Orgaan van de

Nederlandse Vereniging

van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 71

1995-1996 januari

4

Adolphe Quetelet,
Belgisch statisticus

Correctievoorschriften
vbo/mavo-examen

Regionale bijeenkomsten

Wiskunde in de
Derde Wereld

Computer Algebra in
het voortgezet onderwijs

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per cursusjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam.
Voor meer informatie: zie ‘Richtlijnen voor auteurs’ op bladzijde 130. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 2 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-4539985.
Secretaris
R.J. Bloem, Kornoelje 37, 3831 WJ Leusden.
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks, De Schalm 19, 8251 LB Dronten, tel. 0321-312543.
Gironummer voor contributie: 143917 t.n.v. Ned. Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 65,00 per verenigingsjaar; voor studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de VVWL *f* 47,50; contributie zonder Euclides *f* 40,00.
Opgave van nieuwe leden aan de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 71,00. Een collectief abonnement (6 exemplaren of meer) kost per abonnement *f* 48,00. Opgave bij de ledenadministratie (zie boven).
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgiro hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer.
Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar.
Annuleringen dienen vóór 1 juli te worden doorgegeven aan de ledenadministratie.
Losse nummers *f* 12,50.

Inhoud

Het vijfhoeksgetal 70 (2)

Ik kom nog even terug op het vijfhoeksgetal uit het vorige nummer. Weer een andere manier is de volgende. Indien je de opeenvolgende drie- en vierhoeksgetallen kent kun je daar alle andere soorten veelhoeksgetallen uit afleiden.
Neem bijvoorbeeld van beide het zevende getal. Dat zijn 28 en 49. Hun verschil is 21, het zesde driehoeksgetal. Dit verschil is tussen alle zevende veelhoeksgetallen constant. Dus het zevende vijfhoeksgetal is 49 + 21 = 70 en het zeshoeksgetal is 70 + 21 = 91 enz.
De algemene formule voor het verkrijgen van vijfhoeksgetallen luidt $\frac{1}{2}N \times (3N - 1)$. Met de vijfhoeksgetallen is nog iets aparts aan de hand. Indien we de getallen die de formule $\frac{1}{2}N \times (3N \pm 1)$ voortbrengt ‘algemene’ vijfhoeksgetallen noemen is er een bijzondere formule met de som van alle delers van een getal N op te schrijven.
Eerst die algemene vijfhoeksgetallen. Dit zijn 1; 2; 5; 7; 12; 15; 22; 26; 35; 40; 51; 57; 70..... Indien we de som van alle delers van N nu $S(N)$ noemen dan zegt Euler’s formule:
$S(N)-S(N-1)-S(N-2)+S(N-5)+S(N-7)-S(N-12)-\ldots = 0$,
waarbij $S(0) = N$ indien aanwezig.
De volgorde der tekens is steeds in paren + of − en de getallen zijn de algemene vijfhoeksgetallen. Het is een heel werk om dit na te rekenen, maar het klopt wel.

Sjoerd Schaafsma

Literatuur

A.B. Beiler
Recreations in the theory of numbers
uitg. Dover Publications

‘De met cijfers bedekte negentiende eeuw’

deel 2: Adolphe Quetelet, bepleiter van de statistische middelmaat

*Ida H. Stamhuis**

Een kwart eeuw na de dood van Kluit begon een Belgische hoogleraar over statistiek te publiceren. Deze Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796-1874) zou een stempel op de negentiende-eeuwse statistiek drukken. Was Kluit een alfa-wetenschapper, Quetelet was een wiskundige en dat verschil in achtergrond zou een rol spelen in hun uiteenlopende ideeën over de inhoud en de betekenis van statistiek.

Bezoek aan Parijs

Quetelet hield zich aanvankelijk, evenals Kluit, helemaal niet met statistiek bezig. Hij was gepromoveerd in de analytische meetkunde en begon zich daarna voor astronomie te interesseren. Hij wilde een observatorium in Brussel oprichten om astronomische waarnemingen te kunnen doen en kreeg in 1823 van de Nederlandse regering toestemming om in verband daarmeee een studiereis naar Parijs te maken. De *Nederlandse* regering moest daarvoor toen toestemming geven, omdat België van 1813 tot 1830 bij ons land hoorde.
In Parijs kwam Quetelet in aanraking met een heel nieuwe wereld en deze Parijse reis heeft een grote invloed op hem uitgeoefend. De beroemde wiskundigen Laplace, Poisson en Fourier zaten daar. Dezen hielden zich bezig met waarschijnlijkheidsrekening die hoofdzakelijk als foutentheorie in de astronomie werd gebruikt.
Maar er waren daar toch ook al ontwikkelingen om de waarschijnlijkheidsrekening voor geheel andere problemen te gebruiken.
Men had gemerkt dat in allerlei grote aantallen gegevens regelmatigheden kunnen worden ontdekt, die in verband kunnen worden gebracht met begrippen uit de waarschijnlijkheidsrekening. Bijvoorbeeld worden er gemiddeld iets meer jongens dan meisjes geboren, zodat gezegd kan worden dat de kans op de geboorte van een jongen iets groter is dan een half en van een meisje iets kleiner dan een half. En verder is het op grond van sterfteaantallen mogelijk een sterftewet samen te stellen. Hieruit kun je voor elke leeftijd een sterfte-

Foto: E. Dulière; Museum Kon. Sterrenwacht van België

Portret van Adolphe Quetelet, door Jacques de Lalaing

kans aflezen en de gemiddelde levensduur bepalen. Ook probeerde men er op grond van feitenmateriaal achter te komen, in welk geval iemand die van moord wordt beschuldigd een grotere kans had om vrijgesproken te worden: wanneer diens zaak behandeld werd door een rechtbank zònder of door een rechtbank mèt jury.

'Neiging tot misdaad'

Toen Quetelet van deze reis terugkwam, is hij zich met kansrekening en de mogelijke bredere toepassingen gaan bezighouden. Hij gaf er een college over voor een breed publiek, waaruit een boekje voortkwam, dat (vertaald) getiteld was: *Bevattelijk onderrigt in de kansrekening of de Leer der Waarschijnlijkheden.* Hij verzamelde gegevens die met het zedelijk peil van een land in verband kunnen worden gebracht: aantallen vondelingen en verwaarloosde kinderen, gegevens over rijkswerkinrichtingen, rijksgevangenissen, feiten afkomstig van rechtbanken en armenzorg. Quetelet was namelijk erg geïnteresseerd in gegevens over de 'mate van criminaliteit' van een bevolking. Deze belangstelling hing samen met zijn visie dat de 'morele kwaliteit' van een samenleving omgekeerd evenredig is met het aantal misdaden dat wordt gepleegd. Dat betekent dat men, als men inzicht in het morele gehalte van een samenleving wil verkrijgen, zich in principe tot de bestudering van de criminaliteit kan beperken. En daarover waren ten tijde van Quetelet statistische gegevens te verkrijgen. Quetelet liet zien dat het aantal moorden dat in een bepaald land wordt geregistreerd, elk jaar ongeveer gelijk is, en dat daarvan zelfs het aantal moorden dat op een bepaalde wijze wordt gepleegd, bijvoorbeeld door wurging, elk jaar vrijwel constant is. Hij interpreteerde dit met de veronderstelling dat binnen een groep mensen in een bepaald land een neiging tot misdaad, een ‘penchant au crime’, bestaat, die afhankelijk is van de leeftijd en het geslacht en die voor elke leeftijd kan worden bepaald door van een leeftijdsgroep het aantal personen dat een misdaad heeft gepleegd, te delen door het totaal aantal mensen van die groep. Dit levert dan een getal op dat hij als de ‘neiging tot misdaad’ van een willekeurige persoon van die leeftijd beschouwde. U kunt zich, denk ik, niet voorstellen, welke grote indruk het bestaan van een dergelijke wetmatigheid op de mensen uit die tijd heeft gemaakt. Hoe kan een verschijnsel als moord een wetmatigheid vertonen, namelijk dat er elk jaar vrijwel evenveel gepleegd worden. Moordenaars voeren toch geen overleg met elkaar over het te plegen aantal? Wat men nog veel onbegrijpelijker vond is, dat Quetelet ook liet zien, dat er elk jaar evenveel zelfmoorden worden gepleegd. Als toch iets door de vrije wil van de mens bepaald wordt, dan is dat toch wel de beslissing of men de hand aan zichzelf zal slaan, of niet.

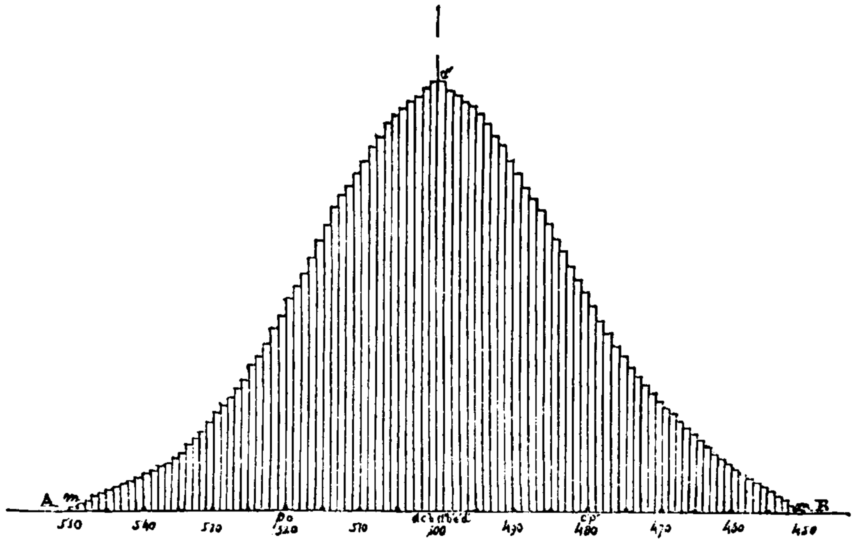
Internationale statistische congressen

Quetelet verzamelde voor zijn studies statistische gegevens uit een groot aantal landen en merkte dat deze gegevens meestal niet of nauwelijks vergelijkbaar waren. Ze waren volgens verschillende criteria en categorieën verzameld en ingedeeld. Dit was voor hem de reden om het voortouw te nemen bij het organiseren van internationale statistische congressen, waarvan de eerste onder zijn voorzitterschap werd gehouden te Brussel in 1854. Er zijn acht van deze congressen geweest waarvan ook één in Den Haag, in 1869. (Het congres dat in 1860 in Londen werd gehouden zal in het volgende artikel van deze serie, gewijd aan Florence Nightingale, ter sprake komen.) Deze internationale statistische congressen waren groots opgezet. Vele landen stuurden hun vertegenwoordigers, zowel uit de ambtelijke als uit de wetenschappelijke wereld. Deze internationale congressen trachtten eenheid te brengen in het verzamelen van gegevens in en over de diverse landen met het doel landen met elkaar te vergelijken, wat een oud ideaal uit de Duitse traditie was. Mede door Quetelets betrokkenheid bij deze congressen stond hij in contact met statistici die werkten in navolging van deze traditie, waarop, zoals we in het vorige artikel hebben gezien, aan het begin van de negentiende eeuw ook Kluit zijn statistiekcolleges had gebaseerd. Quetelet probeerde te bereiken, dat deze mensen hun beschouwingen meer op betrouwbaar getallenmateriaal en zo mogelijk op waarschijnlijkheidsrekening zouden gaan baseren, en niet op “vage

GROUPES DE	RANG des GROUPES.	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ du tirage de chaque GROUPE. *Table A.*	ÉCHELLE de précision. — SOMMES des probabilités à partir du groupe le plus probable. *Table B.*	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ relative du tir. de chaque GROUPE. *Table C.*
499 boules blanches et 500 noires. .	1	0.025225	0.025225	1.000000
498 id. 501 id. . .	2	0.025124	0.050349	0.996008
497 id. 502 id. . .	3	0.024924	0.075273	0.988072
496 id. 503 id. . .	4	0.024627	0.099900	0.976285
495 id. 504 id. . .	5	0.024236	0.124136	0.960789
494 id. 505 id. . .	6	0.023756	0.147892	0.941764
493 id. 506 id. . .	7	0.023193	0.171085	0.919429
492 id. 507 id. . .	8	9.022552	0.193637	0.894040
491 id. 508 id. . .	9	0.021842	0.215479	0.863882
490 id. 509 id. . .	10	0.021069	0.236548	0.833261
489 id. 510 id. . .	11	0.020243	0.256791	0.802506
488 id. 511 id. . .	12	0.019572	0.276163	0.767956
487 id. 512 id. . .	13	0.018464	0.294627	0.731958
486 id. 513 id. . .	14	0.017528	0.312155	0.694860
485 id. 514 id. . .	15	0.016573	0.328728	0.657008
484 id. 515 id. . .	16	0.015608	0.344335	0.618736
483 id. 516 id. . .	17	0.014640	0.358975	0.580364
482 id. 517 id. . .	18	0.013677	0.372652	0.542197
481 id. 518 id. . .	19	0.012726	0.385378	0.504516
480 id. 519 id. . .	20	0.011794	0.397172	0.467576
479 id. 520 id. . .	21	0.010887	0.408060	0.431609
478 id. 521 id. . .	22	0.010008	0.418070	0.396815
477 id. 522 id. . .	23	0.009166	0.427236	0.363366
476 id. 523 id. . .	24	0.008360	0.433595	0.331407

Deze tabel is een deel van Quetelets tabel, waarmee hij de normale verdeling benaderde met behulp van een symmetrische binomiale verdeling.
Uit: A. Quetelet, Lettres à S.A.R. le Duc Régnant de Saxe-Cobourg et Gotha, sur la théorie des probabilités, appliquée aux sciences morales et politiques (Brussel, 1846) 375.

hypothesen en systemen zonder fundament". Zo heeft hij getracht elementen uit de waarschijnlijkheidsrekening in de statistiek te integreren met het doel daarvan een betrouwbare wetenschap te maken.



Deze grafiek geeft Quetelets benadering van de normale verdeling. Hij gebruikte daarvoor onder meer de gegevens van de voorafgaande tabel.
Uit: A. Quetelet, Lettres à S.A.R. le Duc Régnant de Saxe-Cobourg et Gotha, sur la théorie des probabilités, appliquée aux sciences morales et politiques (Brussel, 1846) 396.

De normale verdeling

Quetelet noemde de foutenwet, die pas later de normale verdeling zou worden genoemd, ook wel de *wet van de toevallige oorzaken*. De waarde van een grootheid werd volgens hem bepaald door *constante* en *toevallige oorzaken*. De toevallige oorzaken die op een grootheid werken, hadden tot gevolg dat de waarden van deze grootheid waren onderworpen aan de foutenwet. De invloed van de toevallige oorzaken kon worden opgeheven door het bepalen van een groot aantal mogelijke waarden van die grootheid en deze waarden te middelen. Met de constante oorzaken was het anders gesteld, deze waren verantwoordelijk voor een vaste bijdrage aan de waarde van een grootheid. Ze konden alleen bestudeerd worden als de invloed van toevallige oorzaken was geminimaliseerd. Constante oorzaken waren bijvoorbeeld het geslacht of de leeftijd van een persoon. Verder onderscheidde Quetelet nog de *variabele oorzaken*, die met name voor *periodieke variatie* zorgden.

Het bleek bijvoorbeeld dat het sterftecijfer aan periodieke variatie onderhevig was; deze was elk jaar het hoogst in februari en maart en het laagst in juni tot augustus.
In 1835 verscheen Quetelets belangrijkste werk *Sur l'homme et le développement de ses facultés. – Essai de physique sociale.* Hierin presenteerde hij vele statistische gegevens over zowel fysieke als morele kwaliteiten van de mens en liet zien dat veel van deze gegevens rond hun gemiddelde waren verdeeld volgens de foutenwet uit de astronomie, ofwel de normale verdeling. Hij was de eerste die deze foutenwet gebruikte voor de variabiliteit in de natuur, waardoor de wet een veel bredere toepassing en betekenis kreeg dan alleen de kansverdeling van meetfouten, waarvoor hij tot dan toe in de sterrenkunde werd gebruikt. Ook de natuurlijke variabiliteit bleek te zijn onderworpen aan deze kansverdeling. Quetelet dacht dat alle in de natuur optredende waarden van een of andere grootheid de curve van de normale verdeling volgden. Wanneer een verzameling gegevens niet volgens deze curve was verdeeld, hoorden ze niet bij elkaar en waren het geen waarden van dezelfde grootheid. En andersom, wanneer gegevens van een aantal individuen waren verdeeld volgens de normale curve, dan waren die gegevens homogeen. De betreffende individuen konden dan als één groep worden beschouwd.

De gemiddelde mens

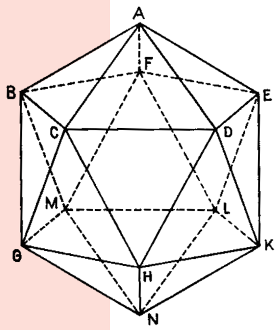
Quetelet had de beschikking over meetresultaten van de borstomvang van een aantal Schotse soldaten. Deze grootheid was volgens Quetelet gemodelleerd volgens de ideale borstomvang van de Schotse soldaat, die de waarde van het gemiddelde van de gemeten borstomvangen had. Dit in analogie met de astronomie waar men het gemiddelde beschouwde als de beste benadering van de werkelijke waarde van de gemeten grootheid. Voor Quetelet bestond er dus ook voor de borstomvang van een Schotse soldaat zoiets als een werkelijke waarde. Hij definieerde de *gemiddelde mens* ofwel *l'homme moyen* als de mens waarbij alle te onderscheiden grootheden een gemiddelde waarde hadden. Deze beschouwde hij als het ideaaltype mens. Omdat hij deze mens als het *zwaartepunt van de maatschappij* beschouwde, zou die het onderwerp van studie moeten zijn in een nieuwe wetenschap die hij *sociale fysica* noemde. Kennis van de gemiddelde mens zou inzicht in de mensheid en de maatschappij opleveren. Hoewel Quetelet niet ontkende dat ook aandacht moest

Korrel

Ruimtemeetkunde

Vroeger had je stereometrie, de meetkunde van de driedimensionale ruimte. Maar er was een vraagstukkencultus ontstaan, werd gezegd. Het vak stereometrie werd dood verklaard.
Het nieuwe programma van 1968 bevatte meetkunde met vectoren. Dat was handiger. Je kon alles gewoon uitrekenen.
Ook dit beviel niet. Je kon niet meer zien waar je mee bezig was.
In de nieuwe B-programma's voor vwo en havo kwam de ruimtemeetkunde terug. Weliswaar in een wat andere vorm, maar duidelijk erkend als ruimtemeetkunde. En in het programma W12-16 kwam kijkmeetkunde.
Iedereen blij, de echte meetkunde was terug.
Nu horen we, dat ruimtemeetkunde in vervolgopleidingen nauwelijks gevraagd wordt. Waarom willen we echte meetkunde? Het antwoord is: vanwege het redeneren en bewijzen.
Daarom moet er aan de meetkunde die nu in de programma's voorkomt, iets veranderen. Kijkmeetkunde bevat te weinig redeneren en (met name) bewijzen, planimetrie moet ook voorkomen. Ja, dat is vreemd: met stereometrie bezig zonder planimetrie te hebben gehad.
Geleidelijk wordt stereometrie een volwassen onderdeel van de wiskundeprogramma's, met een mooie opbouw vanaf de brugklas.
Vervolgopleidingen moeten eindelijk eens snappen waarom ruimtemeetkunde in de programma's hoort voor te komen.

M. van Hoorn



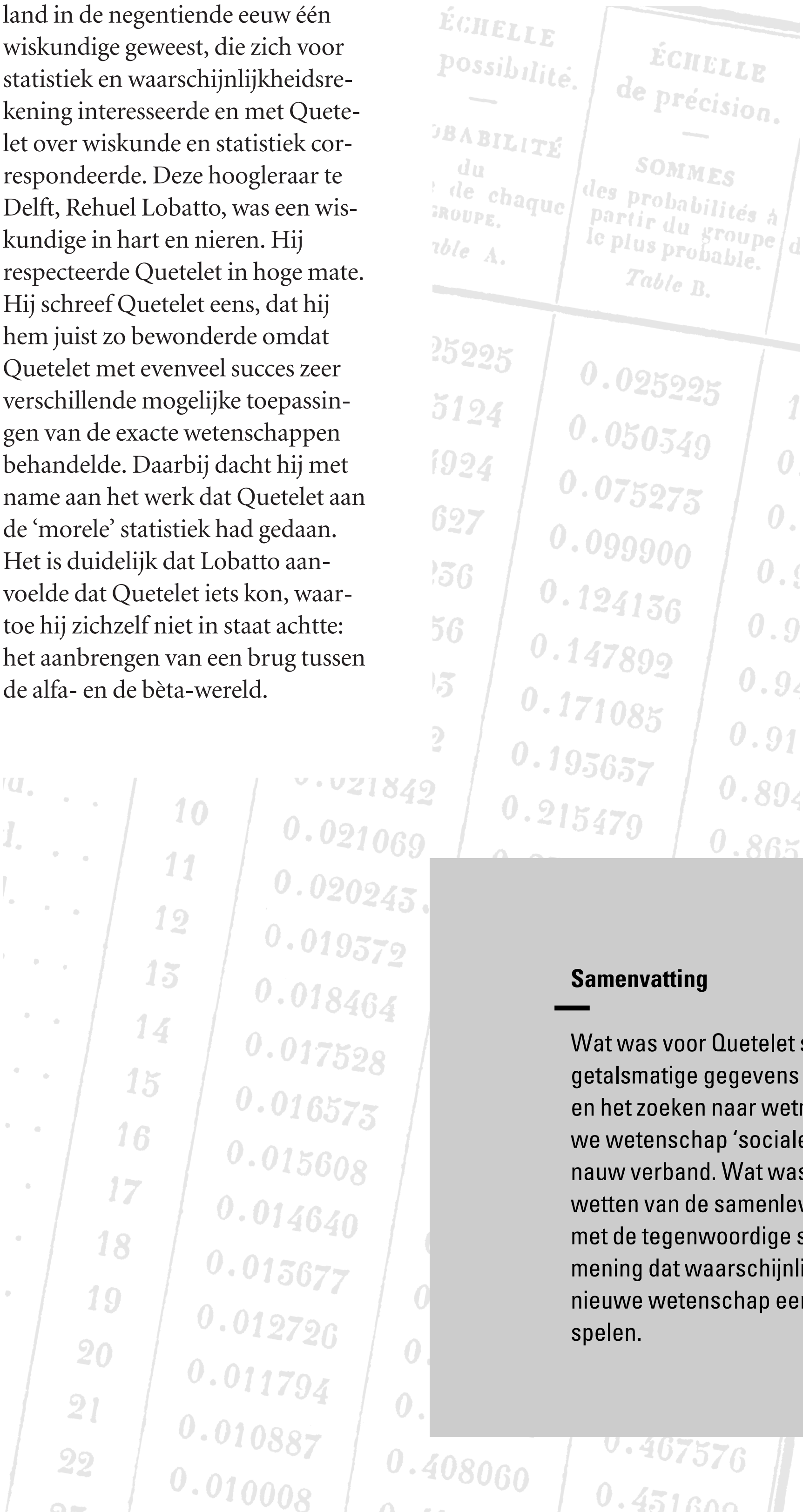
worden besteed aan hetgeen afwijkt van het gemiddelde, heeft hij dat niet zelf gedaan.
Om zijn idee van gemiddelde mens duidelijk te maken vergeleek hij deze wel eens met een beeld. De mensen die werkelijk bestaan beschouwde hij als kopieën van dit beeld. Deze kopieën vertonen natuurlijk afwijkingen van het origineel dat de ideale vorm bezit.
Door op deze manier te redeneren, zette hij het middelmatige van een mens op een voetstuk en bagatelliseerde hij het bijzondere. U kunt zich waarschijnlijk wel voorstellen, dat, ondanks de vele bewondering die Quetelet ten deel is gevallen, dit aspect van zijn opvattingen ook veel kritiek heeft ondervonden. Zo schreef de hoogleraar in de statistiek Anthony Beaujon in 1884 spottend het volgende over Quetelets gemiddelde mens: “die zich in eene beroemdheid verheugt welke menig werkelijk sterveling hem zou kunnen benijden, en wel juist omdat hij, zoo wij hem in vleesch en been konden ontmoeten, niets aan zich hebben zou, dat hem beroemd of berucht kon maken.” Beaujon vond dat Quetelet als statisticus buiten zijn boekje was gegaan door de gemiddelde mens als volmaakt te beschouwen.
De sociale fysica, die, zoals Quetelet zich dat voorstelde, de gemiddelde mens als studieobject zou hebben was in essentie een statistisch georiënteerde wetenschap, want het onderwerp van studie, de gemiddelde mens, was een statistisch bepaald begrip.

De twee werelden

Al heel lang is men er zich van bewust dat er twee werelden zijn, waartussen een kloof bestaat die bijkans onoverbrugbaar schijnt: de alfa- en de bèta-wereld. Het bijzondere van Quetelet was dat hij als bèta-wetenschapper zich interesseerde voor statistiek of ‘statenkunde’, wat toen, zoals we bij Kluit hebben gezien, nog een alfa-domein was. Op deze wijze wist hij een brug tussen beide werelden te slaan. In Nederland is dit voorbeeld echter niet nagevolgd. Zo is er in Nederland in de negentiende eeuw één wiskundige geweest, die zich voor statistiek en waarschijnlijkheidsrekening interesseerde en met Quetelet over wiskunde en statistiek correspondeerde. Deze hoogleraar te Delft, Rehuel Lobatto, was een wiskundige in hart en nieren. Hij respecteerde Quetelet in hoge mate. Hij schreef Quetelet eens, dat hij hem juist zo bewonderde omdat Quetelet met evenveel succes zeer verschillende mogelijke toepassingen van de exacte wetenschappen behandelde. Daarbij dacht hij met name aan het werk dat Quetelet aan de ‘morele’ statistiek had gedaan. Het is duidelijk dat Lobatto aanvoelde dat Quetelet iets kon, waartoe hij zichzelf niet in staat achtte: het aanbrengen van een brug tussen de alfa- en de bèta-wereld.

Noot

* De auteur is werkzaam aan de Vrije Universiteit te Amsterdam; deel 1 (over Adriaan Kluit) van deze serie stond in nummer 3 van deze jaargang.



Literatuur over Quetelet

H. Freudenthal,
De eerste ontmoeting tussen de wiskunde en de sociale wetenschappen
Verh. Koninklijke Vlaamse Akad. 28, nr. 88 (1966).

G. Gigerenzer et al,
The empire of chance. How probability changed science and everyday life
(Cambridge, Cambridge University Press, 1989), blz. 37-45.

F.H. Hankins, 1908:
Adolphe Quetelet as statistician
New York, reprint 1968.

J. Lottin, 1912:
Quetelet, Statisticien et Sociologue
reprint New York, 1969.

T. M. Porter,
The rise of statistical thinking, 1820-1900
(Princeton, Princeton University Press, 1986), blz. 41-55 en 100-109.

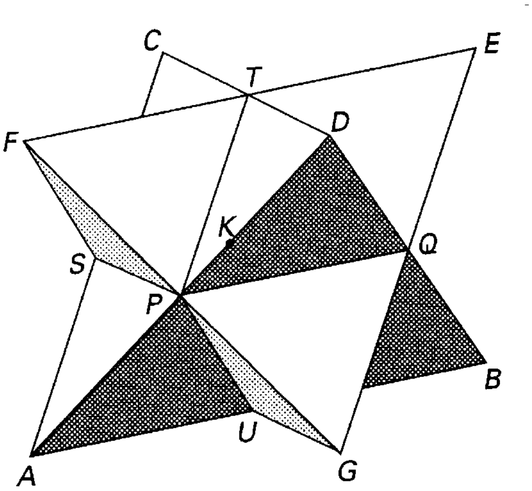
S.M. Stigler,
The history of statistics. The measurement of uncertainty before 1900
(Cambridge: Cambridge University Press, 1986), blz. 161-220.

Samenvatting

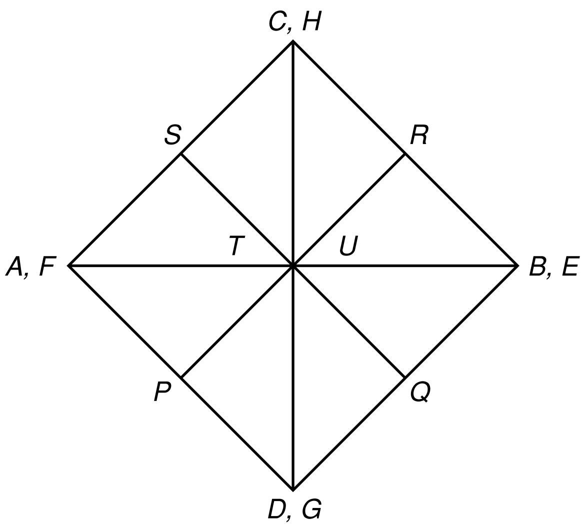
Wat was voor Quetelet statistiek? De weergave van getalsmatige gegevens over mens en maatschappij en het zoeken naar wetmatigheden daarin. Een nieuwe wetenschap ‘sociale fysica’ stond hiermee in nauw verband. Wat was het doel? Het vinden van wetten van de samenleving. Wat is de overeenkomst met de tegenwoordige statistiek? Quetelet was van mening dat waarschijnlijkheidsrekening in deze nieuwe wetenschap een centrale rol behoorde te spelen.

Werkblad

Keplerster



Figuur 1



Figuur 2

In figuur 1 is de Keplerster getekend, genoemd naar de astronoom Johannes Kepler (1571-1630). In figuur 2 is het bovenaanzicht van die ster getekend. In de Keplerster kun je twee regelmatige viervlakken onderscheiden, *ABCD* en *EFGH*, die even groot zijn. Elke ribbe van zo'n viervlak is 6 cm. Viervlak *ABCD* en viervlak *EFGH* doordringen elkaar zo dat de ribben middendoor gedeeld worden.
P, Q, R, S, T en *U* zijn de middens van de ribben van de twee viervlakken.

6 Bereken de totale buitenoppervlakte van de Keplerster.

Een punt K ligt zo op het lijnstuk PD dat $PK : KD = 1 : 2$. Een mier start in punt K en kruipt zo over het buitenoppervlak van de ster dat de afstand tot vlak *AGBH* steeds gelijk blijft.
Uiteindelijk komt de mier weer in *K* uit.
In het bovenaanzicht is deze route niet geheel zichtbaar.

7 Teken in het bovenaanzicht de volledige route van de mier, waarbij het niet zichtbare gedeelte gestippeld moet worden, en bereken de lengte van de rondwandeling.

De twee viervlakken hebben een lichaam *L* als gemeenschappelijk deel. Op de bijlage* is een begin gemaakt van de tekening van dat lichaam in parallelprojectie.

8 Voltooi de tekening op de bijlage. Licht je werkwijze toe.

9 Bereken de hoek van de vlakken *PQD* en *PQG* in graden nauwkeurig.

De Keplerster past precies in een kubusvormig doosje, met de punten *A*, *G*, *B*, en *H* op de bodem.

10 Toon aan dat de inhoud van de ster precies de helft is van de inhoud van het doosje.

Uit: Examen havo-B, 1e tijdvak 1995.

* De bijlage is hier niet toegevoegd.

Werkblad

Balk met koepel

Een schaalmodel van een gebouw bestaat uit een balk *ABCD.EFGH* en een koepel; zie figuur 3.
$AB = BC = 8$ en $AE = 6$.

Bol β raakt alle opstaande zijvlakken en het grondvlak *ABCD*.
Het middelpunt van β is M.
Het gedeelte van β dat buiten de balk ligt, is de koepel.

12 Bereken de oppervlakte van het vlakke gedeelte van het dak *EFGH*.

Op het hoogste punt van de koepel staat verticaal een mast met bovenin een lamp. Vanuit *elk* punt van het vlakke gedeelte van het dak *EFGH* is de lamp zichtbaar.

13 Bereken de minimale hoogte van de mast.

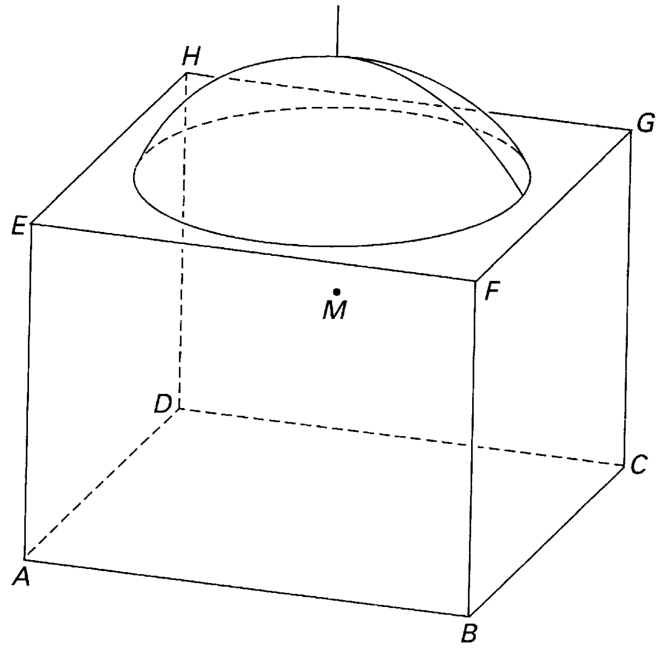
Er wordt een assenstelsel aangenomen met M als oorsprong, de x-as evenwijdig aan AD, de y-as evenwijdig aan AB en de z-as evenwijdig aan AE.

De lijn DM snijdt het vlak BEG in het punt S.

14 Bereken de coördinaten van S.

De inhoud van de koepel kan berekend worden door een gedeelte van een cirkel te wentelen om de z-as.

15 Bereken de inhoud van de koepel.



Figuur 3

Uit: Examen vwo-B, 1e tijdvak 1995.

Correctievoorschriften bij het vbo/mavo-examen

M.J. Oorthuizen

Sinds enkele jaren draai ik binnen de wiskundesectie van onze school volop mee met de examens mavo. Wat mij al meteen het eerste jaar opviel, was een zeer grote diversiteit in het interpreteren van de correctievoorschriften. Dat had ik, zeker voor een exact vak als wiskunde, totaal niet verwacht. Ik praat hier nu over verschillen van maar liefst 3 tot 9 tiende bij 20 % tot ruim 40 % van de leerlingen.
(Het examen bestaat voor de helft uit meerkeuzevragen en de andere helft bestaat uit open vragen. Dit artikel gaat alleen over de beoordeling van die open vragen.)

De grote verschillen komen mijns inziens door onduidelijkheid in de normering. Een onduidelijkheid met een tweetal aspecten. In de eerste plaats is het correctievoorschrift niet volledig. Op de meest voorkomende vragen bij het corrigeren zou er in het correctiemodel een direct antwoord moeten staan of op z'n minst een duidelijke algemene richtlijn. En in de tweede plaats blijkt dat de correctievoorschriften zo zijn opgesteld dat ze zeer veel ruimte laten voor grote interpretatieverschillen.

Vergelijking van de huidige correctievoorscriften met die van de experimentele examens leert mij dat er geen veranderingen op komst zijn die het probleem van de volledigheid, of dat van de interpretatieverschillen gaan oplossen. Dus de onduidelijkheden blijven zoals ze zijn!
Het is natuurlijk logisch dat er altijd verschillen zullen blijven bestaan, maar de vraag is wel of ze zo groot mogen zijn als hierboven beschreven is, en of verschillen meer uitzondering moeten zijn dan regel!
Dit schrijven heeft daarom tot doel om bij de collega's reacties van herkenning ten opzichte van dit probleem op te roepen. Door de opmerkingen bij de uitwerkingen van de leerlingen veelal in de vragende vorm te stellen wil ik de onduidelijkheid van de huidige correctievoorschriften illustreren, en tevens niemand de indruk geven dat hier de wet wordt voorgeschreven!
De CEVO, die ook een kopie van dit artikel heeft gekregen, roep ik op om dit probleem aan te pakken voordat het nieuwe examen van start zal gaan.

Hieronder volgen enkele voorbeelden ter illustratie. De met een ✏ gemerkte stukjes zijn uitwerkingen van leerlingen bij het laatste mavo D-examen, 1995, eerste tijdvak. Eén keer wordt er verwezen naar het mavo D-examen van het tweede tijdvak. Meteen onder de uitwerkingen staan de opmerkingen of vragen. De voorbeelden heb ik allemaal genomen uit de genoemde mavo D-examens. De open vragen die ik bespreek of noem zijn met bijlagen en correctievoorschriften als bijlage bij dit artikel afgedrukt. Het lijkt me dat zeker ook voor het mavo C-examen genoeg voorbeelden van soortgelijke aard te vinden zullen zijn.

Opgave 1: *Vergelijking lijn.*

- ✏ $ax + by + c = 0$ en verder niets meer.
- ✏ $y = mx + q$ en verder niets meer.
- ✏ $rc = -\frac{4}{9}$
  $y = -\frac{4}{9}x + b$

Uit deze 3 uitwerkingen van verschillende leerlingen blijkt dat ze allemaal weten hoe een algemene vergelijking van een lijn eruit ziet. Maar kun je hier punten voor geven? Welke leerling krijgt hier punten en hoeveel?
De regel, 'doorrekenen met een eerder gemaakte fout', lijkt van toepassing bij $-\frac{4}{9}$. Omdat bij de eerste 2 uitwerkingen nog niets berekend is zal ik daar dan ook geen punten toekennen en bij de laatste wel, namelijk één. Er zijn echter collega's die bij de eerste twee uitwerkingen al meteen één punt geven en daar ben ik het niet mee eens.

Opgave 2: *Hoek uitrekenen.*

- ✏ $BG^2 = BC^2 + CG^2 = 4^2 + 4^2 = \sqrt{32}$
- ✏ $\cos \angle EBG =$

$$\frac{32}{2\sqrt{32} \cdot \sqrt{241}} = 80°$$

Hoogstwaarschijnlijk zal iedereen op een gewoon proefwerk bij fouten als hier gemaakt een punt aftrekken. Bij het examen rijst plots de vraag of er sprake van een 'verschrijving' is. Sommige collega's gaan uit van het standpunt dat je op een examen wat soepeler moet zijn en kijken in het geheel niet naar zulke fouten. Het blijkt dus nodig om het begrip 'verschrijving' duidelijker te omschrijven.

- ✏ Een leerling vergeet in de cosinusregel de factor 2.
- ✏ Een leerling vergeet bij de stelling van Pythagoras de kwadraten.
- ✏ Een leerling mixt of verwisselt de formules voor de oppervlakte en de omtrek van een cirkel.

Is een verkeerde formule even ernstig als een verschrijving? Omdat formules zo essentieel zijn bij wiskunde zou ik er een voorstander voor zijn om een verkeerde formule per som één keer met twee punten te bestraffen.
Ook fouten zoals $2 \times 3 = 6 - 5 = 1$, die mijn leerlingen kennen onder de naam breien, worden niet door iedereen gelijk behandeld. Per keer één punt aftrekken lijkt mij zeer juist.
In het herexamen werd in de som van de omtrek van de driehoek (som 24) als volgt geredeneerd:

✏ $DF = 10 \cdot \cos 39°$ en
$EF = 10 \cdot \sin 39°$

Daarna telde de leerling de drie berekende zijdes netjes op.
Deze leerling heeft dus totaal niet door, dat de driehoek niet rechthoekig is. Voor het optellen van de drie zijdes zou ik één punt geven.
Een andere visie is om het punt voor de hoek van 80° en dat van de sinusregel niet toe te kennen maar de rest wel, dus totaal 4 punten.
Een marge van 3 punten bij één som is wel erg groot!
Is deze som nu veel eenvoudiger geworden of niet? Was deze fout niet te voorzien?

Of er moet een algemene regel komen die zegt wat je moet doen als iemand echt de plank flink mis slaat, bijvoorbeeld twee punten aftrekken, of moet in het correctiemodel een opmerking staan hoe te handelen bij zulke voor de hand liggende fouten?

Opgave 3: *Bergparabool.*

✏ De regel $-x^2 + 2x + 5 = 0$ ontbreekt

Onderstaande regel staat niet in het correctievoorschrift, maar er zijn collega's die hem gebruiken: 'Als een leerling een bepaalde regel uit het correctievoorschrift overslaat maar uit het vervolg blijkt dat de eerdere stap impliciet gemaakt is, dan moet men ook de bijbehorende punten toekennen'. Mag of moet men deze regel gebruiken?
Een leerling maakt een fout in de Discriminant, $D = -16$
Een leerling die daarna de logische conclusie trekt dat er dan geen oplossingen zijn, mag die het maximale aantal punten –1 krijgen?
Is deze som door die rekenfout nu 'aanzienlijk vereenvoudigd'?
Wat doe je met een leerling die doorrekent alsof $\sqrt{-16} = -\sqrt{16}$ is?
Hoe erg vindt men het, dat bij een vraag naar een tekening van een bergparabool er toch een dal getekend wordt? Is zoiets alleen maar de logische doorwerking van een eerder gemaakte fout? En als een andere leerling naast die dalparabool toch ook nog de vergelijking van de bergparabool zet?!
Als een leerling i.p.v. een parabool een lijn tekent, krijgt hij dan nog punten? Tenminste, en ook ten hoogste, liggen 2 punten van de lijn ook op de parabool.
Wat is beter, een leerling die een mooie parabool tekent uitgaande van een totaal verkeerde top (regelmaat standaardparabool, $a = 1$, de oneven getallen) of een leerling die met de verkeerde top toch ook nog enkele juiste punten meeneemt maar waardoor je als tekening een 'hobbelbool' krijgt? Of een leerling die op grond van enkele berekeningen gewoon constateert dat er zo'n parabool niet te tekenen is en probeert aan te geven waar zijn fout zit?

✏ de raaklijnsom (max 7p)
$y = -2x + a - x^2 + 2x + 5$
$y = -x^2 + 5 + a$
(0, 5) op de parabool:
$5 = 0^2 + 5 + a$
$a = 0$

Bij zo'n fiks aantal punten geef je niet graag een nul. Er is trouwens toch ook 'n a berekend. Is dit verdedigbaar? Wat zegt nu de 'geest van het antwoordmodel'?

✏ $y = -2x + a$ (1,6)
$6 = -2 \cdot 1 + a$
$a = 4$ dus $y = -2x + 4$

Wat doe je met deze leerling? Komt dit verkeerde raakpunt door een verkeerde parabool of is het een gokje?
Op de normvergadering in Tilburg werd afgesproken dat een leerling die het juiste raakpunt (punt (2, 5)) ingevuld had, en zo tot $a = 9$ kwam, 4 à 5 punten mocht krijgen. Afgezien van het feit of ik het daar persoonlijk mee eens ben of niet, vind ik het oneerlijk ten opzichte van alle andere leerlingen waar deze som anders beoordeeld wordt, alleen maar omdat hun docent van deze afspraak niet op de hoogte is gebracht.

✏ $-x^2 + 2x + 5 = -2x + a$
$-x^2 + 4x + 5a = 0$
$D = b^2 - 4ac$
$D = 4^2 - 4 \cdot -1 \cdot 5a$
$16 + 20 = \sqrt{36} \cdot a$
$D = 0$ dus $a = -6$

Hoeveel van de maximaal 7 punten ga je hier geven? Minimaal 2 en maximaal 5.

Opgave 4: *Driehoek draaien.*

- ✏ Welke leerling schrijft expliciet $B'C = BC$ op?
- ✏ Als een leerling $\sqrt{45} \approx 6{,}7$ schrijft is dat voor u voldoende?

(De variant met = komt ook wel voor. Is het verschil tussen = en ≈ met de komst van de rekenmachine achterhaald of juist zeer actueel?)

- ✏ Wat doe je trouwens als een leerling met verkeerde berekeningen toch op het goede antwoord komt?

(Ik denk dan even terug aan de allerlaatste som van het examen van '93, het bordje 1,80 naast het zwembad). En als een leerling zonder verdere berekeningen goed gokt?

Opgave 5: *De schutting.*

- ✏ Een leerling schreef: $450 - 200 = 250$
- ✏ De schutting moet net zo hoog zijn als *S*.

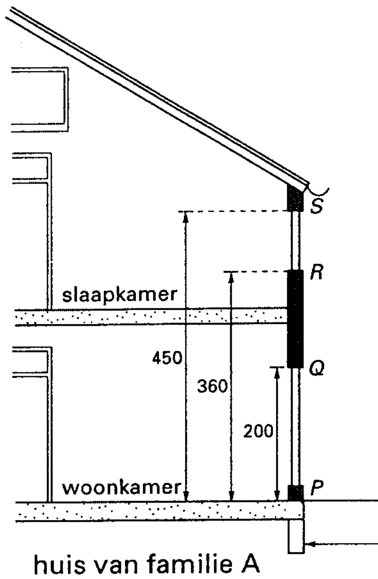
Hoeveel punten mag je bij deze realistische som voor deze conclusies geven?
Veel leerlingen hebben de lijn LS getekend (lichtbron naar bovenkant raam) en daarna de schutting verticaal doorgetrokken tot aan die lijn. Was dat niet voorzien? Krijg je er daarom niets voor? Deze meetkundige oplossing die een aanzet tot de rest is, zou ik nog met een punt willen belonen maar voor zo'n niet realistische conclusie geef ik niets.

Conclusie:
Over de bavotoetsen is in het land al heel veel geschreven en zeker zoveel gesproken (bij de koffie). Over de toetsen zelf rep ik hier met geen woord. Als u echter de zeer uitgebreide scoringsregels van de bavotoetsen leest zult u zien, dat er daar over het probleem bij het corrigeren diep is nagedacht. Waarom is hiervan in het nieuwe wiskunde-examen nog niets terug te vinden?

De uitgangsstelling bij de scoringsregels van de bavotoetsen is al heel duidelijk: '... hun antwoorden op een zo overeenkomstig mogelijke wijze te beoordelen'. Verder zijn er duidelijke aanwijzingen als 'opzet en uitvoering van een oplossingsplan'. Ook totaal nieuwe regels staan er. Zoals bijvoorbeeld: Als een leerling bij een opgave meer fouten maakt dan dat er punten te behalen zijn, dan mag je toch nog voor een goed duidelijk oplossingsplan maximaal $\frac{1}{4}$ van het totaal aantal punten geven.
Ook in dit artikel komen enkele aanzetten voor 'nieuwe' correctieregels voor die men zou kunnen uitwerken. Meerdere collega's gebruiken deze 'nieuwe' regels al jaren.

Het doorrekenen met foute antwoorden is echter ook in de bavotoetsen nog niet ver genoeg uitgewerkt lijkt me. Als je de voorbeelden van hierboven bij het tekenen van een parabool bekijkt, dan kun je met de voorschriften zeer moeilijk uit de voeten. Op de reeds genoemde normvergadering werd dit probleem als zodanig ook onderstreept. Wel zou er in het correctievoorschrift meer aandacht besteed mogen worden aan alternatieve antwoorden en aan de meest voorkomende fouten. Elke ervaren leraar kan bij het zien van het examen al voorspellen welke verschillende fouten zijn leerlingen kunnen gaan maken.

Natuurlijk moet een correctievoorschrift geen dik handboek worden. Dit artikel wil ook zeker niet de indruk wekken dat er zoiets moet komen. Integendeel, het is een zoeken naar regels waar je in de praktijk iets mee kunt!
De steeds meer realistisch getinte opgaven namelijk eisen duidelijke, aangepaste, uitgewerkte en zonodig



huis van familie A

nieuwe correctievoorschriften die weinig ruimte laten voor eigen interpretatie. Dit om nog grotere verschillen in de beoordeling van de nieuwe examenopgaven te voorkomen.
Verder is het ook zeer belangrijk naar de leerlingen toe, om hen aan te kunnen geven hoe ze beoordeeld zullen gaan worden. Alleen deze reden al zou een aanpassing voldoende rechtvaardigen.

Ik hoop dat dit schrijven een bijdrage mag leveren om te komen tot betere correctievoorschriften, die in de definitieve besluitfase van het experimentele examen nog kunnen worden meegenomen.

Over de auteur

Martin Oorthuizen is docent wiskunde aan het Koning Willem III College te Tilburg.

Opgave 1

Gegeven zijn de punten $A(-55, 83)$ en $B(145, 43)$.

4p **23** □ Stel een vergelijking op van de lijn door deze punten. Schrijf de uitwerking op.

Opgave 2

Op de bijlage bij vraag 24 is de balk $ABCD.EFGH$ getekend met $AB = 15$, $BC = 4$ en $CG = 4$.

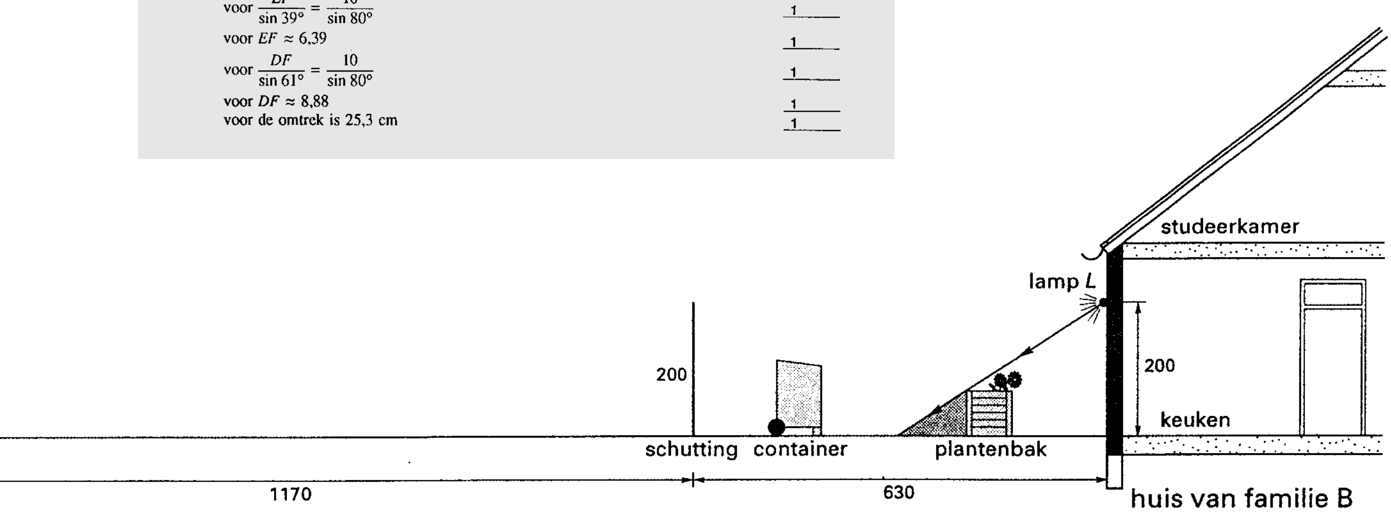
7p **24** □ Bereken $\angle EBG$ in graden nauwkeurig. Schrijf de berekening op.

Opgave 2

Maximumscore 6

24 □	voor $\angle F = 80°$	1
	voor $\dfrac{EF}{\sin 39°} = \dfrac{10}{\sin 80°}$	1
	voor $EF \approx 6{,}39$	1
	voor $\dfrac{DF}{\sin 61°} = \dfrac{10}{\sin 80°}$	1
	voor $DF \approx 8{,}88$	1
	voor de omtrek is 25,3 cm	1

Vragen 32 en 33



Opgave 3

Gegeven is de parabool $y = -x^2 + 2x + 5$.

4p **25** □ Bereken de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x-as. Schrijf de berekening op.
2p **26** □ Wat zijn de coördinaten van de top?
3p **27** □ Teken de parabool in het assenstelsel op de bijlage bij vraag 27.

De lijn $y = -2x + a$ raakt de parabool.

7p **28** □ Bereken a. Schrijf de berekening op.

Opgave 4

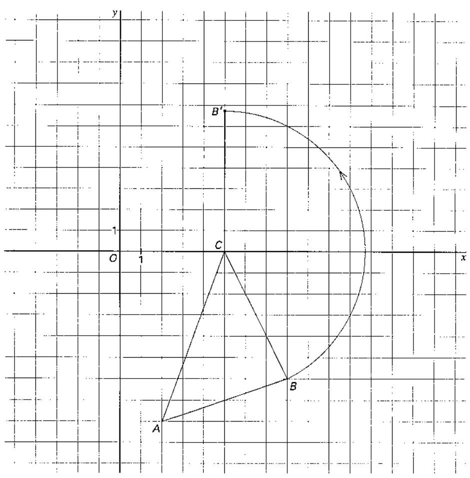
Op de bijlage bij de vragen 29, 30 en 31 is in een assenstelsel ΔABC getekend:
$A(2, -8)$, $B(8, -6)$ en $C(5, 0)$.
Deze driehoek wordt om C gedraaid in positieve richting. Het beeld is $\Delta A'B'C'$.
Een deel van de rotatie is al uitgevoerd.
De x-coördinaat van B' is 5.

3p **29** □ Bereken de y-coördinaat van B' in één decimaal nauwkeurig. Schrijf de berekening op.

4p **30** □ Toon met een berekening aan dat de rotatiehoek 153° is (afgerond in hele graden).

3p **31** □ Maak op de bijlage de beeldfiguur $\Delta A'B'C'$ af.

Vragen 29, 30 en 31



Opgave 5

Op de bijlage bij de vragen 32 en 33 zijn de huizen van de familie A en de familie B voor een deel getekend. De maten staan in de figuur (in cm). De achtertuinen grenzen aan elkaar. Daartussen staat een schutting.
De familie B heeft een sterke buitenlamp L die 's nachts blijft branden.

In de tuin van de familie B staan een plantenbak en een container. Achter de plantenbak komt geen licht van lamp L: dat deel is grijs gemaakt.
Ook achter de container komt geen licht van lamp L.

3p **32** □ Maak zelf het deel achter de container grijs waar geen licht komt.

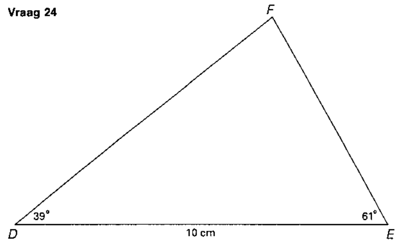
De lamp L kan net niet door het raam PQ de woonkamer van de familie A binnenschijnen.
De lamp schijnt wel door het raam RS de slaapkamer binnen.

6p **33** □ Bereken hoe hoog de schutting minstens had moeten zijn om te voorkomen dat de lamp de slaapkamer binnenschijnt. Schrijf de berekening op.

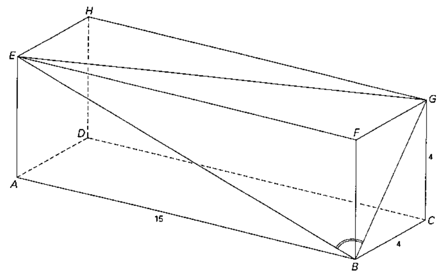
Einde

	Antwoorden	Deel-scores
	Opgave 1	
	Maximumscore 4	
23 □	voor de richtingscoëfficiënt is $-\frac{1}{5}$, inclusief toelichting	2
	voor de berekening van b in $y = -\frac{1}{5}x + b$	1
	voor de vergelijking $y = -\frac{1}{5}x + 72$	1
	Opgave 2	
	Maximumscore 7	
24 □	voor $EB^2 = 241$	1
	voor $EG^2 = 241$	1
	voor $BG^2 = 32$	1
	voor $241 = 241 + 32 - 2 \cdot \sqrt{241} \cdot \sqrt{32} \cdot \cos \angle EBG$ (of met de hoogtelijn op BG: $\cos \angle EBG = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{32}}{\sqrt{241}}$)	2
	voor $\angle EBG \approx 80°$	2
	Indien de hoek foutief is afgerond, hiervoor één punt aftrekken.	
	Opgave 3	
	Maximumscore 4	
25 □	voor $-x^2 + 2x + 5 = 0$	1
	voor $D = 24$	1
	voor $\left(\dfrac{2-\sqrt{24}}{2}, 0\right)$ en $\left(\dfrac{2+\sqrt{24}}{2}, 0\right)$ (of $x = \dfrac{2-\sqrt{24}}{2} \vee x = \dfrac{2+\sqrt{24}}{2}$)	2
	Indien bij het berekenen is afgerond, ten hoogste drie punten toekennen.	
	Maximumscore 2	
26 □	voor de top is (1, 6)	
	Maximumscore 3	
27 □	voor het nauwkeurig tekenen van de parabool	
	Maximumscore 7	
28 □	voor $-x^2 + 2x + 5 = -2x + a$	1
	voor $-x^2 + 4x + 5 - a = 0$	1
	voor discriminant $= 16 + 4(5 - a)$	2
	voor discriminant $= 0$	1
	voor de berekening van $a = 9$	2

Vraag 24



Vraag 24



	Antwoorden	Deel-scores
	Opgave 4	
	Maximumscore 3	
29 □	voor $B'C = BC$	1
	voor $BC^2 = 6^2 + 3^2$	1
	voor $y_{B'} = \sqrt{45} \approx 6{,}7$	1
	Maximumscore 4	
30 □	voor $\tan \alpha = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63°$ (of $\tan \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta \approx 27°$)	2
	voor de rotatiehoek is $90° + 63° = 153°$ (of $180° - 27° = 153°$)	2
	Maximumscore 3	
31 □	voor het tekenen van $\Delta A'B'C'$	
	Opgave 5	
	Maximumscore 3	
32 □	voor het tekenen van de lichtstraal vanuit L over de rand van de container naar de schutting	2
	voor het tekenen van het grijze deel tussen container en schutting waar geen licht komt	1
	Maximumscore 6	
33 □	voor het tekenen van de twee gelijkvormige driehoeken	2
	voor $x : 250 = 630 : 1800$ (x is verhoging schutting)	2
	voor de berekening van $x = 87\frac{1}{2}$	1
	voor de hoogte had (minstens) $287\frac{1}{2}$ cm moeten zijn	1

Einde

	Opgave 2	
	Maximumscore 6	
24 □	voor $\angle F = 80°$	1
	voor $\dfrac{EF}{\sin 39°} = \dfrac{10}{\sin 80°}$	1
	voor $EF \approx 6{,}39$	1
	voor $\dfrac{DF}{\sin 61°} = \dfrac{10}{\sin 80°}$	1
	voor $DF \approx 8{,}88$	1
	voor de omtrek is 25,3 cm	1

Opgave 2

Op de bijlage bij vraag 24 is ΔDEF getekend. $\angle D = 39°$, $\angle E = 61°$ en $DE = 10$ cm.

6p 24 □ Bereken hoeveel cm de omtrek van ΔDEF is (afronden op één decimaal). Schrijf de berekening op.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Van de bestuurstafel

Tweede fase havo/vwo
Op basis van een groot aantal reacties van geïnteresseerde leden heeft het bestuur haar commentaar op het eerste concept van de vakontwikkelgroep gegeven (zie Euclides 71-3 pagina 87). Inmiddels is het tweede concept verschenen, waarin de binnengekomen reacties verwerkt zijn. Als we beide concepten vergelijken kunnen we tot onze vreugde constateren dat de vakontwikkelgroep aan een aantal van onze bezwaren tegemoet is gekomen. Zo zijn met name vanwege de overladenheid in het programma op veel plaatsen reducties toegepast.

In Platformverband heeft het bestuur bij de Stuurgroep Tweede Fase wederom gewezen op het grote belang van tijdige nascholing, die dan uiteraard wel binnen de normjaartaak moet vallen.

"You never miss the water 'till the well runs dry" (oproep 1)
Een oude wijsheid, die al in vele toonaarden bezongen is: je kent pas goed de waarde van iets of iemand als je het gemis voelt. De Vereniging is, zoals wij het noemen, het na-Felixe tijdperk binnengestapt. Felix Gaillard, jarenlang onze schier onvermoeibare werker op de achtergrond, heeft zijn vele werkzaamheden voor de Vereniging beëindigd. Op de jaarvergadering is officieel afscheid genomen. Hij is nu erelid in welverdiende rust. Maar het werk rust niet. De ledenadministratie is overgenomen door mevrouw E. van Bemmel-Hendriks. Ook andere taken zijn inmiddels overgenomen, maar het bestuur is nog ernstig op zoek naar leden die willen assisteren bij de organisatie van met name de jaarvergadering en de regionale bijeenkomsten.

Didactiekcommissie (oproep 2)
De didactiekcommissie heeft een rijke geschiedenis binnen de Vereniging. De laatste jaren heeft zij zich onder meer beziggehouden met de rekenmachine en de rol van vragen bij het leren. U heeft daarover in Euclides kunnen lezen. Als we kijken naar toekomstige ontwikkelingen, zowel in de bovenbouw havo/vwo als in vbo/mavo, dan lijkt er ook een rijke toekomst mogelijk. De didactiek is in beweging, we werken in de klas anders dan vroeger, het zo zelfstandig mogelijk leren leren krijgt veel aandacht. De didactiekcommissie zou dan ook graag versterking krijgen van enthousiaste nieuwe leden om binnen de Vereniging op eigen wijze vanuit te praktijk na te denken over die 'uitdaging van de eenentwintigste eeuw' om het wat royaal te omschrijven. Dat denken zal zoals gebruikelijk kunnen uitmonden in publikaties in Euclides en in het verzorgen van werkgroepen tijdens de bijeenkomsten van de Vereniging.

Als u uw zeer gewaardeerde diensten op een van deze terreinen wilt aanbieden, neem dan contact op met:
Freek Mahieu
Dommeldal 12
5282 WC Boxtel
tel. 0411-673468

Marian Kollenveld

Inhoud

De NVvW komt naar u toe

Voor de vierde maal organiseert de vereniging regionale bijeenkomsten, dit jaar in maart.

Zoals u reeds hebt kunnen zien in onze jaaragenda, waarin de wiskunde-evenementen voor het cursusjaar '95-'96 staan, organiseert de vereniging weer regionale studiebijeenkomsten:

ZWOLLE **donderdag 7 maart**
SG Greidanus, Campus 5
NS uitgang Zuid (10 min. lopen:) rechtsaf, schuin over parkeerterrein, tunnel, rechtsaf, achter HS Windesheim.

AMSTERDAM **dinsdag 12 maart**
Pieter Nieuwland College, Nobelweg 6
NS Amstel, tramuitgang (9 min. lopen:) rechtdoor (Cooper&L. links laten), onder tunnel, zie school links.

EINDHOVEN **donderdag 14 maart**
HS Eindhoven, Rachelsmolen 1
NS uitgang Noord (12 min. lopen:) parkeerterrein schuin rechts over, weg over, na 300m langs Kennedyln linksaf (dus niet TU!), gebouw R1.

ROTTERDAM **dinsdag 19 maart**
(i.v.m. vakantie niet 5/3)
CSG Henegouwerplein 14
CS hoofduitgang (6 min. lopen:) even rechtdoor, dan rechtsaf (Groothandelsgebouw), rechtdoor over tunneltracé heen, dan links.

We prijzen ons gelukkig dat wederom een aantal mensen zich bereid heeft verklaard om geheel belangeloos hun speciale expertise en/of hobby aan u uit te dragen en u uit te dagen.
Dit jaar is het gelukt in alle vier plaatsen dezelfde werkgroepen aan te bieden, soms zelfs door dezelfde mensen (die dus binnen 13 dagen tijd 4 keer voor ons het land door reizen).

Indeling van het programma:

15.45-16.00 **ontvangst**
16.00-16.10 **opening, lokaalindeling**
16.15-17.45 **middagwerkgroepen**
17.45-18.30 **eenvoudige maaltijd en verkoop van o.a. posters en freeware-programma PLOT + handleiding**
18.30-20.00 **vooravondwerkgroepen**

Iedereen kan dus één middag- en één vooravondwerkgroep bijwonen. Voor elk dient men een 1e en 2e keus op te geven. Wie zich het eerst meldt krijgt de eerste keus....

Middagwerkgroepen

B. Achter de schermen van het Ziekenhuis, door Pieter v.d. Zwaart, Egbert Stegeman, Jos ter Pelle, Gerrit v.d. Heuvel en proefschooldocenten. Ervaringen en voorbeelden van dit SLO-project beroepsgerichte wiskunde in (i)vbo/mavo.

C. Ervaringen met het werken met een itembank voor wiskundeopgaven, door Albert Dolfing, Suzette Damman en iemand van de Haagse Hogeschool.
Diagnostische toetsen bevorderen zelfstandig leren (studiehuis!). Op de Hogeschool Windesheim zijn in het propedeusejaar v.d. faculteit Techniek ervaringen opgedaan met een op de Haagse Hogeschool ontwikkelde toetsbank. Deze omvat ook vragen over stof uit alle niveaus van het voortgezet onderwijs en met name het mbo. U hoort hoeveel tijd het bespaart, maar ook hoeveel het kost, wat de resultaten zijn en hoe dit in de praktijk verloopt:
- hoe selecteer ik begripsvragen, inzichtvragen?
- hoe kan ik opgaven naar eigen inzicht veranderen?
- hoe zie ik de resultaten van individuele leerlingen?
- hoe stel ik een diagnostische toets op?
In de werkgroep kunt u al uw vragen stellen.

D. Nieuwe ontwikkelingen in de wiskunde voor de vwo-profielen N&G en N&T, door Martin Kindt en Profi-medewerkers.
Dit cursusjaar is op twee scholen een experiment (Profi) gestart met een wiskunde B-programma volgens de laatste plannen van de Vakontwikkelgroep. Profi wordt uitgevoerd door een team van het Freudenthal instituut, dat u zal laten meegenieten van indrukken en ervaringen (o.a. met de grafische rekenmachine).

F. Zelfstandig leren met CD-ROM, door Nellie Verhoef en Egberdien Grotemarsink.
De schijf die Hogeschool Windesheim hiertoe ontwikkelde omvat de ruimtemeetkunde van bavo t/m 2de fase havo en is probleemgestuurd, zodat elke leerling op zijn eigen manier met het materiaal kan werken.
Een meisje zeilt de wereld rond en ontmoet o.a. als probleem:
- welke/hoeveel doosjes van verschillende vorm prop ik nog in dit kastje?
- in welke teil gaat het meeste water?
- hoeveel polyester heb ik nodig om dat gat te repareren?
- hoe ver is het van A naar B? (bolmeetkunde).
- met hoeveel touw sjor ik de boel weer vast?
Men kan op het scherm de objecten (doosje, wereldbol,..) draaien, doorsnijden, plakken en men kan op elk moment de theorie opvragen, die steeds 'bewegend' wordt aangeboden. Het (altijd te bewaren) antwoord van de leerling wordt in de reële situatie teruggezet, zodat goed/fout te zien is. U ziet de testversie op een groot scherm.

Vooravondwerkgroepen

S. Kies Kies, door medewerkers van Vrouwen & Exacte Vakken.
In bavo en 2de fase zal beroepenoriëntatie in de vakken geïntegreerd worden. U ziet een video waarin een bouwcordinator, een electrotechnisch ingenieur, een opticien, een PR-functionaris en een technisch rechercheur bezig zijn. Zelf kunt u aan het werk met bijbehorend materiaal, waarin o.a. de relatie gelegd wordt tussen het schoolvak (bijv. wiskunde) en de beroepspraktijk.

T. Welke leerstijlen ondersteunen de examentraining voor het nieuwe B/C/D-examen? door Wim Kuipers.
Vijf jaar ervaring met de experimentele examens; voorbeelden en discussie.

W. Een nieuwe leerling, een nieuw leerplan, door Jelle Kat, Jacob Hop, Michel v. Glabbeek en Tom Goris.
Stand van zaken rond het conceptleerplan wiskunde mto; presentatie en discussie.

X. Wiskundelessen met Derive, 15 practica voor de bovenbouw havo en vwo, door Agnes Verweij en andere CAVO-leden.
Een bespreking van en zelf werken met materiaal uit de onlangs verschenen bundel van de werkgroep Computer Algebra in het Voortgezet Onderwijs (CAVO). Zie ook het artikel in dit nummer op pagina 137.

Y. De Euclidesrubriek Recreatie in de praktijk, door Jan de Geus.
Toepassingen in de klas, van basisvorming t/m tweede fase en mbo.

Certificaat
Wilt u een nascholingscertificaat voor promotiecriteria ontvangen, vermeld dan bij uw opgave ook uw voorletters en uw geboortedatum. U krijgt na afloop van de studiebijeenkomst het certificaat uitgereikt na het tonen van een identiteitsbewijs. U hebt alleen recht op een certificaat als u de gehele bijeenkomst hebt bijgewoond. Certificaten kunnen niet worden nagestuurd.

Kosten
Leden van de NVvW, en degenen die nu lid worden, betalen geen zaalhuur en organisatiekosten. Van niet-leden wordt hiervoor een bijdrage van ƒ45 gevraagd. Voor de maaltijd en koffie of thee dient elke deelnemer ƒ15 te betalen. De overschrijving van ƒ15 of ƒ60 op giro 4470718 t.n.v. NVvW Boxtel, moet vóór 16 februari binnen zijn. Ter plaatse aanmelden is niet mogelijk.

Hoe aanmelden?
A. *via school:*
Aan elke school wordt ook een aankondiging gestuurd. Dus breng uw collega (nog) niet-lid mee.
Maakt uw school het bedrag over, dan dient u zich –i.v.m. mogelijke naamsverminking– in te schrijven via het schoolopgavebiljet.
B. *privé:*
Geschiedt de afschrijving van een rekening op uw eigen naam, vermeld dan de plaatscode Ro, Zw, Am of Ei; daarna in volgorde van voorkeur eerst de twee middag-, dan de twee avondcodeletters; uw telefoonnummer; uw voorletters; en, als u een certificaat wilt, uw geboortedatum.
Voorbeeld:
RoBCWY010-1234567JJ1-1-’50
(N.B. Banken geven maximaal 30 tekens aan de giro door).

Bij vragen of problemen kunt u zich wenden tot het organiserende bestuurslid Freek Mahieu,
Dommeldal 12,
5282 WC Boxtel;
tel. 0411-673468
of in noodgeval tot Agneta Aukema,
tel. 0320-226518.

Tenslotte
Uw inschrijving wordt niet bevestigd; bij binnenkomst vindt u uw sticker met codes voor uw werkgroepen.

Felicitatie

De redactie wenst Felix Gaillard van harte geluk met zijn erelidmaatschap van de NVvW en dankt hem ook vanaf deze plaats nog eens voor de jarenlange fijne samenwerking!

Oproep: ivbo/vbo/mavo

Door middel van de Nota Van Veen en de beleidsreactie heeft de staatssecretaris, mevrouw Netelenbos, ingrijpende wijzigingen aangekondigd voor het onderwijs in het (i)vbo en het mavo. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft de ontwikkelingen nauwgezet gevolgd en daar waar mogelijk was haar standpunt ten aanzien van de voorgestelde ontwikkelingen naar voren gebracht.

De SLO heeft opdracht gekregen de plannen verder uit te werken. Het ministerie heeft daarbij echter een bijzonder strak tijdpad vastgesteld. Onzes inziens dreigt er gevaar voor haastwerk. Het bestuur van de NVvW blijft de zaak zo goed mogelijk volgen. Dat kan ze eigenlijk pas goed doen met hulp van docenten die werkzaam zijn in de betrokken onderwijssectoren.

Wij zoeken docenten:
- die werkzaam zijn in een van de betrokken sectoren,
- die willen meedenken over de ontwikkelingen in het (i)vbo/mavo,
- met wie wij regelmatig contact kunnen opnemen om informatie uit te wisselen,
- die bereid zijn hun ideeën, commentaar en kritiek hierover op papier te zetten en ons toe te sturen.

Heeft u belangstelling dan kunt u contact opnemen met:

Ruud Jongeling
Sterappelstraat 38
4421 LG Kapelle
tel. 0113-344548

Schoolboeken voor de tussenfase

Inleiding

Leerlingen van havo en vwo die in het schooljaar '96/'97 in de vierde klas komen zijn opgeleid volgens het nieuwe leerplan wiskunde in de onderbouw en de basisvorming. Zij moeten echter nog wel opgeleid worden voor de huidige examens wiskunde A en B in de havo en vwo bovenbouw.
Als de nieuwe Tweede Fase met profielen en nieuwe eindexamenprogramma's in 1998 van start gaat, bestaat deze situatie twee jaar. Gaat de Tweede Fase in 1999 of 2000 van start, dan bestaat deze situatie drie respectievelijk vier jaar.

Veranderingen

Iedereen die de boeken voor de onderbouw bekijkt kan constateren dat het nieuwe leerplan voor de onderbouw anders is dan het oude leerplan. Er is meer aandacht voor ruimtemeetkunde, meer aandacht voor statistiek en kansrekening en er wordt meer aandacht besteed aan rekenen. De algebra is opgeschoven in de richting van analyse. Er is minder aandacht voor manipuleren, maar er is meer aandacht voor het omgaan met verschillende typen formules en functies.
Andere verschillen zijn dat leerlingen meer getraind worden in probleemoplossen en creatief omgaan met wiskunde. In de klassen is te zien dat leerlingen ook in het derde leerjaar een andere houding hebben ten opzichte van het vak wiskunde dan voorheen.

Examens

In de afgelopen jaren is ook in de examens een tendens zichtbaar geworden.
Er wordt een groot beroep gedaan op leesvaardigheid en op het inzichtelijk met de stof omgaan. Door de overladenheid van sommige examenprogramma's komt het er in de klas soms niet van om uitgebreid stil te staan bij het leren van probleemoplossen en creatief omgaan met (contextrijke) leerstof. Inmiddels is er in het programma voor vwo wiskunde B wel een aantal onderwerpen geschrapt.

Methoden

De verschillende methoden zijn de afgelopen tijd bezig geweest na te denken over hoe het onderwijs in deze tussenfase in de boeken vormgegeven moet worden.
Op de methodekeuzeconferenties[1] 'Wiskunde in de tussenfase', georganiseerd door het APS[2] in samenwerking met de uitgevers, zullen de uitgevers en de auteurs hun plannen uit de doeken doen.
Het zal interessant zijn om te bekijken hoe de lange lijn van brugklas tot de examens wiskunde A en B op havo en vwo vorm gaat krijgen en hoe er ingespeeld wordt op de tendensen zoals die in de examens zichtbaar zijn.

Noten

1 Zie ook Euclides 71-3 pag. 108.
2 APS informatiepunt wiskunde: tel. 030-2856722.

Het project Profi

De voorstellen van de Vakontwikkelgroep Wiskunde met betrekking tot de wiskundevakken in de profielen havo en vwo zijn na de zogenaamde veldraadpleging op een aantal punten verbeterd. Er is tegemoet gekomen aan een algemeen gevoel van overladenheid door het schrappen van enige domeinen en subdomeinen uit het eerste voorstel. Maar met name in de profielen N&G en N&T van het vwo blijft er nog een heleboel nieuws over.

Ingrijpende veranderingen in het wiskundeonderwijs gaan in Nederland sinds 1980 gepaard met leerstof-experimenten. En hoewel er nu door de beoogde snelle invoering in 1998 van de gewijzigde structuur van de tweede fase nauwelijks tijd is, hebben we een opvolger van Hewet, Hawex en W12-16 gekregen. Met ingang van dit schooljaar is het project Profi van start gegaan. Dit door het Ministerie aan het Freudenthal instituut toegewezen project moet de haalbaarheid van de nieuwe programma's voor de exacte profielen van het vwo onderzoeken en tevens een 'voorbeeldige' uitwerking van deze programma's opleveren. In dit project is het Grafische Rekenmachine-project, uitgevoerd door hetzelfde instituut, opgenomen.
Het Profi-team bestaat nu uit:
Michiel Doorman, Paul Drijvers, Aad Goddijn, Dédé de Haan, André Holleman, Martin Kindt (projectleider), Wolfgang Reuter, Heleen Verhage.

Zoals gezegd is de eerste opdracht om een nieuwe 'wiskunde B' te ontwikkelen voor het vwo. De tweede hoofdtaak van het team is het schrijven van trajectenboeken, waarin:

- de bedoelingen van de vakontwikkelgroep verder worden verduidelijkt;
- de programma's worden afgebakend;
- nomenclatuurvoorstellen worden gedaan;
- de rol van de electronica wordt aangescherpt.

Dit alles zal worden gelardeerd met voorbeelden om de geest van de beoogde programma's zoveel mogelijk tot leven te laten komen.

Het team zal zich laten adviseren door twee resonansgroepen: één specifiek voor wiskunde B (met als voorzitter Hans van Lint)[1] en één voor de trajectenboeken (met als voorzitter Matthé Sjamaar)[2].

Er is dit jaar gestart in twee proefscholen: het Cals College te Nieuwegein en het Liemers College te Zevenaar. Beide scholen participeerden reeds in het project Grafische Rekenmachine. Het schoolexperiment kent in dit cursusjaar drie componenten:

- in klas 4 vwo: gebruik van de grafische rekenmachine (met name bij 'functies en grafieken'); behalve het gewone schoolboek wordt het pakketje '25 lessen in Grafieken en Functies met de TI 82' (Freudenthal instituut 1995) gebruikt;
- in klas 5/6 vwo wiskunde A: idem (bij matrices, analyse, statistiek); bij het gewone leerboek zijn zogenaamde bijsluiters gemaakt, met suggesties voor het gebruik van de grafische rekenmachine en alternatieve opgaven;
- in klas 5 vwo wiskunde B: in plaats van met het boek wordt met nieuwe pakketjes gewerkt, waarin het programma van de Vakontwikkelgroep wordt geconcretiseerd. Daarnaast wordt in 6 vwo wiskunde B op dezelfde manier gewerkt als bij wiskunde A en wacht aan het eind van de rit een aangepast B-examen.

In cursusjaar '96/'97 zal op deze scholen het eerste experimentele examen wiskunde B worden afgenomen over de nieuwe onderwerpen. In de wiskunde A-groep zal dan voor het schoolonderzoek een examen worden afgelegd in 'discrete dynamische modellen'.

Het is de bedoeling dat in de komende jaren enige scholen zullen aanhaken bij dit experiment. Het Freudenthal instituut en het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum zullen in die vervolgfase zorgdragen voor uitvoering en begeleiding.

Noten

1 Samenstelling: prof. dr. J. v.d. Craats, drs. W. Kleijne, drs. M.P. Kollenveld, dr. J. van Lint, dr. J.A. van Maanen, prof. dr. D. Siersma, prof. dr. ir. J.H.A. de Smit, prof. dr. R. Tijdeman, drs. A. Verweij.

2 Samenstelling: drs. R. Bloem, J.J. Breeman, drs. W. Kleijne, drs. D. Kok, drs. C. Lagerwaard, drs. M. Sjamaar, dr. A. van Streun, drs. S.L. de Valk, drs. N.C. Verhoef, dr. A. Witte, drs. P. van der Zwaart.

Platform MTO

Onder deze kop zult u vanaf nu regelmatig artikelen aantreffen over wiskundezaken in het MTO (Middelbaar Technisch Onderwijs).

Hieronder vindt u het eerste, met daarin het 'hoe en waarom'.

Binnen het MTO begint het vak wiskunde in beweging te komen. In het volgende stukje wordt geprobeerd de ontwikkelingen van de afgelopen twee jaar te schetsen. We streven geen volledige weergave van alle relevante gebeurtenissen na maar bedoelen dit stukje om iedereen te informeren die wil weten wat er in het MTO gebeurt.

Al enige jaren heerst er een groeiende onvrede bij een grote groep wiskunde-docenten in het MTO. Enige punten van zorg zijn:

* het dalende niveau van instromende leerlingen en de daaruit voortvloeiende aansluitingsproblematiek
* minder uren om hetzelfde eindniveau te bereiken
* mede daardoor slechte examenresultaten voor het vak wiskunde.

In de regio Noord-Oost zijn er twee jaar geleden al initiatieven genomen om deze problemen aan te pakken. Tijdens het sectordirecteurenoverleg is zonder direct resultaat naar oplossingen gezocht. Enkele docenten vormden toen een groepje dat in samenspraak met de leiding van de VBVE (Vereniging voor Beroepsonderwijs en Volwasseneneducatie) verder zocht. Hier zijn ook de eerste contacten gelegd tussen docenten, het FI (Freudenthal instituut) en het APS. Met steun van vooral het FI mondde dit uit in het *platform van verontruste docenten wiskunde in het MTO* later kortweg platform genoemd. Het platform bestaat op dit moment uit Michel van Glabbeek, Tom Goris, Jacob Hop en Jelle Kat. Er werd een handtekeningenactie georganiseerd om de stemming in het veld te peilen. Ongeveer 75 reacties van bijval waren ons deel. Het platform werkt sindsdien nauw samen met het FI, APS, SLO en HvU (destijds HMN). Bovendien heeft het platform van onze vereniging officieel de werkgroep-status gekregen.

Vanuit de VBVE hoefden we geen vernieuwing te verwachten, immers het decennia-oude leerplan was onlangs nog geheel opnieuw verkaveld. Bovendien behoorde het ontwikkelen van een nieuw leerplan Wiskunde niet meer tot de kerntaken van de VBVE maar van de BTG's (BTG = Bedrijfstak Groep).

De BTG's zouden het voortouw moeten nemen en inderdaad bleek er binnen de BTG Metaal al een vergaand plan betreffende een nieuwe structuur voor wis- en natuurkunde te zijn ontwikkeld. De voorzitter van deze BTG is dhr. J. Houben, wis- en werktuigbouwkundige en sectordirecteur van het Technisch Lyceum Eindhoven. Met hem heeft het platform contact gezocht en diverse malen constructief van gedachten gewisseld.

De nieuwe structuur (voor Wis- en Natuurkunde) hield in dat de leerstof in diverse modulen is ingedeeld. Opvallend daarbij is een opleidingsafhankelijke module. Simpel gezegd: ruimtemeetkunde voor de Bouw en complex rekenen voor de Electro.

structuur:

schakelmodule
basismodule
opleidingsafhankelijke module
doorstroom-schakelmodule
doorstroommodule

Deze structuur sprak ons erg aan omdat het een opening biedt de eerder genoemde problemen op te lossen. Het invullen ervan is natuurlijk een ander verhaal.

In overleg met de genoemde ondersteunende organisaties werd besloten om een overlegstructuur te creëren waarbinnen het platform een plaats zou krijgen. Er werden een stuurgroep en een projectgroep ingesteld die het ontwikkelen van eindtermen en leerplannen zouden moeten entameren. Het platform maakt sindsdien deel uit van de projectgroep.

Via de BTG Metaal kreeg de SLO opdracht tot het maken van eindtermen voor wis- en natuurkunde. Er werd een zeer zorgvuldige procedure gevolgd om tot een goed resultaat te komen:

* technische leerboeken werden grondig gescand op wis- en natuurkunde
* geraadpleegd werd het COW-rapport met daarin bevindingen en wensen van leraren techniek m.b.t. wiskunde
* het platform werd tijdelijk versterkt met een aantal collega's wis- en natuurkunde die op hun beurt weer collega's uit de techniek hebben gepolst
* er is grondig gekeken naar mavo/vbo/havo-leerplannen, immers de nieuwe plannen moeten aansluiten op de nieuwe onderbouw.

Zoals u misschien weet zijn de voorlopige eindtermen nu gereed. Deze eindtermen moeten binnen enkele maanden worden omgewerkt tot een raamleerplan. Dan moet er proefmateriaal ontwikkeld worden en uitgeprobeerd. Daarna zijn de uitgevers aan zet.
Er moet dus nog een hoop werk worden verzet en of de eerste leerlingen die het nieuwe programma in de onderbouw doorlopen hebben een volledig voorbereid MTO zullen aantreffen is de vraag. Daarover later meer.

De vereniging heeft het platform verzocht op de landelijke dag een workshop te organiseren. Als doel hadden wij voor ogen het voorlichten van collega's in den lande, het beantwoorden van brandende vragen, het peilen van reacties op onze activiteiten en het platform versterken.
Bijna 50 collega's uit het MTO hadden ingeschreven op onze workshop. Informatie werd uitgedeeld inclusief de voorlopige eindtermen.

Tom Goris hield een verhaal over de instroomproblematiek zoals we die nu ervaren en karakteriseerde die bondig: wiskunde overleeft de zomerhitte niet bij deze leerlingen.

Eric Bos, collega uit Zwolle, heeft jarenlange ervaring met leerlingen van de proefschool Greidanus (de school die een paar jaar terug in Time werd uitgeroepen tot beste school van de wereld). Zijn ervaringen met dit nieuwe type leerling zou een waardevolle les moeten zijn voor alle docenten –ook die in de techniek!– in het MTO.

Er komen straks leerlingen binnen met andere vaardigheden, minder algebraïsch geschoold maar wel bereid tot het zoeken naar oplossingen. Als het MTO daar niet op in gaat spelen dreigt niets minder dan een catastrofe. Het is tekenend dat veel specifieke vaardigheden binnen het MTO niet maar in het HTO wel gewaardeerd worden.
De middagsessies van de workshop waren bedoeld voor discussies, die er dan ook wel degelijk waren. In grote lijnen was er veel waardering voor datgene wat in gang is gezet. Enkele deelnemers waren bang dat de realisering van de plannen ten koste zou kunnen gaan van de werkgelegenheid. Dat dit niet het geval mag zijn is ons natuurlijk duidelijk en binnen de voorgestelde structuur is daar ook geen reden voor.

Het platform zal u via Euclides op de hoogte houden van de ontwikkelingen. Als u wilt reageren schroom dan niet, input vanuit 'het veld' is van groot belang bij dit soort ontwikkelingen!

Rest ons nog te vertellen dat de vereniging nieuwe MTO-workshops heeft gepland onder de titel 'Een nieuwe leerling, een nieuw leerplan'. Deze workshops worden gehouden in Amsterdam, Rotterdam, Eindhoven en Zwolle. Nadere informatie staat op bladzijde 125.

De werkgroep wiskundedocenten in het MTO (platform) bestaat uit:

Michel van Glabbeek
Europa College te Amsterdam

Tom Goris
Technisch Lyceum Eindhoven

Jacob Hop
Randmeer College te Harderwijk

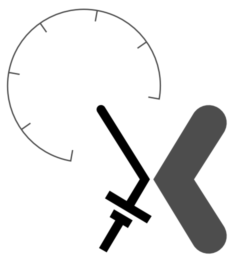
Jelle Kat
Aa College te Groningen

Mededelingen

Programmeercursus
WITCH is een programmeerkursus voor meisjes van 12 tot 18 jaar. De kursus wordt gegeven in 4 à 5 keer 3 dagen, vaak in vakanties en op verschillende plaatsen in Nederland. We overnachten in jeugdherbergen, en natuurlijk doen we ook andere dingen dan programmeren.

Wil je meer weten? Bel dan het Centrum Vrouwen en Exacte vakken, bereikbaar maandag, dinsdag en donderdag overdag
tel: 030-2856746
of 's avonds naar
Marjo Bollen
tel: 030-2318030.

Als je nú al weet dat je wilt uitproberen of je programmeren leuk vindt, meld je dan aan op dezelfde telefoonnummers... Als je het niet leuk vindt, dan mag je natuurlijk stoppen.



Richtlijnen voor auteurs

Aanleveren
Kopij dient bij voorkeur te worden aangeleverd op een diskette (3,5 of 5,25 inch) in WP5.1 (MS-DOS) of ASCII-bestand. Gedrukte of geschreven kopij kan vertraging opleveren. De tekst mag geen lay-out bevatten. De tekst moet zo kaal mogelijk worden aangeleverd, zonder woordafbrekingen e.d.; geef alinea's wel met harde returns aan.
Lever bij de diskette altijd een drietal afdrukken van de tekst aan, waarop bijvoorbeeld staat aangegeven waar u de illustraties had gedacht.

Tekst
Maak een korte, bondige titel; vermeld de naam van de auteur zonder eventuele titels. Paragrafen worden aangeduid met korte tussenkoppen (maximaal 23 aanslagen); per kopje vervallen er 4 regels basistekst.
De basistekst komt in een 3-koloms stramien. Een volle pagina telt $3 \times 54 = 162$ regels van 35 aanslagen per regel.
Wiskundige artikelen komen in een 2-koloms stramien. Een volle pagina telt hier $2 \times 54 = 108$ regels van 58 aanslagen per regel.

Illustraties
Voorzie uw tekst van toepasselijke illustraties.
Tekeningen, grafieken: scherpe figuren met zwarte pen of inkt gemaakt, of geprint op een goede printer.
Tabellen: scherp origineel op apart vel aanleveren.
Foto's: liefst zwart/wit met scherp contrast.
Voorzie illustraties van een verklarend bijschrift (op apart vel; bij meer illustraties zowel de illustraties als de bijschriften nummeren). Indien een illustratie op een bepaalde plaats in de tekst moet worden opgenomen dient dit duidelijk te worden aangegeven.

Verschijningsdata van Euclides
Omstreeks de 1e van de maanden september, december en mei; omstreeks de 15e van de maanden oktober, januari, februari, maart en juni.
Kopij voor het volgend nummer moet uiterlijk 10 weken voor verschijning geaccepteerd zijn door de redactie; voor de acht middenpagina's (in artikelen voor deze bladzijden mogen geen illustraties, tabellen of formules voorkomen!) geldt een termijn van 7 weken.

Adressen van auteurs

W. Förster
Bergstraat 19
6416 ES Heerlen

M. van Glabbeek e.a.
Europa College, Sector Techniek
Meer en Vaart 5
1068 KV Ansterdam

M.C. van Hoorn
Noordersingel 12
9901 BP Appingedam

M.P. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk

M.J. Oorthuizen
Grevenmacherhof 56
5625 LV Eindhoven

S.H. Schaafsma
Betuwepad 25
5691 LM Son

I.H. Stamhuis
VAV, fac. N&S, VU
De Boelelaan 1081
1081 HV Amsterdam

H. Wisbrun
Oude Zijds Achterburgwal 137
1012 DG Amsterdam

Kalender

17 januari 1996
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

14 februari 1996
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

7 maart 1996
Zwolle

Regiobijeenkomst NVvW

12 maart 1996
Amsterdam

Regiobijeenkomst NVvW

14 maart 1996
Eindhoven

Regiobijeenkomst NVvW

15 en 16 maart 1996
Garderen

Finale Wiskunde A-lympiade

19 maart 1996
Rotterdam

Regiobijeenkomst NVvW

22 maart 1996
op de scholen

eerste ronde Wiskunde Olympiade

22 maart 1996
op de scholen

Kangoeroe-wedstrijd

Op de jaarvergadering 1993 van de NVvW werd besloten een fonds in het leven te roepen om het wiskundeonderwijs in de Derde Wereld te ondersteunen door financiële bijdragen aan een nader te bepalen project.
Een tweede minstens zo belangrijk doel was wiskundedocenten 'hier' te laten zien dat er 'daar' ook collega's zijn die zich met soortgelijke vragen en problemen bezig houden als zij. Dat wiskundeonderwijs niet ophoudt bij de grenzen van Nederland of de westerse wereld.
Het volgende artikel is het tweede uit een serie ontdekkingsreizen naar dat onderwijs 'daar'.

Wiskunde-onderwijs in de Derde Wereld (deel 2)

Hans Wisbrun

'Aansluiten bij de beginsituatie van de leerling': we hebben het allemaal zo vaak tijdens onze opleiding gehoord, dat het bijna een gemeenplaats is geworden. Natuurlijk doe je dat, of probeer je dat te doen. In mijn vorige artikel (Euclides 71-1) had ik het al over de grote verschillen in die beginsituatie tussen leerlingen uit een niet-westerse samenleving, met name in de Derde Wereld, en die in een westerse samenleving. In dit artikel wil ik daar nog wat nader op ingaan. Verder wil ik kort stilstaan bij de vraag of wiskunde een cultuurvrije wetenschap is, zoals wel beweerd wordt. Ook geef ik wat voorbeelden van hoe men in de Derde Wereld bezig is met wat wij hier realistische wiskunde noemen.

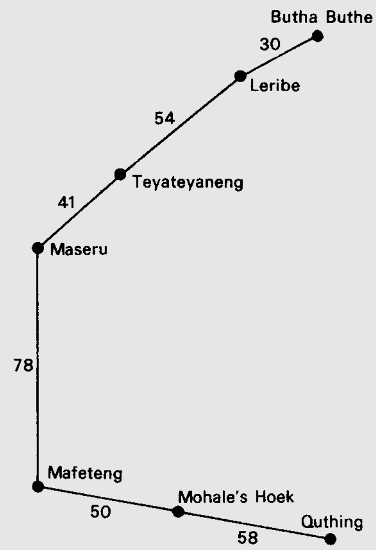
De leerling, de les

Bewust van het gevaar van generalisaties, kom ik tot de volgende schets van een leerling aan een middelbare school in Afrika beneden de Sahara.
Op de eerste plaats komt hij* doorgaans van het platteland. Zijn ouders leven van landbouw, veeteelt of visvangst. Hij heeft in zijn geboorteplaats op de lagere school gezeten en is voor zijn middelbare-school-studie naar de 'grote stad' gekomen, honderden kilometers verwijderd van zijn familie. Hij is vaak wat ouder dan de gemiddelde Nederlandse leerling, vanwege een onderbroken schoolcarrière (geldproblemen; familieomstandigheden; geen schoolgebouw of leraar beschikbaar). Hij is vaak intern, op het schoolinternaat. In de vakanties kost het hem vele dagen om naar zijn familie te reizen, zeker in de regentijd. Tot die familie behoren veel meer verwanten dan alleen zijn ouders, broers en zussen (extended family). De motivatie om te studeren vindt hij in tamelijk vage toekomstplannen als 'aan de universiteit studeren' en 'een baan in de hoofdstad'. Krant, radio en tv spelen geen grote rol in zijn leven. Ook met de moderne techniek (elektrische apparaten, computers) kwam en komt hij relatief weinig in aanraking. Zijn wereld is gedurende het schooljaar beperkt tot de wereld van de 'schoolcompound' en in de vakanties tot de wereld van zijn familie.
Zijn klas is groot, boven de 40 leerlingen. Dat is een van de redenen waarom er vooral klassikaal, frontaal les wordt gegeven. Vaak stelt de leraar de vragen aan niemand in

het bijzonder en soms antwoordt de klas dan in koor. De instructietaal (Engels, Frans, Portugees) is meestal niet de eigen moedertaal, niet die van de leerling en niet die van zijn leraar.
Er is weinig practicummateriaal voor handen. Soms zijn er, in het kader van een of ander project, passers en geodriehoeken beschikbaar. Schoolboeken heeft hij niet in eigen bezit, die blijven eigendom van de school. Wel een dictaatschrift, waarin op uiterst nauwkeurige wijze van het bord wordt overgeschreven. Huiswerk maken is vaak opgenomen in het schoolrooster, net als sport.

The diagram shows the main towns on the north and south roads from Maseru in Lesotho, and the distances in kilometres between them. For example, from Mafeteng to Mohale's Hoek is 50 km.

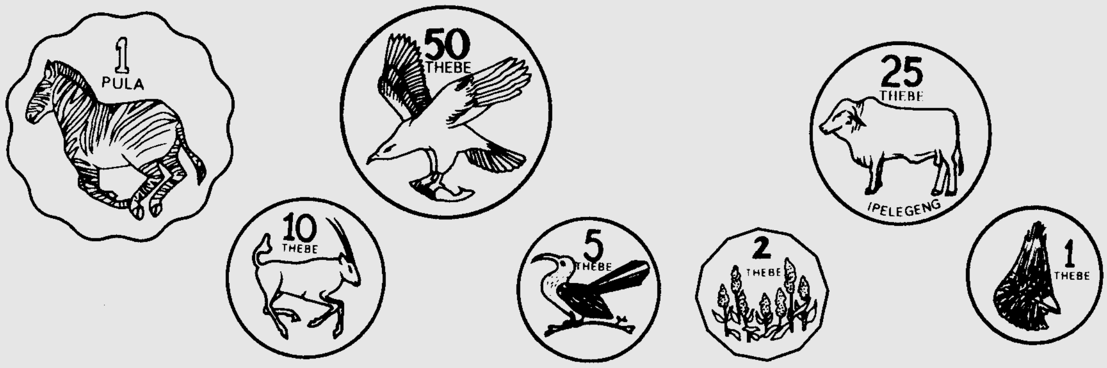
How far is it by road:
(a) from Butha Buthe to Teyateyaneng;
(b) from Maseru to Butha Buthe;
(c) from Maseru to Quthing;
(d) from Mafeteng to Leribe;
(e) from Quthing to Butha Buthe?



Afbeelding 1

Botswana has Pula and thebe.
1 Pula (P) = 100 thebe (t)
P1 = 100t

How many thebe in:
(i) P2; (ii) P3.45; (iii) P5.06?



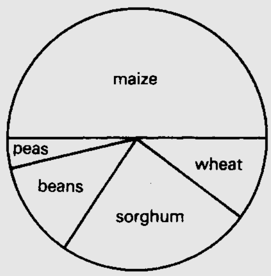
Boifang goes shopping in Botswana. She buys 1 bottle of cooking oil for P1.45, 1 bottle of milk for 25t and a packet of tea for 54t. How much does she pay altogether?

Afbeelding 2

Het eindexamen speelt een belangrijke rol in zijn schoolleven. Daar hangt van af of hij zijn toekomstdromen zal kunnen verwezenlijken. Dat examen is vaak een variant op het examen dat dat jaar in het voormalige koloniserende land wordt gegeven. Soms wordt het daar ook nagekeken.

A farmer grows maize, wheat, sorghum, peas and beans. The diagram compares the number of bags of each.

(a) (i) Which crop gives most bags?
(ii) How do you know?
(b) Which crop gives least bags?
(c) What fraction of the bags is maize?



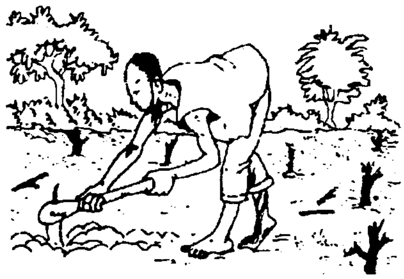
Afbeelding 3

de ene cultuur ontwikkeld is, kunnen overplaatsen naar een andere cultuur.

Veel onderwijsmensen, en zeker zij die in de Derde Wereld zelf werken, geloven niet in het idee dat wiskunde neutraal is en onafhankelijk van cultuur. Munir Fasheh uit Palestina[1]: “a common misconception in the teaching of math has been, and still is, the belief that math can be taught effectively and meaningfully without relating it to culture or to the individual student”. Paulus Gerdes uit Moçambique[2]: “This article confronts a widespread prejudice about mathematical knowledge, that mathematics is ‘culture-free’, by demonstrating alternative constructions … ”. In ieder geval is het een feit, dat er veel mis gaat als westerse wiskunde (wat dat dan ook precies moge zijn) in de Derde Wereld wordt onderwezen. In een tamelijk recent artikel over wiskundeonderwijs in Zuid Afrika[3] staat bijvoorbeeld dat 86% van de zwarte bevolking ernstig onderpresteert op het gebied van de wiskunde. Dan hebben we het over de mechanistische of structuralistische wiskunde, zoals die hier in Nederland ook werd/wordt onderwezen. Zo’n cijfer heeft consequenties voor de economie van een land. Van de voorziene vacatures per jaar in aan wiskunde gerelateerde beroepen (accountants, architecten, ingenieurs, technici, …) zal maar een beperkt deel vervuld kunnen worden. Zo heeft Zuid Afrika per jaar 3000 ingenieurs met een universitaire graad nodig, maar studeerden er bijvoorbeeld in 1989 slechts 63 zwarte ingenieurs af (samen met 1447 witte).
Natuurlijk spelen meer factoren een rol bij dit onderpresteren dan alleen

2 *Le prix du travail*

Un travailleur qui produit quelque chose fait souvent un bénéfice beaucoup plus grand que son prix de revient ; car son bénéfice, c’est le prix de son travail.



Exemple : Avec un sachet de graines à 150 F, et 500 F de fumier, Yahaya a pu produire 120 kg de pommes de terre. Il a payé 100 F de transport. Il vend ses pommes de terre à 175 F le kilo. Le prix de vente est donc de 21 000 F, pour seulement 1 650 F de prix de revient. Mais le bénéfice (19 350 F) représente le prix de son travail pour produire ces pommes de terre.

3 Ali est tailleur. Il achète 12 mètres de tissu à 500 F le mètre. Il coud un complet « *grand boubou* » et le vend à 8 000 F. Pour ce travail, il a acheté pour 650 F de fil. Que penses-tu de son bénéfice ?

4 Un menuisier travaille 2 jours pour fabriquer une table. Il a dû acheter pour 3 250 F de planches, et 2 m de « *formica* » à 1 135 F le mètre. Le transport lui a coûté 650 F. Il compte gagner 1 400 F par jour de travail. Combien doit-il vendre sa table ?

Afbeelding 4

cultuurverschillen. Maar als ieder leerboek over didactiek leert dat er rekening gehouden moet worden met de beginsituatie van de leerling, dan zie je de bui al hangen: die beginsituatie is in de Derde Wereld behoorlijk anders dan hier. Daar moet je rekening mee houden als je voor de klas staat. En ook als er nieuwe leerplannen of schoolboeken gemaakt moeten worden. Inderdaad: twee maal twee is vier, waar je ook bent op de wereld, maar *hoe* je dat onderwijst, dat hoeft niet overal op dezelfde manier te gaan. Daarbij zou je gebruik moeten maken van de plaatselijke culturele gegevenheden.

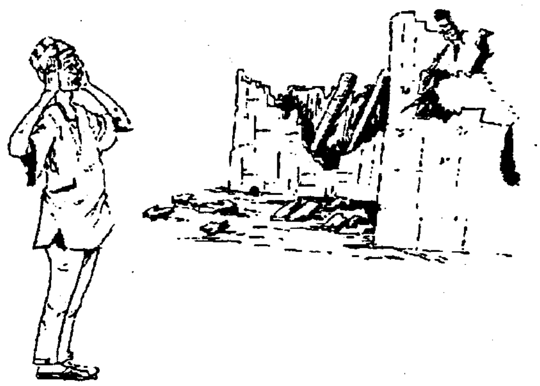
Soms zie je, bijvoorbeeld aan het gebruik van namen, dat het wel degelijk om lokaal-gemaakte of lokaal-aangepaste boeken gaat. Dan staat er Mafeteng of Maseru in plaats van Liverpool of Londen. Of pula en thebe in plaats van ponden en pennies. Dan staan in een cirkeldiagram plaatselijke gewassen. Daar kan een leerling zich iets bij voorstellen. Dat is een eerste stap. (Zie afbeelding 1,2 en 3)

Soms probeert men een directe bijdrage te leveren aan het oplossen van de problemen waar leerlingen mee geconfronteerd worden. Zo

4 Comment remplacer le matériel qui s'abîme ?

AMORTISSEMENT : les frais causés (de temps en temps) par le matériel qui s'use ou se gâte, et qu'il faut remplacer.

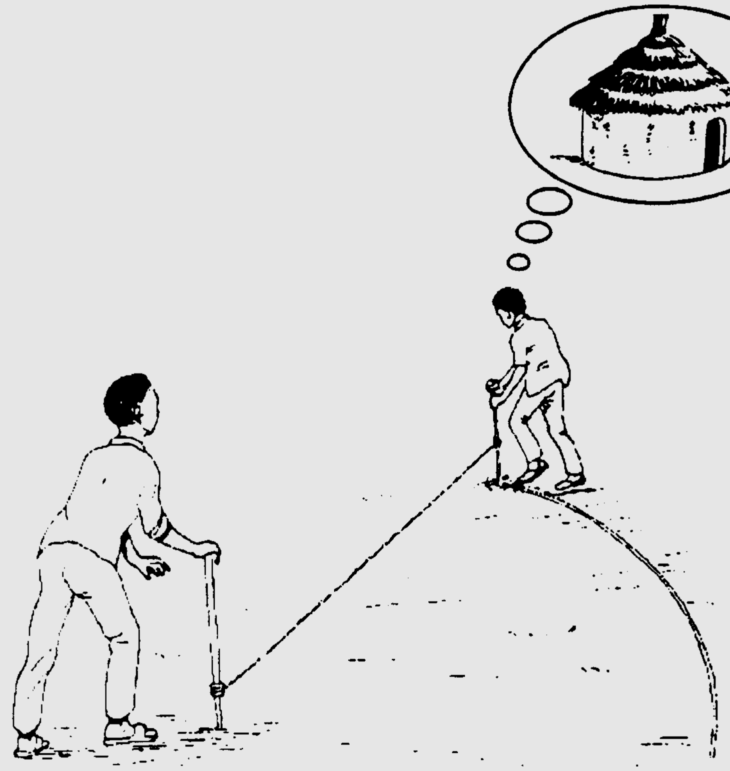
Exemple : Balki et Zara tiennent chacune une table. Elles vendent du riz, de la pâte, de la salade. Chacune d'elles fait un petit bénéfice.
Balki dépense tout, au fur et à mesure qu'elle le gagne. Zara met 100 F de côté chaque semaine « *pour le cas où quelquechose arrive* ». Les deux restauratrices ne se sont pas rendu compte que leur terrain a des termites. Un jour, les 2 tables se cassent : Balki doit fermer sa boutique, tandis que Zara peut racheter une nouvelle table à 4 000 F et continuer son commerce. Les 100 F que Zara économise chaque semaine ont suffi pour l'amortissement (c'est-à-dire, dans ce cas, le prix de la table qu'il a fallu remplacer).



$\boxed{7}$ Sani et Harouna sont deux propriétaires de maisons. Chacun d'eux loue sa maison à 25 000 F par mois. Toutes les fins de mois, Sani se précipite chez son locataire; il récupère son argent pour aller le dépenser. Harouna fait des réparations si nécessaire et place le reste de l'argent dans son carnet de banque. Après une dizaine d'années, la maison de Sani s'écroule, suite à une forte pluie. Harouna vient de payer un « *carré* » à 600 000 F qu'il s'apprête à construire. Qu'est-ce qui va arriver à Sani ? Et à Harouna ? Pourquoi ?

$\boxed{8}$ Sitou, le réparateur de vélo (voir 3e paragraphe), met 125 F de côté chaque semaine. Un jour, sa pompe est cassée. Il voit avec soulagement qu'il a juste assez pour la remplacer. Depuis combien de temps économise-t-il ?

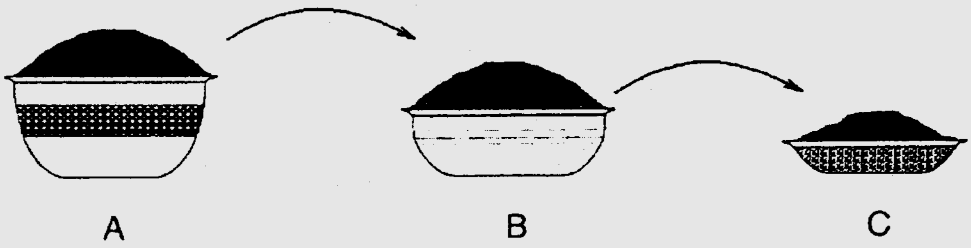
Afbeelding 5, INDRAP, Niger; voor groep 7



Afbeelding 6, INDRAP, Niger; voor groep 6

Choisis des unités différentes et reprends l'exemple suivant :

Du plus grand au plus petit :



B sera rempli en monticule ; il en restera dans A

C sera rempli en monticule ; il en restera dans B

On a trouvé beaucoup d'unités pour mesurer les grains : petites calebasses ; louche ; tia ; mudu ; zaka ; ...

Afbeelding 7, INDRAP, Niger; voor groep 5 worden kinderen in veel Derde-Wereldlanden al jong ingeschakeld in het arbeidsproces, bijvoorbeeld in de handel. Dan is het van belang dat zij de meest elementaire principes van de economie kennen. Het materiaal in afbeelding 4 t/m 7 is ontwikkeld door het INDRAP in Niger. Het is leerstof voor de lagere (!) school, groep 7, 6 en 5, in de huidige Nederlandse terminologie.

Zelfs een moeilijk begrip als vervangingskosten wordt behandeld. (Zie afbeelding 4)

Afbeelding 5 is een mooi voorbeeld van wat we hier realistisch rekenen zouden noemen. Maar ook bij onderwerpen als meetkunde en meten kan uitgegaan worden van de plaatselijke situatie.(Zie afbeelding 6 en 7)

Ethnomathematica

Er is echter ook een veel radicalere benadering mogelijk. Een stroming die wordt aangeduid met de term Ethnomathematica en waarvan de Braziliaan D'Ambrosio de vader kan worden genoemd. Uitgangspunt van deze beweging is dat iedere cultuur zijn eigen wiskunde heeft ontwikkeld om om te kunnen gaan met de praktische problemen van het dagelijks leven en dat je die ontstaansgeschiedenis, in verkorte vorm, kunt gebruiken voor je onderwijs. Wiskunde is in deze benadering een cultureel produkt, ontwikkeld als resultaat van verscheidene activiteiten. Alan Bishop[4] onderscheidt daarbij zes fundamentele activiteiten die universeel zouden zijn, in de zin dat zij door iedere cultuur bedreven worden: tellen, plaatsbepalen, meten, ontwerpen, spelen en uitleggen. Ook Afrika telt, zoals de titel luidt van een onderzoek door Zaslavsky[5], waarin zij onder andere beschrijft hoe zogenoemde primitieve volkeren, als de sociale noodzaak daartoe bestaat, manieren ontwikkelen om ook grote aantallen te beschrijven, gebruik makend van een systeem van kauri-schelpen. Ook de Navajo's bepalen hun positie ten opzichte van hun ruimtelijke omgeving, al doen zij dat niet op dezelfde manier als wij[6]. De Navajo's "tend to speak of the world in terms of process, event and fluxes, rather than parts and wholes or clearly distinguishable static realities". Ook de Kpelle in Nigeria, waar ik het in mijn vorige artikel over had, meten, bijvoorbeeld met de kopi als eenheid, een kop waarmee hoeveelheden rijst worden gemeten[7].
D'Ambrosio stelt dat de praktische wiskundige vaardigheden die elk kind in de Derde Wereld van huis uit leert, omdat ze zo essentieel zijn voor het dagelijkse leven, op school niet gewaardeerd worden. Sterker nog: ze worden daar verworpen, onderdrukt en uiteindelijk vergeten. Dat leidt tot psychologische blokkades als de schoolwiskunde moet worden geassimileerd. Hij pleit ervoor om juist aan te sluiten bij deze 'spontane', traditionele, wiskundigheid en 'Ethnomathematica' te erkennen en op te nemen in het leerplan.
Het idee klinkt logisch: aansluiten bij de beginsituatie. Maar wat weten wij eigenlijk van deze 'verborgen' wiskunde? Ze is vaak impliciet en informeel. Ze is deels verdwenen. Er zijn weinig geschreven bronnen die geraadpleegd kunnen worden. Hoe reconstrueer je deze traditionele wiskunde? En hoe maak je vervolgens de vertaling naar een leerplan, een leerboek?
Er zijn inmiddels interessante aanzetten hiertoe gegeven. Daarover wil ik het in een volgend artikel hebben: een meer concrete invulling van wat Ethnomathematica voor de Derde Wereld zou kunnen betekenen. Ik schrijf 'voor de Derde Wereld', maar het hoeft geen ver-van-mijn-bed-show te zijn. Ook in Nederland, op weg naar een multi-culturele samenleving, kunnen wij inspiratie putten uit deze nieuwe benadering.

Noten

* uiteraard kan, ook in het vervolg, voor 'hij' ook 'zij' gelezen worden

1 *Munir Fasheh* (1982)
Mathematics, Culture and Authority
For the Learning of Mathematics 3, 2

2 *Paulus Gerdes* (1988)
On culture, geometrical thinking and mathematics education
Educational Studies in Mathematics 19

3 *Murray Macrae* (1994)
A legacy of apartheid: the case of mathematical education in South Africa
Int. J. Educational Development, Vol 14, 3

4 *Alan J. Bishop* (1988)
Mathematical Enculturation
Kluwer Academic Publishers

5 *Zaslavsky* (1973)
Africa Counts
Prindle, Weber and Schmidt, Inc., Boston, Mass.

6 *Pinxten, R.* (1983)
The Anthropology of Space
University of Pennsylvania Press

7 *Gay, J. and Cole, M.* (1967)
The New Mathematics in an Old Culture
Holt, Rinehart and Winston, New York

Computer Algebra in het voortgezet onderwijs

Wim Förster

De werkgroep CAVO

Sedert december 1993 bestaat er een werkgroep Computer Algebra Voortgezet Onderwijs, afgekort tot CAVO. Deze werkgroep functioneert onder auspiciën van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en krijgt steun van de TU Delft en het expertisecentrum Computer Algebra Nederland (CAN). CAN is promotor en distributeur van computeralgebraprogramma's in Nederland.
Onder de bezielende leiding van Agnes Verweij en Paul Drijvers wordt er door een groep enthousiaste docenten lesmateriaal ontwikkeld voor het gebruik van computer algebra (CA) in het voortgezet onderwijs.
Tevens wordt er gepraat over de manier waarop CA geïntegreerd kan worden in het huidige en nieuwe lesprogramma voor wiskunde.
CA-programma's bestaan er in ruime mate en in de toekomst zullen er nog diverse bijkomen. Voor het voortgezet onderwijs vond de werkgroep CAVO het programma Derive op dit moment het meest geschikt.
Via CAN kregen de werkgroepleden en ook hun scholen het programma Derive in bruikleen. In de eerste bijeenkomsten werden onderwerpen uitgekozen die geschikt zouden zijn voor CA-practica. Thuis werd practicummateriaal ontworpen dat op de eigen school werd getest. Daarna werd er gepraat over de inhoud en vormgeving van het materiaal.
We vonden dat alle practicummateriaal aangeboden moest worden volgens een uniform model. Aan het bijgevoegde voorbeeld ‘Wortels benaderen met de methode van Heron’ is te zien voor welke opbouw we uiteindelijk gekozen hebben: een docentenblad, één of meer opdrachtenbladen, en een Derive-blad.

Een bundel practica

Inmiddels is het ontwikkelde materiaal tot een bundel verwerkt. Deze bundel omvat de volgende practica: kennismaken met Derive; grafieken tekenen en vergelijkingen oplossen; transformaties; parabolen met een parameter; rond veeltermfuncties; introductie matrices; matrices toepassen; roodborstjes*; meetkundige rijen; wortels benaderen met de methode van Heron; eindige sommen; een onderzoek naar limieten van rijen; de inhoud van een afgeknotte kegel; priemgetallen; booglengte en π.
Deze gebundelde practicummaterialen kunnen besteld worden bij:
CAN
Kruislaan 419
1098 VA Amsterdam
telefoon 020-5608400
fax 020-5608448 http://www.can.nl.
De prijs per bundel is ƒ 20,-.
Kopiëren van practicummaterialen ten behoeve van gebruik in de klas is toegestaan. Hopelijk zijn er in den lande nog vele enthousiaste collega's die het aangeboden materiaal in hun eigen lessituatie gaan gebruiken, verbeteren en … die misschien wel nieuwe pakketjes gaan ontwikkelen. We hopen dat zij hun leservaringen met en commentaar op de bundel via CAN aan CAVO kenbaar willen maken.

CA en de toekomst

Een belangrijke drijfveer om met CAVO aan de slag te gaan, was het idee dat ons wiskundeonderwijs in de loop van de komende decennia grote veranderingen zal ondergaan. Verwacht mag worden dat het handmatig oefenen met rekentechnieken, dat momenteel nog een groot deel uitmaakt van de lestijd, een geringere rol zal gaan spelen. Differentiëren, integreren, rekenen met matrices, oplossen van stelsels vergelijkingen en ongelijkheden, het verwerken van statistische gegevens, dit alles zal (voor een deel?) met behulp van CA-programma's worden uitgevoerd. Nieuwe onderwerpen zoals numerieke benaderingen, getaltheorie, chaoswiskunde, 3D-grafieken en nog veel meer komen binnen het bereik van onze leerlingen. Daarbij zal er een geheel nieuw didactisch concept ontwikkeld moeten worden, anders lopen we het gevaar dat wiskunde voor de leerlingen een ‘black-box’-gebeuren wordt. Een leerling die CA gebruikt, dient te weten waar en waarom hij/zij een bepaalde techniek kan toepassen. Om dit te bereiken, zullen wij, als onderwijs-wiskundigen, dienen te anticiperen op de komende veranderingen.

CAVO na de bundel

Publicatie van de bundel practica betekent voor de CAVO-leden de afsluiting van de eerste fase van hun voorbereiding op de toekomst. In september ’95 is besloten met CAVO

door te gaan. De werkwijze blijft gelijk, maar de inhoud van de te ontwerpen practicummaterialen proberen we af te stemmen op de nieuwe programma's voor de tweede fase van havo en vwo. Daarbij denken we niet alleen aan de verplichte onderwerpen, maar ook aan extra stof die in de vorm van Zebra-pakketjes een plaats in de nieuwe tweede fase zou kunnen krijgen.
Collega's die tijd en zin hebben om in CAVO-verband dit soort ontwerpwerk te doen en die het ook aandurven al vóór invoering van de nieuwe programma's het een en ander met hun leerlingen uit te proberen, worden uitgenodigd kontakt op te nemen met:
Agnes Verweij
tel. 015-2785808 (werk)
of 071-5131028 (privé).

Wortels benaderen met de methode van Heron

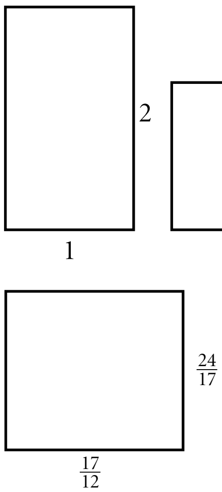
Een practicum van de werkgroep CAVO

Docentenblad

Globale informatie:
Het practicum is geschreven voor klas 5 vwo wiskunde B.
Het doel van het practicum is het benaderen van wortels door iteratie en het ontwikkelen van enig gevoel voor nauwkeurigheid van een benadering.
Praktische informatie:
De leerlingen moeten enigszins vertrouwd zijn met de begrippen ‘rij’, ‘limiet van een rij’ en ‘iteratie’.
De ervaring met Derive die het practicum vereist, bestaat uit enige handigheid met het programma in het algemeen. Het practicum vergt ongeveer twee lesuren.
Didactische informatie:
Dit practicum maakt nadrukkelijk gebruik van de mogelijkheid van Derive om zowel exact als met een gewenste nauwkeurigheid te rekenen.
Opgave 8 is een generalisatie naar de derde dimensie. Voor snelle leerlingen is dit wellicht interessant. Wie aan deze opgave niet toekomt, mist niets essentieels.

Opdrachtenblad

Hoe groot is $\sqrt{2}$ eigenlijk? Niemand weet dat precies. Waarschijnlijk heeft Heron van Alexandrië, een Egyptisch wiskundige uit de eerste eeuw van onze jaartelling, de volgende manier bedacht om dit getal nauwkeurig te benaderen.
Een vierkant met oppervlakte 2 heeft zijden met lengte $\sqrt{2}$. Op zoek dus naar zo'n vierkant. De eerste poging



Figuur 1

zie je linksboven: een rechthoek met basis 1 en hoogte 2. De oppervlakte is wel 2, maar het is nog lang geen vierkant.
De tweede rechthoek ontstaat door als basis het gemiddelde te nemen van de twee zijden van de eerste:

$$\text{basis} = \frac{(1+2)}{2}$$

Dit is gelijk aan $\frac{3}{2}$
De hoogte moet dan gelijk zijn aan $\frac{4}{3}$ want anders is de oppervlakte niet gelijk aan 2. De tweede rechthoek die je zo vindt, lijkt al meer op een vierkant en de basis ligt al dichter bij de gezochte $\sqrt{2}$.
Deze werkwijze kun je herhalen: de derde rechthoek benadert het vierkant al weer beter dan de tweede en de basis is een betere schatting van $\sqrt{2}$.
Dit herhalen van eenzelfde procedure heet *itereren.* Hieronder ga je door middel van iteratie enkele wortels benaderen.

1a Ga na dat de afmetingen van de derde rechthoek inderdaad op de beschreven manier uit die van de tweede volgen.
b Hoe groot is het verschil tussen $\frac{17}{12}$ en $\sqrt{2}$ volgens je rekenmachine?

De rij rechthoeken wordt voortgezet.
2a Welke afmetingen heeft de vierde rechthoek?
b Welke benadering van $\sqrt{2}$ geeft dit?

We noemen $a(n)$ de basis van de n-de rechthoek die op deze manier ontstaat. Dan geldt dus dat $a(1) = 1$, $a(2) = \frac{3}{2}$ en $a(3) = \frac{17}{12}$.
3 Bereken $a(4)$, $a(5)$, $a(6)$, ... , net zolang tot er geen verschil meer is tussen deze benadering van $\sqrt{2}$ en die van je rekenmachine. Hoeveel termen heb je nodig?
4 In Derive kun je met een precisie van 30 cijfers werken. Hoe lang duurt het voor de iteratie dezelfde waarde geeft als de benadering die het programma rechtstreeks geeft voor $\sqrt{2}$?

Kennelijk ‘kruipt’ de rij naar een limietwaarde toe die gelijk is aan $\sqrt{2}$. Opgaven 5 en 6 leiden tot het bewijs dat dit de enig mogelijke positieve limiet is. Dat de rij inderdaad convergeert, wordt niet bewezen.
5a Ga na dat de hoogte van de n-de rechthoek gelijk is aan

$$\frac{2}{a(n)}$$

b Verklaar dat de waarde van $a(n+1)$ op de volgende manier van die van $a(n)$ afhangt:

$$a(n+1) = \frac{(a(n) + \frac{2}{a(n)}(n))}{2}$$

6a Veronderstel dat de rij een limietwaarde a heeft.

Dan geldt voor deze a dat

$$a = \frac{a + \frac{2}{a}}{2}$$

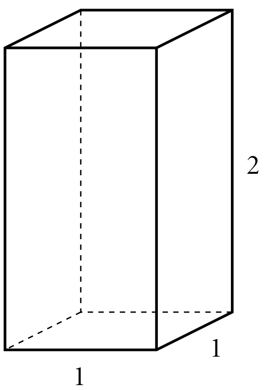
Verklaar dit.

b Welke waarde(n) kan a kennelijk hebben?

7a Hoe verandert de uitdrukking van opgave 5b als je niet $\sqrt{2}$ maar $\sqrt{3}$ wilt benaderen?

b Benader $\sqrt{3}$ in 6 decimalen nauwkeurig.

8 Met Herons methode kan men ook $\sqrt[3]{2}$ benaderen. Begin met een balk met een vierkant grondvlak. De zijde van het vierkant is 1 en de hoogte van de balk is 2, zodat ook de inhoud 2 is.



Figuur 2

Van de tweede balk heeft het vierkante grondvlak als lengte het gemiddelde van basis en hoogte van de eerste, dus $\frac{3}{2}$.

a Ga na: de hoogte van de tweede balk is $\frac{8}{9}$.

b Hoe kun je de uitdrukking van opgave 5b aanpassen voor deze situatie?

c Benader $\sqrt[3]{2}$ in 10 decimalen nauwkeurig.

Noot

* Roodborstjes is de naam van een opgave uit een vwo A-examen van enkele jaren geleden.

▼ Lees verder op pag. 144

40 jaar geleden

967

Aan weerszijden van het vlak van de gelijkzijdige driehoek ABC, waarvan de zijden $5\sqrt{3}$ cm zijn, kiest men de punten D en E zodanig, dat DA, DB, DC, EA, EB en EC allen $5\sqrt{2}$ cm zijn. Men beschouwt het zesvlak met A, B, C, D en E als hoekpunten.

a. Bereken de afstand DE.

b. Onderzoek of er een bol bestaat, die door alle hoekpunten van het zesvlak gaat. Indien zo'n bol bestaat, bereken dan de straal.

c. Onderzoek of er een bol bestaat, die aan alle zijvlakken raakt. Indien zo'n bol bestaat, bereken dan de straal.

d. Onderzoek of er een bol bestaat, die aan alle ribben raakt. Indien zo'n bol bestaat, bereken dan de straal.

968

Gegeven is een regelmatige vierzijdige pyramide $T.ABCD$. Men brengt door de ribbe BC van het grondvlak een vlak aan, dat de opstaande ribben TA en TD opvolgend in de punten P en Q snijdt.

a. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt van BQ en CP, als P de ribbe TA doorloopt.

b. Ook van BP en CQ.

c. Bereken de verhouding van de inhouden van de drie delen, waarin de vlakken, die door BC gaan en TA in drie gelijke delen verdelen, de pyramide verdelen.

(ontleend aan het Eindexamen H.B.S.-B in 1955)

Noot

Vraagstukken uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 43 (1955-1956).

INTERVIEW

‘Je moet aansluiten bij wat de leerlingen wèl kunnen’

Martinus van Hoorn

Leo van Kemenade, 44 jaar, is sinds zijn 23e jaar leraar, tegenwoordig aan het Christiaan Huygens College te Eindhoven. Deze school is ontstaan door een fusie van vier scholen, en telt in totaal 1600 à 1700 leerlingen.

Leo van Kemenade zit nog gewoon op zijn vertrouwde lokatie, en geeft les aan alle klassen van het (i)vbo.

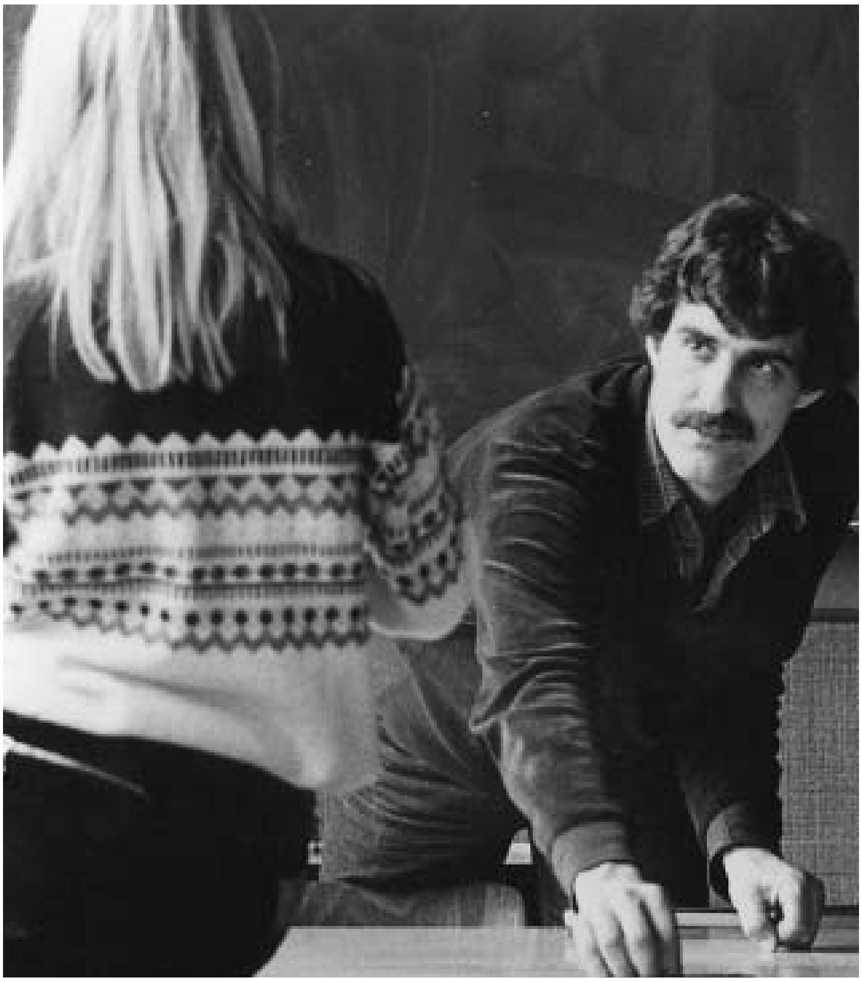
Wil je iets vertellen over de leerlingen op jouw lokatie, en over de klassen die je dit jaar hebt?

We hebben hier 190 leerlingen, van wie 120 met een i-indicatie. Er zijn ivbo-klassen, gemengde ivbo/vbo-klassen en dit jaar ook vbo/mavo-klassen. Volgend jaar zitten de i-leerlingen in afzonderlijke i-klassen, in zulke klassen zitten nu ook al hoogstens 16 leerlingen.
De vbo-afdelingen zijn Verzorging en Mode & Kleding, en nu ook Administratie. In de eerste twee leerjaren hebben we nog 20 % jongens, maar die stromen na twee jaar vrijwel allemaal door naar een andere vbo-opleiding. Misschien wordt het met Administratie anders. Verder is 17 % van de leerlingen allochtoon.

Welke methode gebruik je, en op welke gronden heb je die methode gekozen?
Ik kon inderdaad zelf kiezen. Het is Realistische Wiskunde geworden, omdat daar vanaf het eerste jaar direct een i-boek bij was; dit is een werkboek. Sinds de fusie is er wel weer een gesprek over de te gebruiken methodes op gang gekomen. Waarschijnlijk gaan we veranderen. Malmberg geeft verder een box met materialen uit (niet per se bij de methode te gebruiken), en sheets. Maar ik heb zelf ook materiaal gemaakt.
In de derde klas heb ik het werkboek nog niet gebruikt, de leerlingen moeten van mij ook zelf op ruitjespapier tekeningen maken, en andere dingen meer zelfstandig doen.

Welke lesvormen hanteer je?
Sinds de fusie is er uitvoerig over de werkvormen gesproken. Elk laatste kwartier van een les willen we de leerlingen laten werken. In mijn lessen plan ik 20 minuten bespreking, 15 minuten klassikale uitleg, en dus 15 minuten zelf werken. Ik doe geen groepswerk.

Hoe gaat het met de toetsing van de basisvorming?
In het tweede leerjaar, vorig jaar, hebben alle leerlingen toets 1 gedaan.

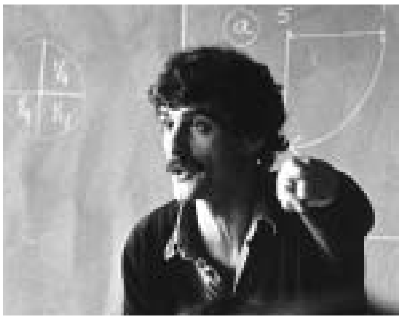


Voor de i-leerlingen was dat waardeloos, het was een plaag voor ze. Mijn twaalf i-leerlingen hadden samen nog een stuk minder dan de maximale score.

Voor de vbo-leerlingen was de toets wel moeilijk, maar het resultaat viel me niet tegen. De methode had ze er goed op voorbereid. Maar ik blijf me afvragen of het examen al niet genoeg is voor deze leerlingen.

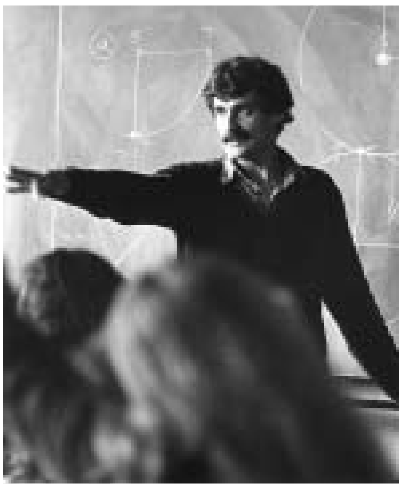
Je draait mee in een allochtonenproject. Kun je daar meer over vertellen?
Dit is het zgn. ALL-project van de gemeente Eindhoven, dat dit jaar begonnen is. Wij zijn proefschool. De gemeente wil het afhaken tegengaan, wil bevorderen dat (ook) allochtone leerlingen een vervolgopleiding kiezen.
Er zijn bijeenkomsten voor de docenten en voor de allochtone leerlingen uit de derde klassen. De leerlingen krijgen 7 bijeenkomsten, waar telkens mensen van de gemeente bij zijn. De eerste keer werd er geïnventariseerd om welke leerlingen het gaat, waar ze nu zitten en welke verwachtingen ze hebben. Dit was gekoppeld aan een gezellige avond. Later gaat het over het kiezen van pakketten, en wellicht ook over andere manieren om de stof aan te bieden. Hier zit dan weer een begeleiding door het APS bij, in verband met 'Alle leerlingen bij de les'. Hier kan een teamtraining uit voortkomen.

Wat vind je het belangrijkste in het wiskunde-onderwijs voor vbo-leerlingen?
Het gaat om de vormende waarde. Ze moeten oppervlakten en inhouden kunnen uitrekenen bijvoorbeeld. Ze moeten grafische voorstellingen begrijpen.



Die heel beroeps- en praktijkgerichte wiskunde is niet zo zinvol, omdat de meeste van mijn leerlingen zulke wiskunde later toch niet gebruiken. Maar juist de algemeen vormende aspecten komen ze later wel tegen.

En wat vind je het belangrijkste voor een wiskundeleraar?
Voor deze leerlingen moet je geduld hebben en je moet creatief zijn. Je moet open voor ze staan en aansluiten bij wat ze wèl kunnen - de positieve benadering.
Ik wil niet boven de leerlingen staan, maar tussen ze in.

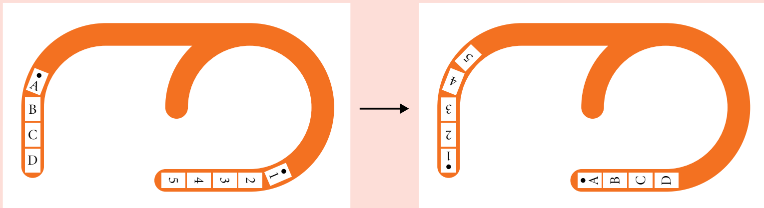


Recreatie

Opgave 667

Nederland kent drie verschillende boekenclubs: 'ECI', 'Nederlandse Boekenclub' en 'Boek en Plaat'. Als u lid bent, dan kunt u nu voor ƒ 19,90 een exclusief puzzelboek kopen: 'Optische Illusies en andere Puzzels' van Jack Botermans en Jerry Slocum. (ISBN 90 67 61 2243). Er worden zeer veel antieke puzzels getoond uit de puzzelcollectie van Jerry Slocum. Zoals de titel al aangeeft zijn het meestal optische grapjes of zoekplaatjes. Jammer dat de Hollandse sigarenzakjes met hun zoekplaatjes en rebussen ontbreken. De aankondiging in de clubcatalogi als 'Onweerstaanbaar voor puzzelfanaten' is een tikkeltje overdreven.

Naar aanleiding van de opening van de Eurotunnel brengt de Engelse puzzelfirma PENTANGLE een houten rangeerpuzzel op de markt: 'Chunnel Trouble ?'.



In Engeland staat de locomotief A met zijn wagons B, C en D. In Frankrijk staat locomotief 1 met zijn wagons 2, 3, 4 en 5. Met behulp van het zijspoor moeten ze elkaar passeren. De voertuigen zijn allemaal even groot. Op het zijspoor past slechts één voertuig. De locomotieven hebben alleen aan de achterkant een haak, waarmee ze wagons kunnen trekken (of duwen). Met de voorkant kunnen ze alleen duwen.
Als u binnen 1 maand zo kunt rangeren dat ze elkaar passeren, dan verdient u 5 punten voor de puzzelladder.

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan
Jan de Geus Valkenboslaan 262-A,

Oplossing 664

Euler definieerde een Latijns Vierkant als een *nxn*-matrix, bestaande uit *n* verschillende elementen, waarbij nergens twee dezelfde voorkwamen in een rij of kolom. Bij een Diagonaal Latijns Vierkant staan ook op de twee diagonalen nergens twee dezelfde elementen. De oplossing van het puzzeltje 'OVERAL 15' was zo'n D.L.V. voor $n = 5$. In (1) wordt bewezen dat voor $n \geq 4$ er minstens een D.L.V. van orde n bestaat. Dus ook voor $n = 8$ bestaat er een oplossing. (Alle getoonde oplossingen zijn van *Dick Buijs* (10 punten), Kerk-Avezaath).

$n = 5$

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

$n = 8$

1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1
2	1	4	3	6	5	8	7
7	8	5	6	3	4	1	2
4	3	2	1	8	7	6	5
5	6	7	8	1	2	3	4
3	4	1	2	7	8	5	6
6	5	8	7	2	1	4	3

3 keer $n = 8$

1	2	3	4	5	6	7	8
7	8	5	6	3	4	1	2
4	6	7	1	8	2	3	5
2	3	8	5	4	1	6	7
8	4	2	3	6	7	5	1
5	1	6	7	2	3	8	4
3	7	4	8	1	5	2	6
-	5	1	2	7	8	4	-

1	2	3	4	5	6	7	8
7	8	5	6	3	4	1	2
4	6	7	1	8	2	3	5
2	3	8	5	4	1	6	7
8	4	2	3	6	7	5	1
5	1	-	7	2	-	8	4
3	7	4	8	1	5	2	6
6	5	1	2	7	8	4	3

1	2	3	4	5	6	7	8
7	8	5	6	3	4	1	2
4	6	7	1	8	2	3	5
2	3	8	5	4	1	6	7
8	4	2	-	-	7	5	1
5	1	6	7	2	3	8	4
6	7	4	8	1	5	2	3
3	5	1	2	7	8	4	6

Bij $n = 5$ is het zelfs mogelijk dat ook op alle gebroken diagonalen de getallen verschillend zijn. W.W. Rouse Ball vatte in (2) zo'n oplossing op als een oplossing van het 5-voudig 5-koninginnenprobleem. Dat wil zeggen: de schaakkoninginnen met nummer 1 vallen elkaar niet aan. Idem voor de nummers 2, 3, 4 en 5. Letterlijk een 'superposable arrangement'. In 1914 bewees Thorold Gosset dat er voor $n = 8$ geen 'superposable arrangement' mogelijk is. De kunst is nu om uit de 92 basisoplossingen van het 8-koninginnen-probleem díe oplossingen te kiezen, die tegelijkertijd op het schaakbord neergezet kunnen worden. Het blijkt dan dat maximaal 6 sets van 8 koninginnen en 2 sets van 7 koninginnen geplaatst kunnen worden zonder dat een koningin haar eigen kleur aanvalt. Dus 62 velden zijn bezet. Dick laat ons 3 (verwante) oplossingen zien. Ook *Ad Boons* (28 punten), Tilburg en *Willem van der Vegt* (10 punten), Zwolle kwamen tot 62 velden.

Literatuur:

1 *J. Dénes en A.D. Keedwell*
Latin Squares and their Applications
(English Universities Press Ltd, 1974)

2 *W.W. Rouse Ball en H.S.M. Coxeter*
Mathematical Recreations and Essays, 13th ed.
(Dover, 1987)

Met 62 punten is winnaar van een boekenbon van ƒ 25,–:

Kees Nachtegaal
Haaswijkweg W. 42
3319 GD Dordrecht

Hartelijk gefeliciteerd.

▼ Vervolg van pag. 139

Derive-blad

De volgende aanwijzingen kunnen van pas komen bij dit Derive-practicum. De vetgedrukte hoofdletters geven de commando's aan zoals ze achtereenvolgens vanuit het Algebra-hoofdmenu gegeven moeten worden.

Wat wil je?	Hoe doe je dat?
Een wortel met Derive benaderen, bijvoorbeeld $\sqrt{2}$	**A**uthor Intypen: sqrt 2 appro**X**
Een breuk met Derive benaderen, bijvoorbeeld 17/12	**A**uthor Intypen: 17/12 appro**X**
Termen van een iteratief gedefinieerde rij berekenen, bijvoorbeeld 10 termen van de rij die begint met 1 en waarvoor geldt: $a(n+1) = a(n) + 2/a(n)) / 2$	**A**uthor Intypen: iterates $((x + 2/x) / 2, x, 1, 9)$ **S**implify of appro**X**
De precisie instellen, bijvoorbeeld op 10 decimalen	**O**ptions **P**recision Met Tab naar 'Cijfers' springen. Intypen: 10
Een vergelijking oplossen, bijvoorbeeld $x = 2/x$	**A**uthor Intypen: $x = 2/x$ so**L**ve

Mededeling

Post-universitaire cursussen

Van maandag 12 tot en met vrijdag 16 augustus 1996 worden aan de Universiteit van Luik, België, de jaarlijkse post-universitaire cursussen gegeven, met lezingen over wiskundige, natuurkundige, scheikundige en biologische onderwerpen.
De wiskundige lezingen zullen waarschijnlijk gaan over fractals, grafentheorie, Latijnse vierkanten, en de betekenis van voorbeelden. De gebruikte taal is Frans of Engels.

Voor alle informatie:
Mr. Jacques Aghion
Biochemistry, Department of Botany
B22
University of Liège
B-4000
België,
telefoon + 32 (0) 41 663 841
fax + 32 (0) 41 663 840