische rekenmachine
wo. 16 april 1996
APS: 030 - 2856722
Zie advertentie 72-2

APS-conferentie Schoolonderzoek vbo/mavo
wo. 23 april 1996
APS: 030 - 2856722
Zie advertentie 72-2

Lezingenserie Hogeschool van Utrecht
wo. 18 juni 1997: 20.00
HvU: 030 - 2547230
dr. Marjolijn Witte: Het geslacht van de wiskundeknobbel.

Internet-sites voor wiskundedocenten:

Digitale school:
digischool.bart.nl/wi/wilok.htm

Pythagoras:
www.wins.uva.nl/misc/pythagoras

Vierkant:
www.cs.vu.nl/~vierkant

Freudenthal instituut:
www.fi.ruu.nl

Homepage Gerard Koolstra:
www.xs4all.nl/~gerardk

SLO-lijn / School van Morgen:
192.87.215.10

Texas Instruments:
www.TI.com/calc

Computer Algebra Nederland:
www.CAN.nl

Docenten met e-mail kunnen een berichtje sturen aan Jos Andriessen, die mogelijkheden onderzoekt om tot een e-mail netwerk te komen:

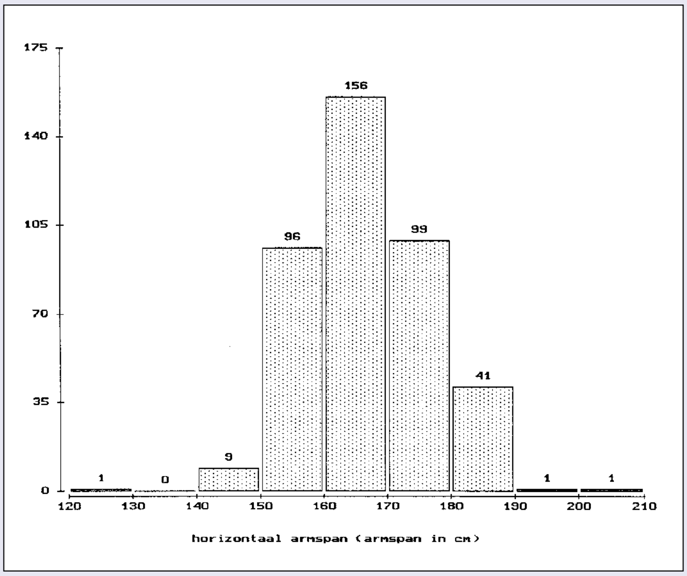
Andriess@worldonline.nl

Nieuw!
Nu ook met leerlingenboek

VU-Stat

Ook ideaal voor het examen vbo/mavo

VU-Statistiek Basisvorming **is methode-onafhankelijke software. Met** ***VU-Stat*** **kunnen uw leerlingen onder andere eenvoudige tabellen, boxplots, staaf- en cirkeldiagrammen weergeven en snel het gemiddelde, de modus en de mediaan van variabelen berekenen. Een ideaal pakket om vbo-mavoleerlingen voor te bereiden op vaardigheid 5 van het examenprogramma, het functioneel gebruik van de computer. In het schoolonderzoek vbo-mavo moet minstens één opgave of opdracht daarop betrekking hebben.**



VU-Stat Basisvorming
ISBN 90 01 09015 X
f 350,00
VU-Stat Basisvorming bestaat uit een 3,5 inch diskette en een handleiding

(incl. practicum)
VU-Stat Leerlinglicentie
ISBN 90 01 09019 2
3,5 inch *f* 175,00 per school
Alleen verkrijgbaar in combinatie met

VU-Stat Basisvorming
Nieuw
VU-Stat Leerlingenboek
ISBN 90 01 09017 6
gen 48p *f* 19,50
verschijnt voorjaar 1997

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen

Wolters Noordhoff

420/6447 -96