Orgaan van de

Nederlandse Vereniging

van Wiskundeleraren

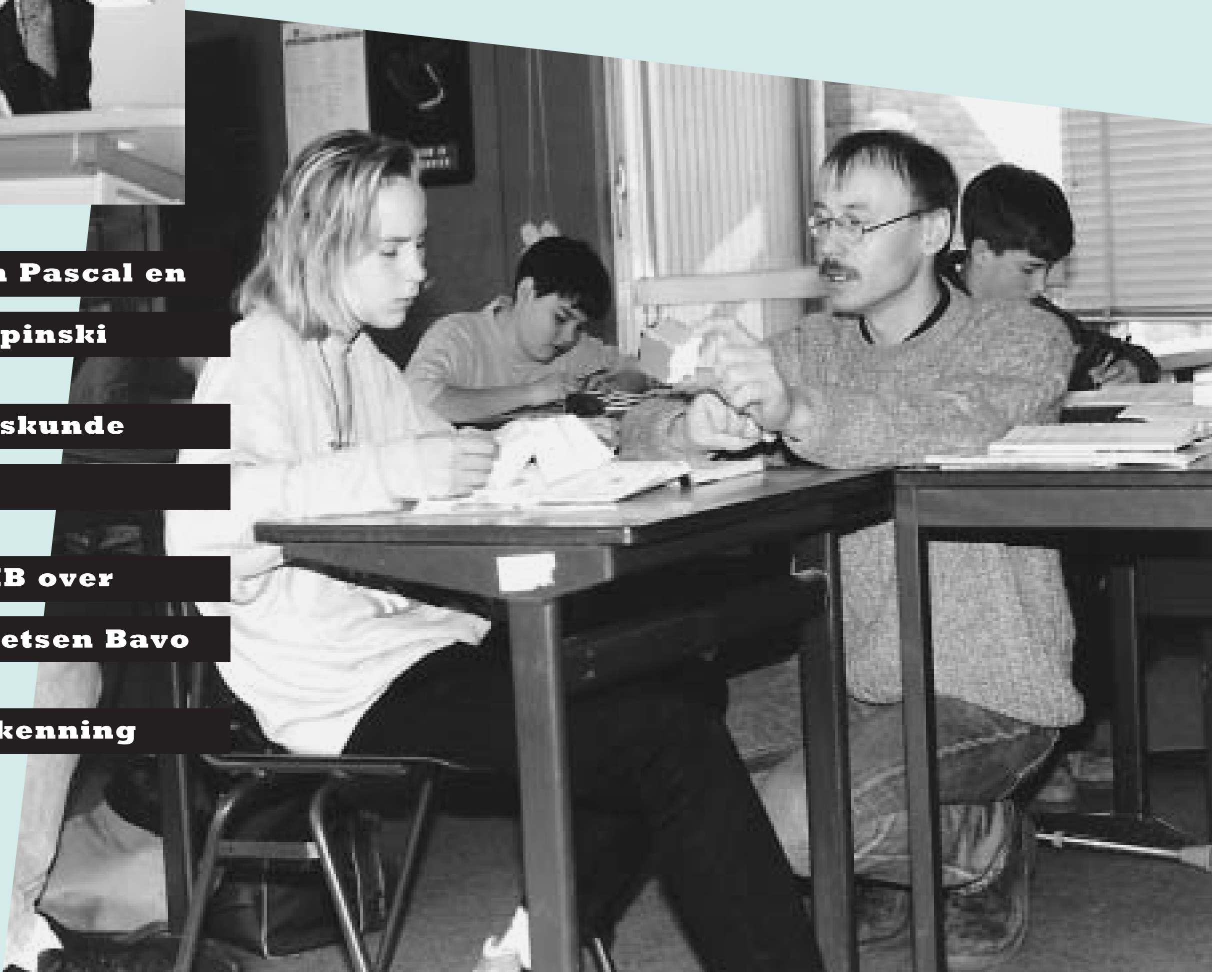
EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 70

1994-1995 april/mei

7



Driehoek van Pascal en zeef van Sierpinski

Nationale Wiskunde Dagen

Brief aan PMB over afsluitingstoetsen Bavo

Vbo zoekt erkenning

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per cursusjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam.
Voor meer informatie: zie ‘Richtlijnen voor auteurs’ op bladzijde 238. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 2 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-539985.
Secretaris
R.J. Bloem, Kornoelje 37, 3831 WJ Leusden
Ledenadministratie
F.F.J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218; fax 076-653218.
Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 65,00 per verenigingsjaar; voor studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de VVWL *f* 47,50; contributie zonder Euclides *f* 40,00.
Opgave van nieuwe leden aan de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 71,00. Een collectief abonnement (6 exemplaren of meer) kost per abonnement *f* 48,00. Opgave bij de ledenadministratie (adres: zie boven).
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgiro hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer.
Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar.
Annuleringen dienen vóór 1 juli te worden doorgegeven aan de ledenadministratie.
Losse nummers *f* 12,50.

Advertenties

Advertenties sturen naar:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4, 7061 WR Terborg; tel. 08350-24337
of naar:
L. Bozuwa, Merwekade 90, 3311 TH Dordrecht; tel. 078-145522.

Inhoud

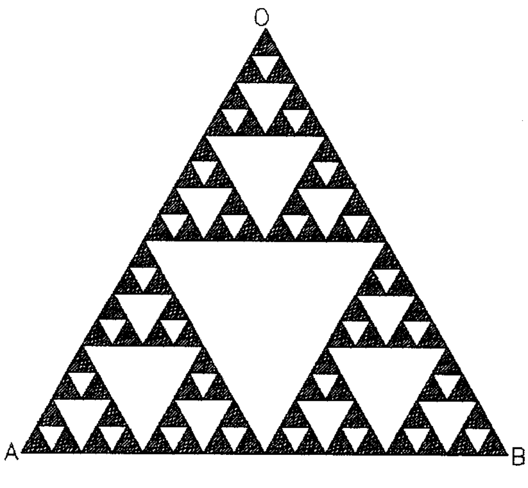
Van de driehoek van Pascal naar de zeef van Sierpinski

L. van Schalkwijk

De driehoek van Pascal en de zeef van Sierpinski hebben op een verrassende wijze met elkaar te maken. Om dat in te zien is geen geavanceerde wiskunde nodig noch veel rekenwerk. Als je het verschil kent tussen even en oneven, weet wat puntsymmetrie inhoudt, en een beetje kunt rekenen met tweetallig geschreven getallen, dan heb je genoeg wiskundige bagage.

De zeef van Sierpinski

De zeef van Sierpinski kun je op verschillende manieren construeren. De bekendste is wel de volgende. Neem een gebied met een gelijkzijdige driehoek als rand. Verdeel dit gebied in vier kleinere gelijkzijdige driehoeken door de middens van de zijden met elkaar te verbinden. Laat vervolgens het inwendige van de middelste driehoek weg. Je houdt drie gebieden over, met een gelijkzijdige driehoek als rand, die elk half zo groot zijn als de eerste. Vervolgens herhaal je dit procédé met elk van deze drie nieuwe driehoekige gebieden. Enzovoort. Als je dit vier keer gedaan hebt krijg je de figuur van afbeelding 1.



afbeelding 1

Het driehoekige gebied waarmee we beginnen noem ik S_0 en het gebied dat je krijgt na n maal het procédé te hebben toegepast S_n. De zeef van Sierpinski (S) is de limietfiguur die uit dit proces ontstaat:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Plaatjes zoals in afbeelding 1 geven in zekere zin een verkeerde indruk van de zeef van Sierpinski. Je kunt immers gemakkelijk narekenen dat de oppervlakte van S gelijk is aan 0. Er komen in S dus geen driehoekige gebieden meer voor. S is ook zeker niet de lege verzameling, want elk punt dat in enige S_n randpunt is van één van de daarin voorkomende driehoekige gebieden, is ook een punt van S.

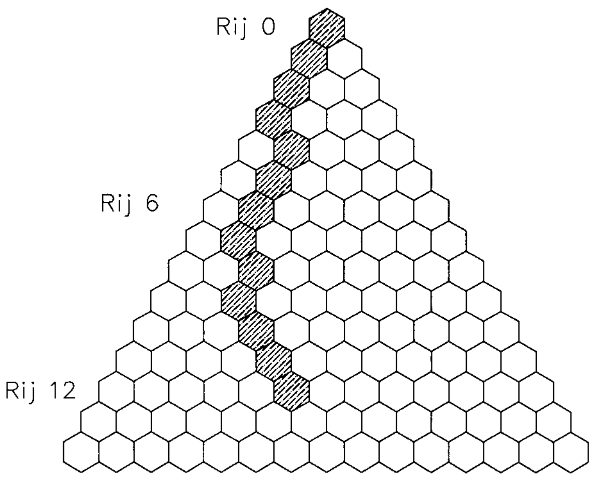
Een andere manier om de zeef te construeren is met behulp van een *itererend functiestelsel (IFS)*. Een *Sierpinski-IFS* bestaat uit een drietal functies f_1, f_2 en f_3, die als volgt kunnen worden gedefiniëerd (Zie afbeelding 1; O, A en B zijn de hoekpunten van de startdriehoek):

- f_1 vermenigvuldigt de invoer ten opzichte van het hoekpunt O met $\frac{1}{2}$;
- f_2 doet hetzelfde als f_1, maar verschuift vervolgens het beeld over de helft van vector OA;
- f_3 doet hetzelfde als f_1, maar verschuift vervolgens het beeld over de helft van vector OB.

Als je één keer het Sierpinski-IFS toepast op S_0 krijg je S_1; neem je vervolgens S_1 als invoer dan krijg je S_2, enzovoorts. Ook bij dit proces ontstaat de zeef van Sierpinski als limietfiguur. Het merkwaardige is dat S niet alleen het resultaat is wanneer je start met een gelijkzijdige driehoek, maar ook wanneer je met bijvoorbeeld een vierkant of cirkelvormig gebied begint. Er zijn verschillende boeken waarin dit mooi wordt beschreven (Bijvoorbeeld *Fractals for the classroom* van Peitgen, Jürgens en Saupe, ISBN 0-387-97041-X).

De driehoek van Pascal

Van de driehoek van Pascal kun je mooie plaatjes maken door te werken met een geraamte van zeshoeken. We nummeren de rijen zeshoeken van boven naar beneden, te beginnen met 0. In elke rij nummeren we de zeshoeken van links naar rechts, weer te beginnen met 0. De zeshoek in rij *n* met nummer *k* noem ik *zeshoek (n, k)*, of kortweg *(n, k)*. Elke zeshoek kan via tussenliggende zeshoeken met de bovenste worden verbonden. We beperken ons tot verbindingswegen van minimale lengte. Er komen in één verbindingsweg dus niet twee zeshoeken voor die in dezelfde rij liggen. In afbeelding 2 is een weg getekend van de top naar de zeshoek (12, 5).



afbeelding 2

In elke zeshoek schrijf ik nu het totale aantal van die kortste wegen. Het getal dat in zeshoek (12,5)

komt te staan, noemt men gewoonlijk $\binom{12}{5}$.

Het aantal verbindingswegen van de zeshoek (0,0) met zichzelf stel ik gelijk aan 1.

Dus $\binom{0}{0} = 1$. Je kunt makkelijk begrijpen

dat $\binom{n}{0} = 1$ en ook $\binom{n}{n} = 1$ voor elk natuurlijk getal *n*.

Iedere weg van (0,0) naar (12,5) komt door (11,4)

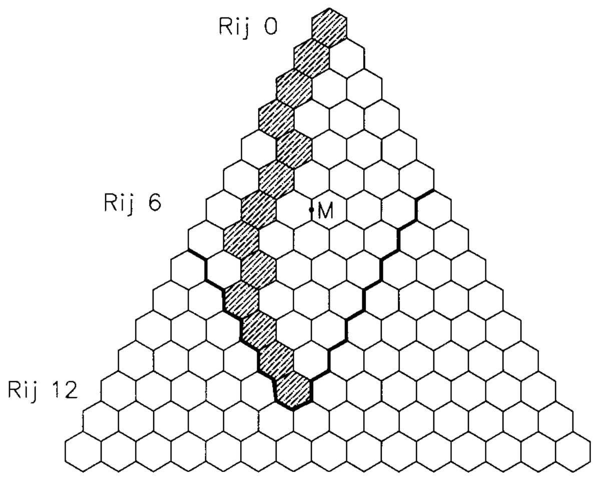
òf (11,5), dus $\binom{12}{5} = \binom{11}{4} + \binom{11}{5}$.

Algemeen geldt: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

De getallen in de driehoek van Pascal zijn hiermee in principe allemaal te berekenen.

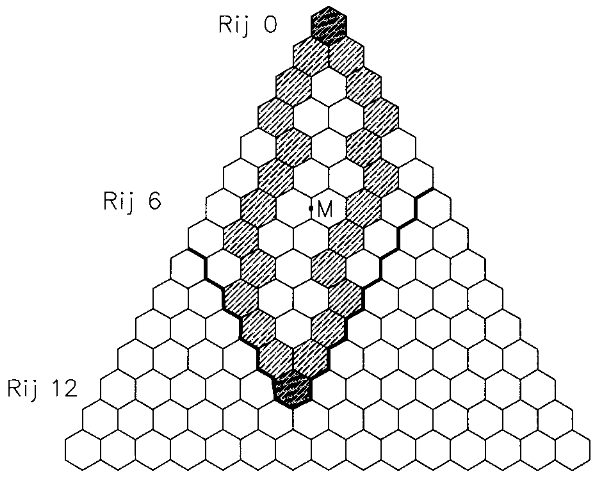
Even of oneven

Om het verband te vinden tussen de driehoek van Pascal en de zeef van Sierpinski is het niet nodig om de getallen in de driehoek van Pascal precies te kennen. Je hoeft alleen maar te weten of ze even of oneven zijn. Daarom ga ik, aan de hand van een paar voorbeelden, een manier beschrijven waarmee je dat kunt uitzoeken zonder die getallen te berekenen.



afbeelding 3

Alle wegen van (0,0) naar (12,5) liggen binnen het ‘parallellogram’ dat in afbeelding 3 is gemarkeerd. Dit parallellogram bevat 13 rijen van zeshoeken. De langste van die rijen bestaan uit zes zeshoeken. Het middelpunt van symmetrie ‘*M*’ ligt in rij 6, op de grens van de derde en de vierde zeshoek. Door een weg van (0,0) naar (12,5) te spiegelen in M ontstaat weer een weg van zeshoek (0,0) naar zeshoek (12,5). Zie afbeelding 4.



afbeelding 4

Geen enkele van die wegen is zijn eigen spiegelbeeld, omdat niet twee zeshoeken uit dezelfde rij tot één weg kunnen behoren. We kunnen de wegen van (0,0) naar (12,5) dus opsplitsen in paren van telkens twee, die elkaars spiegelbeeld zijn.

Dus $\binom{12}{5}$ is even. Als je hier even over nadenkt dan zul

je met me eens zijn dat algemeen geldt:

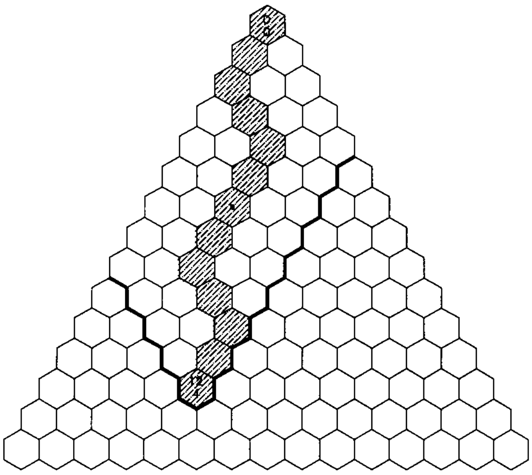
$\binom{\text{even}}{\text{oneven}}$ is even.

We moeten nog drie andere mogelijkheden onderzoeken:

$\binom{\text{even}}{\text{even}}$, $\binom{\text{oneven}}{\text{even}}$ en $\binom{\text{oneven}}{\text{oneven}}$.

We doen dit ook met behulp van voorbeelden.
Om te beginnen een voorbeeld uit de categorie

$\binom{\text{even}}{\text{even}}$. Is $\binom{12}{4}$ even of oneven? Zie afbeelding 5.



afbeelding 5

Alle wegen van (0,0) naar (12,4) liggen binnen het gemarkeerde parallellogram. Dit parallellogram bevat 13 rijen; de middelste rij bestaat uit 5 zeshoeken. Het middelpunt van symmetrie '*M*' ligt midden in de middelste zeshoek van de zevende rij. Nu zijn er wèl wegen die hun eigen spiegelbeeld zijn: alle wegen die van (0,0) in (6,2) aankomen, kunnen, door ze te spiegelen in *M*, worden uitgebreid tot een weg van (0,0) naar (12,4). Alle overige wegen kunnen weer worden ingedeeld in paren die elkaars spiegelbeeld zijn. Conclusie:

$\binom{12}{4}$ is even $\Leftrightarrow$ $\binom{6}{2}$ is even.

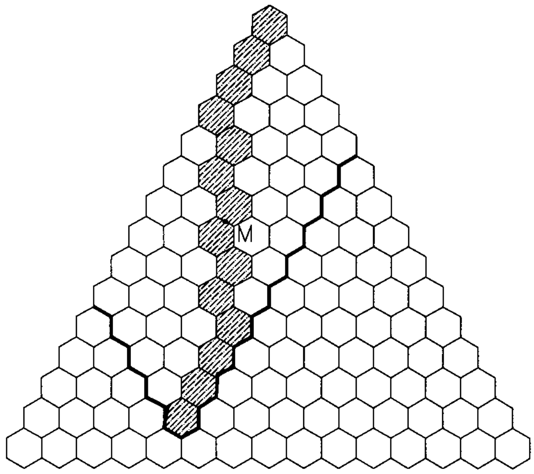
Door nog eens ditzelfde proces toe te passen vinden we:

$\binom{6}{2}$ is even $\Leftrightarrow$ $\binom{3}{1}$ is even. Daaruit volgt dat $\binom{12}{4}$ oneven is.

Door verband te leggen met getallen die in hogere rijen van de driehoek van Pascal staan kun je dus in enkele stappen achterhalen of $\binom{12}{4}$ even is of oneven.

Werkt dit ook voor de beide andere categorieën? Ik zal daar ook voorbeelden van bekijken.
Om te beginnen $\binom{13}{4}$.

Het middelpunt van symmetrie '*M*' ligt nu op de grens van (6,2) en (7,2). Zie afbeelding 6.

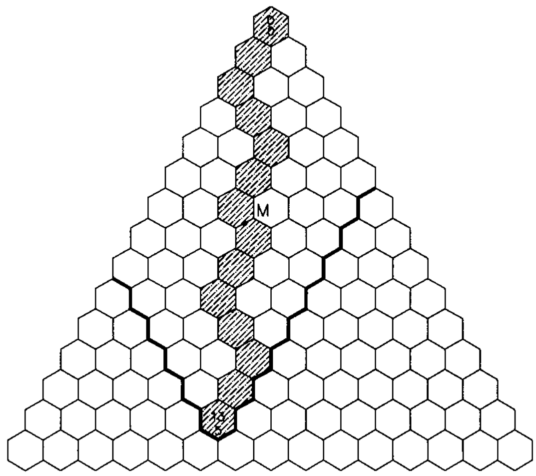


afbeelding 6

Daarmee is te begrijpen:

$\binom{13}{4}$ is even $\Leftrightarrow$ $\binom{6}{2}$ is even. Ook $\binom{13}{4}$ is dus oneven.

Tenslotte onderzoeken we of $\binom{13}{5}$ even is. Zie afbeelding 7.



afbeelding 7

Het middelpunt van symmetrie ligt op de grens van (6,2) en (7,3). Dus:

$\binom{13}{5}$ is even $\Leftrightarrow \binom{6}{2}$ is even.

Dus ook $\binom{13}{5}$ is oneven.

Samenvattend kunnen we zeggen:

Als $\binom{n}{k}$ in de categorie $\binom{\text{even}}{\text{oneven}}$ valt, dan is het even.

In alle andere gevallen kun je vinden of $\binom{n}{k}$ even dan wel oneven is door (eventueel een aantal malen) gebruik te maken van de volgende equivalentie:

$$\binom{n}{k} \text{ is even} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \left[\frac{n}{2}\right] \\ \left[\frac{k}{2}\right] \end{pmatrix} \text{ is even.}$$

Geen wegen maar routebeschrijvingen

Je kunt het bovenstaande verhaal ook vertellen met behulp van 'routebeschrijvingen', in de vorm van rijtjes bestaande uit de letters *o* en *w*. Elke weg begint in (0,0). De letter *o* in zo'n routebeschrijving betekent: vervolg de weg door naar de zeshoek te gaan ten *zuidoosten* van de zeshoek waarin je je nu bevindt. De letter *w* staat dan voor *zuidwesten*. Zo heeft de weg die in afbeelding 2 getekend is, van (0,0) naar (12,5), de volgende routebeschrijving:

w w w o w w w o w o o o

Elke routebeschrijving van (0,0) naar (12,5) bestaat uit 12 letters, waarvan 7 letters *w* en 5 letters *o*. Elke weg die puntsymmetrisch is ten opzichte van M (zie afbeelding 3) heeft ook een symmetrische routebeschrijving. Het is echter onmogelijk om 7 letters *w* en 5 letters *o* symmetrisch te plaatsen ten opzichte van het midden van het rijtje:

w w w o w w | *w o w o o o*

Het is duidelijk dat je, in het algemeen, niet een oneven aantal letters *w*, en dus ook een oneven aantal letters *o*, symmetrisch kunt plaatsen in een rijtje met een even aantal plaatsen. Geen enkele weg is dus zijn eigen spiegelbeeld. Dus:

$\binom{\text{even}}{\text{oneven}}$ is even.

Een even aantal letters *o* is wèl symmetrisch te plaatsen in een rijtje met een even aantal plaatsen. De weg uit afbeelding 5 bijvoorbeeld, van (0,0) naar (12,4) heeft de volgende routebeschrijving:

w w o o w w | *w w o o w w*

Het aantal puntsymmetrische wegen is dus gelijk aan het aantal mogelijkheden om 2 letters *o* en 4 letters *w* in een rijtje van 6 te plaatsen. Hiermee kun je begrijpen dat het aantal wegen van (0,0) naar (12,4) alleen even is als het aantal wegen van (0,0) naar (6,2) ook even is. Maar nu kunnen we nog een keer dezelfde redenering toepassen:

w w o | *o w w*

Het aantal wegen van (0,0) naar (6,2) is alleen even als het aantal wegen van (0,0) naar (3,1) even is. Dat is dus niet zo.

Nu routebeschrijvingen bestaande uit een oneven aantal plaatsen. Als eerste voorbeeld de weg uit afbeelding 6, van (0,0) naar (13,4).

w w w o w o | *w* | *o w o w w w*

Bij spiegeling wordt de middelste letter op zichzelf afgebeeld en de delen buiten de twee strepen op elkaar. Omdat er een even aantal letters *o* en een oneven aantal letters *w* in de routebeschrijving staat, komt er, bij een symmetrische weg, tussen de twee strepen zeker een *w*. Het aantal symmetrische wegen is dus weer gelijk aan het aantal mogelijkheden om 2 letters *o* en 4 letters *w* in een rijtje van zes te plaatsen.
Tweede voorbeeld: de weg van (0,0) naar (13,5) die getekend is in afbeelding 7.

w w o o w w | *o* | *w w o o w w*

Nu kun je alleen symmetrische wegen krijgen door een *o* in het midden te plaatsen. Het aantal symmetrische wegen van (0,0) naar (13,5) is gelijk aan het aantal wegen van (0,0) naar (6,2).

Even en oneven en het tweetallig stelsel

Laten we eerst nog eens kijken hoe dit algoritme werkt.

Ik ga onderzoeken of $\binom{363}{72}$ even is of oneven:

$\binom{363}{72}$ is even $\Leftrightarrow \binom{181}{36}$ is even $\Leftrightarrow \binom{90}{18}$ is even $\Leftrightarrow$

Korrel

Mariëlle

Onlangs ontmoette ik Mariëlle. Mariëlle zit in 4 havo, ze had het jaar ervoor het mavo-diploma behaald.
'Ik wil naar de pabo', zei ze, 'dat heb ik altijd al gewild'. Ik zei: 'Dan heb je natuurlijk wiskunde A, dat is immers nuttig als je naar de pabo wilt'.
Maar Mariëlle had geen wiskunde A gekozen. 'Ik ben niet zo goed in wiskunde, en het rekenen dat ik nodig heb, leer ik wel bij economie', zei ze.
Is Mariëlle – haar echte naam luidt anders – een uitzondering?
De cijfers wijzen uit hoeveel havo-leerlingen geen wiskunde volgen. In 1994 deed 54% van de havo-kandidaten examen in het vak wiskunde A, 31% had wiskunde B, en daarvan had 2% beide vakken. Dus had ongeveer een zesde deel van de havo-leerlingen geen wiskunde.

Volgens mevrouw Ginjaar moeten alle havo-leerlingen voortaan een wiskundevak hebben. Ook zitten er teveel leerlingen op het havo en vwo. Het lijkt erop, dat Mariëlle volgens mevrouw Ginjaar niet op het havo thuishoort. Haar plaats zou moeten worden ingenomen door een leerling die niet op het vwo thuishoort.
Maar Mariëlle kan zonder havo naar de pabo, via het mbo. Onder meer zijn routes via het mdgo gangbaar; totdat ook die routes worden afgesloten. Maar zover is het beslist nog niet.
De Mariëlles van de toekomst worden in de tang genomen. Zij zijn gedwongen wiskunde te kiezen. Of: zij kiezen voor het mbo.

M. van Hoorn

$\binom{45}{9}$ is even $\Leftrightarrow \binom{22}{4}$ is even $\Leftrightarrow$

$\binom{11}{2}$ is even $\Leftrightarrow \binom{5}{1}$ is even.

$\binom{363}{72}$ is dus oneven.

Nu ga ik ditzelfde onderzoek nog eens doen, alleen maak ik gebruik van de tweetallige schrijfwijze.
Om te onderzoeken of

$\binom{101101011}{1001000}$ even of oneven is, gaan

we van $\binom{101101011}{1001000}$ naar $\binom{10110101}{100100}$,

naar $\binom{1011010}{10010}$, $\binom{101101}{1001}$, $\binom{10110}{100}$,

$\binom{1011}{10}$ en tenslotte naar $\binom{101}{1}$.

De entier van de helft nemen betekent in de binaire schrijfwijze gewoon het laatste cijfer uitwissen!

Nog een voorbeeld: $\binom{275}{73}$, is dat even of oneven?
Tweetallig geschreven wordt het

$\binom{100010011}{1001001}$. Van daar komen we

respectievelijk bij

$\binom{10001001}{100100}$, $\binom{1000100}{10010}$ en $\binom{100010}{1001}$.

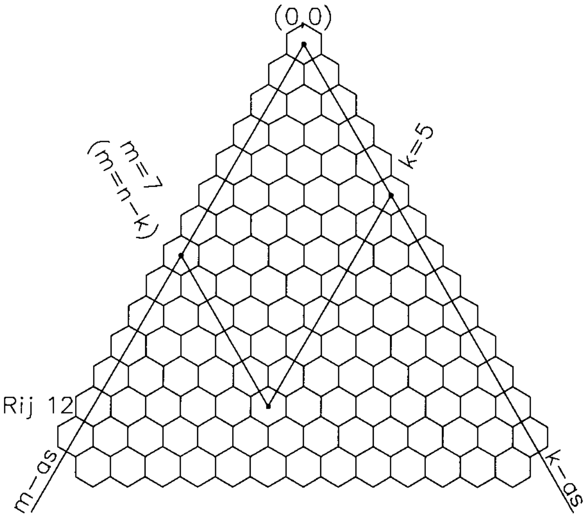
Nu weten we dat $\binom{275}{73}$ even is,

immers (het tweetallig geschreven getal) 10010 is even, en (het tweetallig geschreven getal) 1001 is oneven.

Conclusie: Op de volgende manier kun je dus vaststellen of $\binom{n}{k}$ even is of oneven:
- Schrijf zowel n als k tweetallig.
- Ga na of op een overeenkomstige positie bij n het cijfer 0 staat en bij k het cijfer 1.
- Is het antwoord 'ja', dan is $\binom{n}{k}$ even, anders oneven.

Van rijen naar coördinaten

In $\binom{n}{k}$ geeft n de lengte van een routebeschrijving en k het aantal letters o daarin. Het aantal letters w is dus n - k. Als we het aantal letters w aangeven met m, dan kunnen we m en k interpreteren als coördinaten van de k-de zeshoek in de n-de rij. Zie afbeelding 8.



afbeelding 8

Kun je nu ook aan m en k zien of $\binom{n}{k}$ even of oneven is?

Nog even terug naar $\binom{275}{73}$, een even getal.

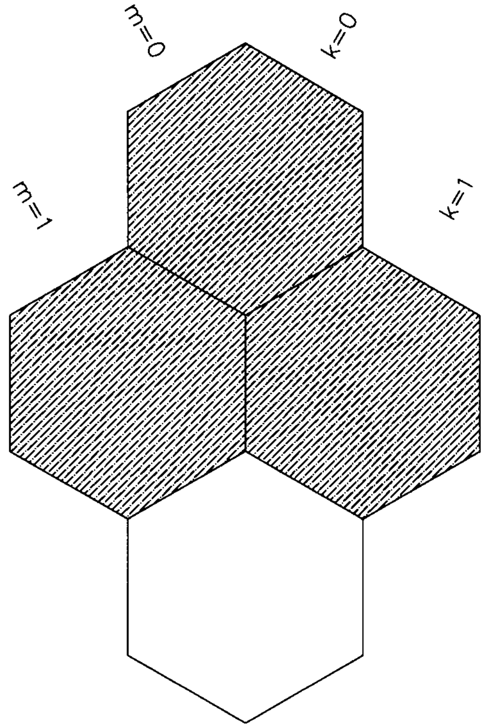
Tweetallig geschreven krijgen we:

$$
\begin{array}{lcl}
n & = & 1\,0\,0\,0\,1\,\mathbf{0}\,0\,1\,1 \\
k & = & 1\,0\,0\,\mathbf{1}\,0\,0\,1 \\
m & = & 1\,1\,0\,0\,\mathbf{1}\,0\,1\,0
\end{array}
$$

Alleen wanneer op overeenkomstige plaatsen bij n een **0** en bij k een **1** staat, komt er zowel bij k als bij m op overeenkomstige plaatsen een **1**. De even getallen in de driehoek van Pascal zijn dus de getallen waarvan de coördinaten k en m tweetallig geschreven op overeenkomstige plaatsen beide het cijfer 1 hebben.

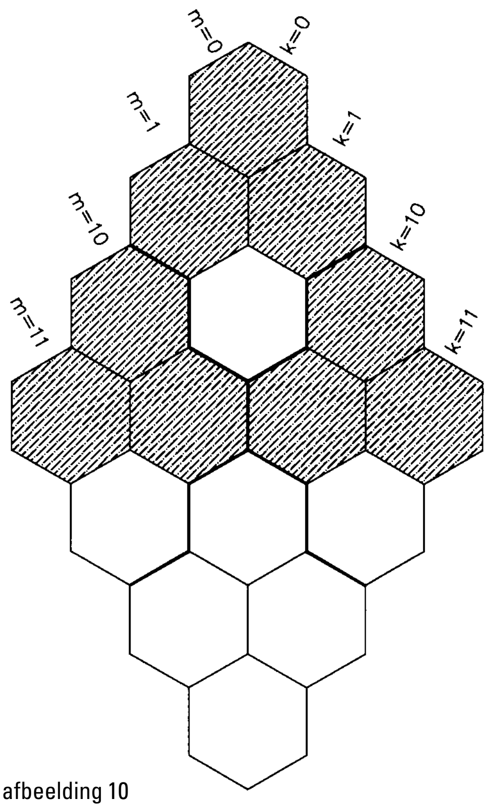
Van Pascal naar Sierpinski

Nu gaan we de driehoek van Pascal nog eens reconstrueren. Daarbij arceren we de zeshoeken waarin een oneven getal komt te staan. We beginnen met het groepje van vier bovenin, waarvan beide coördinaten k en m tweetallig met één cijfer kunnen worden geschreven. De coördinaten van de onderste zeshoek hebben twee enen op een overeenkomstige plaats, dus blijft deze zeshoek, als enige van de vier, ongearceerd. Zie afbeelding 9.



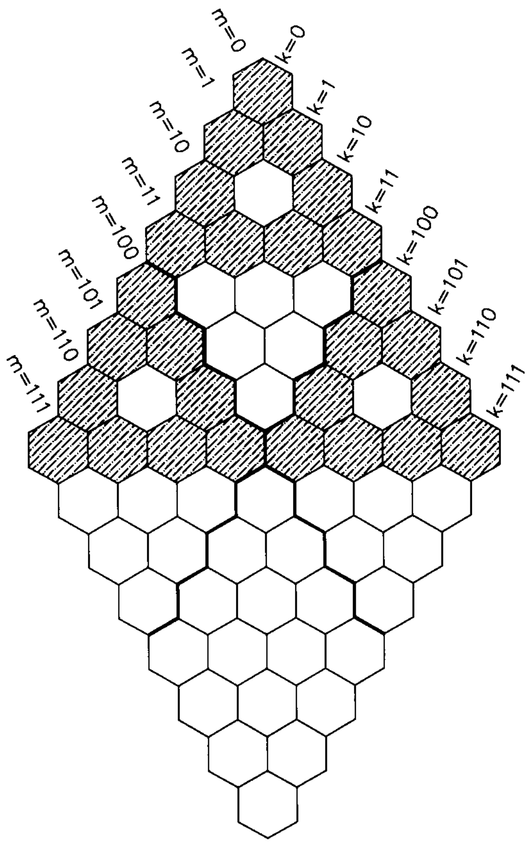
afbeelding 9

Vervolgens tekenen we alle zeshoeken waarvan de coördinaten k en m uit één of twee cijfers bestaan. We halveren de zijde van de zeshoeken, zodat de oppervlakte van de figuur constant blijft. In de ruit die nu ontstaat zie je drie keer de eerste ruit uit afbeelding 9 terug. De onderste ruit is volledig ongearceerd doordat zowel k als m als eerste cijfer een 1 hebben. Zie afbeelding 10.



afbeelding 10

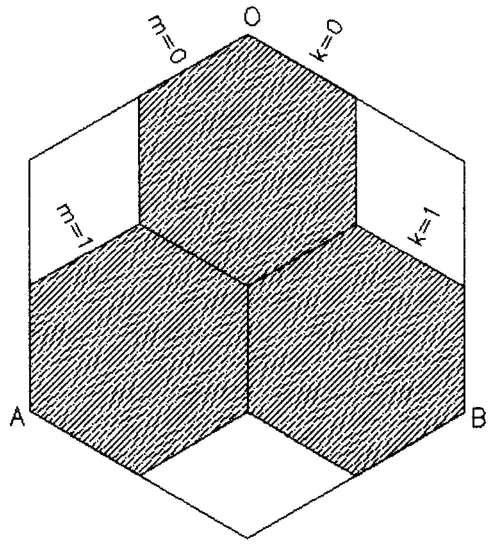
Hetzelfde nog een keer, nu met alle zeshoeken waarvan de coördinaten tweetallig uit hoogstens drie cijfers bestaan. Hierin zie je de totale ruit uit afbeelding 10 drie keer terug. De onderste ruit is weer helemaal ongearceerd, doordat van elke zeshoek in deze ruit beide coördinaten met een 1 beginnen. Zie afbeelding 11.



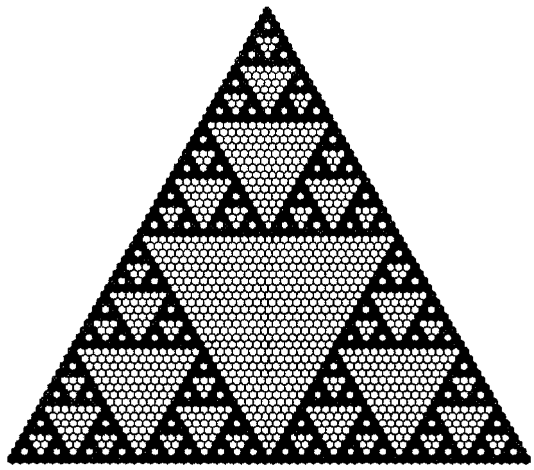
afbeelding 11

De driehoek onder de horizontale diagonaal van de ruit blijft dus volledig ongearceerd. Als je nu alleen let op de gearceerde zeshoeken in de afbeeldingen 9, 10 en 11, dan herken je daarin misschien het *Sierpinski-IFS* dat aan het begin van dit artikel beschreven is. Alleen is de startfiguur in dit geval een zeshoek. Zie afbeelding 12.

Na zes iteraties krijg je de figuur uit afbeelding 13. Door deze IFS tot in het oneindige te herhalen ontstaat de zeef van Sierpinski, als limietfiguur. Daarmee, tenslotte, is het verband tussen de driehoek van Pascal en de zeef van Sierpinski aangetoond.



afbeelding 12



afbeelding 13

Samenvatting

Wie in de driehoek van Pascal alle oneven getallen markeert, vindt een figuur met een interessante aanblik. De gemarkeerde getallen vormen samen de zogenaamde zeef van Sierpinski. De auteur beschrijft in zijn artikel het verband tussen de driehoek van Pascal en de zeef van Sierpinski. Hij geeft aan hoe het mogelijk is van een willekeurig getal op een gegeven plaats in de driehoek vast te stellen of het even of oneven is. Daarbij blijkt het tweetallig stelsel een interessant hulpmiddel te zijn. Door twee coördinaten, die de positie van het getal in de driehoek vastleggen, met elkaar te vergelijken geeft de auteur een eenvoudige methode om te bepalen of het getal even of oneven is.

Op 3 en 4 februari 1995 werden in het congrescentrum De Leeuwenhorst te Noordwijkerhout de eerste Nationale Wiskunde Dagen gehouden. De dagen waren georganiseerd door het Freudenthal instituut van de Rijks Universiteit Utrecht.

De eerste Nationale Wiskunde Dagen: een succes

M. van Hoorn

Het was een levendig congres, met 350 deelnemers uit het gehele land. Ten minste 80 % van de deelnemers was leraar (of lerares). De 'maffia' - een begrip dat gebezigd werd door congresvoorzitter Jan de Lange en dat ik niet behoef toe te lichten - was daardoor minder prominent aanwezig dan bij andere gelegenheden. Een verademing.
De lezingen werden verzorgd door deskundige sprekers en alle lezingen waren vakinhoudelijk van aard. Geen didactische bespiegelingen, geen psychologische verkenningen. Ook een verademing.
Waarom spreek ik zo gemakkelijk over 'een verademing'? Houd ik niet van didactiek? Jawel hoor, maar ik hoef daar niet steeds mee te worden belaagd door mensen die daar hun boterham mee verdienen.

Peter Struycken

Natuurlijk moeten leerplannen niet alleen vakinhoudelijk doordacht en samenhangend zijn, zij moeten ook onderwijsbaar zijn. Dat weet elke leraar.

Naar mijn stellige indruk hebben de congresdeelnemers het uitstekend naar hun zin gehad. Uiteraard verloopt niet alles even soepel en glad. Een enkele spreker bleek niet geheel opgewassen tegen zijn opdracht, en het congrescentrum bleek bij de maaltijdvoorziening niet ingeschoten op grote aantallen bezoekers. Maar de sfeer was prima en het programma was van hoge kwaliteit.
Ook het programma naast de lezingen was doordacht. Verscheidene instanties presenteerden zich, gaven demonstraties op de video, en er waren speciale exposities - niet voor niets werd één van de plenaire lezingen gegeven door de kunstenaar Peter Struycken.

De openingsvoordracht werd gegeven door professor Hendrik Lenstra, een Nederlands getaltheoreticus die al jaren in de Verenigde

Hendrik Lenstra

Staten werkt (Berkeley). Hij gaf een fraai overzicht van zoektochten naar grote priemgetallen, daarbij met name wijzend op de betekenis daarvan.
Een andere plenaire lezing werd gegeven door Sir Christopher Zeeman, een Engelsman die met veel humor zijn verhaal over de werking van draaitollen en boomerangs presenteerde.
Komt hij trouwens, gelet op zijn achternaam, uit een oorspronkelijk Nederlandse familie?

Het is onmogelijk alle lezingen hier te beschrijven. In een tijdsbestek van ruim een etmaal kun je heel wat te horen krijgen. Zo verzeilde ikzelf bij een lezing van Ida Stamhuis over statistiek en haar beoefenaars in de vorige eeuw (zij gaat hierover publiceren in Euclides), bij een lezing van professor Rob Tijdeman over getaltheorie (een vervolg op de voordracht van Lenstra) en bij een lezing van Arnold Heemink over de wiskunde achter de Deltawerken.

Sir Christopher Zeeman

Dat was, door de recente zgn. watersnood in het rivierengebied, een actueel onderwerp. Maar hoge zeewaterstanden blijken veel sneller te ontstaan en onvoorspelbaarder te zijn dan hoge rivierstanden. Men stelt tegenwoordig de hoogwaterverwachtingen dan ook tot op het laatste moment bij; de verwachting van 12 uur tevoren blijkt nogal eens niet uit te komen.

Voor contacten in de wandelgangen was veel tijd ingeruimd. Tussen programma-onderdelen zat òf weinig òf veel tijd, wat een goed uitgangspunt blijkt te zijn geweest.
Aan liefhebbers van zekere soorten muziek (De Gigantjes) en aan liefhebbers van een ochtend-run was ook gedacht.
De organisatoren maken zich al op voor de organisatie van de volgende Nationale Wiskunde Dagen. Zij hoeven er niet meer aan te twijfelen – zoals zij het afgelopen najaar nog deden – dat zoiets haalbaar is.
Succes!

In 1994 werd de 35e Internationale Wiskunde Olympiade gehouden van 8 tot 20 juli in Hongkong. Er waren 385 deelnemers uit 69 landen.

De XXXVe Internationale Wiskunde Olympiade 1994

J.G.M. Donkers

De Nederlandse ploeg bestond uit de volgende leerlingen:

Kevin Backhouse (17) Helmond
Dion Gijswijt (16) Almere
Erik Kieft (17) Kesteren
Simon Kronemeijer (18) Kampen
Ronald van Luyk (17) Voorschoten
Gert-Jan Smit (18) Waddinxveen

Erik en *Ronald* ontvingen een bronzen medaille (3e prijs), *Kevin, Dion* en *Simon* een eervolle vermelding. (Degenen die buiten de prijzen vallen maar wel voor tenminste één opgave de maximale score van 7 punten hebben behaald krijgen een eervolle vermelding.)
De wedstrijd vond plaats op 13 en 14 juli in de gebouwen van de Chinese Universiteit van Hongkong. De deelnemers kregen op beide dagen 4,5 uur voor drie opgaven.
Van de 385 deelnemers kregen er 192 een prijs (medaille + oorkonde); 31 goud (40 t/m 42 punten), 64 zilver (30 t/m 39 punten) en 97 brons (19 t/m 29 punten). Er waren 23 deelnemers met de maximale score van 42 punten.
In het officieuze landenklassement kwam de Verenigde Staten op de eerste plaats met 252 punten, gevolgd door China en Rusland met respectievelijk 229 en 224 punten. Nederland was 37e met 99 punten.
Tijdens de slotbijeenkomst nodigde de vertegenwoordiger van Canada alle landen uit in 1995 aanwezig te zijn bij de 36e Olympiade in Toronto.

De Nederlandse ploeg

De scores van de Nederlandse deelnemers waren als volgt:

	1	2	3	4	5	6	Totaal
Kevin Backhouse	0	7	1	2	3	0	13
Dion Gijswijt	1	3	0	0	2	7	13
Erik Kieft	7	7	7	2	3	3	29
Simon Kronemeijer	0	7	7	0	1	0	15
Ronald van Luyk	7	7	0	3	1	2	20
Gert-Jan Smit	1	3	0	1	4	0	9
	16	34	15	8	14	12	99

Drie leden van de Nederlandse ploeg hebben in 1994 eindexamen vwo gedaan en gaan wiskunde studeren aan een universiteit. Van de drie overigen zitten er nu twee in klas 6 en één in klas 5 van het vwo.

Evenals voorgaande jaren werd ook nu de ploeg begeleid door drs. J.M. Notenboom (HMN Utrecht) en drs. J.G.M. Donkers (TU Eindhoven). De voorzitter van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde, prof.dr. H.J.A. Duparc, ging weer mee als waarnemer.
Hoe is de Nederlandse ploeg tot stand gekomen?
Uit de 2082 deelnemers aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1993 (afkomstig van 221 scholen) werden de 111 beste toegelaten tot de tweede ronde die in september 1993 gehouden werd aan de Technische Universiteit in Eindhoven. De beste dertien van de tweede ronde kregen een uitnodiging om
deel te nemen aan de training voor de Internationale Wiskunde Olympiade.
De training, die evenals voorgaande jaren werd verzorgd door J. Donkers, begon met een trainingsweekend in december ’93 en werd vervolgd door middel van lesbrieven. In de tweede week van juni was er een vijfdaags trainingskamp in Valkenswaard, waarbij assistentie werd verleend door de oud-olympiade deelnemers Harm Derksen en Sander van Rijnswou. Direkt na het kamp werd de samenstelling van de ploeg bekend gemaakt. Voor de leden van de ploeg was er in de eerste week van juli nog een kort trainingskamp van twee dagen aan de T.U. in Eindhoven.

Rondom de olympiade

Na een tussenstop in Singapore, waar we vanwege de lange transferperiode de gelegenheid hadden een rondrit door de stad te maken, kwamen we op 11 juli ’s avonds in Hongkong aan. Een ware belevenis om zo dicht tussen de woonflats te landen. (Het vliegveld van Hongkong ligt nagenoeg midden in de stad.) Bij de verwelkoming maakten we kennis met onze eerste tropische regenbui. Er zouden er nog vele volgen. De deelnemers logeerden in het Sai Kung Outdoor Recreation Centre iets buiten de stad, de begeleiders in het Kowloon Panda hotel. Dinsdags werden we direkt in de Chinese cultuur gedompeld. Eerst bezochten we de Ching Chung Koon tempel en vervolgens het Sam Tung Uk museum, waar je kon zien hoe vroeger Chinese gezinnen in één groot familieverband leefden. ’s Middags vond de openingsceremonie plaats, waarbij de gouverneur

van Hongkong Christopher Patten de welkomsttoespraak hield. De bijeenkomst werd opgeluisterd met typisch Chinese muziek op voor ons onbekende instrumenten bespeeld door studenten van de muziekacademie van Hongkong. Hierna volgde het kennismakingsdiner. Daar zaten we met verschillende teams bij elkaar aan grote ronde tafels en maakten we kennis met de voortreffelijke Chinese keuken. De eerste adressen werden uitgewisseld evenals de eerste wiskundeproblemen.

Na de wedstrijddagen maakten we nog verschillende tochten kris kras door de stad. Een stad van 6,5 miljoen inwoners, in hoofdzaak bestaande uit honderden torenflats van zo’n 20 à 30 verdiepingen, waarin gemiddeld 4000 mensen wonen, en tussen welke flats enorme verkeersaders lopen. Veel mensen, allen met een paraplu (tijdens dit natte seizoen) en velen met hun onafscheidelijke draagbare telefoon. Zo bezochten we nog de Wong Tai Sin tempel, het Science museum en het Space museum, het hart van de zakenwereld Hongkong-eiland met zijn machtige wolkenkrabbers en maakten we een schitterende boottocht door de haven en langs verschillende eilanden. Tenslotte was er de slotceremonie met de prijsuitreiking. Enkele leden van onze ploeg ontvingen uit handen van de beroemde Chinese fysicus en Nobelprijswinnaar Yang een bronzen plak.

Op de terugweg maakten we van de gelegenheid gebruik een tussenlanding te maken in Bangkok voor een bezoek van enkele dagen aan Thailand. Hier maakten we kennis met een geheel andere cultuur. Na een verblijf in Bangkok vertrokken we voor een tocht van enkele dagen naar de River Kwai. Dit gebied is bekend geworden doordat de Japanners in de laatste wereldoorlog krijgsgevangenen hebben laten werken bij de aanleg van een spoorlijn die van Birma naar Thailand liep. Met als gids prof. Duparc, zelf oud-krijgsgevangene, maakten we een treinreis over de oude spoorlijn, een boottocht over de rivier, zagen restanten van Japanse kampen en bezochten het oorlogskerkhof, waar ruim 1800 Nederlanders begraven liggen. Het bezoek aan het JEATH museum in Kanchanaburi, waar we konden zien onder welke erbarmelijke omstandigheden de krijgsgevangenen in de Japanse kampen moesten werken, heeft op ieder van ons een diepe indruk gemaakt.

Hierna volgen nog het landenklassement en de opgaven. De zes opgaven zijn afkomstig uit: Frankrijk, Australië en Armenië, Roemenië, Australië, Engeland en Finland.

Het landenklassement

1	Verenigde Staten	252
2	China	229
3	Rusland	224
4	Bulgarije	223
5	Hongarije	221
6	Vietnam	207
7	Engeland	206
8	Iran	203
9	Roemenië	198
10	Japan	180
11	Duitsland	175
12	Australië	173
13	Polen	170
14	Taiwan	170
15	Zuid-Korea	169
16	India	168
17	Oekraïne	163
18	Hongkong	162
19	Frankrijk	161
20	Argentinië	159
21	Tsjechië	154
22	Slovakije	150
23	Wit-Rusland	144
24	Canada	143
25	Israël	143
26	Colombia	136
27	Zuid-Afrika	120
28	Turkije	118
29	Nieuw-Zeeland	116
30	Singapore	116
31	Oostenrijk	114
32	Armenië (5)	110
33	Thailand	106
34	België	105
35	Marokko	105
36	Italië	102
37	Nederland	99
38	Letland	98
39	Brazilië (5)	95
40	Georgië	95
41	Zweden	92
42	Griekenland	91
43	Kroatië	90
44	Estland (5)	82
45	Noorwegen	80
46	Macao	75
47	Litouwen	73
48	Finland	70
49	Ierland	68
50	Macedonië (4)	67
51	Mongolië	65
52	Trinidad & Tobago	63
53	Moldavië	55
54	de Filippijnen	53
55	Chili (2)	52
56	Portugal	52
57	Denemarken (4)	51
58	Cyprus	48
59	Slovenië (5)	47
60	Indonesië	46
61	Bosnië-Herzegow.(5)	44
62	Spanje	41
63	Zwitserland (3)	35
64	Luxemburg (1)	32
65	IJsland (4)	29
66	Mexico	29
67	Kirgizië	24
68	Cuba (1)	12
69	Koeweit	12

Verenigingsnieuws

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Van de bestuurstafel

Derde-wereldfonds
Bij de betaling van de contributie voor dit schooljaar heeft een grote groep leden gebruik gemaakt van de mogelijkheid vijf gulden extra te storten voor het ondersteunen van het wiskundeonderwijs in de derde wereld. Er is ruim zevenduizend gulden beschikbaar. Wiskundeleraren in de derde wereld zijn benaderd met de vraag of zij een projectaanvraag wilden indienen. We hebben veel reacties gekregen en één aanvrager maakte van zijn vakantie in Nederland gebruik om het een en ander toe te lichten.

Inmiddels heeft de werkgroep besloten de projectaanvraag van Janco Dees te honoreren. Janco is zelf werkzaam op de lerarenopleiding in Kitwe, Zambia. Naar aanleiding van onze brief heeft hij een school gezocht die enerzijds nog bereikbaar is, maar anderzijds door de afgelegen ligging slecht voorzien is van onderwijsmiddelen. De school die het betreft is een middelbare school in Mpongwe. De aanvraag betreft boeken voor de onderbouw en de bovenbouw en voor volgend jaar onderwijsleermiddelen als bordpassers, geodriehoeken, linialen enz. In de toekomst zullen we in Euclides verslag doen van het verloop van het project.

Ruud Jongeling

Inhoud

Afsluitingstoetsen Bavo

Het bestuur van de NVvW reageerde naar het PMB met de volgende brief over de afsluitingstoetsen Basisvorming.

Geachte leden van het PMB,
Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren wil u op de hoogte stellen van onze zorgen omtrent, kanttekeningen bij en bezwaren met betrekking tot de afsluitingstoetsen Basisvorming Wiskunde.

1 We stellen voor deze wijze van toetsen af te schaffen.
Het is niet aanvaarbaar dat alle leerlingen over de volle breedte van ivbo tot en met vwo dezelfde toetsen voorgelegd krijgen. Het is voor een leerling demotiverend om met iets bezig te moeten zijn, waarvan zij/hij onmogelijk iets goeds kan maken of wat haar/hem onvoldoende uitdaging geeft. Naar het ons voorkomt is het mogelijk om op andere wijze meer te bereiken, dan met de voorliggende toetsen te bereiken valt.

2 Mocht de minister het voorgestelde toetsmechanisme willen handhaven, hetgeen wij zeer willen ontraden, dan stellen wij voor het Cito opdracht te geven om niveau-toetsen te maken. Wij menen dat, als er al afsluitingstoetsen moeten worden afgenomen, gebruik gemaakt moet worden van toetsen op gedifferentieerde niveaus, om recht te doen aan onze leerlingen.

3 Wij menen dat de voorgestelde vorm om de basisvorming voor wiskunde af te sluiten onverantwoord en onaanvaardbaar is. We stellen voor om, zolang de minister ons verplicht afsluitingstoetsen af te nemen, deze toetsen slechts af te nemen bij leerlingen, die na twee of drie jaar geen wiskunde meer in hun pakket hebben. Voor leerlingen die wiskunde in het examenpakket kiezen lijkt ons de afsluitende Bavo-toets overbodig; deze leerlingen bewijzen in schoolonderzoek en centraal examen genoegzaam dat zij voldoen aan de kerndoelen van de basisvorming; evenzo voor leerlingen die toegelaten zijn tot tenminste de 4e klas van het havo.

4 Voor vbo-B leerlingen doet zich een apart probleem voor… het vbo-B examenprogramma komt vrijwel overeen met de kerndoelen van de basisvorming. Pas wanneer deze leerlingen het gehele programma hebben doorlopen, zijn ze klaar met de basisvorming. Dat betekent dat zij pas aan het einde van het vierde jaar de basisvorming voor wiskunde kunnen afsluiten; zolang wiskunde geen verplicht vak is voor vbo-B leerlingen kan de basisvorming dus alleen worden afgesloten voor leerlingen die wèl kiezen voor wiskunde in het examen-pakket.
Het examen vbo-B zou voor de betreffende leerlingen een adequate afsluiting van de basisvorming kunnen zijn.

U begrijpt dat de afsluiting van de basisvorming ons grote zorgen baart. De toetsen die nu voorliggen dienen vooral de belangen van overheden en negeren de belangen van leerlingen. We zijn bereid om positief en constructief mee te denken over de wijze waarop de kwaliteit van het wiskundeonderwijs gegarandeerd kan worden.

Hopende u hiermee voldoende te hebben geïnformeerd, groeten wij vriendelijk,

Het bestuur van de NVvW.

Mededeling

ICME-8 in Sevilla

Van 14 tot en met 21 juli 1996 vindt in Sevilla, Spanje, het 8e ICME-congres plaats. De letters ICME staan voor International Congress on Mathematical Education.
Om de vier jaar wordt zo'n congres gehouden. Het vorige congres vond in 1992 plaats te Québec, Canada. Er waren toen ongeveer 3000 deelnemers van over de gehele wereld.
Deelnemers aan het vorige ICME-congres hebben intussen de zgn. Eerste Aankondiging van ICME-8 ontvangen. Alle andere belangstellenden kunnen informatie opvragen op het adres:

ICME-8
Apartado de Correos 4172
41080 Sevilla
Spanje

Examenbesprekingen mei 1995

Dankzij de belangeloze bereidwilligheid van velen kunnen wij u ook dit jaar weer uitnodigen de voor u relevante examenbesprekingen bij te wonen.
Niet overal is de bespreking op dezelfde plaats als vorig jaar.

VBO/MAVO C/D vrijdag 19 mei 1995 van 15.30 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*
ALKMAAR OSG Willem Blaeu Robonsbosweg 11 072-122477	C: Hr. T.L.J. Dunselman 075-284042 D: Mw. C. Gaykema 020-6129185
HAREN Zernike College Westerse Drift 98 050-344000	C: Hr. S. Kooiman 050-251289 D: Hr.B.C.Hoekstra 050-422008
LEEUWARDEN SG De Delta Nylandsdyk 4 058-883377	C: Hr. J. Tuinstra 05133-2657 D: Hr. J. Tuinstra
ROTTERDAM Chr. SG Henegouwerpl. Henegouwerplein 14-16 010-4774533	C: Hr. F.A. van Dijken 01858-16857 D: Hr. F.A. van Dijken
TILBURG Boerke Mutsaers Vijverlaan 2 (NS Tilb.W.) 013-670693	C: Hr. F.J. Mahieu 04116-73468 D: Hr. F.J. Mahieu
ZEIST Kath.SG De Breul Arnhemsebovenweg 98 (NS Driebergen-Zeist) 03404-15604	C: Hr. R.J. Roukema 03465-60429 D: Hr. R.J. Roukema
ZWOLLE Thorbecke SG Dr. van Heesweg 1 038-54667	C: Hr. G. Hoogendoorn 038-538262 D: Mw. A. Wajer-de Graauw 03412-62445

VWO-B woensdag 18 mei 1995 van 16.00 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT Gymn. J. v. Oldenbarnev. Thorbeckeplein 1 033-613944	Hr. W.A.M. van Bunnik 030-517946 **Pas op parkeerverbod!**
AMSTERDAM Pieter Nieuwland College Nobelweg 6 020-6654730	Hr. A. Holleman 02518-54913
ARNHEM Thorbecke SG Thorbeckestraat 17 085-423028	Mw. M.M. Knops-Gianotten 08867-3814
’s-GRAVENHAGE Hofstadcollege Colijnplein 9 070-3687670	Mw. M. Kollenveld 070-3904867
GRONINGEN Röling College Melisseweg 2 050-421000	Hr. H.H.C. Pentinga 05909-1528
ROTTERDAM Chr. SG Henegouwerpl. Henegouwerplein 14-16 010-4774533	Hr. B.L.G.P. Hillebrand 01807-15210
TILBURG Boerke Mutsaers Vijverlaan 2 (NS Tilb.W.) 013-670693	Hr. A.L.P. van Merode 01623-13746
ZWOLLE V. d. Capellen SG Lassuslaan 230 038-225202	Hr. J.Th.J. Mahieu 038-540414

HAVO-B woensdag 18 mei 1995 van 18.30 - 20.30 uur

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT Gymn. J. v. Oldenbarnev. Thorbeckeplein 1 033-613944	Hr. P. Kop 01726-14082 **Pas op parkeerverbod!**

AMSTERDAM Pieter Nieuwland College Nobelweg 6 020-6654730	Hr. S.T. Min 02290-37756
ARNHEM Thorbecke SG Thorbeckestraat 17 085-423028	Hr. A.T. Sterk 055-666466
GOES Buys Ballot College Bergweg 4 01100-13010	Hr. P.C. Huysse 01870-83558
's-GRAVENHAGE Hofstadcollege Colijnplein 9 070-3687670	Mw. M. Kollenveld 070-3904867
GRONINGEN Röling College Melisseweg 2 050-421000	Hr. J. Tolboom 050-275494
ROTTERDAM Chr. SG. Henegouwerpl. Henegouwerplein 14-16 010-4774533	Hr. H.R.K.T. Hillebrand 01807-23552
TILBURG Boerke Mutsaers Vijverlaan 2 (NS Tilb.W.) 013-670693	Hr. C.J.M. Nienhuis 04116-78501
ZWOLLE V.d. Capellen SG Lassuslaan 230 038-225202	Hr. J.P. Scholten 053-768791

VWO-A maandag 29 mei 1995 van 16.00 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT Gymn. J. v. Oldenbarnev. Thorbeckeplein 1 033-613944	Hr. M.J.F.M. Voorhoeve 030-936166 **Pas op parkeerverbod!**
AMSTERDAM Pieter Nieuwland College Nobelweg 6 020-6654730	Mw. G.W. Fokkens 020-6438447
ARNHEM Thorbecke SG Thorbeckestraat 17 085-423028	Mw.E.M.H.v.d. Berg-de Both 080-551414
's-GRAVENHAGE Hofstadcollege Colijnplein 9 070-3687670	Hr. C.D. Hendriks 01740-20131
GRONINGEN Röling College Melisseweg 2 050-421000	Hr. M. van Steenis 05908-18121
ROTTERDAM Chr. SG Henegouwerpl. Henegouwerplein 14-16 010-4774533	Hr. C. Rijke 078-194286
TILBURG Boerke Mutsaers Vijverlaan 2 (NS Tilb.W.) 013-670693	Hr. W.J.M. Laaper 040-867720
ZWOLLE V. d. Capellen SG Lassuslaan 230 038-225202	Hr. W.J. Kooiman 05293-2099

HAVO-A maandag 29 mei 1995 van 18.30 - 20.30 uur

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT Gymn. J. v. Oldenbarnev. Thorbeckeplein 1 033-613944	Hr. P. Kop 01726-14082 **Pas op parkeerverbod!**
AMSTERDAM Pieter Nieuwland College Nobelweg 6 020-6654730	Hr. J.P. Muthert 020-6911807
ARNHEM Thorbecke SG Thorbeckestraat 17 085-423028	Hr. P.J.F.M. v. d. Berg 08894-17134
GOES Buys Ballot College Bergweg 4 01100-13010	Hr. A. Ruijgt 01102-43963

’s-GRAVENHAGE Hofstadcollege Colijnplein 9 070-3687670	Hr. J.P.C. van der Meer 01742-97138
GRONINGEN Röling College Melisseweg 2 050-421000	Mw. H. Lüder 050-340695
ROTTERDAM Chr. SG Henegouwerpl. Henegouwerplein 14-16 010-477453 3	Hr. R.E. Houweling 01803-15302
ZWOLLE V.d.Capellen SG Lassuslaan 230 038-225202	Hr. J.Th.J. Mahieu 038-540414

Afscheid van George

Op 2 december 1994 vond in Utrecht een afscheidsbijeenkomst voor George Schoemaker plaats.
Meer dan 20 jaar heeft hij in het Utrechtse gewerkt. Hij was één van de mannen van het eerste uur van Wiskivon, de groep op het toenmalige IOWO die zich met de wiskunde in het voortgezet onderwijs bezig hield.
Later was George Schoemaker onder meer voorzitter van het ontwikkelteam W12-16. In Euclides heeft hij vele malen verslag gedaan van de vorderingen van het project W12-16. Hij schuwde de discussie niet, maar bleef een aimabele vriend voor degenen die met hem te maken hadden.
Tijdens de afscheidsbijeenkomst voerden verscheidene mensen het woord. Ik licht daar twee bijdragen uit.

Namens het Mathematisch Instituut sprak professor Henk van der Vorst. Hij bekende dat het contact tussen de wetenschappers en het onderwijsveld wel eens wat mager was geweest. Hij hoopte dit contact te kunnen versterken. Met een opmerkelijk voorbeeld uit een hedendaags leerboek voor de bovenbouw - wij werden niet gewaar welk leerboek - illustreerde hij de noodzaak tot meer contact.
In dat leerboek stond een opgave over een cirkelvormig stuk karton, waarop concentrisch een kleinere cirkel werd getekend. Buiten deze kleinere cirkel werden radiale inkepingen aangebracht met gelijke breedte. Door de ontstane flappen naar boven te vouwen zou een cilindrisch vat ontstaan, waarvan de leerlingen de inhoud moesten berekenen. Het was de auteurs van het leerboek kennelijk niet opgevallen dat aldus geen vat kan ontstaan: de flappen passen alleen in de oorspronkelijke stand aan elkaar. Bovendien zou het grondvlak een veelhoek worden, en zou de bovenrand van de flappen niet vlak zijn.
In een andere bijdrage vertelden Nanda Querelle en Truus Dekker over hun samenwerking met George bij het ontwikkelen van B-examens. Daarbij brachten ze met name de rol van allerlei bezorgde toetsdeskundigen ter sprake. Als geen anderen zijn Nanda en Truus in staat om de draak te steken met al het quasi-serieuze gedoe van toetsconstructeurs, kerndoelbeschrijvers en zulk onderwijs ondersteunend personeel. Het gaat bij hen altijd om de leerlingen, als die maar wiskunde leren waar ze later wat aan hebben. Dank, Nanda en Truus!
En ook: dank, voor de prettige samenwerking, George!

Martinus van Hoorn

Kansen, wat heb je eraan?

Een verslag van het Wintersymposium

Op de eerste zaterdag van het nieuwe jaar organiseert het Wiskundig Genootschap traditioneel een drietal lezingen in een school te Amersfoort. De titel van de bijeenkomst is Wintersymposium.
Dit jaar was de organisatie in handen van mederedacteur Rob Bosch. Het thema van het Wintersymposium was *Kansen*.
In de eerste lezing ging professor Wolthuis, een actuaris uit Amsterdam, in op het gebruik van kansen bij het vaststellen van premies bij met name levensverzekeringen. De wiskundige begrippen die hier een rol spelen zijn exponentiële groei en afname, overlevings- en sterftekans en verwachtingen. Iemand die een keer zo'n verzekering heeft afgesloten kwam het allemaal heel bekend voor. Maar om het nu eens op een rijtje gepresenteerd te krijgen is best aardig.
Daarna kwam professor Scheffer (zelf met emeritaat) onder de titel Markov-ketens iets vertellen over dronkemans- of toevalswandelingen. Met een zekere kans ga je op een getallenlijn één stap naar links, dan wel naar rechts. Wat is de kans dat je ooit op je uitgangspunt terugkeert?
En: wat is de kans dat je blut raakt? Zo'n wandeling staat model voor een spel met twee spelers die tegen elkaar een serie partijtjes spelen. Bij winst van de één betaalt de ander haar een vast bedrag, bij verlies is het omgekeerd.
In feite is dit een aanloopje naar Markov-ketens. Scheffer legde een en ander helder en vol humor uit. Maar daardoor kwam hij niet toe aan zijn eigenlijke onderwerp.
Hij strooide kwistig met uitspraken als: wiskunde bedrijven doe je omdat je het oplossen van sommetjes leuk vindt, omdat je iets op een bepaald algemeen niveau zeker wilt weten. Dat de toevalswandeling in de natuurkunde een belangrijke rol speelt, denk aan botsende gasmoleculen, werd overigens wel opgemerkt.
De laatste spreker was professor Van der Genugten uit Tilburg, die een spannend verhaal vertelde over hoe hij het juridische probleem, wanneer is een spel een kansspel en wanneer een behendigheidsspel, wiskundig had aangepakt.
Zijn methode berust op het bepalen van een getal s tussen 0 en 1, dat in principe voor elk spel berekend kan worden en waarmee tot uitdrukking wordt gebracht in hoeverre de behendigheid bij dat spel beperkt wordt door toevalselementen.
Bij een zuiver kansspel als de lotto krijgt s dan de waarde 0, bij een zuiver behendigheidsspel als schaken krijgt s de waarde 1. Voor black jack is het getal 0,16, voor golden ten 0,20.
Door dit getal s worden allerlei spelen in volgorde van toenemende behendigheid en afnemende toevalligheid gezet. Een rechter die een oordeel moet vellen over een spel op grond van de wet op de kansspelen, heeft aldus een wiskundig stuk gereedschap tot haar beschikking gekregen.
In zijn presentatie wist de spreker het publiek als een volleerde quizmaster bij de les te betrekken, bijvoorbeeld door een soort minipoker te spelen en daardoor begrippen te verduidelijken die voor zijn model belangrijk zijn, zoals beginner en maximale winstverwachting.

Bert Zwaneveld

Mededeling

CSIPWIC: Postuniversitaire Wetenschappelijke Internationale Colloquia

De Sessie 1995 van de CSIPWIC vindt plaats van 15 tot 19 augustus 1995 op de groene Sart Tilmancampus van de Université de Liège.

In 1995 is het algemeen thema
De wetenschappelijke grondslagen van de milieukunde.

De deelnemers hebben de keuze tussen vier parallelle groepen (Biologie, Natuurkunde, Scheikunde, Wiskunde), met ook interdisciplinaire activiteiten.
Alle deelnemers kunnen in hetzelfde studentenhuis op de Sart Tilmancampus logeren, wat ook buiten de voordrachten en werkzittingen de sociale en intellectuele interacties bevordert.

Inlichtingen:

J. Aghion
Département de Botanique B22
Université de Liège
B-4000 LIEGE
België

Richtlijnen voor auteurs

Aanleveren
Kopij dient bij voorkeur te worden aangeleverd op een diskette (3,5 of 5,25 inch) in WP5.1 (MS-DOS) of ASCII-bestand. Gedrukte of geschreven kopij kan vertraging opleveren. De tekst mag geen lay-out bevatten. De tekst moet zo kaal mogelijk worden aangeleverd, zonder woordafbrekingen e.d.; geef alinea's wel met harde returns aan.
Lever bij de diskette altijd een drietal afdrukken van de tekst aan, waarop bijvoorbeeld staat aangegeven waar u de illustraties had gedacht.

Tekst
Maak een korte, bondige titel; vermeld de naam van de auteur zonder eventuele titels. Paragrafen worden aangeduid met korte tussenkoppen (maximaal 23 aanslagen); per kopje vervallen er 4 regels basistekst.
De basistekst komt in een 3-koloms stramien. Een volle pagina telt 3 × 54 = 162 regels van 35 aanslagen per regel.
Wiskundige artikelen komen in een 2-koloms stramien. Een volle pagina telt hier 2 × 54 = 108 regels van 58 aanslagen per regel.

Illustraties
Voorzie uw tekst van toepasselijke illustraties.
Tekeningen, grafieken: scherpe figuren met zwarte pen of inkt gemaakt, of geprint op een goede printer.
Tabellen: scherp origineel op apart vel aanleveren.
Foto's: liefst zwart/wit met scherp contrast.
Voorzie illustraties van een verklarend bijschrift (op apart vel; bij meer illustraties zowel de illustraties als de bijschriften nummeren). Indien een illustratie op een bepaalde plaats in de tekst moet worden opgenomen dient dit duidelijk te worden aangegeven.

Verschijningsdata van Euclides
Omstreeks de 1e van de maanden september, december en mei; omstreeks de 15e van de maanden oktober, januari, februari, maart en juni.
Kopij voor het volgend nummer moet uiterlijk 10 weken voor verschijning geaccepteerd zijn door de redactie; voor de acht middenpagina's (in artikelen voor deze bladzijden mogen geen illustraties, tabellen of formules voorkomen!) geldt een termijn van 7 weken.

Adressen van auteurs

L. van den Broek
Graafseweg 387
6532 ZN Nijmegen

J.G.M. Donkers
TU Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

M.C. van Hoorn
Noordersingel 12
9901 BP Appingedam

R.J. Jongeling
Sterappelstraat 38
4421 LG Kapelle

L.H. van den Raadt
Raadhuisplein 8
2101 HB Heemstede

L. van Schalkwijk
Kuluutsheuvel 20
5825 BE Overloon

A. van der Wal
Ordermolenweg 23
7312 SC Apeldoorn

G. Zwaneveld
Bieslanderweg 18
6213 AJ Maastricht

Kalender

17 mei 1995
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

18, 19 en 29 mei 1995
Diverse plaatsen

Examenbesprekingen
(zie bladzijde 233)

21 juni 1995
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

11 november 1995
Bilthoven

Jaarvergadering/studiedag NVvW

INTERVIEW

'Realistische wiskunde is motiverender'

Martinus van Hoorn

Ruud Jongeling, 39 jaar, is sinds 5 jaar leraar aan de VSO-LOM-school De Windroos te Hellevoetsluis. (VSO = Voortgezet Speciaal Onderwijs, LOM = Leer- en Opvoedingsmoeilijkheden.)

Wil je iets over de school vertellen?
De school telt 70 leerlingen, die afkomstig zijn uit het gewoon basisonderwijs of uit het speciaal onderwijs (SO). Uit het gewoon voortgezet onderwijs komen soms leerlingen met leer- of gedragsproblemen. Ook komt het omgekeerde voor: na 3 jaar bij ons te zijn geweest kan een leerling naar de 3e klas van het (i)vbo, eventueel mavo. Zo'n leerling verliest dus 1 jaar. Er is dan nog wel ambulante begeleiding.
De leerlingen zitten in 4 jaarklassen van elk 15 à 18 leerlingen. Heel belangrijk zijn stages, in verband met de voorbereiding op een beroep. Dit is het zgn. arbeidstoeleidingsproject.

Hoe ben je op deze school terecht gekomen?
Ik ben min of meer toevallig in het wiskunde-onderwijs terecht gekomen. Na mijn opleiding aan de Sociale Academie kwam ik in het Clubhuiswerk in Rotterdam-Zuid. Vervolgens deed ik in Zeeland vormingswerk, en daardoor kwam ik in het Kort Middelbaar Beroepsonderwijs.

Ik heb toen in Middelburg eerst mijn derdegraads, en vervolgens mijn tweedegraads bevoegdheid gehaald. Vanuit mijn woonplaats Kapelle in Zeeland ga ik nu dagelijks naar Hellevoetsluis.

Hoe weet je wat voor programma een leerling moet hebben?
Bij de toelating worden de leerlingen uitvoerig getest. Het gaat dan om het perspectief van de leerlingen: kunnen ze nog naar het reguliere voortgezet onderwijs, kunnen ze het B- of het C-niveau aan? Hiervan afhankelijk krijgen ze een schakelprogramma (waarmee ze naar het reguliere voortgezet onderwijs kunnen) of een ander programma.

Wat voor boek hebben jullie, en houd je je precies aan het boek?
We hebben de nieuwste versie van Wiskunde Lijn, waar goed mee te werken valt. Soms sla ik iets over. Aan het rekenen moet regelmatig wat extra's gebeuren, waar een collega zich mee belast. Deze collega is op de pabo geweest.
Aan de Windroos ben je trouwens groepsleerkracht, zodat het kan gebeuren dat ik ook informatica en natuurkunde geef.

Wat betekent de basisvorming voor jullie?
Onze leerlingen hebben automatisch vrijstelling van het volgen van de basisvorming. Maar omdat de meeste leerlingen moeten worden geschakeld naar het reguliere voortgezet onderwijs is het programma voor ons wel van belang. We krijgen ook proefwerken van een naburige vbo-school.

Wat vind je van het nieuwe programma?
Het realisme is veel motiverender. De nieuwste editie van het boek is daarom ook veel geschikter. Deze leerlingen willen zien waarvoor ze iets doen. Ja, ik ben eigenlijk best tevreden over de richting waarin de leerstof zich ontwikkelt.

Werkblad

1 Een reservoir bevat 240 liter water.
Als de kraan wordt geopend, stroomt het water eruit met een constante snelheid van 20 liter per minuut.

(a) Teken op ruitjespapier een grafiek van het watervolume V dat in het reservoir zit, uitgezet tegen de tijd t.

(b) Geef een vergelijking voor V als functie van t.

2 De hiernavolgende regelmaat kan worden gebruikt om opeenvolgende kwadraten van gehele getallen op te tellen.

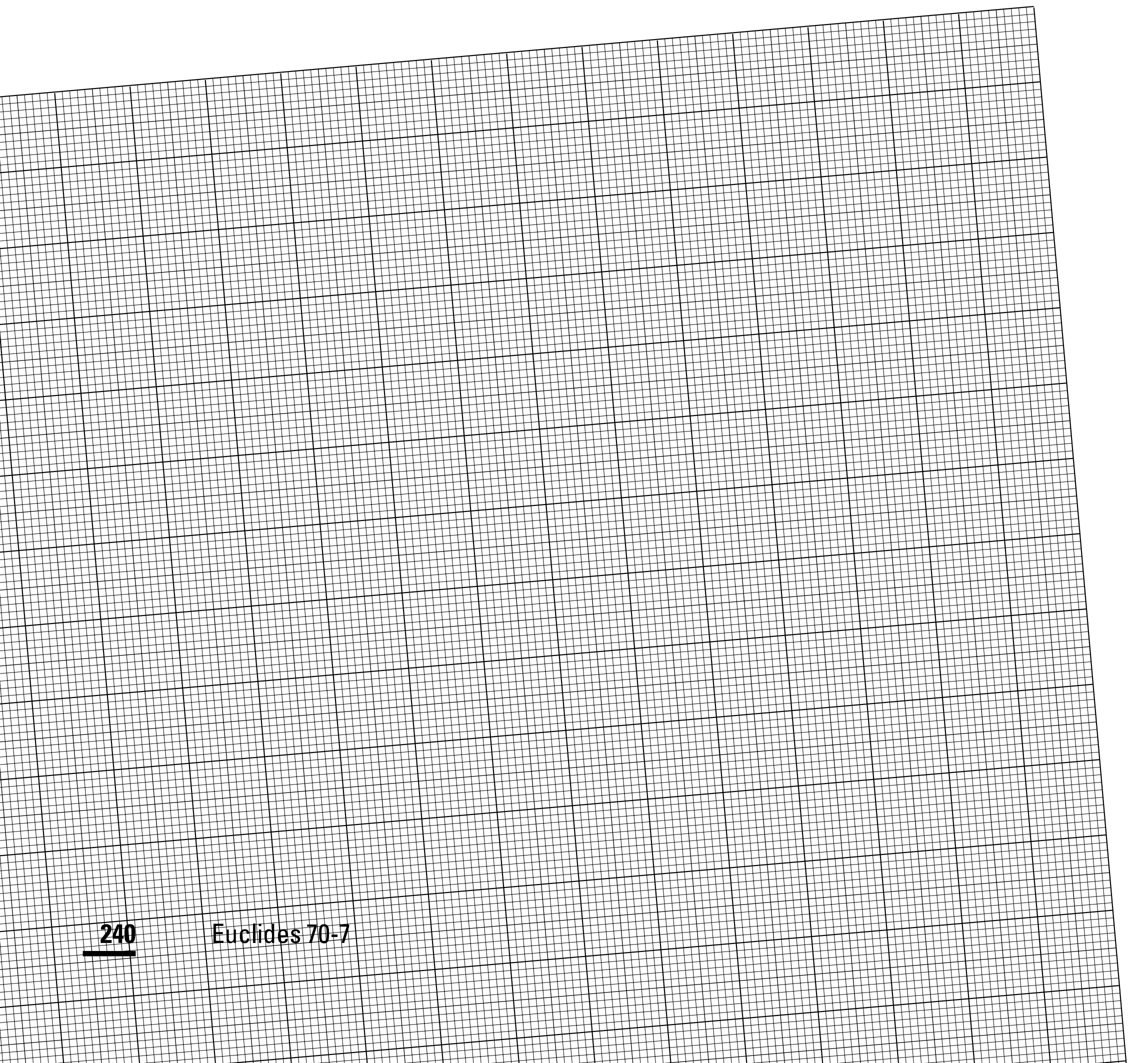
$1^2 + 2^2 = 2 \times 3 \times 5$

$1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \times 4 \times 7$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 4 \times 5 \times 9$

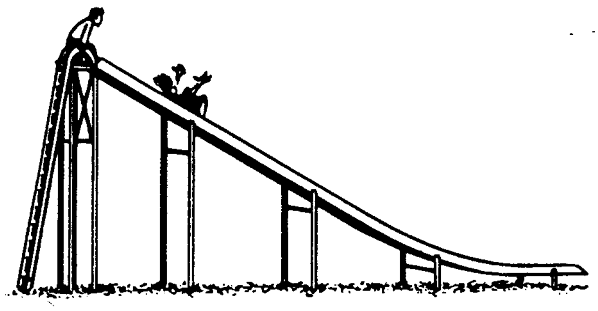
(a) Geef ook zo'n uitdrukking voor
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$

(b) Geef ook zo'n uitdrukking voor
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$



Werkblad

3 De tijd, T seconden, die een kind nodig heeft om op de glijbaan naar beneden te glijden, is recht evenredig met de lengte, L meter, van de glijbaan, en omgekeerd evenredig met de wortel uit de hoogte, H meter, van het startpunt van de glijbaan.
Het kost 10 seconden om van een glijbaan naar beneden te glijden die 3,75 meter lang en 2,25 meter hoog is.

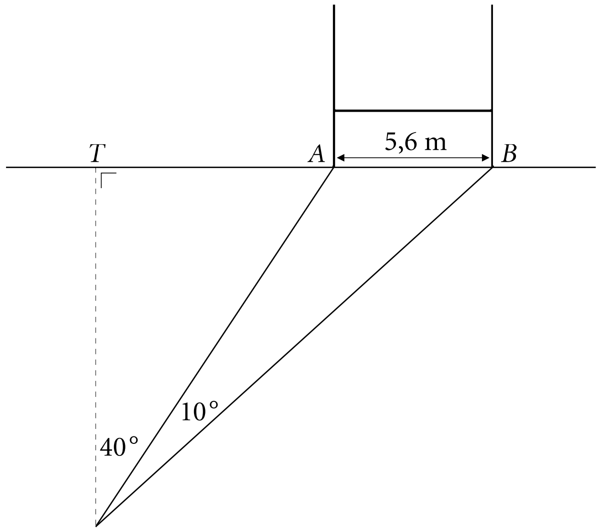


(a) Geef met een formule het verband tussen T, L en H aan.

(b) Hoeveel seconden duurt het naar beneden glijden vanaf een glijbaan van 5 meter lang en 2,56 meter hoog?

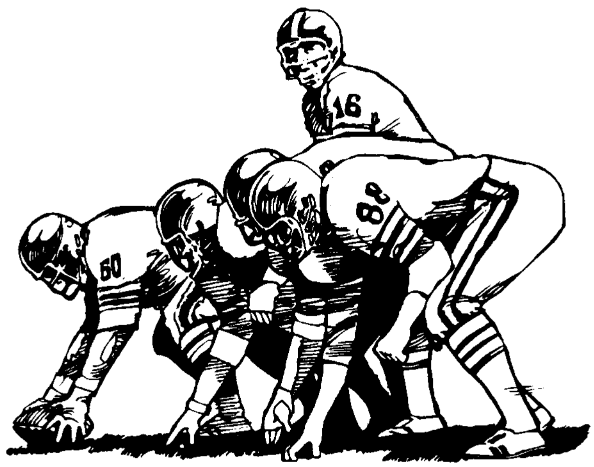
Opgaven uit Schotland voor leerlingen van 16 jaar (hoogste niveau).

4 In de tekening zijn de doelpalen op een rugbyveld te zien.



Om een doelpoging te wagen gaat een speler van T naar P.
TP staat loodrecht op TB.
Hoek $TPA = 40°$ en hoek $APB = 10°$.

De afstand AB tussen de doelpalen is 5,6 meter.
Bereken de afstand van T naar P.



Bij alle rumoer rond de vernieuwingen in het wiskundeprogramma bij het vwo, havo en mavo/vbo-C/D zou men bijna vergeten dat er bij het vbo een grote groep leerlingen examen doet op B-niveau.

Vbo zoekt erkenning

Bram van der Wal

Geschiedenis

Tot voor kort was het zo dat men bij het vbo de examens op B-niveau per school organiseerde. De praktijk was dat een groot aantal scholen de handen ineensloeg en gezamenlijk voor de diverse vakken examens samenstelde. De commissie Apeldoorn was een van de twee samenwerkingsverbanden. Een andere groep bediende het zuidwesten van ons land.

Met name de wens van het vbo om zich meer dan voorheen te profileren en naar buiten toe een eenheid uit te stralen was de reden om met ingang van 1994 tot één centraal examen over te gaan. Deelname aan dit examen is nog niet verplicht doch naar verwachting zal het overgrote deel van de scholen er aan gaan deelnemen. Het examenbureau van het SABO (Samenwerkingsverband AVO en Beroeps Onderwijs) is vanaf 1994 verantwoordelijk voor de inhoud van de examens.

Ongeveer gelijktijdig met het voorgaande is bij het vbo op kleine schaal gestart met de afname van experimentele examens, gebaseerd op het nieuwe leerplan en gecomponeerd door het Freudenthal instituut.

Voetangels en klemmen

Het vbo zet met deze ontwikkelingen hoog in. Het is de vraag of deze zo heterogeen samengestelde groep in staat zal zijn aan een uniform examen mee te doen. Aan de andere kant dwingen maatschappelijke ontwikkelingen tot deze keus.

Een complicerende factor in het geheel is de basisvorming die voor deze groep leerlingen naar alle waarschijnlijkheid pas in het vierde (examen!) jaar wordt afgesloten. De afstemming tussen beide zal heel wat problemen geven.

Het karakter van het vbo, met zijn vele technische richtingen en ‘recht op het doel af’ stijl laat zich naar verwachting moeilijk rijmen met de naar redeneren neigende trend van de experimentele examens. Daarbij komt dat het nieuwe programma taalrijker opgaven impliceert, een handicap voor de vele taalzwakke leerlingen in het vbo.

Teneinde enig inzicht te krijgen in de hiervoor beschreven ontwikkelingen volgen hier enkele opgaven met commentaar van achtereenvolgens de examens oude stijl (tot 1993), het examen van de SABO in 1994 en de experimentele examens in 1993 en 1994.

Examens oude stijl

Het oplossen van eerstegraads vergelijkingen zonder enige context was een vast onderdeel bij de traditionele examens. De gedachte achter deze keus is ongetwijfeld dat in een groot aantal vakgebieden de leerlingen vergelijkingen tegenkomen. Omdat deze vergelijkingen verborgen zijn in allerhande te technische situaties koos men er liever voor ze kaal aan te bieden. Hieronder een opgave uit 1992.

18. Los op ($X \in Z$)
    a. $9X + 18 = 9$
    b. $5X - 10 = -5$
    c. $3X + 8 = 5X + 14$
    d. $3(2X + 4) = X + 2$
    e. $4X + 12 > 20$

Het door het SABO georganiseerde examen zette deze lijn in het examen van 1994 door:

		Los op: ($X \in \mathbb{N}$)
2 p	24	$4X - 8 = 12$
2 p	25	$-9X + 15 = -3$
2 p	26	$4X - 7 = -2X + 23$
2 p	27	$-14X + 3 = -4$
2 p	28	$5X + 10 < 30$

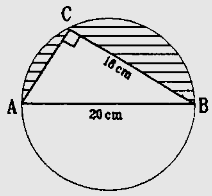
Dat het vbo wel degelijk oog heeft voor de dagelijkse praktijk blijkt uit de volgende opgave uit 1992:

19. Een handelaar koopt 500 T-shirts à ƒ 12,95 per stuk. Hij krijgt 20% korting.
Bereken:
a. Hoeveel hij moet betalen?

Hij verkoopt 1/5 deel van de T-shirts à ƒ 17,50, 1/4 deel van de overige T-shirts à ƒ 14,95 en de rest voor ƒ 12,50 per stuk.
Bereken:
b. de opbrengst
c. de winst

Ook de volgende twee kunnen zo uit het vbo/mavo C-examen zijn weggelopen.

In een cirkel met AB als middellijn is driehoek ABC getekend.
AB = 20 cm en BC = 16 cm (π = 3,14).



Bereken:

2 p 48 AC.

2 p 49 De oppervlakte van de cirkel.

2 p 50 De oppervlakte van driehoek ABC.

3 p 51 De oppervlakte van het gearceerde deel.

Van zes getallen is het gemiddelde 6,5. Laat men één getal weg, dan wordt het gemiddelde 6,1.

5 Het weggelaten getal is

A 0,4.
B 2,4.
C 6,3.
D 8,5.

Het SABO volgt ook in dit type opgave de lijn die al jaren lang in het beroepsonderwijs wordt gevolgd:

Een handelaar koopt 1000 stripboeken à ƒ 4,75.
Op de markt in Zaltbommel verkoopt hij alle stripboeken als volgt
$^1/_5$ deel à ƒ 5,-
500 stripboeken à ƒ 6,-
de rest voor ƒ 7,- per stuk.

Bereken:

1 p 29 Hoeveel de handelaar voor de stripboeken moet betalen.

4 p 30 Hoeveel de handelaar ontvangt, als hij alle stripboeken heeft verkocht.

1 p 31 De gemiddelde prijs van de verkochte stripboeken.

Onverwacht duikt in de door het SABO opgestelde examen deze opgave op:

Gegeven zijn de funkties f(X) = X + 1 en g(X) = 2X -1.

2 p 44 Bereken f(-2) en f(4).

2 p 45 Bereken g(-1) en g(3).

4 p 46 Teken de grafieken van f en g in een rechthoekig coördinatenstelsel XOY.

1 p 47 De grafieken snijden elkaar in punt S.
Bepaal de coördinaten van punt S.

Waar in het C- en D-examen de hier gebruikte formuleringen vrijwel tot het verleden behoren blijkt men in het vbo te hechten aan traditie. Het is overigens aardig nog eens te letten op de zwaarte van deze opgave die qua inhoud in het C-examen niet zou misstaan. Wat het niveau betreft zijn er wel meer kritische vragen te stellen.

Experimenteel examen

Na deze bloemlezing uit de traditionele examens waarvan je op z'n minst kunt zeggen dat ze in het algemeen slecht aansluiten bij het programma voor de basisvorming slaat de schrik om het hart bij het doornemen van de experimentele examens.

We nemen het tweede vraagstuk van 1994, bestaande uit zeven onderdelen, bij de kop.

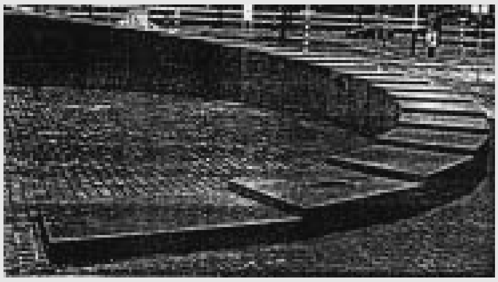
Opvallend bij dit vraagstuk is dat de leerlingen een probleem voorgeschoteld krijgen dat ze nog nimmer hebben gezien. Verworvenheden uit hun wiskundelessen, met uitzondering van het gezond verstand gebruiken, zullen niet veel helpen.
Dat is geheel in overeenstemming met het nieuwe programma waarin gesproken wordt over het zich bedienen van adequate onderzoeks- en redeneerstrategieën. Of de interpretatie van deze grote woorden in dit vraagstuk voor dit type leerling goed is uitgevallen valt te betwijfelen.

Hoewel het kunstwerk door zijn uitnodigende vorm - welke jongen of meisje zal niet de neiging hebben deze trap te nemen - zijn de gestelde vragen weinig realistisch. Bovendien brengt de in drie delen verdeelde tekst weinig helderheid, voor taalzwakke leerlingen eerder verwarring.
Waarom Auke de rechthoeken meet en van de resultaten een grafiek tekent in plaats van buiten met blokken te gaan spelen met zijn vriendjes zal wel altijd een raadsel blijven. Het zoeken naar een blok waarvan de *voor*kant – is dat hetzelfde als de *binnen*kant en is de achter*zijde* het *vlak* dat tegenover de voor*kant* ligt? – een vierkant is lijkt eveneens de realiteit van veel jongeren te ontstijgen. Nog theoretischer wordt het wanneer de

De vragen 5 t/m 11 horen bij elkaar.

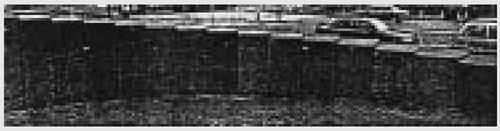
Kunstwerk
Hieronder zie je een foto van een kunstwerk.
Het bestaat uit een halve cirkel van 25 blokken. De blokken worden steeds lager en breder.

blok nummer 1

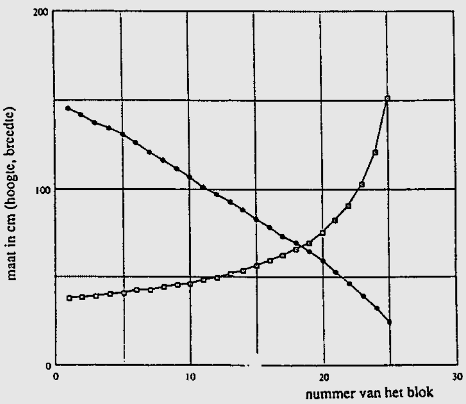


blok nummer 25

Aan de binnenkant van de halve cirkel zie je een rij rechthoeken.



Auke heeft de hoogte en de breedte van alle 25 rechthoeken gemeten. Van de resultaten heeft hij met de computer een grafiek getekend:



Bij de grafieken staat nog niet welke lijn bij de hoogte hoort en welke bij de breedte.

5. Noteer op je blad: hoort bij ....

hoort bij ....

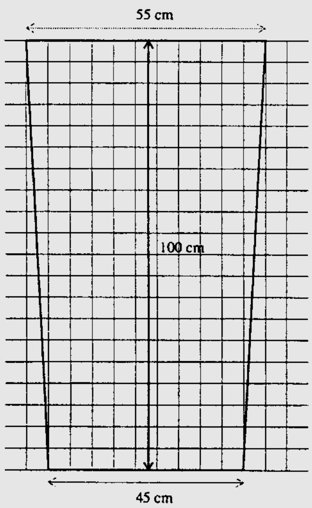
6. Is er een blok waarvan de voorkant precies een vierkant is? Gebruik de grafiek en leg uit waarom (niet).

Volgens Peter is de breedte van het laatste blok (nummer 25) hetzelfde als de hoogte van het eerste blok.

7. Ben je het eens met wat Peter zegt? Gebruik de grafiek en leg uit waarom (niet).

8. Stel je voor dat je nog een blok moet toevoegen, nummer 26. Gebruik de grafiek en leg uit hoe hoog en hoe breed dat blok volgens jou zou kunnen zijn.

De kunstenaar heeft de blokken aan de achterzijde breder gemaakt dan aan de voorkant. Daardoor krijgt het kunstwerk een gebogen vorm. Blok nummer 10 ziet er bijvoorbeeld van bovenaf gezien zó uit:

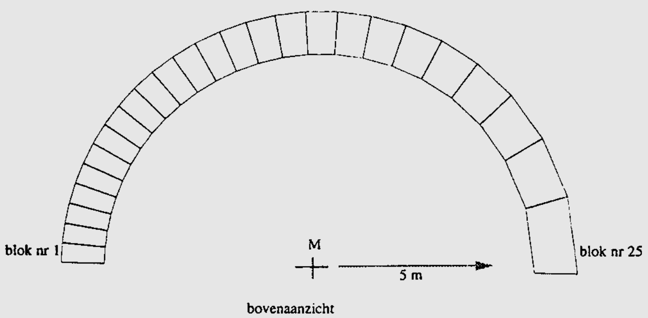


9. Bereken de oppervlakte van het getekende bovenvlak van blok nr. 10 in cm^2. Schrijf je berekening op.

De hoogte van blok nr. 10 is 107 cm.

10. Kan de inhoud van blok nr. 10 ongeveer 1 m^3 zijn? Leg uit waarom (niet).

Met de computer is een bovenaanzicht van het kunstwerk getekend. Dat zie je hieronder. De blokken staan in een halve cirkel met een straal van 5 meter.



Stel je voor dat je op de plaats van M, het middelpunt van de cirkel, staat.

Tussen twee blokken is steeds een spleet van bijna 1 cm breed opengelaten. Op de tekening is dat niet meer te zien.

11. Kun je in werkelijkheid vanuit punt M tussen alle blokken doorkijken? Je mag je hoofd draaien. Laat dat in de tekening op de bijlage zien.

breedte van het laatste blok vergeleken wordt met de hoogte van het eerste.

De laatste vraag van de serie is eveneens discutabel. Het antwoord op de vraag of je staande in het middelpunt door de 1 cm brede spleten kunt kijken zal wel ja zijn en een op basis van intuïtie gegeven redenering voldoende maar ik blijf er moeite mee houden.

Resumerend denk ik dat dit vraagstuk vanwege zijn complexiteit en weinig realistische behandeling over de hoofden van de leerlingen zal heengaan.
Dat is jammer omdat het kunstwerk met zijn rijke context een beter lot verdiende.
Met het nieuwe programma voor ogen had het meer voor de hand gelegen afmetingen te schatten en vanuit een bovenaanzicht (op schaal) berekeningen uit te voeren zoals de diameter van de cirkel en de 'breedte' van de blokken.
Door de hoogte van de blokken als verband te geven, bijvoorbeeld $h = 150 - 5n$ waarbij n het volgnummer, waren zinvolle berekeningen mogelijk geweest. Nog voor de hand liggender was het geweest te vermelden dat elk volgend blok 5 cm lager is.
Ook de ontwerper zal immers een verband in het hoofd gehad hebben bij het ontwerp.
Wanneer deze resultaten uitgezet zouden worden in een grafiek was het als afsluiting zinvol geweest vragen te stellen zoals nu in de inleiding.
Het vergelijken van de volumes en de totale hoeveelheid beton (leerlingen kunnen op het idee komen dat het dertiende blok wel eens maatgevend zou kunnen zijn) zijn in deze situatie realistisch.

Gelukkig hebben de opstellers ook vraagstukken gecomponeerd die dichter bij de belevingswereld van de vbo leerlingen liggen. Een goed voorbeeld is de compostbak.

De vragen 24 t/m 28 horen bij elkaar.

Compostbak
In een blad voor tuiniers staat een houten compostbak. Hoogte 70 cm.
'Maak de inhoud van de bak niet groter dan ongeveer één kubieke meter', staat erbij.

Keukenafval, bladeren en gras vormen de beste compost. Met openingen voor extra luchttoevoer. Eenvoudig te maken!

Martin wil zelf zo'n compostbak gaan maken met aan de binnenkant de maten:
lengte 120 cm, breedte 120 cm, hoogte 70 cm.

24. Wordt de inhoud van die bak groter dan 1 m^3? Laat dat met een berekening zien.

25. Maak een schatting van de breedte van de planken die Martin nodig heeft.

26. Maak een schets van een zijaanzicht van de bak.
Zet zo goed mogelijk de maten erbij. Werk netjes.

In het tuincentrum worden geschaafde tuinplanken verkocht van de goede breedte.
Ze zijn 200 cm lang.

27. Hoeveel planken van 200 cm heeft Martin nodig?

'Van elke plank houd ik 60 cm over', zegt Martin. 'Dan kan ik beter andere maten kiezen voor mijn compostbak.'

28. Geef een voorbeeld van de maten die de bak zou kunnen hebben.
De inhoud moet wel ongeveer 1 m^3 blijven. De bak mag niet hoger dan 80 cm worden.

De vragen zijn geheel in de lijn van het nieuwe programma. Schattingen, een schets van de compostbak in aanzicht, nadenken over 'betere' oplossingen en bedenken van andere oplossingen.
Dit vraagstuk biedt de leerlingen de gelegenheid te laten zien wat hun vaardigheden zijn op wiskundig terrein.

Tenslotte nog enkele opmerkingen over het vraagstuk dat de wandeling in de bossen rond Vierhouten als context heeft. Jammer dat de opstellers in dit overigens prima vraagstuk meenden een wandeling 'om een gulden' te moeten uitzet-

De vragen 19 t/m 23 horen bij elkaar.

Wandeling
Uit het ANWB-blad 'Kampioen'
'Als we in het bos een wandelroute gaa
schaal van 1 : 50 000.
Hoe lang zo'n wandeling is, bepalen we n
den is ongeveer 4 km.'

19. Hoeveel km is een afstand van 3 cm op e

Hieronder zie je een stukje van een kaart van
Op die kaart is een rondwandeling om een gu

rondwandeli

20. Hoeveel mm is de diameter van de cirkel

21. Hoeveel km is de diameter van de cirkel

22. Controleer met een berekening of de 4 k
ANWB-Kampioen goed is. Gebruik voo
hebt.

Op de bijlage is de kaart nog eens afgedrukt.

23. Teken op de kaart een wandeling langs d
Gebruik een kleurpotlood! Uitleg is hier

ten. Wie de gewoonte heeft in Vierhouten te wandelen weet dat zo'n wandeling wel veel pijn aan de voeten gaat doen. Net zo onwerkelijk is een wandeling rond een lichtschip voor de Zeeuwse kust of de beklimming van de minaret van een R.K.-kerk.
De commissie die de experimentele examens voor vbo-mavo in het nabije verleden maakte heeft bewezen voor de omtrek van een cirkel wel degelijk goede contexten te kunnen bedenken. Dat moest ze maar blijven doen.

ı lopen, gebruiken we altijd een kaart met een

net een gulden. Een rondwandeling om een gul-

en kaart met schaal 1 : 50 000 in werkelijkheid?

de Veluwe. Schaal 1 : 50 000.
lden getekend.

ng 'om een gulden'

? Je mag meten.

in werkelijkheid? Eén cijfer achter de komma.

n die genoemd wordt in de
π de benadering $\pi = 3{,}14$ als je geen rekenmachine

e paden van ongeveer 4 km.
niet nodig.

40 jaar geleden

Moeten wij ons verzetten tegen een didactiek, die op de lagere middelmaat ingesteld is?

De hiervoor geschetste ontwikkeling heeft dus ten gevolge gehad, dat het de leerling steeds gemakkelijker gemaakt is. Ook wanneer men de zelfwerkzaamheid vooropstelt gaat het gemakkelijk dezelfde kant uit, immers de goede gang van zaken vereist, dat de leerlingen niet te veel vastlopen, hetgeen weer meebrengt een instelling van de cursus op de lagere middelmaat. De resultaten op het eindexamen mogen niet anders dan schijnsuccessen genoemd worden, want we weten immers, hoe onderwerpen, die niet op het examen gevraagd worden, zoals de leer der kegelsneden en de differentiaalrekening, hoe langer hoe meer in de verdrukking komen. Op verschillende uiteenzettingen van de theorie moet in de hogere klassen duchtig besnoeid worden, omdat het gros van de leerlingen deze toch niet begrijpen kan. Dit hindert ook niet, want op het examen wordt deze stof niet gevraagd. Intussen moeten de werkelijk intelligente leerlingen, die wij zo nu en dan nog krijgen, geestelijk verkommeren.
Moeten wij nu niet het volle pond gaan eisen en de leerlingen, die eigenlijk niet op de middelbare school thuis horen radicaal de weg versperren? Ik geloof, dat wij dat niet kunnen, en zo wij dit al konden doen, dan geloof ik, dat wij niet het recht hebben om de middelmatige leerlingen nu tegen te houden. De maatschappij vraagt nu eenmaal veelvuldig het H.B.S.-diploma en als de maatschappij dan al grieven heeft tegen de huidige H.B.S.-opleiding, dan zijn die zeker niet gericht tegen het tekort aan wiskundig inzicht. Het is het tweeslachtige karakter van de H.B.S., dat ons parten speelt. Het is het te grote aantal dergenen, die via de H.B.S. een niet-universitaire richting kiezen, die het peil zo doen dalen, maar zolang er geen andere school is, die deze functie overneemt, kunnen wij aan de toestand weinig veranderen.

P.M. van Hiele in Euclides 30, 1954-1955.

Eindexamen

Leo van den Raadt

In opgave 2 van het eindexamen 1994 havo voor wiskunde B wordt de leerling gevraagd een perspectivische tekening te maken van een piramide.
Het relevante deel van de opgave is hieronder afgedrukt.
Uit de gegevens is af te leiden waar de waarnemer zich bevindt en in welke richting deze kijkt. Zowel de standplaats en de kijkrichting van de waarnemer zijn zeer ongebruikelijk. Het verband tussen de werkelijkheid en de wiskunde is hierbij ver te zoeken.
Omdat *AB* een horizontaal lijnstuk is dat als een horizontaal lijnstuk op de tekening wordt afgebeeld, is de kijkrichting van de waarnemer *W* evenwijdig aan *BC*. Noem het verdwijnpunt van *BC* punt *P*. *P* is dan het voetpunt van de loodlijn uit *W* op het vlak van tekening. *BD* maakt een hoek van 45° met *BC* en heeft als verdwijnpunt het punt *Q*. In de tekening (op de bijlage van opgave 2) heeft *PQ* een lengte van 9,5 cm. Hieruit volgt dat *WP* ook 9,5 cm is (zie het bovenaanzicht dat in figuur 1 is weergegeven). Alleen als je oog zich ook op 9,5 cm van de tekening bevindt zó dat de loodlijn uit het oog op de tekening neergelaten het punt *P* als voetpunt heeft, zie je hetzelfde als de waarnemer *W*.

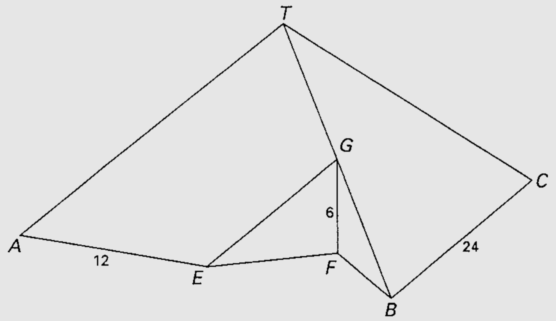
Opgave 2 Kantoorpiramide

Een directeur van een reclamebureau geeft een architect opdracht om een kantoor te ontwerpen in de vorm van een regelmatige vierzijdige piramide.

In overleg met de directeur wordt besloten de piramide 12 meter hoog te maken en een grondvlak van 24 bij 24 meter te nemen.

In de piramide wordt een uitsparing gemaakt voor de ingang zoals in figuur 3 is aangegeven. E is het midden van AB.
$\angle EFG = \angle BFG = \angle BFE = 90°$.

figuur 3

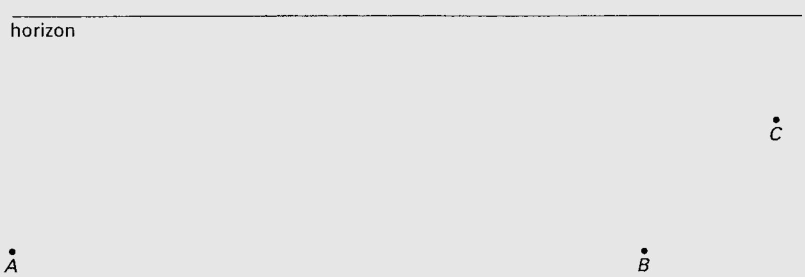


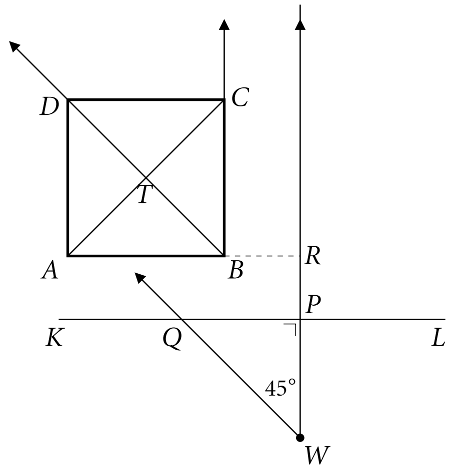
In de figuur van de bijlage zijn 3 punten van het grondvlak van de piramide in perspectief getekend. AB is evenwijdig aan de horizon.

8p 7 □ Teken in de figuur van de bijlage de top van de piramide en voltooi de perspectieftekening van de piramide met de uitsparing bij de ingang. Licht je werkwijze toe.

Bijlage bij de opgaven 1 en 2

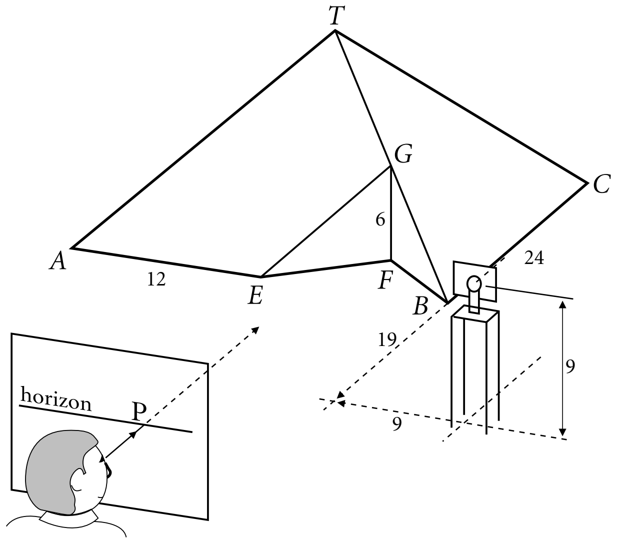
Opgave 2





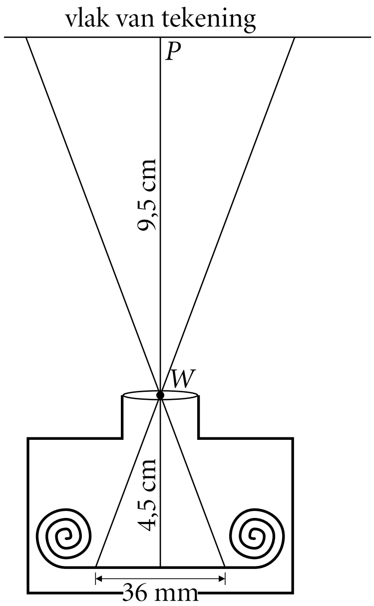
Figuur 1 Bovenaanzicht van de situatie (niet op schaal). *KL* geeft het vlak van tekening aan.

Omdat de ribbe *AB* in werkelijkheid 2400 cm is en in de tekening 12 cm, bevindt *W* zich 200 × 9,5 = 1900 cm voor de piramide. De afstand *WR* = 1900 cm.
Op de tekening bevindt punt *B* zich 4,5 cm links van *P*. *W* ligt dus 200 × 4,5 = 900 cm rechts van het hoekpunt *B* van de piramide. De afstand *BR* = 900 cm.
Uit de tekening is ook af te leiden dat de waarnemer *W* zich 900 cm boven het grondvlak *ABCD* bevindt. De situatie is in figuur 2 weergegeven.

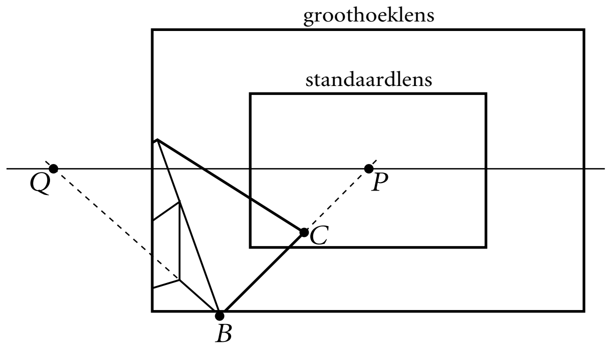


Figuur 2 Situatieschets van de positie van de waarnemer *W* ten opzichte van de piramide. Linksonder zijn het vlak van tekening en de waarnemer vergroot weergegeven.

Stel dat de waarnemer *W* is uitgerust met een gewoon fototoestel met een lens met brandpuntsafstand 4,5 cm. Het gebruikelijke negatiefformaat is 24 × 36 mm. Met behulp van gelijkvormige driehoeken (figuur 3) kan worden berekend welk deel van het uitzicht op de foto wordt vastgelegd. Dit deel is een rechthoek van 51 × 76 mm in de oorspronkelijke tekening. Als deze lens wordt vervangen door een groothoeklens met een brandpuntsafstand van 2,5 cm wordt deze rechthoek 91 × 137 mm. In figuur 4 zijn deze rechthoeken aangegeven.



Figuur 3 Bovenaanzicht bij gebruik van een fototoestel. Punt *W* geeft zowel de positie van waarnemer als het middelpunt van de lens weer. *(Deze figuur is toegevoegd, om te verklaren welk deel op foto wordt vastgelegd.)*



Figuur 4 In deze figuur is aangegeven wat de waarnemer zou fotograferen met een standaard- resp. groothoeklens. Deze figuur is een 50% verkleining van een deel van de bijlage van opgave 2.

Deze fotograaf zal in ieder geval de aanwijzing van zijn fotohandelaar krijgen om zijn fototoestel meer te richten op het te fotograferen object.
Door onze dagelijkse ervaring met foto's en tv-beelden zijn we zeer vertrouwd met de perspectivische afbeelding. Omdat foto's meestal worden afgedrukt op een formaat van 10 × 13 cm, hebben we geleerd ons oog op de juiste afstand (ongeveer 20 cm) te plaatsen en zo een goede indruk te krijgen van de voorstelling. In deze opgave wordt de leerling gevraagd zich zeer dicht bij het vlak van tekening op te stellen (9,5 cm) en juist dat gedeelte te tekenen wat gewoonlijk buiten het gebruikelijke gezichtsveld valt. Het maken van een perspectivische tekening op deze manier geeft wel een zeer vertekend beeld van de werkelijkheid. Kortom een slechte opgave.

Recreatie

Opgave 662

Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen in Noordwijkerhout hield Frits Beukers op zaterdag een lezing over 'Vergelijkingen in gehele getallen'. Gedurende de boeiende lezing liet hij vele voorbeelden zien van diophantische vergelijkingen. Als introductie nam hij 36 ballen, die in de vorm van een gelijkzijdige driehoek lagen. Het benodigde aantal ballen is dan $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$. Aangezien 36 een kwadraat is, kunnen de ballen ook in de vorm van een vierkant met zijde 6 worden gelegd. Met 1225 ballen lukt dit ook: ze vormen een gelijkzijdige driehoek en ook een vierkant. Zo zijn er oneindig veel oplossingen. Frits ging echter nog een stapje verder: hoeveel ballen zijn er nodig om een stapeling te maken in de vorm van een driezijdige piramide? En als ze op de grond liggen, dan moet er ook een vierkant van gemaakt kunnen worden. Ons voorbeeld met 36 ballen lukt bijna: leg een driehoek op de grond met zijde 5. Hiervoor zijn 15 ballen nodig. In de openingen leggen we een driehoek met zijde 4: 10 ballen nodig. Enzovoort. Totaal nodig: $15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$ ballen. Jammer, we houden 1 bal over. Het vierkant lukt wel: zijdelengte 6.

Ons probleem deze maand: hoeveel ballen hebben we nodig zodanig dat er een driezijdige piramide van te maken is en ook een vierkant? Uiteraard zijn we op zoek naar ALLE oplossingen.
Voor de computerfreaks onder ons:
'Bestaat er een computerprogramma dat van een willekeurige diophantische vergelijking kan beslissen of er wel of geen oplossing is?' Het was een grote verrassing toen in 1970 de Rus Matiyasevich, na voorbereidend werk van anderen, het antwoord gaf: NEE.
Hiermee is op fundamentele wijze aangetoond dat het oplossen van diophantische vergelijkingen niet gemechaniseerd kan worden! Elke vergelijking heeft dus z'n eigen kuren en moet apart worden aangepakt.
Elke inzending, binnen een maand ingestuurd, levert maximaal 5 punten op voor de doorlopende ladderwedstrijd.

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan
Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

Oplossing 659

[1] 8	[2] 6	[3] 4
[4] 2	5	1
[5] 7	3	9

Op eenvoudige wijze vond iedereen de nevenstaande unieke oplossing van de kruistalpuzzel.

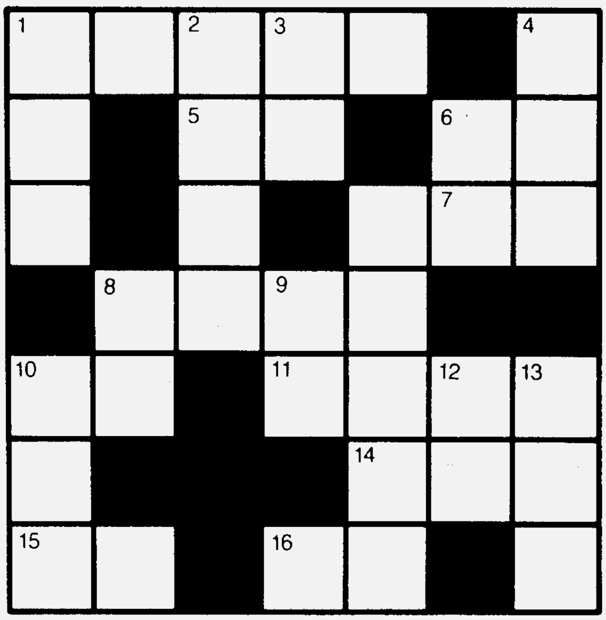
Afgelopen maand heb ik me verdiept in de geschiedenis van het kruistalraadsel. Als oudste bron van een ‘Crossnumber Puzzle’ heb ik een boek uit 1936 gevonden: ‘Brush up your wits’ van Hubert Phillips. Hierin staan drie crossnumber puzzels. Waarschijnlijk uit 1935 komt de beroemde ‘Dog’s Mead Puzzle’. Men vermoedt dat ook hiervan de bedenker Hubert Phillips is. De Engelse tekst luidt als volgt:

Across

1. Area of Dog’s Mead, in square yards.
5. Age of Martha, Farmer Dunk’s older daughter.
6. Difference between the length and the breadth of Dog’s Mead, in yards.
7. Number of roods in Dog’s Mead times 9 Down.
8. The year when the Little Pigley farm was first occupied by the Dunk family.
10. Farmer Dunk’s age.
11. Year of birth of Mary, Farmer Dunk’s younger daughter.
14. Perimeter of Dog’s Mead, in yards.
15. Cube of Farmer Dunk’s walking speed, in miles per hour.
16. 15 Across minus 9 Down.

Down

1. Value of Dog’s Mead, in shillings per acre.
2. The square of the age of Mrs. Grooby, Farmer Dunk’s mother-in-law.
3. Mary’s age.
4. Value of Dog’s Mead, in pounds.
6. The age of Farmer Dunk’s firstborn, Edward, who next year will be twice the age of his sister Mary.
7. Square of the number of yards in the breadth of Dog’s Mead.
8. Time, in minutes, it takes Dunk to walk 1⅓ times around Dog’s Mead.
9. See 10 Down.
10. 10 Across times 9 Down.
12. One more than the sum of the digits in 10 Down.
13. Number of years the Little Pigley farm has been in the Dunk family.



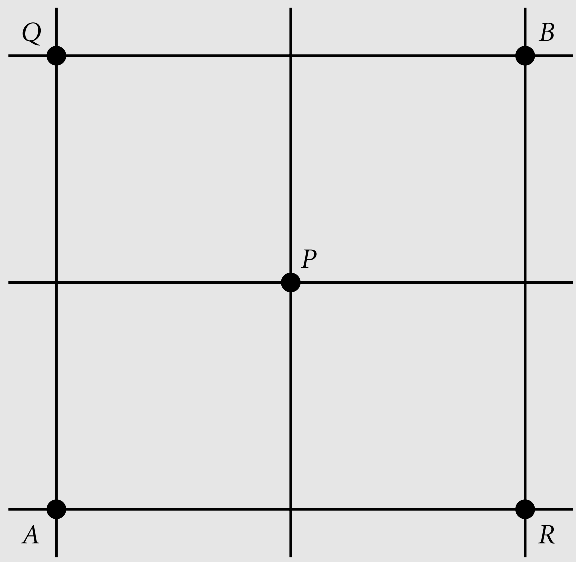
Deze maand staat met 51 punten bovenaan :
Lourens van den Brom
Ruimtevaartlaan 45
1562 BB Krommenie
Hartelijk gefeliciteerd met de boekenbon van *f* 25,–.

Ik heb ze maar allebei goed-gerekend

Leon van den Broek

Bij een proefwerk Combinatoriek stelde ik de volgende vraag.

Anneke loopt random van A naar B (zie plaatje). Wat is de kans dat Anneke via punt P loopt?



Bij het beoordelen van de antwoorden kwam ik in de problemen. Er kwamen namelijk twee verschillende oplossingen.

Oplossing 1

Welke stap Anneke als eerste zet, doet er niet toe. Met kans $\frac{1}{2}$ voert haar tweede stap haar naar punt *P*. De gevraagde kans is dus $\frac{1}{2}$.
Ten overvloede werd hier nog wel aan toegevoegd dat Anneke of via *Q*, of via *P* of via *R* moet lopen en dat de kans dat ze via *Q* loopt $\frac{1}{4}$ is, evenals de kans dat ze via *R* loopt.
Hier is geen speld tussen te krijgen.

Oplossing 2

Er zijn $\binom{4}{2} = 6$ routes van *A* naar *B*; je kunt ze ook gewoon tellen. Er zijn er 2 van *A* naar *P* en 2 van *P* naar *B*, dus $2 \times 2 = 4$ routes van *A* via *P* naar *B*; ook deze kun je gewoon tellen. Dus is de kans dat Anneke via *P* loopt $\frac{4}{6}$.
Ook hier is geen speld tussen te krijgen.

Het probleem bij de beoordeling heb ik gemakkelijk opgelost: ik heb ze maar allebei goedgerekend. Daarmee was de kous natuurlijk nog niet af. Met veel collega's heb ik gediscussieerd over de twee antwoorden. Welk antwoord is het goede? (Of zijn ze allebei fout?) Belangrijk lijkt de opmerking dat bij oplossing 1 niet elke route even waarschijnlijk is.

De aap uit de mouw

Ik ben tot de volgende slotsom gekomen. De vraag is niet goed geformuleerd! Wat is eigenlijk random? Hoe wordt het experiment uitgevoerd, dat wil zeggen wat doet Anneke nou eigenlijk? Werpt Anneke bij elk kruispunt met een zuivere munt om te bepalen met welke weg ze haar route zal vervolgen (zolang ze nog te kiezen heeft)? In dat geval is oplossing 1 de juiste. Of heeft ze elke mogelijke route van *A* naar *B* in een hoed gestopt en kiest ze er willekeurig één uit? In dat geval is oplossing 2 de juiste. Het woord 'random' geeft geen uitsluitsel hoe Anneke te werk gaat.
De moraal: pas op uw formulering!