Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 70
1994-1995 september
1

Zeventig jaar jong

Kunnen we door vragen leren?

De afgeleide van $x \to 1/x$

EUCLIDES

Redactie

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per cursusjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij
drs. M.C. van Hoorn,
Noordersingel 12,
9901 BP Appingedam.
Voor meer informatie:
zie 'Richtlijnen voor auteurs' achterin dit tijdschrift.
De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 2 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,
8034 RA Zwolle, tel. 038-539985.
Secretaris
drs. J.W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie
F.F.J. Gaillard, Jorisstraat 43,
4834 VC Breda,
tel. 076-653218; fax 076-653218.
Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 65,00 per verenigingsjaar; voor studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de VVWL *f* 47,50; contributie zonder Euclides *f* 40,00.
Opgave van nieuwe leden aan de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

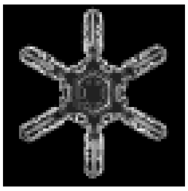
Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 71,00. Een collectief abonnement (6 exemplaren of meer) kost per abonnement *f* 48,00. Opgave bij de ledenadministratie (adres: zie boven).
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgiro hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer.
Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar.
Annuleringen dienen vóór 1 juli te worden doorgegeven aan de ledenadministratie.
Losse nummers *f* 12,50.

Advertenties

Inhoud

Bij het begin van de 70e jaargang 02

F.M. Vriesendorp
Rationale punten op de eenheidscirkel 03



Piet van Wingerden
Kunnen we door vragen leren? I 05

Korrel 06

Leon van den Broek
De afgeleide van $x \to 1/x$ meetkundig afgeleid 07

Boekbesprekingen 10 32

Martinus van Hoorn
'Exact begaafde leerlingen moeten niet ondersneeuwen' *Interview* 11

Werkbladen 12

Bewijs zonder woorden (1) 14

Actualiteiten 15

Victor Hermans
Soaps of calculators? 23

Jan Koekkoek
GeomeTrucs 25

Rob Bosch
Een verrassende uitslag 27

Marian Kollenveld / Carla van Oorschot
Verslag van de studiedag van Vrouwen en Exacte Vakken 29

40 jaar geleden 31

Recreatie 34

Kalender 36

Bij het begin van de 70e jaargang

De redactie

Zeventig jaar jong

In zijn zeventigste jaar verschijnt Euclides in een nieuwe vormgeving. Er is een nieuw logo, er is een nieuw formaat, de nummers zijn iets dikker en het aantal nummers per jaar gaat naar 8 (de totale hoeveelheid kopij blijft gelijk). De inhoud is meer dan voorheen ondergebracht in vaste rubrieken. We kunnen rustig spreken van een modernisering.

Werkwijze redactie

De redactie gaat professioneler werken (dit gebeurt inmiddels al enige tijd), maar voor u, als lezer, blijft de gang van zaken gelijk. Euclides verschijnt op regelmatige tijden, en als u een artikel inzendt wordt dit eerst door een aantal redactieleden bekeken. Het kan zijn dat er dan nog met u wordt gecorrespondeerd over de inhoud, de lengte of een ander aspect van een door u ingezonden bijdrage. Dit gebeurt trouwens ook met bijdragen die door redactieleden zelf zijn geschreven. We hopen en verwachten dat hierdoor de kwaliteit van Euclides gewaarborgd kan worden.

Discussie

Op verschenen artikelen kan uiteraard worden gereageerd. Dat is ook het afgelopen jaar enkele keren gebeurd. We hanteren zo veel mogelijk het principe van hoor en wederhoor, naar journalistiek gebruik.

We hebben trouwens gemerkt, dat sommige briefschrijvers (nog) niet in de gaten hadden, dat Euclides typisch een blad is voor de wiskunde*leraren*, de *doeners*. Het is niet in de eerste plaats bestemd voor degenen die de kost verdienen met denken over het wiskundeonderwijs. Wel hopen we het contact tussen hen en de doeners te bevorderen, en we willen ook helemaal niet zeggen dat wiskundeleraren geen denkers zijn. Goed onderwijs vereist altijd grondig denkwerk.

We hopen dat degenen die de kost verdienen met denken zich kunnen blijven verplaatsen in het werk dat de leraren doen. We weten dat de professionele denkers allemaal Euclides aandachtig lezen om op de hoogte te blijven met wat er werkelijk van belang is in het wereldje van het wiskunde-onderwijs.

Het inzenden van bijdragen

Zoals gezegd verandert de procedure voor het inzenden van bijdragen en artikelen niet. Vriendelijk vragen we uw aandacht voor de specificaties die in de ‘Richtlijnen voor auteurs’ (achterin het tijdschrift) zijn opgenomen.
Heel graag ontvangen we uw inzendingen op diskette (liefst 3,5 inch), met gebruikmaking van het tekstverwerkingsprogramma WP 5.1. Dit programma hebben we om pragmatische redenen gekozen: het is simpelweg het meest gebruikte programma. Als u niet de beschikking hebt over WP 5.1, wilt u dan uw bijdragen inzenden in ASCII-files?
Wij stellen het op prijs als u bij het inzenden van uw bijdrage zorg besteedt aan de illustraties. Hoe mooier, hoe beter!
Wilt u dat uw bijdrage snel geplaatst wordt (iets wat de redactie uiteraard niet op voorhand gaat garanderen), dan moet u juist géén illustraties meezenden. In het middenkatern komen de meer actuele bijdragen; deze zijn niet geïllustreerd.

Tenslotte

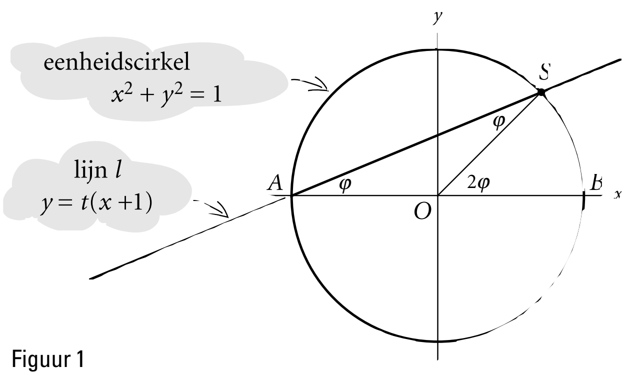
... hopen wij op voortzetting van de goede relatie met het bestuur van de vereniging, en met de Wolters-groepGroningen, die het blad verzorgt.

Rationale punten op de eenheidscirkel

F.M. Vriesendorp

Inleiding

Na het lezen van de bijdrage ‘Drietallen van Pythagoras en de dubbele-hoekformules’ van Rob Bosch in Euclides van januari 1992 vroeg ik me het volgende af: ‘Dubbele-hoekformules gebruiken bij Pythagoreïsche drietallen is natuurlijk verrassend, maar is het ook zinvol?’. Door een stukje van een introductie (op de Pell-vergelijking $x^2 - Dy^2 = 1$) van Smorynski uit zijn boek ‘Logic Number Theory I’ wat nader uit te werken kan ik nu antwoord geven op de vraag die ik mij stelde: ‘Het KAN zinvol zijn!’.



Figuur 1

Rationale punten

In figuur 1 is S het snijpunt van de lijn l (door A $(-1, 0)$ met richtingscoëfficiënt t) en de eenheidscirkel.
Voor de coördinaten van dit snijpunt S geldt:

$$x_S = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{en} \quad y_S = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad (1)$$

Bewijs (met behulp van substitutie):
Als we $y = t(x + 1)$ substitueren in $x^2 + y^2 = 1$ (dus $x^2 + (t(x + 1))^2 = 1$) dan krijgen we de 2e graads vergelijking $(\underline{t^2 + 1})x^2 + (\underline{2t^2})x + (\underline{t^2 - 1}) = 0$ met als discriminant $(2t^2)^2 - 4\,(t^2 + 1)(t^2 - 1) = 4$.

Dus (abc-formule) $x = \dfrac{-2t^2 \pm 2}{2(t^2 + 1)}$. En $x = -1$ (met $y = 0$) of $x = \dfrac{-t^2 + 1}{t^2 + 1}$ (met $y = t \times \left(\dfrac{-t^2 + 1}{t^2 + 1} + 1\right) = \dfrac{2t}{t^2 + 1}$).

Bij het bewijs hadden we ook gebruik kunnen maken van de dubbele-hoekformules van sin en cos.

Bewijs (met behulp van gonio):
Als φ de richtingshoek van lijn l is, dan zijn de basishoeken van de gelijkbenige driehoek ASO gelijk aan $|\varphi|$ en is de middelpuntshoek BOS (de buitenhoek van de tophoek van driehoek ASO) gelijk aan 2φ (zie figuur 1).
Conclusie: $S = (\cos 2\varphi, \sin 2\varphi)$ met $\tan\varphi = t$. Dus

$$x_S = \frac{\cos 2\varphi}{1} = \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{1 - \tan^2\varphi}{1 + \tan^2\varphi} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

en

$$y_S = \frac{\sin 2\varphi}{1} = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{2\tan\varphi}{1 + \tan^2\varphi} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Punten waarvan de coördinaten rationaal zijn worden **rationale punten** genoemd.
We weten nu dat, als t rationaal is, punt S een rationaal punt ($\neq A$) is.
De omgekeerde bewering is ook waar, omdat

$t = \dfrac{y_S}{x_S + 1}$ (immers, punt S ligt op l: $y = t(x + 1)$).

Met (1) hebben we dus **alle** rationale punten op de eenheidscirkel ($\neq A$) **geparametriseerd** met een rationale parameter. Het extreme geval dat S met A samenvalt (dus l verticaal is) kunnen we er nog bij betrekken door $t = \infty$ toe te staan.

Als we in (1) $t = \dfrac{n}{m}$ substitueren krijgen we:

$$x_S = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \quad \text{en} \quad y_S = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \qquad (2)$$

Pythagoreïsche drietallen

Pythagoreïsche drietallen (a, b, c) zijn positieve gehele oplossingen van de vergelijking $x^2 + y^2 = z^2$. Daarbij zijn we alleen geïnteresseerd in de **primitieve** drietallen, d.w.z. $\mathbf{ggd}\,(a, b, c) = 1$. De resterende drietallen zijn daar veelvouden van.

Het punt $(a/c, b/c)$ is, wegens $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$, een rationaal punt S op de eenheidscirkel en voor de bijbehorende parameter t geldt eenvoudig

$$t = \frac{y_S}{x_S + 1} = \frac{b/c}{a/c + 1} = \frac{b}{a + c}$$

Omdat dit punt S van de vorm (2) is, waarbij de gehele getallen m en n (met $n/m = b/(a + c)$) moeten voldoen aan de voorwaarden $\mathbf{m > n > 0}$ **en** $\mathbf{ggd(a, b, c) = 1}$, hebben we hiermee bewezen dat voor **alle** primitieve Pythagoreïsche drietallen (a, b, c) geldt:

$$\begin{cases} a = (m^2 - n^2)\,/w \\ b = 2mn/w \text{ met } w = \text{ggd}(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2) \\ c = (m^2 + n^2)\,/w \end{cases} \quad (3)$$

Op het oog ziet deze formule er moeilijk uit, maar dat is schijn. w voldoet namelijk aan de volgende eenvoudige voorwaarde:

w = het aantal oneven getallen van m en n (4)
In formule-vorm: $w = m \,(\text{mod } 2) + n\,(\text{mod } 2)$

Bewijs:
w is deler van $2m^2\,(=(m^2 + n^2) + (m^2 - n^2))$ en deler van $2n^2\,(=(m^2 + n^2) - (m^2 - n^2))$. Dus $w = 1$ of $w = 2$, omdat m en n onderling ondeelbaar zijn.

- Als m en n beide oneven zijn dan zijn $m^2 + n^2$, $2mn$ en $m^2 - n^2$ alle drie even en geldt $w = 2$.
- Is van m en n één even en één oneven dan zijn $m^2 + n^2$ en $m^2 - n^2$ oneven en kan w geen 2 zijn. Dus is $w = 1$.

(3) en (4) zou ik als volgt willen samenvatten:

	$m > n > 0$ $\text{ggd}\,(m, n) = 1$ w = aantal oneven in $\{m, n\}$	$p > q > 0$ $\text{ggd}\,(p, q) = 1$ v = aantal oneven in $\{p, q\}$
a	$= (m^2 - n^2)/w$	$= 2pq/v$
b	$= 2mn/w$	$= (p^2 - q^2)/v$
c	$= (m^2 + n^2)/w$	$= (p^2 + q^2)/v$

(5)

Voor p en q in de tweede formule geldt:

$$\begin{cases} p = (m + n)/w \\ q = (m - n)/w \end{cases} \text{ en omgekeerd } \begin{cases} m = (p + q)/v \\ n = (p - q)/v \end{cases} \text{ met}$$

$v \cdot w = 2$

Conclusie

In de bijdrage van Rob Bosch worden met behulp van gonio **rationale punten op de eenheidscirkel** berekend.

Dit gebeurt door bij een gegeven paar (m, n) de dubbele-hoekformules toe te passen op hoek φ met $\tan \varphi = n/m$. Het resultaat is het rationale punt S van formule (2).
Formule (3) (en dus ook formule (2)) wordt hierbij van meet af aan bekend verondersteld in de gebruikelijke vorm met 'm en n niet beide oneven' en dus $w = 1$.
Die formule wordt ook uiteindelijk toegepast, maar dat had ook direct kunnen gebeuren!

Dus, volgens mij, is de enige manier om de dubbelehoekformules bij Pythagoreïsche drietallen zinvol te gebruiken door formule (3) **niet te poneren maar te BEWIJZEN** (en dat heb ik in dit artikel dan ook gedaan).

Gedachten en overwegingen in de didactiekcommissie

Kunnen we door vragen leren? I

Piet van Wingerden

Veel geroutineerde lezers zijn gewend eerst de titel en direct daarna het slot van een artikel te bekijken. Pas dan nemen ze het besluit om het er tussenliggende al of niet te lezen.
Ik ben benieuwd of u met lezen tot hier bent gekomen. De slotzin is namelijk tevens de titel.

Om ook in vorm bij mijn onderwerp te blijven wil ik u, geliefde lezer - zo mag u nu wel genoemd worden - in dit artikeltje vragen stellen en het zou niet zo gek zijn als u tenslotte met nog wat vragen bleef zitten.

Toen ik een jaar of vijftien was, was ik als een spons: alles in me opnemen, ik wilde ontzettend veel leren. Er waren volwassenen die kennelijk wisten hoe de samenhang in het leven was en die bereid waren mij al docerend knapper en wijzer te maken. Ik zocht naar mensen die de antwoorden wisten. Ik was de vragensteller. De meeste mensen wilden ook wel ongevraagd aan mijn wensen voldoen.
Achteraf twijfel ik er aan of dat laatste zo goed is geweest. Veel van wat me toen - beslist niet tegen mijn zin - ingestampt en ingepompt is, heb ik later weer prijs gegeven, er moest het een en ander afgeleerd worden. Dat was misschien nog wel moeilijker dan aanleren.
Mijn vele leermeesters en weinige leermeesteressen hadden zich niet toegelegd op een dialoog met hun pupil. Later heb ik docenten ontmoet die dat wel deden. Hierdoor werd een dimensie aan mijn denken toegevoegd. Ik werd serieus genomen.
Wat docenten willen bijbrengen dient bij de leerlingen te worden vastgeknoopt aan bestaande kennis en ingebed in reeds verworven inzichten. Om te weten welke kennis voorhanden is, zou het antwoord op een vraag van een leerling uitgesteld kunnen worden met de wedervraag: ‘Wat valt je nu hierbij te binnen?’
De jonge mens weet immers wel iets, misschien onvolledig of ongeordend, soms anders dan wij. In ieder geval het navragen waard, lijkt me.

Bij de eerste wiskundeles in de brugklas vroeg ik wel eens: ‘Tot hoever kunnen jullie tellen?’
Een kind van zes is trots dat het tot 100 kan tellen, doet het graag. De ouders luisteren met een glimlach, het duurt waarschijnlijk een minuut. Voor twaalfjarigen ligt de getallenwereld nog altijd helemaal open en de bereidheid is groot.
Of er iemand was die in deze les even tot miljoen zou kunnen tellen? Of zou het wat meer tijd vragen? De vraagstelling bleek aanleiding te zijn om daar eens over te denken. Als je in een minuut maar tot 100 kunt komen, hoever kom je dan in een uur stug doortellen? Ga dan maar eens door tot miljoen.
Kan je dat eigenlijk wel in één week klaren?

Nog iets voor brugklassers.
Zullen we ze eens vragen wat volgens hen wiskunde is?
Je kunt ze met een gerust geweten zeggen, dat je het zelf nog steeds niet zo goed onder woorden kan brengen.
Dit soort vragen is ook in hogere klassen zinvol, vaak geliefd.
De leerlingen willen altijd weten wat het nut van de schoolwiskunde is. Het liefst het nut van DE WISKUNDE.
Zit daar nog verschil in?

Van de docenten wordt verwacht dat ze daar zinnige dingen over kunnen zeggen.
Is het niet beter onze pupillen te helpen daar zelf mee te gaan worstelen?
In een derde klas gymnasium was ik een beetje oorzaak van huisvredebreuk door mijn opdracht: Vraag aan vader, moeder, ooms en tantes wat ze voor nut nú nog ervaren van het vroeger genoten wiskundeonderwijs. Ik drukte mijn leerlingen op het hart concrete antwoorden te eisen. Neem geen genoegen met schijnantwoorden, zoals ‘goed leren denken’. Het is maar de vraag of pappa van zichzelf kan beoordelen of hij ‘goed kan denken’, laat

Korrel

Wiskunde, een hoofdvak

Nu de basisvorming nog maar pas van start gegaan is, verneemt men de eerste commentaren. Een opmerking die veel gehoord wordt, is dat het programma overladen is. De leerlingen krijgen 32 uur per week les in 15 vakken, voor al die 15 vakken zijn kerndoelen geformuleerd, en de docenten spannen zich in om de kerndoelen te halen. Bij vrijwel alle vakken horen schriftelijke toetsen, proefwerken zeg maar. Door de veelheid raakt het overzicht zoek. Je kunt je afvragen of de dames en heren politici dit zo hebben gewild. Voor wiskunde is in de eerste klas 3 of 4 uur uitgetrokken. Wiskundewerklokalen treft men heel sporadisch aan, maar wel wordt systematischer met materialen gewerkt. Uit veel verhalen van wiskundedocenten lees je trouwens vreugde over de introductie van een nieuw programma.
Ondertussen dreigt wiskunde onder te sneeuwen in de veelheid van vakken in de basisvorming.

Een evaluatie van het vernieuwde basis*onderwijs* heeft inmiddels de kranten gehaald. Het programma is overladen, door de veelheid aan vakken dreigen taal en rekenen aan belang in te boeten. Het klinkt alsof het over de basis*vorming* gaat. Kerndoelen zijn dingen die men getoetst wil hebben, daar komt de ellende vandaan. Kerndoelen moeten blijkbaar niet overheersen. Als er zoveel kerndoelen getoetst (en dus eerst gehaald) moeten worden, zou men kunnen vergeten dat er hoofdvakken zijn, namelijk taal en wiskunde.

M.van Hoorn

staan dat hij er zeker van kan zijn, dat dit zonder wiskundelessen duidelijk minder zou zijn geweest.

Ten slotte een bloemlezing vragen ter overweging. Om deze aan ons zelf te stellen. Niet om er snel antwoorden op te gaan geven, maar om op onderzoek uit te gaan:

- Wie zijn op school de vragenstellers: de leraren, de leerlingen of beiden?
- Behoort u tot de mensen die weinig vragen hebben?
- Bent u een doorgewinterde vragensteller?
- Hebt u het idee dat u goed naar vragen kunt luisteren?
- Kunt u gemakkelijk een wedervraag vinden, als aan u een vraag wordt gesteld? Ik bedoel niet een handige truc om eigen onkunde te verbergen, maar een oprechte poging de ander niet voor de voeten te lopen bij diens zoeken naar antwoorden en oplossingen.
- Kunt u wachten als uw gesprekspartner, bijvoorbeeld een leerling, nog aan het denken is over een door u aan hem gestelde vraag?
- Kunnen we onderwerpen of aspecten in het wiskunde-onderwijs bedenken waarbij een vraagstelling minstens zo effectief werkt als een directe uitleg?
- Is het niet irritant om op je vraag om uitleg van een probleem een wedervraag te krijgen in plaats van een fatsoenlijke beantwoording?

Op deze laatste twee vragen wil ik in een volgend artikel terugkomen.

Wat denkt u: KUNNEN WE DOOR VRAGEN LEREN?

De afgeleide van $x \to 1/x$ meetkundig afgeleid

Leon van den Broek

Als $f(x) = x^n$, dan $f'(x) = n \times x^{n-1}$. Je wilt laten zien dat deze regel ook geldt voor $n = -1$, dus dat de afgeleide van $x \to 1/x$ is $x \to -1/x^2$. Je kunt daarvoor kiezen uit allerlei benaderingen, afhankelijk van het niveau van de leerlingen en hun precieze voorkennis. Voor de volledigheid neem ik ook twee 'constateer'-aanpakken mee en de twee bekende formeel-algebraïsche aanpakken.

1 Meten

Teken nauwkeurig de grafiek van $y = 1/x$. Teken zo goed mogelijk de raaklijn in enkele mooie punten en constateer dat de gemeten helling aardig klopt met de uitkomsten van $-1/x^2$.

2 Benaderen met $\Delta y/\Delta x$

Kies een getal voor x. Neem bijvoorbeeld Δx: 0,01. Bereken de bijbehorende waarde van Δy en constateer dat $\Delta y/\Delta x$ nagenoeg gelijk is aan de uitkomst van $-1/x^2$ voor de gekozen waarde van x. (En natuurlijk ook nog even hetzelfde voor $\Delta x = -0{,}01$ doen.)
Dit kun je voor andere waarden van x herhalen. Met een eenvoudig computer-programma kun je snel een tabel maken voor een heleboel waarden van x, waarbij steeds $\Delta y/\Delta x$ en $-1/x^2$ wordt uitgerekend.

3 Uit de produktregel

Als de produktregel al bekend is — en de afgeleide van $x \to x$ — krijg je de afgeleide door beide leden van de functievergelijking
$x \cdot 1/x = 1$ te differentiëren: $1 \cdot 1/x + x \cdot ? = 0$ en dus $? = -1/x^2$.

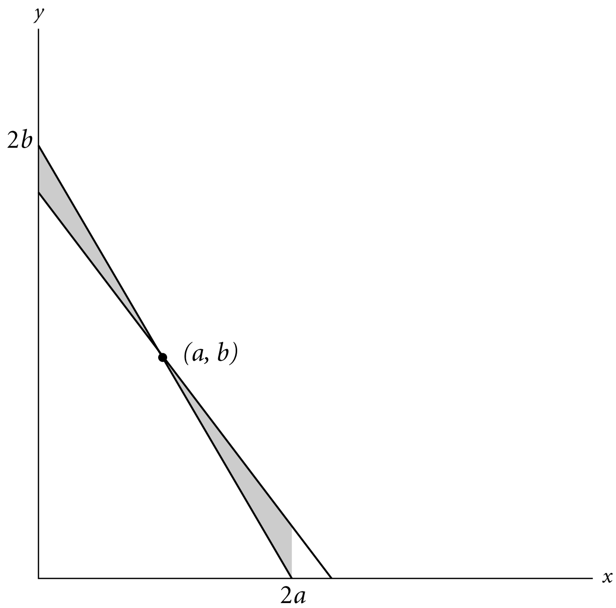
4 Als limiet van het differentiequotiënt

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

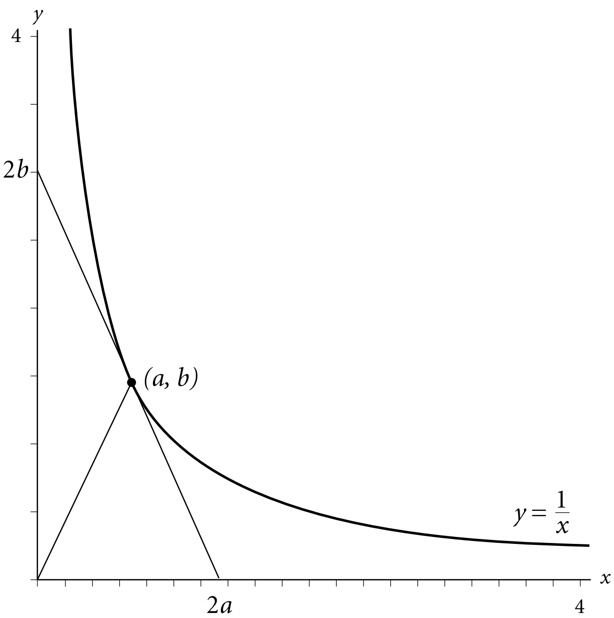
Methode 1 en 2 sluiten direct aan op wat de afgeleide is: de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, te benaderen door de helling $\Delta y/\Delta x$ van koorden. Weliswaar wordt niet in strikte zin bewezen dat $-1/x^2$ de afgeleide waarde is, maar de methoden zijn overtuigend. Deze manieren mogen niet achterwege blijven.
Methode 4 is een direct vervolg op methode 2, maar dan algemeen opgezet. Stap voor stap is de afleiding voor de leerlingen goed te volgen. Het geheel komt als steeds moeilijker over, omdat het formeel algebraïsch rekenen minder aandacht krijgt in het wiskunde-onderwijs. Methode 3 vind ik een 'handigheid'. Zij voert snel tot het gewenste resultaat. Ik heb begrepen dat collega's deze aanpak 'elegant' vinden. Ik ben echter bang dat het wiskundeniveau voor veel leerlingen in feite te hoog is: we werken met een functievergelijking! Een andere bedenking bij methode 3 en 4 is dat ze geïsoleerd zijn in het onderwijs. Je doet ze één keer, waarna je alleen nog de conclusies toepast, zonder dat de gedachtengang van het bewijs opnieuw gebruikt wordt. Dat betekent dat deze methodes ver weg staan van de alledaagse schoolwiskunde-praktijk.
Het tegenwoordige onderwijs heeft de tendens zo veel mogelijk aanschouwelijk voor te stellen. En dat lukt ook bij de afgeleide van $x \to 1/x$. Ik geef drie verschillende meetkundige aanpakken, elk met elementen die voor wiskunde-onderwijs interessant zijn.

5 Driehoek met minimale oppervlakte onder de hyperbool



Figuur 1

Een lijn door (a, b) in het eerste kwadrant snijdt de x-as in punt P en de y-as in Q. De oppervlakte van ΔPOQ is minimaal als $OP = 2a$ en $OQ = 2b$. Immers, dan is (a, b) het midden van PQ. Als je de lijn bij deze P en Q een beetje draait, komt er meer oppervlakte bij dan eraf gaat; zie figuur 1. De bijbehorende driehoek noemen we de minimale driehoek bij (a, b). De minimale driehoek heeft oppervlakte $2ab$. Merk op dat elk punt zijn eigen minimale driehoek heeft: twee verschillende punten hebben ook verschillende minimale driehoeken.



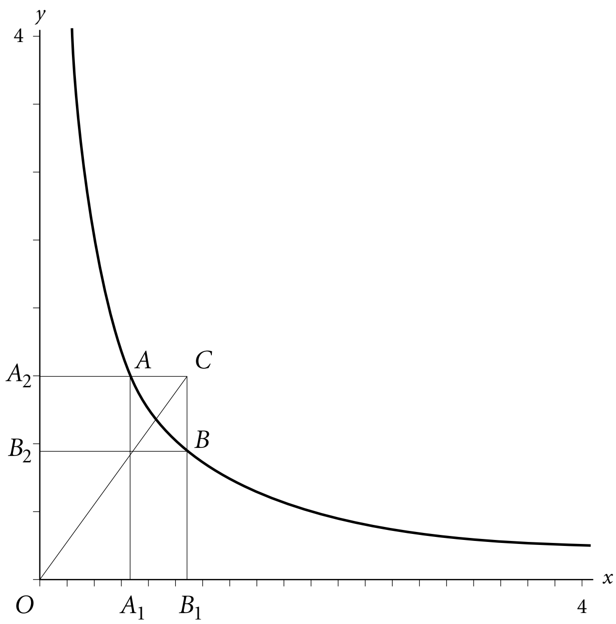
Figuur 2

Als het punt (a, b) op de hyperbool $y = 1/x$ ligt, is de minimale oppervlakte 2.
Neem nu een punt (a, b) op de hyperbool $y = 1/x$. De schuine zijde van de minimale driehoek bij (a, b) moet wel raaklijn zijn aan de hyperbool. Stel maar dat hij de hyperbool nog in een tweede punt zou snijden, dan zou de driehoek ook minimale driehoek zijn bij dat tweede punt (immers de oppervlakte van de driehoek is 2). En dat is in tegenspraak met de opmerking hierboven dat elk punt zijn eigen minimale driehoek heeft.

Welnu: de raaklijn PQ heeft dus richtingscoëfficiënt:

$$\frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} = \frac{-1/x}{x} = \frac{-1}{x^2}$$

6 $\Delta y/\Delta x \approx -y/x$



Figuur 3

Neem bij het punt $A(x, y)$ op de hyperbool een tweede punt $B(x + \Delta x, y - \Delta y)$. Omdat de oppervlaktes van OA_1AA_2 en OB_1BB_2 gelijk zijn (namelijk allebei 1), zijn de oppervlaktes van A_1B_1CA en B_2BCA_2 gelijk. Hieruit volgt dat

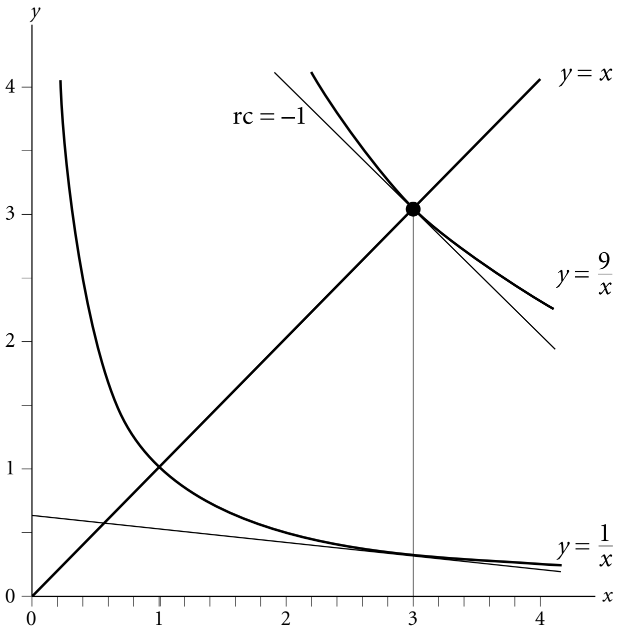
$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{B_1C}{A_2C}$$

Dus rc van $AB = -$ rc van OC.

Als Δx tot 0 nadert, nadert AB tot de raaklijn in A en nadert OC tot de lijn OA.

Dus de rc van de raaklijn in het punt (x, $1/x$) is:

$$-\frac{y}{x} = -\frac{1/x}{x} = -\frac{1}{x^2}$$



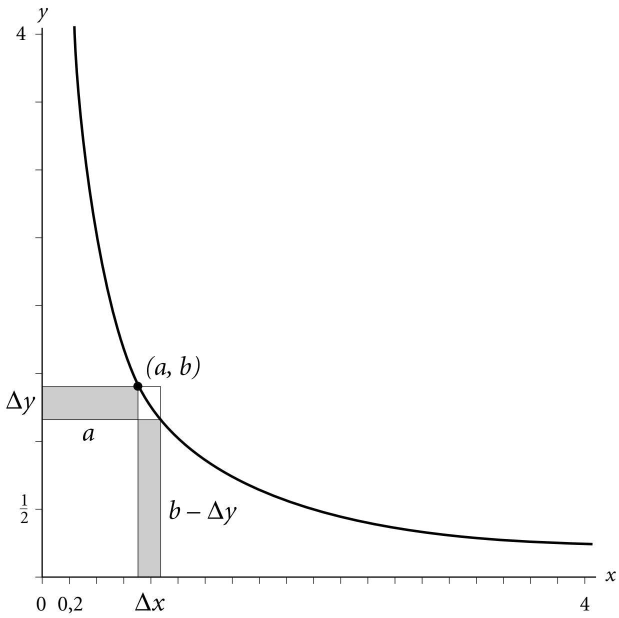
Figuur 4

7 Uit de symmetrie van *y* = *c/x*

De grafieken van $y = c/x$ zijn allemaal symmetrisch in de lijn $y = x$. Immers de formules zijn te schrijven als $xy = c$, welke uitdrukking duidelijk symmetrisch is in x en y.
Ik zoek de afgeleide van $x \rightarrow 1/x$ in het punt $(3, \frac{1}{3})$. Daartoe vermenigvuldig ik deze hyperbool met factor 9 ten opzichte van de x-as. Ik krijg dan de hyperbool $y = 9/x$. Het punt $(3, \frac{1}{3})$ is overgevoerd in (3, 3). De helling van $y = 9/x$ aldaar is -1. De helling van $y = 1/x$ in het punt $(3, \frac{1}{3})$ is $\frac{1}{9}$ keer zo groot. Dus $-\frac{1}{9}$.

Van aanpak 7 weet ik dat hij goed begrepen wordt door H5-leerlingen wiskunde B. Aanpakken 5 en 6 zijn moeilijk voor de middelbare school. Beide gebruiken nogal wat meetkunde over de hyperbool. Ze zouden goed voorbereid moeten worden in de onderbouw of in eerdere opgaven over differentiëren. Maar ook als zo'n meetkundig bewijs niet geheel begrepen wordt, is het aanbevelenswaardig de afgeleide van $x \rightarrow 1/x$ meetkundig te ondersteunen. Zinnen als 'de raaklijn in punt P loopt even steil omlaag als het lijnstuk OP omhoog loopt' halen de afgeleide uit de louter technische sfeer. En de aanpakken 5 en 6 kunnen ingekort worden tot de volgende (wat slordigere) redenering:
6' De oppervlakte *x* • *y* moet constant blijven.

Neem een punt (a, b) op de hyperbool. We letten op de oppervlakte van de rechthoek met hoekpunten (0, 0), (a, 0), (0, b) en (a, b). We bewegen ons een klein stukje over de hyperbool. Zeg dat x toeneemt met Δx en y afneemt met Δy. De oppervlakte van de rechthoek moet 1 blijven, dus wat eraf gaat moet even groot zijn als wat erbij komt. Als we afzien van het stukje rechtsboven (van Δx bij Δy) geldt dus $a \cdot \Delta y \approx b \cdot \Delta x$ en dus $\Delta y/\Delta x \approx b/a$. Bedenk dat Δx en Δy tegengesteld van teken zijn.



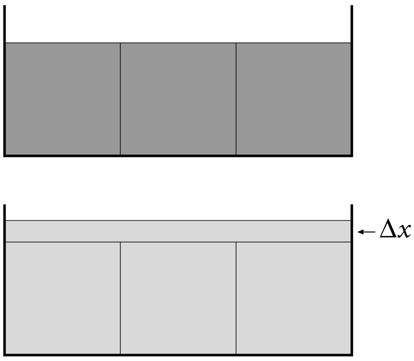
Figuur 5

Maar misschien is de volgende aanpak vanuit een context toch de meest aansprekende.

8 1 gram suiker oplossen in *x* liter water

We hebben 1 gram suiker opgelost in x liter water.
De suikerconcentratie S is dus $\frac{1}{x}$ gram/liter.
We nemen $x = 3$.
Als we een halve liter water toevoegen moeten de oude drie liters elk $\frac{1}{21}$ gram suiker afgeven. Want dan houden ze elk $\frac{1}{3} - \frac{1}{21} = \frac{2}{7}$ gram over en de toegevoegde halve liter water krijgt dan 3 keer $\frac{1}{21}$ gram en dat geeft ook een concentratie van $\frac{2}{7}$ gram/liter.
We starten weer met 1 gram suiker in 3 liter water. Als we Δx liter water toevoegen, moeten de drie oude liters elk zeg A gram suiker afgeven. Ze houden dan elk $\frac{1}{3} - A$ gram over. De toegevoegde Δx liter krijgt 3 keer A gram, wat een concentratie geeft van $3A/\Delta x$ gram/liter.

De concentraties moeten gelijk zijn, dus:
$3 \cdot A/\Delta x = \frac{1}{3} - A$. Laten we Δx tot 0 naderen, dan nadert A ook tot 0 zodat $3 \cdot A/\Delta x$ nadert tot $\frac{1}{3}$.
Dus $\Delta S/\Delta x = -A/\Delta x$ nadert tot $-\frac{1}{9}$ en dat is de afgeleide van $x \rightarrow 1/x$ voor $x = 3$.



Figuur 6

Boekbespreking

De schrijver richt zich in dit boek op een publiek 'dat intelligent is en geletterd, maar grotendeels ongecijferd (wiskundig ongeletterd)'. Het is geschreven als vervolg op het boek 'Ongecijferdheid', waarin Paulos vele voorbeelden behandelt om mensen inzicht en begrip in het werken met getallen te geven (dit boek verscheen in 1989 bij dezelfde uitgever).

In 'De gecijferde mens' gaat Paulos wiskundig verder: hij behandelt 70 wiskundige begrippen in alfabetisch geordende essays en sluit af met een top-veertig van wiskundigen door de eeuwen heen.
De begrippen en de manier waarop Paulos ze behandelt zijn zeer gevarieërd: zowel klassieke als moderne begrippen, zowel voor beginners als gevorderden, zowel oppervlakkig als wat meer diepgaand, zowel met formules als met gepraat er omheen. Een aantal voorbeelden:
- In 'Gödel en zijn stelling' geeft hij een beschrijving van het leven en het werk van Gödel.
- In 'Humor en wiskunde' filosofeert hij over het merkwaardige gevoel voor humor dat wiskundigen erop na houden. (Hier heeft hij ook een heel boek aan gewijd: 'Wiskunde en humor', over de logische structuren van grappen).
- In 'Oneindige verzamelingen' legt hij het aftelbaarheidsbegrip uit.
- In 'Pi' geeft hij wat wetenswaardigheden over dit getal.
- In 'Waarschijnlijkheidsrekening' behandelt hij zo ongeveer de principes en regels die een havo-wiskunde-A-leerling moet beheersen.
Een greep uit de andere onderwerpen: Analytische meetkunde, Chaostheorie, Groepen en abstracte algebra, Notatie, De paradox van Russell, Rekenen en uit het hoofd leren, Speltheorie en Topologie.
Ik vind de kwaliteit van de essays wisselend: vaak is de uitleg helder (in 'De statistiek-twee stellingen' legt hij duidelijk de Wet van de grote aantallen en de Centrale limietstelling uit), soms zwakker (Differentiaalvergelijkingen) en soms leutert hij wat veel (Muziek, kunst en digitalisatie).

Ik vond het boek 'Ongecijferdheid' verrassender: daar had ik regelmatig het idee van 'Leuk, daar had ik zo nog nooit bij stilgestaan'. Maar als wiskundeleraar vind ik ook dit een aardig boek, niet om in één keer uit te lezen, maar meer om in te neuzen en er wetenswaardigheden over wiskunde uit te halen.

Zwaantje Warmelink

J.A. Paulos
De gecijferde mens
Bert Bakker; ƒ39,90;
334 bladzijden;
ISBN 90-351-1119-2

INTERVIEW

'Exact begaafde leerlingen moeten niet ondersneeuwen'

Martinus van Hoorn

Maarten Keuning, 48 jaar, sinds 1971 leraar aan het Dollard College (voorheen de Winschoter Scholengemeenschap) te Winschoten, had het afgelopen jaar twee brugklassen, elk 4 uur per week.

Je had brugklassen met leerlingen die voorbestemd waren voor het vbo. Wou je graag zulke brugklassen?
Ik had er geen bezwaar tegen. Tegelijk zag ik het als een uitdaging. 'Dat zullen we wel even zien', dacht ik.

Je had al eerder vbo-brugklassen. Merkte je het afgelopen jaar verschil met een jaar eerder?
Een jaar eerder had ik voor het eerst vbo-brugklassen. Toen werkte ik dus nog uit een ander boek. Volgens mij waren de leerlingen met het nieuwe programma meer happy.
Maar ik ben ook anders gaan werken, meer stapsgewijs, en zonder dat ze in het antwoordenboek mochten kijken. Daardoor konden ze niet alvast een truc zien. Een som als 7 - (-13) moet je toch heel zorgvuldig behandelen, daar mag niets mis gaan.

Welk boek gebruiken jullie nu? Heb je het uit gekregen?
We hebben nu Netwerk. Het eersteklasboek had ik vrijwel uit. Verdiepingsopgaven zijn niet door alle leerlingen gemaakt.

Vind je het taalgebruik (door veel contextrijke wiskunde) in het nieuwe programma niet een bezwaar?
Soms is er een probleem. Het zijn vaak bepaalde woorden die ze niet kennen. Veel van mijn leerlingen wisten niet wat verstaan moest worden onder het aantal tikken van een telefoongesprek. Op zo'n moment is de context een handicap.
Ik vind toch dat het veel beter ging dan een jaar eerder. 'Zet je DENKEN op papier', zeg ik. Door zo te eisen dat ze hun denkproces verwoorden kan ik eigenlijk heel tevreden zijn.

Je bent provinciaal voorzitter van GroenLinks in Groningen. Past het nieuwe programma in jouw politieke opvattingen?
Ja, door beter aan te sluiten bij de belevingswereld van de kinderen schep je gelijkere kansen!

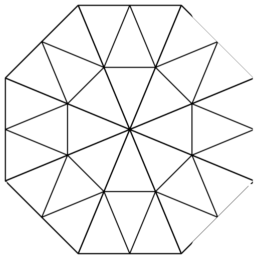
Vind je de leerlingen anders dan vroeger?
Ze zijn drukker, mondiger, je moet je meer tegenover hen verantwoorden. Dat waardeer ik wel. Onderling is het niet altijd pais en vree, en de school is niet het enige in hun leven. Met name meisjes zitten volgens mij wel eens met tegenzin bij wiskunde.

Moet een wiskundeleraar zich anders opstellen dan vroeger?
Ik zorg wel dat ik de baas blijf. En ik wil de talenten van mijn leerlingen ontplooien. Leerlingen met talent voor wiskunde zijn soms niet goed in talen. Bij de talen wordt veel meer getoetst, wat die vakken status bezorgt. Dat vele toetsen is logisch, want de structuur van de talen is ondergeschikt geworden. Maar zodoende kunnen exact begaafde leerlingen ondersneeuwen, iets wat beslist niet moet.

Werkblad

Mozaïekstenen (C-niveau)

Helma heeft 250 driehoekige mozaïekstenen. Die zijn gelijkbenig en hebben allemaal dezelfde vorm en grootte. Als je ze op een speciale manier tegen elkaar legt, krijg je regelmatige achthoeken. Zie de figuur hiernaast.



20 (3p) Hoeveel van deze achthoeken kan Helma leggen? Licht je antwoord toe.

21 (4p) Beredeneer dat de mozaïekstenen hoeken hebben van 45^o en $67\frac{1}{2}^o$.

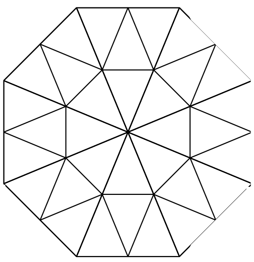
Er zijn witte en grijze mozaïekstenen.

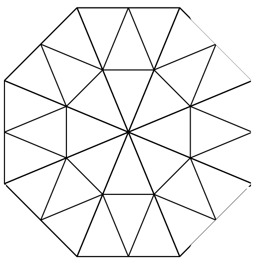
22 (3p) Ontwerp in de achthoek op de bijlage bij vraag 22 een kleurpatroon waarin twaalf grijze mozaïekstenen zitten en dat draaisymmetrisch is over 90^o. (Maak zelf mozaïekstenen grijs).

23 (4p) Ontwerp in de achthoek op de bijlage bij vraag 23 ook een kleurpatroon waarin twaalf grijze mozaïekstenen zitten en dat wel lijnsymmetrisch, maar niet draaisymmetrisch is. (Maak weer twaalf mozaïekstenen grijs).

Bijlage

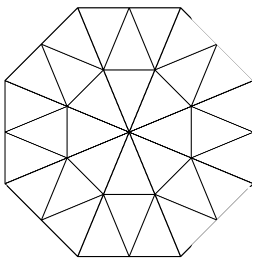
Vragen 22 en 23

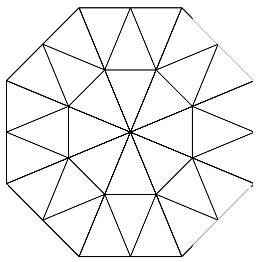




Deze twee figuren kun je gebruiken als kladfiguur.

Antwoorden 22 en 23





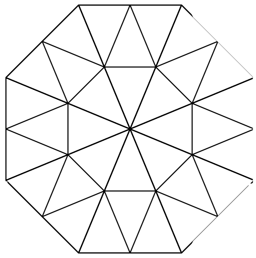
Geef in deze figuren je antwoorden.

Uit: examen mavo/vbo experimenteel 1994

Werkblad

Mozaïekstenen (D-niveau)

Helma heeft 250 driehoekige mozaïekstenen. Die zijn gelijkbenig en hebben allemaal dezelfde vorm en grootte. Als je ze op een speciale manier tegen elkaar legt, krijg je regelmatige achthoeken. Zie de figuur hiernaast.



19 (3p) Hoeveel van deze achthoeken kan Helma leggen? Licht je antwoord toe.

20 (4p) Bereken hoe groot de mozaïekstenen zijn. Schrijf je berekening op.

Er zijn witte en grijze mozaïkstenen.

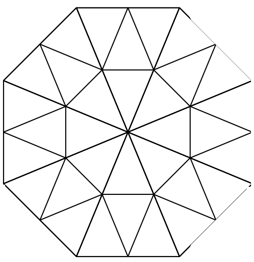
21 (3p) Ontwerp in de achthoek op de bijlage bij vraag 21 een kleurpatroon waarin twaalf grijze mozaïekstenen zitten en dat draaisymmetrisch is over 90º. (Maak zelf mozaïekstenen grijs).

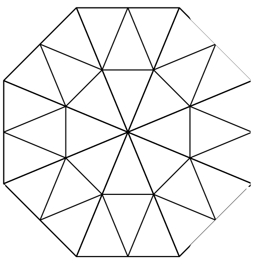
22 (2p) Hoeveel grijze mozaïekstenen moet je gebruiken als je een kleurpatroon wilt dat draaisymmetrisch is over 45º? Licht je antwoord toe.

23 (3p) Ontwerp in de achthoek op de bijlage bij vraag 23 ook een kleurpatroon waarin twaalf grijze mozaïekstenen zitten en dat wel lijnsymmetrisch, maar niet draaisymmetrisch is. (Maak weer twaalf mozaïekstenen grijs).

Bijlage

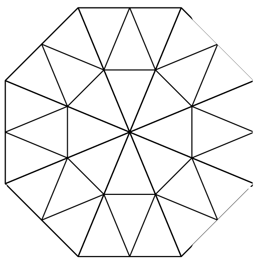
Vragen 21 en 23

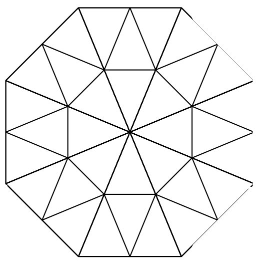




Deze twee figuren kun je gebruiken als kladfiguur.

Antwoorden 21 en 23



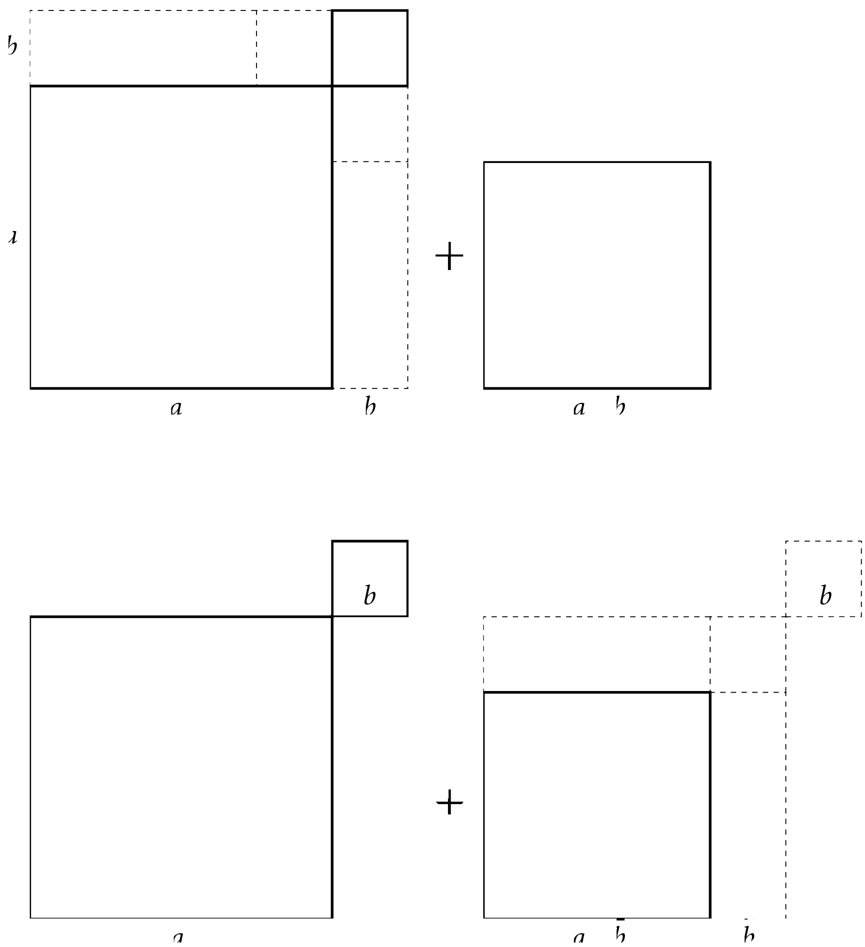


Geef in deze figuren je antwoorden.

Uit: examen mavo/vbo experimenteel 1994

Bewijs zonder woorden (1): algebra en oppervlakten

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$



Verzameld door Rob Bosch

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Jaarvergadering / Studiedag 1994

Tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 1994 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 12 november 1994 in het gebouw van: Het Nieuwe Lyceum, Jan Steenlaan 38, 3723 BV Bilthoven, telefoon 030-283060.

Aanvang 10.00 uur.

Agenda

09.30-10.00: Aankomst, koffie
10.00-10.45: **Huishoudelijk gedeelte**

a Opening door de voorzitter, dr. J. van Lint
b Notulen van de jaarvergadering 1992 (*zie Euclides 69-6*)
c Jaarverslagen (*zie Euclides*)
d Décharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie.
Het bestuur stelt kandidaat *: Mw. ir. A. Tromp-Weijers en drs. G. Stroomer.
e Bestuursverkiezing in verband met het periodiek aftreden van drs. S. Garst, mw. drs. M. Kollenveld, dr. J. van Lint. Zij zijn herkiesbaar. Het bestuur stelt hen en W. Kuipers uit Hattem kandidaat*. Drs. J.W. Maassen treedt af en stelt zich niet herkiesbaar.
f Vaststelling kontributie 1995/1996.
Het bestuur stelt voor de kontributie niet te verhogen en vast te stellen op *f* 65,00 per jaar.

10.45-15.25: **Themagedeelte** *studiedag*

Thema:
Van exploreren naar bewijzen

10.45-11.15: Inleiding op het thema

11.15-11.25: Koffie/thee

11.30-12.30: Werkgroep I

12.30-13.15: Lunch

13.15-14.15: Eéndimensionale dynamica. Van computersimulaties tot wiskundige stellingen. Voordracht door prof. dr. F. Takens

14.15-15.15: Werkgroep II

15.15-15.25: Koffie/thee

15.25-16.00: **Huishoudelijk gedeelte**
g Rondvraag

Inhoud

Verenigingsnieuws *15*
Jaarvergadering / Studiedag 1994

Bestuurskandidaat *16*
Wim Kuipers

Mededeling *16*
Panama najaarsconferentie 1994

Studiedag *17*
Van exploreren naar bewijzen

Van de penningmeester *17*

Mededeling *18*
I&I-conferentie

Mededeling *19*
CWI in bedrijf

Verschenen *20*

Aankondiging *21*
Nascholingscursussen van het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum

Kosten
De studiedag is gratis voor leden, van niet-leden wordt een bijdrage in de kosten van ƒ 20,00 gevraagd. Iedereen die een lunch bestelt, betaalt daarvoor ƒ 15,00.

Aanmelding
Aanmelding (voor 6 november 1994) kan geschieden d.m.v.:
- een briefkaart (leden) aan de ledenadministratie;
- overmaking van ƒ 15,00 naar giro 143917 t.n.v. NVvW te Amsterdam o.v.v. ‘lunch lid’;
- overmaking van ƒ 20,00, onder vermelding van ‘deelnemer niet-lid’;
- overmaking van ƒ 35,00, o.v.v. ‘lunch niet-lid’.

U wordt verzocht tevens op te geven aan welke werkgroepen u denkt deel te nemen (één ’s morgens en één ‘s middags, te noteren als bijvoorbeeld I-6, II-2).

Ter plaatse aanmelden is mogelijk, u betaalt dan ƒ 5,00 extra.

Certificaat
De NVvW heeft de mogelijkheid om nascholingscertificaten uit te reiken voor promotiecriteria. Wilt u een nascholingscertificaat ontvangen, vermeld dan ook: uw voorletters, uw geboortedatum en ‘certificaat’ bij uw aanmelding.
U krijgt na afloop van de studiedag het certificaat uitgereikt na het tonen van een identiteitsbewijs. U hebt alleen recht op een certificaat als u de gehele studiedag hebt meegemaakt.

Noot

*) Het stellen van kandidaten is nu niet meer mogelijk.
Zie Euclides 69-9: eerste uitnodiging.

Bestuurskandidaat

Wim Kuipers

In 1961 begon hij als leraar wiskunde aan de chr. mulo in Haren (Gr). Hij was toen 23 jaar. Na twee jaar vertrok hij naar Zwolle om te gaan werken aan de Greijdanus-mulo. Naast wiskunde mulo A en B verzorgde hij de lessen in natuurkunde. Na de invoering van de mammoetwet in 1968 groeide de Greijdanus-school in de loop van de volgende jaren uit tot een brede scholengemeenschap.
Naast zijn wiskundelessen mocht hij als decaan leerlingen begeleiden in de keuze voor vervolgonderwijs of beroep.
In 1969 vertrok hij voor een periode van tien jaar naar Assen en werd daar schoolleider van een categoriale mavo. Gedurende deze periode mocht hij leiding geven aan de uitvoering van het Mavo-project en het zgn. Verbrede instroomproject.
Na deze tien jaar wilde hij graag een nieuwe uitdaging in de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs aanvaarden en vertrok naar zijn oude school, de Greijdanusscholengemeenschap. De school was inmiddels experimenteerschool (A-school) in het kader van W12-16 geworden. Binnen dit experiment mocht hij een actief aandeel leveren en binnen zowel als buiten de school vormgeven aan de invoering van het nieuwe traject.
Als gevolg van de invoering van de basisvorming werd hij binnen de school benoemd als onderwijskundig coördinator. Naast deze functie blijft hij contact houden met de werkvloer door nog een aantal uren les te geven en door zijn medewerking binnen de Samenwerkingsgroep 12-16.

Mededeling

Panama najaarsconferentie 1994

Op 2, 3 en 4 november 1994 zal onder auspiciën van de NVORWO de dertiende Panama najaarsconferentie worden gehouden in het Leeuwenhorst Congres Centrum te Noordwijkerhout. Het onderwerp van de conferentie is:

Kerndoelen en
PPON rekenen-wiskunde
– hoofdrekenen, cijferen,
kommagetallen en breuken –

In 1992 heeft de tweede afname van de Periodieke Peiling Onderwijsniveau rekenen-wiskunde (PPON) op de basisschool plaatsgevonden. Tijdens de conferentie worden de resultaten van deze tweede PPON besproken en vergeleken met de afname uit 1987.

De kosten voor deelname bedragen ƒ 750,– all in.
Deelname is alleen mogelijk indien de gehele conferentie wordt bijgewoond.
Voor meer informatie en het aanvragen van een aanmeldingsformulier:

Panama
p/a Freudenthal instituut
t.a.v. Betty Heijman
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht
tel. 030 - 61 16 11
fax 030 - 66 04 30

Studiedag:

Van exploreren naar bewijzen

De studiedag gaat over de plaats van het onderzoekend exploreren, het redeneren en het bewijzen in ons wiskundeonderwijs van vandaag en morgen. Dr. A. van Streun verzorgt de plenaire inleiding en prof. dr. F. Takens laat aan de hand van modellen voor de populatiedynamica zien hoe uit het exploreren met behulp van computers nieuwe wiskundige vragen en stellingen zijn voortgekomen. In de werkgroepen wordt aan concrete opgaven gewerkt en worden ervaringen en lesmateriaal uitgewisseld om nieuwe inspiratie voor het eigen onderwijs op te doen.

In het nieuwe programma voor de basisvorming en de onderbouw is een deel van de vertrouwde technieken ingeruild voor onderwerpen waarin het redeneren met gezond verstand en met wiskunde moet worden gecombineerd. Hoe pakken collega's dat aan? Welke eisen stellen zij aan het redeneren van de leerlingen? Waar komen we uit in leerjaar 4? Wat zijn in dit opzicht de ervaringen met de nieuwe experimentele examens voor het B-programma en het C/D-programma? Welke stimulerende rol kunnen computers en grafische rekenmachines daarbij spelen?

De leerlingen van havo-vwo dreigen bij de recente grote aandacht voor algemeen vormend wiskundeonderwijs tekort te komen. Een differentiatie naar meer wiskundig getinte onderwerpen is zeker het overwegen waard. Zo is het geven van een sluitende redenering op basis van al bekende eigenschappen (het bewijzen) een essentieel aspect van de wiskunde, dat zeker in vwo en havo een plaats moet hebben. Het nieuwe programma in de onderbouw havo-vwo biedt daarvoor zeker mogelijkheden. Tegelijk met de invoering van de profielen in de bovenbouw havo-vwo komen er nieuwe programma's voor alle leerlingen. Voorbeelden van mogelijkheden om daarin het bewijzen weer een serieuze plaats te geven worden in verschillende werkgroepen gepresenteerd.

Werkgroepen

Het gaat bij de werkgroepen om het samen werken aan opdrachten en het samen bespreken van de betekenis en de mogelijkheden voor het onderwijs. De werkgroepleiding introduceert het onderwerp, geeft de opdrachten aan en geeft leiding aan de samenvatting. Bij de aanmelding kunt u intekenen op twee werkgroepen.

WG1 *Redeneren in de basisschool en de basisvorming*
leerjaar 1
Luuk Jacobs, Christelijke Hogeschool Noord-Nederland, Educatieve faculteit.
Is de nagestreefde verbetering van de aansluiting op de vernieuwde basisschool met het realistisch reken- en wiskundeprogramma gelukt? Met de deelnemers gaat Luuk na hoe het reken/wiskundeonderwijs op de basisschool is veranderd en hoe de docent in de basisvorming de verworven kennis van leerlingen kan benutten.

WG2 *Meer mogelijkheden tot redeneren?*
leerjaar 1 vbo-mavo
Leo Bregman en Alex Philipse, vbo-mavo s.g. De Leijen, locatie Bergum.
Op grond van hun eigen leservaring in vbo-mavo betwijfelen Leo en Alex of de opgaven in de nieuwe boeken meer aanleiding geven tot aandacht voor de eigen oplossingsmethoden en eigen redeneringen van de leerlingen dan voorheen. Zij willen samen met de collega's ervaringen en mogelijkheden doorspreken.

Van de penningmeester

Aan alle leden is een acceptgiro ter betaling van de contributie voor het nieuwe verenigingsjaar toegezonden. De Postbank berekent de NVvW *f* 0,60 kosten per acceptgiro of losse overschrijving.

Ruim 90% van de leden betaalt de contributie voor 1 oktober. De overige leden moeten opnieuw worden aangeschreven. Dat kost veel geld. Daarom verzoekt het bestuur alle leden dringend *voor 1 oktober* de contributie te voldoen.

Voor degenen die toch aangeschreven moeten worden zullen de kosten per aanschrijving *f* 3,– (excl. kosten Postbank) bedragen.

Na 1 februari zal *f* 10,– extra in rekening gebracht moeten worden.

WG3 *Onze praktijk van GWA*
leerjaar 1-3
Wim Kuipers en Wim Schaafsma, g.s.g. Greijdanus , Zwolle.
Aan de g.s.g. Greijdanus is in het kader van het experiment W12-16 ruim ervaring opgedaan met allerlei vormen van GWA. Wim en Wim laten voorbeelden zien van hun aanpak, van de reacties van hun leerlingen en van de manier waarop in GWA het redeneren met gezond verstand en met wiskunde kan worden gecombineerd.

WG4 *Kijkmeetkunde en de seizoenen*
leerjaar 3
Guido van der Waals, Vallei College, Amersfoort.
Guido heeft leerlingen in 3 havo aan het werk gezet met licht en schaduw in relatie tot het zoeken van een verklaring voor de seizoenen. De aardkubus speelt bij die opdrachten een centrale rol. Zijn heuristieken-repertoire schoot evenwel tekort. Zijn vraag is: Welke heuristische tips helpen leerlingen bij de kijkmeetkunde verder?

WG5 *Plussen en minnen bij denkmodellen in de onderbouw*
leerjaar 1 - 3
Johan Gademan, Pallas Athene College, Ede.
Denkmodellen (de heks, de weegschaal enzovoort) en contexten helpen als het goed is de leerlingen op weg. In deze werkgroep wil Johan samen met de deelnemers de mogelijkheden en beperkingen van een denkmodel leren vinden en vervolgens kijken hoe we in de klas met deze beperkingen om kunnen gaan.

WG6 *Creatief toetsen van exploreren en redeneren*
leerjaar 1-3
Wim Groen, wiskundedidacticus, Vrije Universiteit Amsterdam .
Hoe toets je het exploreren en redeneren van leerlingen? In een project van het King's College is origineel toetsmateriaal ontwikkeld, dat goed aansluit bij onze leerdoelen. Wim stelt wat materiaal ter beschikking om samen te maken en om te bespreken of die ideeën een deel van het toetsprobleem kunnen helpen oplossen.

WG7 *Exploreren en redeneren met de zakrekenmachine*
leerjaar 1-3
Harrie Broekman, wiskundedidacticus, Universiteit van Utrecht.
Harrie legt ons een aantal voorbeelden voor, waaraan wijzelf en onze leerlingen inspiratie kunnen ontlenen voor verder onderzoek van de mogelijkheden om met de rekenmachine het onderzoeken, het opstellen van een hypothese, het verifiëren van die hypothese en het verschil met bewijzen aan bod te laten komen.

WG8 *Beroepsgerichte invulling schoolonderzoek*
4 ivbo-vbo-mavo
Jos ter Pelle, SLO, Enschede.
In samenwerking met docenten van proefscholen is geëxperimenteerd met beroepsgerichte geïntegreerde wiskundige activiteiten. In de werkgroep gaat men met materiaal aan de slag, dat voor een beroepsgericht schoolonderzoek is gebruikt. Ter discussie staat de vraag van haalbaarheid en wenselijkheid voor CD.

WG9 *Praktisch redeneren in beroepscontexten*
3 ivbo-vbo
Wim van den Born, Hetty Goemans, Anne van der Horst, WIBO.
Met de nadruk in het vbo op de beroepsrichting is het de moeite waard om in 3-vbo voor leerlingen duidelijke beroepscontexten in het lesmateriaal voor wiskunde op te nemen. Dergelijk lesmateriaal is beschikbaar en ervaringen met deze vorm van integratie tussen wiskunde en beroepssituaties staan ter discussie.

WG10 *Wiskundig redeneren bij het verzekeren*
4 havo-vwo

Mededeling

I&I-conferentie

Informatietechnologie verandert

op vrijdag, 30 september en zaterdag, 1 oktober 1994 in het conferentie-oord *De Blije Werelt* te Lunteren.

De vijfde conferentie over informatietechnologie in het voortgezet en beroeps-onderwijs is de grootste tweedaagse conferentie over informatietechnologie en onderwijs in Nederland.

Wat is er te horen, te zien en te doen?

Er zijn bijdragen voor PIT-scholen en sessies over basisvorming. Er zijn sessies voor het vbo. De veranderingen in de tweede fase van het voortgezet onderwijs krijgen aandacht en er is kunst met de computer. De plenaire inleidingen verschaffen de toehoorders een blik op de realiteit en vergezichten in de toekomst. Er zijn steeds mogelijkheden eigen ideeën, programma's en lesmaterialen aan geïnteresseerden te tonen.

Kosten:
Gehele conferentie incl. overnachting: *f* 175,-.
Eén conferentiedag: *f* 75,-.

Informatie en inschrijfformulier:
C.P.S. Conferentiebureau
Conferentie I&I
Postbus 30
3870 CA Hoevelaken
03495-41211

Joke Reichardt en Angela van Heerwaarden , verzekeringswiskundigen Thea de Poel of Jeanne Breeman, werkgroep Vrouwen en Wiskunde.
De prachtige bundel over vrouwen die in hun beroep wiskunde gebruiken, bevat inspirerend lesmateriaal voor een meer adequate beeldvorming van wiskunde bij meisjes (en jongens) over de praktische waarde van wiskunde. In deze werkgroep gaat het over aspecten van verzekeren, toegespitst op een babypolisverzekering.

WG11 *De leerlingen helpen hun gezond verstand te gebruiken*
leerjaar 1-3
Bram Lagerwerf, Hogeschool Midden-Nederland/APS.
Van wiskunde die geïntegreerd is in het dagelijks leven naar abstracte bewijzen is een langdurig proces. Daarin spelen (voor)beelden gaandeweg een kleinere rol. De taal daarentegen wordt belangrijker en ook steeds abstracter en formeler. Dat kan alleen goed gaan als leerlingen leren hun gezonde verstand te gebruiken.

WG12 *'Licht je antwoord toe!' Redeneren in de experimentele CD-examens*
vbo-mavo
Truus Dekker, Freudenthal instituut.
Een toelichting kunnen geven? Is dat te onderwijzen? De ervaringen met de experimentele examens maken duidelijk dat redeneren te leren is, ook voor onze vbo-mavo-leerlingen. In de werkgroep bekijken we een aantal voorbeelden van (examen)opgaven. Ook de uitwerkingen van de leerlingen komen daarbij aan bod.

WG13 *Redeneren in het experimentele B-examen*
ivbo-vbo
Else Simons, APS en Ineke Humblé, s.g.Grootstal Nijmegen.
Else legt ons het experimentele B-examen 1994 voor, in het bijzonder de redeneer-en onderzoekopdrachten. Ineke vertelt over de verrassende successen en struikelpartijen van haar leerlingen. We praten samen door over de manier waarop je in het onderwijs deze B-leerlingen kunt helpen een goede redenering te geven.

WG14 *Het exploreren van een database in de basisvorming*
leerjaar 2-3
Wout de Goede, Willem Lodewijk Gymnasium en Jaap Dik, statisticus.
Informatieverwerking met behulp van de computer behoort tot de basisvorming en kent veel echte toepassingen. Wout en Jaap demonstreren hoe in de onderbouw een database met allerlei gegevens van zo'n 400 meisjes en jongens door de leerlingen op onderlinge relaties kan worden onderzocht. Lesmateriaal is beschikbaar.

WG15 *Exploreren van functies met de grafische rekenmachine*
4 vwo
Ron Jansen, Praedinius Gymnasium en Fokko Jan Dijksterhuis, Nienoord College.
Leerlingen kunnen in 4 vwo zelf de eigenschappen van grafieken exploreren en daarmee redeneren. Ook bij de eerste kennismaking met het begrip afgeleide kan de grafische rekenmachine een ondersteunende rol spelen. Ervaringen met het ontwikkelde lesmateriaal (beschikbaar voor de deelnemers) komen aan de orde.

WG16 *Modelvorming en wiskunde A*
bovenbouw havo-vwo
Peter Lorist en Joke Daemen, Hogeschool Midden Nederland.
Bij wiskunde A is het voor leerlingen vaak lastig om te doorzien hoe het verband ligt tussen een gegeven context en het bijbehorende wiskundige model. Met voorbeelden oefenen we hoe leerlingen het proces van werkelijkheid-wiskundig model-wiskundige conclusies-interpretatie-werkelijkheid kunnen doorlopen.

WG17 *Exponentiële functies met de*

Mededeling

CWI in bedrijf

Op vrijdag 7 oktober a.s. houdt het Centrum voor Wiskunde en Informatica haar jaarlijkse bedrijvendag. Het thema is dit jaar:

Strategische samenwerking in R & D *(R & D = Research & Development)*

Sprekers uit bedrijfsleven, overheid en onderzoekswereld geven gedurende de ochtend hun mening over strategische samenwerking, terwijl 's middags presentaties plaatsvinden van CWI-onderzoek op uiteenlopende gebieden, zoals elektronisch uitgeven, computeralgebra, milieuwiskunde en information super-highways.

Deelname aan deze dag is kosteloos.

Nadere informatie bij:
CWI
t.a.v. mw. M. Brouwer
Kruislaan 413
1098 SJ Amsterdam
tel. 020-5924253

grafische rekenmachine
4 vwo
Dick Bos, Hogeschool Windesheim en Paul Stam, Marnix Academie Utrecht.
De beschikbaarheid van een grafische rekenmachine maakt een nieuwe aanpak van het onderzoek van functies mogelijk. In lesmateriaal over exponentiële functies (beschikbaar voor de deelnemers) wordt ook de afgeleide en het getal e met inzet van de grafische rekenmachine geïntroduceerd. Ervaringen in 4 vwo.

WG18 *Aandacht voor probleem oplossen*
4 vwo
Marja Bos, wiskundedidacticus RUG, lerares K.D.C. De Zuidoosthoek Emmen.
Expliciete aandacht voor probleemaanpak is een essentieel aspect van het stimuleren van een meer onderzoekende wiskundige houding bij onze leerlingen. Marja heeft in haar 4-vwo-klassen een lespakket Problem Solving uitgeprobeerd. We maken wat opgaven, bekijken de mogelijkheden en geven knelpunten aan.

WG19 *Een basis voor bewijzen*
leerjaar 2 en 3 havo-vwo
Agnes Verweij, wiskundedidacticus Technische Universiteit Delft.
Agnes stelt voor een solide meetkundige basis aan eigenschappen en afspraken in de onderbouw van havo-vwo vast te leggen om het bewijzen weer een plaats te geven in ons wiskundeonderwijs. Met een minimaal pakket aan meetkundige stellingen bedenken we kleine bewijzen, die we aan onze leerlingen in 2 en 3 havo-vwo kunnen onderwijzen. De cirkelmeetkunde levert mooie voorbeelden!

WG20 *Bewijzen in Wiskunde B , 'Nu'? , 'En dan'?*
vwo B
Jan van Maanen, docent geschiedenis van de wiskunde, RUG.
Kwadraten van natuurlijke getallen eindigen nooit op een 2. De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt. 'Nu': kunnen leerlingen na 6-vwo-B dit soort uitspraken bewijzen? 'En dan': zouden ze het moeten kunnen als er een nieuw wiskunde-B-programma is? We werken aan voorbeelden met een historie.

WG 21 *Onderwijs in het oplossen van problemen*
havo-vwo, hbo-wo
Jan Donkers, wiskundedidacticus Technische Universiteit Eindhoven.
Jan Donkers verzorgt al jaren de training van de Nederlandse kandidaten voor de Internationale Wiskunde Olympiade. De principes waarop die training in het oplossen van wiskundige problemen is gebaseerd, leveren bruikbare ideeën op voor het wiskunde-onderwijs in havo-vwo en de eerste jaren van het hbo-wo. Aan de hand van enkele voorbeeldproblemen gaan we die principes toepassen.

WG22 *Contexten en modelvorming in het nieuwe programma wiskunde B vwo*
Jan de Lange, hoogleraar wiskundedidactiek, Freudenthal instituut.
Jan de Lange was voorzitter van de studiecommissie wiskunde B vwo, die in de zomer van 1994 haar eindrapport uitbracht. Een punt van discussie bij een nieuw B-programma is de plaats van contexten en modelvorming. Met voorbeelden toegelicht laat Jan zien wat de mogelijkheden zijn voor een toekomstig programma.

WG23 *Wiskundig onderzoeken en bewijzen in de VIERKANT praktijk*
leerjaar 1-4
Henk Barendregt, hoogleraar KUN, Zsófia Ruttkay, VU, voorzitters VIERKANT.
'VIERKANT voor wiskunde' is gelanceerd om gewone jongeren tussen 12 en 16 jaar het plezier en de schoonheid van echte wiskunde te laten ervaren. En dat kan, gelet op de ervaringen met clubs, het zomerkamp, de VIERKANT doe-boeken, computerprogramma's en projecten. In de werkgroep zien en horen wij er meer van.

Verschenen

W.E. Boyce & R.C. DiPrima
Elementary Differential Equations
John Wiley & Sons; $ 55.00;
552 bladzijden;
ISBN 0-471-50997-3

Systematisch worden bij diverse klassen van differentiaalvergelijkingen oplossingsmethoden behandeld. Naast de theorie is er ruim aandacht voor toepassingen in natuurkundige, technische, biologische en sociologische context.
De laatste twee hoofdstukken behandelen enkele numerieke methoden resp. niet-lineaire differentiaalvergelijkingen en stabiliteit. Hier vinden we ook een paragraaf over chaos en strange attractors.

G.J. van Driel, W.M. Lammerts van Bueren
Juist/Onjuist, elementaire opgaven Statistiek
Van Gorcum;
249 bladzijden; ƒ 41,–;
ISBN 90-232-2716-6

De in dit boek gepresenteerde opgaven zijn van een bijzonder type: steeds een korte inleidende tekst, gevolgd door een drietal uitspraken die elk beoordeeld moeten worden op hun juistheid. Elk hoofdstuk begint met een opsomming van de voornaamste begrippen, definities en notaties. Van de oneven opgaven zijn volledige uitwerkingen opgenomen; van de even opgaven alleen het goede antwoord.

Aankondiging

Nascholingscursussen van het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum.

Een brochure met een volledige beschrijving van het aanbod van het APS voor wiskundedocenten in het schooljaar 1994-1995 wordt begin september aan alle scholen toegestuurd.

We hebben gekozen voor losse nascholingsmodulen over verschillende onderwerpen. Daaruit kunt u zelf een programma samenstellen, dat bij uw persoonlijke wensen of die van uw school aansluit. Het volledige aanbod heeft de volgende categorieën:

- Dagen over afsluiten van de basisvorming
- Cursussen voor alle docenten
- Cursussen voor (i)vbo - docenten
- Cursussen voor vwo - docenten
- Tweedaagse conferentie
- Werken met de hele sectie? We komen naar u toe!

Daarnaast bieden we ook de volgende mogelijkheid:

Samenwerken met docenten van andere scholen

Docenten hebben zelden de gelegenheid om over de schoolgrenzen heen te kijken. In cursussen zijn de uitwisselingen van ervaringen meestal hoogtepunten waar onvoldoende tijd voor is. We willen daar nu een aparte plaats voor inruimen. We bieden zaalruimte en begeleiding. Deze service is gratis.

W1 Werken aan een zelfgekozen onderwerp
U wilt eigenlijk iets extra's bij het boek maken, maar het komt er niet van. U wilt iets verder uitwerken, maar wel graag samen met anderen. U vindt het jammer om veel tijd te stoppen in een goed idee omdat het toch maar voor één klas is. Samen gaat het beter. Het APS kan gelijkgestemden bij elkaar brengen rond nader te bepalen onderwerpen.
Heeft u zulke plannen? Stuur ons een duidelijke beschrijving van het onderwerp, wat u ermee wilt en met wie. Wij zorgen voor een werkplek en begeleiding.

W2 Antwoordenboekjes? Aanwijzingenboekjes!
In veel klassen zijn antwoordenboekjes voor leerlingen gemeengoed. Toch is alleen het goede antwoord voor een leerling vaak te weinig. Ze hebben heldere uitwerkingen nodig met tips en hints. Dat kan het klassikaal bespreken van huiswerk verminderen en de zelfstandigheid van de leerlingen vergroten.
Voor een docent alleen is het bijna ondoenlijk om hier voldoende tijd voor te vinden, met een groep docenten gaat dat makkelijker. Een groep zal gevormd worden rond één methode. Tevens kunnen dan natuurlijk ervaringen uitgewisseld worden.

W3 Eéndaagse conferentie voor creatieve docenten
Gebruikt u op school een zelfgemaakte instaptoets? Heeft u een bijzonder proefwerk gemaakt bij het nieuwe leerplan? Heeft u zelf fraaie extra stof gemaakt? Heeft u materialen ontworpen voor gebruik in de les? Hanteert u een aparte werkvorm voor het werken in de klas? Organiseert u bijzondere projecten binnen of buiten de klas? Etc. etc. Iedereen die iets bijzonders gedaan heeft rond het nieuwe leerplan en dat graag aan iedereen wil tonen, wordt uitgenodigd om dit te beschrijven en op te sturen naar het APS.
De docenten met de mooiste, leukste en creatiefste ideeën zullen uitgenodigd worden om op de studiedag in februari 1995 daarover een presentatie te houden.
Natuurlijk kunt u ook alleen komen kijken en luisteren.

Cursussen die vroeg in het nieuwe schooljaar starten
APS-Wiskunde 1994-1995

C1 Effectief lesgeven met de nieuwe boeken (3 middagen)
Voor alle wiskundedocenten
- Handig leren omgaan met de nieuwe boeken in klas 1 en 2.
- Doelgericht en vlot lessen voorbereiden.
- Gemakkelijk (kern)opgaven vinden voor klassikale (na)bespreking, zelfwerkzaamheid en huiswerk.
- Zo veel mogelijk alle leerlingen bij de les betrekken.
- Leerlingen leren samenwerken zonder dat één alles doet en de rest niets.
- Produktief huiswerk bespreken.

U werkt aan de hand van cursusmateriaal dat aansluit bij de op uw eigen school in klas 1 en 2 gebruikte methode.
Rotterdam: 2 november, 30 november 1994, 18 januari 1995

Utrecht: 9 november, 7 december 1994, 25 januari 1995
De prijs van deze cursus is ƒ 225,-, inclusief materiaal.

C2 De computer bij wiskunde in klas 2 (2 middagen)
Voor alle wiskundedocenten
Alle nieuwe methoden gaan ervan uit dat in de tweede klas de computer gebruikt wordt. Op de eerste middag wordt een overzicht gegeven van de beschikbare software en de eisen die aan de leerlingen moeten worden gesteld. Er worden demonstratiediskettes uitgereikt van de programma's ALCOR en VU-Grafiek, Doorzien, en VU-Stat. U krijgt een opdracht mee voor een computerles in een van uw klassen. Op de tweede middag bespreken we de ervaringen met de gegeven les. U leert werkwijzen waarbij problemen kunnen worden voorkomen of snel kunnen worden opgelost. Ook de toetsing van computergebruik komt aan de orde.
Utrecht en Eindhoven: 12 oktober 1994, 23 november 1994
Rotterdam en Zwolle: 5 oktober 1994, 16 november 1994
De prijs van deze cursus is ƒ 150,-, inclusief materiaal.

C3 Proefwerken (2 middagen)
Voor alle wiskundedocenten
• Ontwerpen en maken van goede proefwerkopgaven.
• Selecteren van opgaven uit andere bronnen.
• Samenstellen van een proefwerk bij een hoofdstuk.
• De les vóór het proefwerk.
Van alle deelnemers worden proefwerkopgaven voor de eerste klas verzameld. Deze worden vermenigvuldigd en de tweede bijeenkomst aan iedereen uitgereikt; de teksten ook op diskette.
- Eerste middag: van een goed idee naar een goede opgave voor een proefwerk voor klas 2
- Tweede middag: beoordelen van leerlinguitwerkingen en normeren van proefwerken.
Rotterdam: 12 oktober en 14 december 1994
Utrecht: 2 november en 21 december 1994
De prijs van deze cursus is ƒ 150,-, inclusief materiaal.

C4 Vakwerkplan wiskunde (1 middag)
Voor alle wiskundedocenten
• Snel een vakwerkplan maken.
• De stand van zaken in de eigen sectie ten aanzien van de basisvorming in kaart brengen.
• Een plan maken voor ontwikkeling van het vak wiskunde binnen de eigen school.
• Een koppeling leggen met scholingswensen.
• Ervaringen en oplossingen van andere scholen horen.
• Op de middag ontvangt u een model voor een vakwerkplan wiskunde op diskette.
Utrecht: 28 september 1994
De prijs van deze cursus is ƒ 75,–, inclusief materiaal.

B1 Basisvorming wiskunde en vbo (4 middagen)
Voor wiskundedocenten (i)vbo
In deze cursus gaan we uit van leerlingen op B-niveau die de basisvorming na vier jaar afsluiten. Eerst maken we duidelijk wat het eindniveau is. Dan laten we zien hoe de opbouw van de leerstof is in de vier leerjaren.
De basisvorming vraagt om meer samenwerking tussen leerlingen en om gebruik van concreet materiaal. Door gebruik van realistische contexten staat er ook meer taal in de wiskundeboeken. Die onderwerpen komen zijdelings aan de orde. Iedere middag staat één leerstoflijn centraal: informatieverwerking en statistiek, rekenen, meetkunde en algebra.
Utrecht en Eindhoven: 5 oktober, 9 november, 7 december, 25 januari.
De prijs van deze cursus is ƒ 300,–, inclusief materiaal.

V1 2vwo, een klasse apart (2 middagen)
Voor vwo - docenten
Leerlingen in 2vwo hebben het boek uit voor u het weet. Ze hebben meer uitdaging nodig. We presenteren u een methode om verdiepingsopgaven aan het boek toe te voegen die de grote lijn niet verstoren, die u niet veel eigen tijd hoeft te kosten.
Utrecht: 12 oktober en 14 december.
De prijs van deze cursus is ƒ 150,-, inclusief materiaal.

L1 Meetkunde (3 middagen)
Voor alle wiskundedocenten
Een cursus voor docenten die zich onvoldoende boven de nieuwe stof voelen staan. Er is geen uitgebreide meetkundige voorkennis vereist. Er komen didactische en wiskundige achtergronden aan bod. Deze cursus is een herhaling van de succesvolle cursus van vorig jaar, ontwikkeld in samenwerking met het Freudenthal instituut.
Utrecht: 2 november 1994,
30 november 1994, 11 januari 1995.
De prijs van deze cursus is ƒ 225,–, inclusief materiaal.

Voorwaarden voor inschrijving voor deze cursussen
• Inschrijven liefst zo snel mogelijk, maar uiterlijk tot 14 dagen voor aanvang van de cursus.
• Bij te weinig belangstelling gaat een cursus niet door.
• Bij overinschrijving geldt de volgorde van aanmelding.
• Een cursusmiddag is steeds van 14.00-17.00 uur.
• Annulering van een inschrijving kan alleen schriftelijk, uiterlijk twee weken voor aanvang van de cursus.

Voor overige informatie kunt u bellen of schrijven naar:

APS
Infopunt wiskunde
Postbus 85475
3508 AL UTRECHT
tel. 030 - 856722

Soaps of calculators? *

Victor Hermans

Geregeld zijn in de kolommen van dit blad de zegeningen van de personal computer ter sprake gekomen.
De PC is op school, ondanks de vele evidente voordelen, nooit echt een succes geworden. De redenen liggen voor de hand; er is veel kritiek op de gebruikersvriendelijkheid van de programmatuur, de kosten zijn aanzienlijk en het is organisatorisch nogal lastig om de les van tijd tot tijd te verplaatsen naar het computerpracticumlokaal. Deze kritiek is enerzijds terecht en raakt anderzijds de kern weer niet. Er is immers een zeer goed alternatief in de vorm van de programmeerbare calculator. De ontwikkeling van de calculators is net zo stormachtig geweest als die van de personal computers. Bijna alle PC-programmatuur voor commerciële en onderwijskundige doeleinden draait ook op de programmeerbare calculator. Zoals een PC diskettes heeft, zo heeft de calculator insteekkaarten. De zakrekenapparatuur heeft zelfs nog een voorsprong op de personal computer. De PC zoals wij die kennen heeft namelijk meestal slechts de beschikking over numerieke en grafische mogelijkheden. Dat wil zeggen: de programmatuur kan getallen verwerken en afbeeldingen produceren. Zeer belangrijk in het wiskunde- en in het economie-onderwijs zijn de symbolische berekeningen. Wij kennen bijvoorbeeld allerlei functies waarvan de student een grafiek moet tekenen en die hij moet differentiëren. Welnu, sinds enige jaren zijn er calculators op de markt waarop een functie exact zo kan worden ingevoerd zoals een docent die op het bord schrijft. Vervolgens drukt men een knop in en dan staat er een eerste afgeleide, een integraal en dan ook nog een grafiekje, zonodig in 3 dimensies.
Vooral deze laatste ontwikkeling - die van de symbolische mogelijkheden -heeft nogal wat commotie veroorzaakt in het technisch onderwijs. Het zet immers letterlijk het onderwijs op zijn kop; datgene waarvoor student (en docent) tot voor kort hard moesten werken, is nu voor weinig geld in een zakrekenaar te krijgen. De hele wiskunde zoals wij die kennen is gereduceerd tot een aantal foefjes en de zakjapanner fungeert daarbij als trukendoos. Sommigen zullen dit betreuren, mijn mening is echter dat de goede tijden voor het economie-onderwijs nu pas beginnen.
Ik hoop dat de volgende voorbeelden dit zullen illustreren.

Lorenz

Het bekende thema van de inkomensongelijkheid zal iedere economiedocent bespreken aan de hand van een Lorenzcurve. Tevens komt aan de orde hoe men de “buik” van de curve wat minder dik kan maken, bijvoorbeeld door progressieve belastingen. Dit onderdeel van het leerproces is en blijft uiteraard het werk van de docent.
Als de klas de beschikking heeft over een goede zakrekenaar zou ik er het volgende aan willen toevoegen;

- tik de volgende functie in:
  $y = \frac{20}{21}x^2 + \frac{1}{21}x$
- kijk hoe de grafiek verloopt
- probeer zelf een functie te vinden die een grotere inkomensgelijkheid weergeeft
- bereken de exacte omvang van de buik van de grafiek of het gebied eronder.

De laatste vraag is eenvoudig te beantwoorden door de functie van 0 tot 1 te integreren. De oplossing is circa 0,34. De buik zelf is dan natuurlijk $0{,}5 - 0{,}34 = 0{,}16$. De gelijkere inkomensverdeling wordt bijvoorbeeld $y = x^2$.
Voor de goede orde nog even dit; schrijver dezes is weliswaar zeer geïnteresseerd in wiskunde maar niet in staat deze integraal met de hand uit te rekenen. Dat is ook niet meer nodig.
Het volstaat om de handleiding door te lezen en een vaag begrip te hebben van hoe een integraal precies wordt berekend. [1]

Keynes

Het Keynesiaanse gedachtengoed is in ons vak voornamelijk een zaak van het oplossen van een stelsel van vergelijkingen.
In zijn simpelste vorm is dat $C = c \times Y + C_o$, $I = I_o$ en $Y = C + I$.
Je lost dit model op door de multiplicator, in dit geval $\frac{1}{(1-c)}$, te vermenigvuldigen met de constante $I_o + C_o$. De multiplier wordt bij grotere modellen natuurlijk zeer gecompliceerd en is niet prettig om mee te werken. Ook hiervoor biedt de zakrekenaar een goede oplossing; men tikt simpelweg de vergelijkingen in zoals ze in de boeken staan en voilà, alle varia-

belen zijn in minder dan 1 seconde opgelost, ook bij de – voor VWO-begrippen – zeer grote modellen. Er is in de les dus geen rekenprobleem meer en de aandacht verschuift naar de essentie van het verhaal, de verbanden die in de vergelijkingen zijn weergegeven en de resultaten van de diverse acties. Dat wil zeggen: het accent kan (gelukkig) worden verlegd van rekenwerk naar interpretatieve vaardigheden en het inzetten van oplossingen voor (te definiëren) problemen.
(De allernieuwste programma's kunnen dit karwei ook puur symbolisch oplossen, dat wil zeggen het evenwichtsinkomen rolt er niet uit in een getal maar in een aantal symbolen) [2]
Als dit werk achter de rug is, is er nog de mogelijkheid om bijvoorbeeld de modellen van het Centraal Planbureau na te spelen. [3]
In combinatie met een gewone spreadsheet gebruikt men dan een diskette waarop elke willekeurige variant van het overheidsbeleid te simuleren is.

Lineaire programmering

Dit onderwerp is reeds enige jaren uit het reguliere programma verdwenen, wellicht wegens het vele rekenwerk. Als dat zo is kan het naar mijn mening weer terug komen, want het illustreert zeer goed het centrale idee van de economie, nl. de schaarste.
Als voorbeeld nemen we een onderneming met twee produkten, genaamd Astra en Cosmo. De kostprijzen zijn gegeven nl. 210 en 230. Beide producten worden bewerkt in twee afdelingen (I en II) waar de capaciteit resp. 70 en 50 uur is. In afdeling I kost de bewerking van Astra 1 uur en die van Cosmo 2 uur. In afdeling II duurt de bewerking 1 uur voor beide produkten.

De prijzen van beide produkten (P_a en P_c) zijn negatief gecorreleerd aan de hoeveelheden (Q_a en Q_c).
Het model ziet er dan als volgt uit:

$P_a = 0{,}01\ Q_a^2 - 1{,}9\ Q_a + 314$
(Prijsafzetfunctie van Astra)
$P_c = -\ 0{,}14\ Q_c + 243$
(Prijsafzetfunctie van Cosmo)
$TW = (P_a - 210)\ Q_a +$
$(P_c - 230)\ Q_c$
(Totale winst)
$Q_a \leq\ 70$ stuks
(maximumcapaciteit van Astra)
$Q_c \leq\ 50$ stuks
(maximumcapaciteit van Cosmo)
$Q_a + Q_c \leq\ 120$
(randvoorwaarde afdeling I)
$Q_a + Q_c \leq\ 90$
(randvoorwaarde afdeling II)

Dit probleem is moeilijk maar vooral tijdrovend bij handmatig oplossen, en met een computer is het absoluut geen moeite. Het kan via een spreadsheet waar elke variabele in een cel wordt opgeborgen. [4]
Het kan ook met een half-symbolisch programma, waarin de vergelijkingen exact als hierboven zijn ingetikt. [5]
(De winst in het optimum bedraagt ca. 2056.)
Ook de omstandigheid dat de produkten elkaars concurrenten zijn, maakt qua rekentijd geen verschil meer. Het zijn immers maar 2 vergelijkingen extra, te weten:
$Q_a = 1000 - 4{,}7\ P_a + P_c$
$Q_c = 1000 - 2\ P_a - 6{,}2\ P_c$ [6]

Financiële rekenkunde

Dit onderwerp wordt vanouds behandeld met behulp van tabellen, om bijvoorbeeld op te zoeken wat de contante waarde van een reeks toekomstige betalingen is bij een bepaalde rentevoet. Verder zijn er nog de eindwaarde en de annuïteit. De tabellen zijn bedacht om de wiskundige formules te vermijden.
Niettemin blijft het een nogal saai karwei om de gangbare opgaven op te lossen. De betere methode is het kopen van bijvoorbeeld een insteekkaart met financiële, bedrijfseconomische en statistische functies. De mogelijkheden zijn dan onvergelijkbaar veel groter. De oplossingen vind je veel sneller en nauwkeuriger, en het niveau van de voorbeelden, die alleen al in de handleiding van de kaart zijn vermeld, gaat het universitaire peil te boven. Dit is overigens weer een van de aangename aspecten van de automatisering; de handleidingen zijn vaak zo goed en actueel dat je je een duur boek bespaart. [7]

Slotsom

Het is naar mijn mening hoog tijd om eens diep te gaan nadenken over goede zakrekenapparatuur op school. De tegenwerpingen liggen voor de hand; begrijpen de leerlingen nog wel wat ze intikken? Het antwoord is: misschien niet, maar de docent kan makkelijk even testen of het zo is. Een ander bezwaar is: moeten we dan niet een heel ander programma gaan opzetten? Ja, dat is juist, en het staat vast dat er veel werk aan de winkel is. Maar voor goed onderwijs moet je wat over hebben.
Een andere kwestie is de positie van de docent. Hij of zij kan niet meer zoals vroeger het totale onderwijsproces beheersen. De computer rekent en tekent veel beter en dus moet de docent dat niet meer doen. Het leerproces wordt gedecentraliseerd en de docent beperkt zich tot het entameren van de problemen, het verdelen van de opdrachten en het controleren van het gemaakte werk. Er ontstaat als vanzelf een bepaalde vorm van probleemgestuurd onderwijs.
Verder kunnen we een goed voorbeeld nemen aan Frankrijk, waar dit voorjaar voor de derde keer bij

het baccalaureaatsexamen de programmeerbare calculator niet alleen is toegelaten, maar zelfs verplicht is gesteld. Aangenomen dat er eerst een aantal jaren is geëxperimenteerd, betekent dit, dat de Fransen circa 5 jaar op ons voor liggen. Het moet voor de Franse regering, die bijvoorbeeld de invoer van Amerikaanse films aan een quotum heeft gebonden, niet makkelijk zijn geweest om zoiets te verordenen. Men wist immers van tevoren dat de markt overspoeld zou worden door Amerikaanse calculators. Vergelijk dit eens met de situatie hier te lande:
een onbeperkt aantal Amerikaanse soaps op tv en een verbod op goede calculators.

* Dit artikel is eerder verschenen in het Veconblad, voor leraren economische vakken.

Noten

1 Hewlett-Packard 48SX, prijs ca *ƒ* 300,–
2 Derive, Maple, Mathematica.
3 FKSEC, variantenboek met diskette.
4 ASEASYAS, goedkope kloon van Lotus 123, shareware.
5 Mercury, vergelijkingenprogramma, opvolger van Eureka, shareware, prijs ca. *ƒ* 100,–
6 Introductory Management Science, Eppen,Gould,Schmidt, met diskette.
7 HP 48 B Pac, Calculus.

Na een aantal artikelen over software-pakketten in de vorige jaargang, gaat het deze keer over een 'meetkunde'-programma, dat in de bavo te gebruiken is.

GeomeTrucs

Jan Koekkoek

Het software-pakket GeomeTrucs van uitgeverij Visiria[1] vindt zijn toepassing in de meetkunde. Het pakket is geheel grafisch en werkt alleen op DOS-machines met een VGA-kaart. Het kan ook werken met een MCGA-kaart, maar dan zijn er geen kleuren beschikbaar. De besturing dient met een muis te gebeuren. Bovenin het scherm vinden we een menubalk, die bij aanklikken afrolt.

Met dit programma kunnen eenvoudig punten, lijnen en figuren in het platte vlak geconstrueerd worden. Bijzonder is dat de gebruiker punten en lijnen als 'afhankelijke objecten' kan definiëren. Zo kan bijvoorbeeld de middelloodlijn van een lijnstuk afhankelijk worden gesteld van de definitie van het lijnstuk. Wordt achteraf het lijnstuk gewijzigd, dan verandert de middelloodlijn meteen ook overeenkomstig.

Een nadere kennismaking

Nadat het programma is opgestart verschijnt het grafische scherm. Dit scherm bestaat uit vijf gedeelten. Bovenin vinden we de menubalk met de reeds genoemde rol-menu's. Zie het schema op de volgende bladzijde. Hier kan worden gekozen uit de onafhankelijke en de afhankelijke objecten. De te kiezen objecten variëren van een roosterpunt tot een cirkel. Verder kan de gebruiker hier de assen aan en uit zetten, berekeningen uit laten voeren, coördinaten laten bepalen en vergelijkingen laten aflezen. Ook is het hier nog mogelijk om reeds bestaande onafhankelijke objecten te pakken en te verplaatsen. Alle hiervan afhankelijke objecten zullen gelijktijdig mee veranderen.
Links vindt de gebruiker het letterbord. Punten en lijnen kunnen worden voorzien van letters. Reeds gebruikte letters krijgen een andere kleur. Dit laatste is vooral handig als het gaat om ingewikkelde tekeningen met reeds veel gebruikte letters.
Linksonder vindt de gebruiker het invoer/uitvoer-gebied. Als het programma aanvullende gegevens nodig heeft, zoals de grootte van een hoek, dan kan dat hier worden ingevuld. In hetzelfde gebied verschijnen ook de antwoorden van berekeningen van afstanden of hoeken.
Rechtsonder bevindt zich het berichten-gebied. Hier verschijnen korte mededelingen van het programma. Vaak zijn dit aanwijzingen voor de gebruiker.

Schema menu-onderdelen:

O-object	A-object	Assen	Bepaal	Verplaats	Fractal	Overig
Roosterpunt	Lijn	Teken assen	(x, y)	O-punt	Definitie	Gebroken lijn
Punt	Halve lijn	Assen weg	$y = ax + b$	O-punt op lijn	Toon niveau	Vrij tekenen
Lijn	Lijnstuk	Wijzig schaal	Afstand	O-punt of cirkel	Toon fractal	Toon alles
Halve lijn	Middelloodlijn	Verplaats (0, 0)	(2 punten)	Naam		Toon 'actief'
Lijnstuk	Loodlijn	'Standaard'	Afstand			Maak non-actief
Cirkel (x, y)	Midden		(punt, lijn)			Oops - herstel
$y = ax + b$	Parallel		Oppervlakte			Teken t.b.v. punt
	Bissectrice		(3 punten)			Print-afdruk
	Lijn/hoek		Hoek (3 punten)			Calculator
	Cirkel		Hoek (2 lijnen)			Bewaar
	Snijpunt		Som afstand			Laden
	Middelpunt		Som oppervlakte			Scherm schoon
			Punt			Einde
			Lijn			
			Esc			

Het grootste deel van het scherm bestaat uit het tekenscherm. Hier verschijnen alle objecten.
Het totale pakket maakt een zeer verzorgde indruk. Het bestaat uit een stevige plastic map met daarin de diskette met de benodigde programmatuur en een uitgebreide handleiding in een ringbandje.
Naast een uitvoerige beschrijving van de mogelijkheden bevat de handleiding ook een flink aantal leerlingenwerkbladen. Het niveau van deze werkbladen varieert van de vergelijking van een lijn of een lijn verschuiven tot en met de Stelling van Pythagoras.

Het gebruik

Het programma is overwegend prettig in het gebruik. Het enige minpunt is dat na het plaatsen van een lijn of een punt op het scherm het programma eist dat er een naam wordt gegeven, of dat 'naamloos' wordt aangeklikt. Om vervolgens een nieuw punt of nieuwe lijn te plaatsen moet dan weer eerst een ander menu actief worden gemaakt (aangegeven met een groene punt; een rode punt geeft aan dat het menu inactief is). Dit keurslijf maakt het gebruik een beetje stug.
Het programma is bijzonder leuk. Op een speelse manier kan ermee aannemelijk worden gemaakt dat de oppervlakte van de driehoek afhangt van de basis en de hoogte, maar niet van de vorm van de driehoek: construeer daartoe een lijnstuk AB en een daaraan evenwijdige lijn l (dus l is afhankelijk van AB!). Plaats een punt C op l (dus C is afhankelijk van l!). Geef het programma vervolgens de opdracht om de oppervlakte van driehoek ABC te berekenen. Ga tot slot het punt C verschuiven over l. En ziedaar het resultaat: de oppervlakte blijft constant.
Op een soortgelijke manier kan bijvoorbeeld aannemelijk worden gemaakt dat de drie hoogtelijnen van een driehoek door één punt gaan. Er is op deze manier erg veel met het programma mogelijk.
Naar mijn mening zit daar ook de kracht van dit programma: het aannemelijk maken van een bepaalde wetmatigheid. Uiteraard heeft dit niets te maken met een wiskundig bewijs. Maar het is een manier van concretiseren, hetgeen voor veel leerlingen nou net dat duwtje in de goede richting kan zijn.
Het programma kan dan ook ingezet worden om deze wetmatigheden al doende te 'ontdekken'. Ook binnen de Basisvorming zou het een plaatsje kunnen veroveren binnen het leerstofgebied 'Meetkunde': het construeren van meetkundige entiteiten, invloed van vergroten en verkleinen op de relatie tussen lengte en oppervlakte, enz.

Noot

1 Uitg. mij. Visiria, H. de Manpark 4, 3411 ZP Lopik, tel.: 03485-2982

Een verrassende uitslag

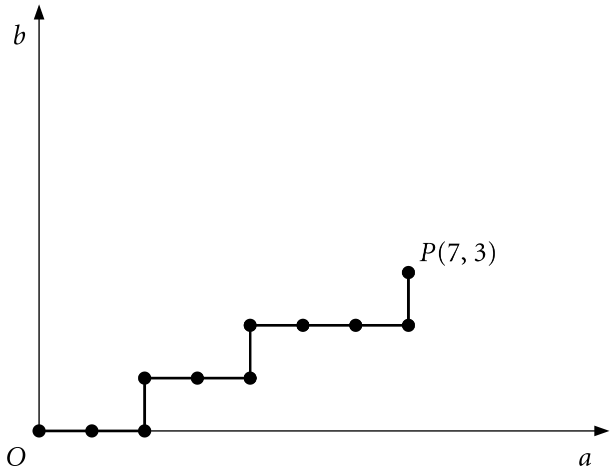
Rob Bosch

1 Inleiding

In het boekje Kansrekening van het OW & OC [1] komt de volgende opgave voor:

Ajax-Benfica uitslag 7-3
Een verslaggever die zijn aantekeningen is kwijtgeraakt moet het scoreverloop van de bovenstaande wedstrijd gokken. Hij herinnert zich alleen nog dat Ajax de hele wedstrijd heeft voorgestaan. Hoe groot is de kans dat hij het scoreverloop goed gokt? (Hoewel in de opgave niet nadrukkelijk vermeld, nemen we hier maar aan dat alle mogelijke scoreverlopen even waarschijnlijk zijn.)

Het oplossen van bovenstaand probleem kostte de meeste leerlingen veel moeite en vooral veel tijd. Dat het totaal aantal scoreverlopen gelijk is aan $\binom{10}{3}$ werd nog wel gevonden, maar het bepalen van het aantal gunstige mogelijkheden, d.w.z. die series waarbij Ajax steeds de leiding heeft, bleek aanmerkelijk minder eenvoudig te zijn. Daar er geen formule voorhanden was waarmee dit aantal snel bepaald kon worden, zat er voor een aantal leerlingen niets anders op dan alle mogelijkheden maar op te schrijven. Het overzichtelijk opschrijven van deze series (hun aantal is 48) is tijdrovend en vereist bovendien een grote nauwkeurigheid. De tellingen van deze leerlingen liepen dan ook nogal uiteen.
Het scoreverloop kan in een rooster worden weergegeven door een pad van het punt $O(0, 0)$ naar het punt $P(7, 3)$, waarin slechts stappen naar rechts of naar boven voorkomen. In een dergelijk pad stelt een stap in de a-richting een doelpunt van Ajax en een stap in de b-richting een doelpunt van Benfica voor. Zo wordt het scoreverloop 1-0, 2-0, 2-1, 3-1, 4-1, 4-2, 5-2, 6-2, 7-2, 7-3, weergegeven door het pad in figuur 1.
Het aantal gunstige scoreverlopen is nu gelijk aan het aantal paden van O naar P die behalve de oorsprong geen punt met de lijn $b = a$ gemeen hebben. Aangezien het tellen van paden in bovengenoemd boekje al aan de orde was geweest, probeerde een aantal leerlingen het, met succes, op deze manier. Op zich een aardige methode maar voor grote uitslagen, zoals bij korfbal of handbal nogal bewerkelijk.
Het antwoord op de gestelde vraag kan ook direct gegeven worden. In het vervolg zullen we hiervoor een even eenvoudige als verrassende formule afleiden.



Figuur 1 Pad van O(0, 0) naar P(7, 3)

2 Over paden in een rooster

Een pad van het punt $O(0, 0)$ naar het punt $P(7, 3)$ kan worden voorgesteld door een rij van 7 a's en 3 b's. Zo hoort bij het pad in figuur 1 de rij aabaabaaab. Omgekeerd bepaalt iedere rij van 7 a's en 3 b's een pad van O naar P. Daar een dergelijk pad volledig is bepaald door de positie van de 7 a's (of de 3 b's) in de rij van 10 letters, is het totaal aantal paden van O naar P gelijk aan $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$. Voor het aantal paden van $O(0, 0)$ naar het punt $P(a, b)$ vinden we met een zelfde argument

$$\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b} \tag{1}$$

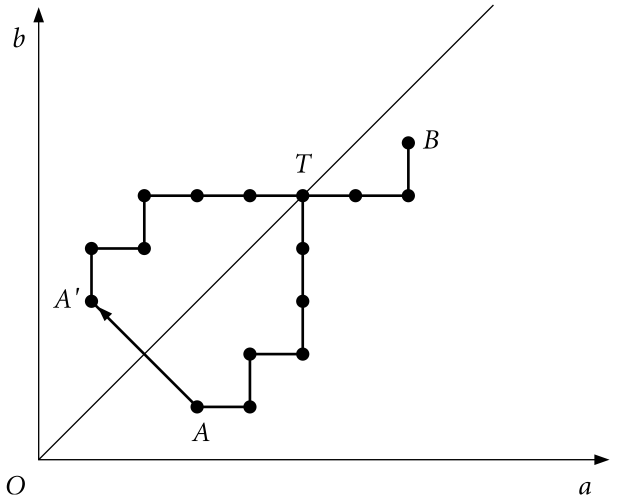
Het aantal paden van een punt $A(a_1, b_1)$ naar een punt $B(a_2, b_2)$ ($a_2 \geq a_1$ en $b_2 \geq b_1$) is gelijk aan het aantal paden van $O(0, 0)$ naar punt $P(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$; met (1) vinden we voor dit aantal

$$\binom{a_2 + b_2 - a_1 - b_1}{a_2 - a_1} = \binom{a_2 + b_2 - a_1 - b_1}{b_2 - b_1} \tag{2}$$

Het aantal paden van een punt A naar een punt B die geen punt met de diagonaal $b = a$ gemeen hebben kunnen we berekenen door gebruik te maken van het zgn. *spiegelingsprincipe* (zie figuur 2).

Spiegelingsprincipe:

Zij A' het spiegelbeeld van A in de lijn a = b. Het aantal paden van A naar B dat een punt gemeen heeft met de lijn a = b is gelijk aan het aantal paden van A' naar B.



Figuur 2 Spiegelingsprincipe

Men gaat dit op de volgende wijze gemakkelijk na. Zij T het eerste punt dat het pad van A naar B met de lijn $a = b$ gemeen heeft. Spiegel het deel AT van dat pad in de lijn $a = b$. Dit geeft een pad van A' naar B. Door spiegeling van de stukken AT en $A'T$ ontstaat een één-één-correspondentie tussen de paden van A' naar B en de paden van A naar B die een punt met de diagonaal gemeen hebben.

Een pad van $O(0, 0)$ naar $B(a, b)$ $(a > b)$ dat behalve de oorsprong geen punt met de lijn $b = a$ gemeen heeft gaat uiteraard door het punt $A(1, 0)$. Uit het spiegelingsprincipe volgt dat het aantal paden van $A(1, 0)$ naar $B(a, b)$ die een punt gemeen hebben met de lijn $a = b$ gelijk is aan het aantal paden van $A'(0, 1)$ naar $B(a, b)$. Dit aantal is volgens (2) gelijk aan

$$\binom{a+b-1}{a} = \binom{a+b-1}{b-1} \qquad (3)$$

Uit (2) en (3) volgt dat het aantal paden van $A(1, 0)$ naar $B(a,b)$ die geen punt met de lijn $a = b$ gemeen hebben gelijk is aan

$$\binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a} =$$

$$= \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!b!} - \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!}$$

$$= \frac{(a+b-1)!}{a!b!} \times (a-b)$$

$$= \frac{(a+b)!}{a!b!} \times \frac{a-b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a} \qquad (4)$$

Het aantal paden van O naar $B(a, b)$ dat geen punt met de diagonaal $b = a$ gemeen heeft is dus een fractie $(a-b)/(a+b)$ van het totaal aantal paden van O naar B.

3 Ajax-Benfica

Keren we terug naar het in de inleiding genoemde probleem. Het aantal scoreverlopen waarbij Ajax steeds voorstaat, is gelijk aan het aantal paden van $O(0, 0)$ naar $P(7, 3)$ die behalve O geen punt met de lijn $a = b$ gemeen hebben. Dit aantal is volgens (4) gelijk aan 48. De gevraagde (voorwaardelijke) kans is derhalve $\frac{1}{48}$. Het totaal aantal mogelijke scoreverlopen is volgens (1) gelijk aan $\binom{10}{3} = 120$. Een aantal leerlingen meende daarom dat het antwoord $\frac{48}{120}$ zou moeten zijn. Dit is echter het antwoord op een andere vraag, nl. de vraag: hoe groot is bij de gegeven uitslag de kans dat Ajax gedurende de hele wedstrijd heeft voorgestaan? (Hierbij herinnert de verslaggever zich niets.) I.v.m. de laatste vraag kunnen we een aardige formule afleiden.

In een tussen A en B gespeelde wedstrijd scoort A, a keer en B, b keer (a > b). Hoe groot is de kans dat team A gedurende de hele wedstrijd de leiding heeft gehad? (waarbij we aannemen dat alle mogelijke scoreverlopen even waarschijnlijk zijn).

Volgens (1) en (4) is deze kans gelijk aan:

$$\frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a} \Big/ \binom{a+b}{a} = \frac{a-b}{a+b}$$

Dit even fraaie als eenvoudige resultaat staat wel bekend als de *ballot theorem* van Bertrand. Een andere, meer gebruikelijke formulering van deze stelling is:

Stel dat in een verkiezing kandidaat A, a stemmen en B, b stemmen krijgt (a > b). De kans dat tijdens het tellen der stemmen kandidaat A steeds voorligt op B is gelijk aan (a − b)/(a + b).

Door andere vragen te stellen over het mogelijk scoreverloop van een wedstrijd kunnen op de boven geschetste wijze nog meer aardige formules worden afgeleid. Dit wordt echter aan de lezer overgelaten. In [2] zijn in dit verband enkele opmerkelijke resultaten te vinden.

Literatuur

1 J.de Lange & M.Kindt, *Kansrekening*, OW & OC, 1983
2 W.A.Whitworth, *Choice and Chance*, Haffner New York, 1901

Dit voorjaar hielden de werkgroepen 'Vrouwen en Wiskunde' en 'Vrouwen en Natuurwetenschappen' een gezamenlijke landelijke dag

Verslag van de studiedag van Vrouwen en Exacte Vakken

Marian Kollenveld
Carla van Oorschot

De studiedag op 19 maart was gewijd aan de actualiteit: de profilering in de tweede fase van havo en vwo en de afsluitende toetsen voor de basisvorming. Professor dr.H.Hooymayers, lid van de Stuurgroep Tweede Fase en voorzitter van de werkgroep Profielen hield een inleiding over de achtergronden van de nieuwe plannen. Hieronder een samenvattend verslag, met nadruk op de emancipatoire kanten van de profilering, de Profielnota zelf is op vele plaatsen inmiddels al beschreven.

CENTRUM **VROUWEN EN EXACTE VAKKEN**

De heer Hooymayers begon veiligheidshalve zijn lezing in dit vrouwengezelschap met te benadrukken dat de vrouwelijke inbreng in de stuurgroep groot was: 4 vrouwen en 5 mannen, maar met een vrouwelijke voorzitter en secretaris is er zeker sprake van een gelijkwaardige verdeling. In 'zijn' werkgroep Profielen is onlangs ook een vrouw vanuit de Stichting Vrouwen en Exacte Vakken opgenomen, waarmee de verdeling daar ook in evenwicht is. Daarna vertelde hij over de inhoud en de achtergronden van de plannen voor de Tweede Fase, zoals ze momenteel voorliggen.

Waarom al deze veranderingen?

Veel van wat nu voorgesteld wordt is al ooit eerder op de een of andere manier aan de orde geweest. De vernieuwingen hebben een groot aantal redenen. De veranderingen in de nieuwe Tweede Fase waren nodig om aan te kunnen sluiten op de basisvorming en de daar geleerde vaardigheden door te trekken. Ook bestond er al jaren onvrede over de aansluiting met het hoger onderwijs, waarin een aantal wensen leefden, zoals een breed algemeen vakkenpakket. In de nu bestaande circa 170 verschillende pakketten is de samenhang soms ver te zoeken. Verhoudingsgewijs meer meisjes kiezen onsamenhangende pakketten. Ook wilde men meer aandacht voor algemene en vooral studievaardigheden. Daarnaast was de ongelijke participatie in het hoger onderwijs, met relatief weinig mensen in de ß-richtingen en daarvan nog een bedroevend aantal meisjes een bron van zorg.

De keus voor 4 profielen komt voort uit een aantal overwegingen. Zo is er uit onderzoek naar voren gekomen dat twee ß-profielen meer leerlingen zouden trekken, met name meer meisjes, dan als er maar één werd aangeboden. Daarnaast is het in dit model mogelijk om, als je niet ß kiest of niet kúnt kiezen, toch een positieve keuze te maken voor een ander profiel, wat de motivatie ten goede zou kunnen komen. Een ander belangrijk positief punt voor meisjes is het beoogde uitstel van de keuze, en ook de mogelijkheid om geleidelijk een profiel te kiezen, en zelfs in de vrije ruimte eventueel een aanvullend profiel te kiezen. Daarnaast is de verwachting dat het doortrekken van de lijnen in de basisvorming, met meer nadruk op vaardigheden, zoals samenwerken, een verslag maken, een presentatie houden, meer tegemoet kom aan leerstijlen van meisjes.

Nieuwe vakken

In het algemeen verplicht deel komt een nieuw vak: *Algemene Natuurwetenschappen.* Dit nieuwe vak moet aansluiten op de bavo, algemeen vormend zijn, want voor iedereen, uitdagend, en een beeld geven van de dynamische ontwikkelingen op het gebied van de natuurwetenschappen. Het onderwijs zal geconcentreerd worden rond thema's, zoals bijvoorbeeld het gat in de ozonlaag. Dit onderwerp heeft chemische, fysische, medische, biologische en zelfs economische aspecten. Het is een vak met veel mogelijkheden. Hier ligt een grote kans om aan te sluiten bij de belangstelling voor meisjes, door een inhoudelijk interessant vak aan te bieden dat ergens over gaat èn maatschappelijk relevant is. Hier kunnen de exacte vakken zichzelf presenteren op een aantrekkelijke manier.

Nieuw is ook de benadering via de *studielast*, de door de leerlingen te investeren tijd en niet meer de ingeroosterde werktijd van de docent is bepalend. De gedachte hierachter is de leerling meer verantwoordelijk te maken voor haar/zijn leren. Het is niet zonder meer te zeggen dat dit gunstig is voor meisjes, veel zal afhangen van de manier waarop hieraan inhoud gegeven wordt.
Na de inleiding was er ruimte voor vragen en discussie:
- De meeste aandacht ging uit naar het profiel Natuur en Gezondheid, waarvan de verwachting is dat dit relatief veel meisjes zal aanspreken. Dit moet een breed en pittig profiel worden, met ruime doorstroommogelijkheden, niet alleen in biologie en gezondheidszorg.
- Enige discussie ontstond over de wenselijkheid (inhoudelijk gezien, met name wat betreft de modelbouw, statistiek en kansrekening) om wiskunde A te plaatsen in natuur en gezondheid, of zelfs in natuur en techniek, in plaats van wiskunde B. Dat heeft wel grote consequenties voor de doorstroommogelijkheden.
- Toegezegd werd dat voor de vakontwikkelgroepen die volgend cursusjaar de eindtermen van de vakken gaan bepalen ook vrouwen zullen worden benaderd.
- Een gevolg van de ruimere aandacht voor practica, verslagen en presentaties is dat de lesstof in de bestaande overvolle programma's voor de exacte vakken zal moeten worden ingekrompen.
- De titel van een profiel is belangrijk. Een vak als gezondheidskunde kreeg prompt minder meisjes toen het biomedische wetenschap ging heten. Een creatieve andere benaming voor Natuur en Techniek zou wenselijk zijn, temeer daar er geen techniek in zit, en het voor het vwo in feite het omnivalente profiel is, waarmee je praktisch elke studierichting kunt kiezen.

Basisvormingstoetsen

Het tweede deel van deze dag was gewijd aan de afsluitende toetsen van de basisvorming. Truus Dekker hield daarover een inleiding. Hoewel ook hierover al het nodige is geschreven in het kort nog even de zaken op een rijtje.

De toets is verplicht voor alle scholen. Hij mag op zijn vroegst afgenomen worden na 2 jaar, maar ook na 3 of 4 jaar. Het hoeft niet op een bepaalde dag maar wel in een bepaalde periode. De toets wordt gemaakt door het Cito.
De docent corrigeert zelf, met de bijgeleverde normering en scorelijst. De resultaten worden doorgegeven aan een commissie. Vijf leerlingen worden op een schraplijst genoteerd, zoals nu ook bij de examens het geval is. De school mag zelf bepalen wat er met de resultaten gebeurt, bijvoorbeeld nagaan hoe de eigen leerlingen de toets gemaakt hebben in vergelijking met andere leerlingen of gebruiken bij de advisering van leerlingen.
Het is ook denkbaar dat de inspectie vragen stelt n.a.v. de toets.

Truus Dekker

Er moeten in de toets vragen op verschillende niveaus opgenomen zijn:
- reproduktievragen
- 'stel je voor'-vragen
- redeneervragen

Voorbeelden:
- Berekening m.b.v. stelling van Pythagoras.
- Tekening op schaal of stelling van Pythagoras met daarbij een vraag.
- Redenering over diverse keuzes die mogelijk zijn.

De vragen zoals hierboven worden ook wel aangeduid met
- elementair 1,
- elementair 2,
- complex.
Op ieder niveau moeten alle soorten vragen in de toets opgenomen zijn.

Bij een schriftelijke toets voor wiskunde ligt de richting van beantwoorden vrij vast. Toch moet een leerling haar eigen redenering kunnen volgen.

Bij deze manier van toetsen verdwijnen een aantal zaken. Denk aan: computergebruik en het geïntegreerd toepassen van vaardigheden.

Vragen die je bij de toetsen kunt stellen zijn:
- Klopt de toets met het gegeven onderwijs?
- In welke richting stuurt de toets?
- Zijn de aangeboden onderwerpen goed?
- Welke onderwerpen mis je?
- Welke vaardigheden mis je? (samenwerking?)
- Zijn er genoeg verschillende contexten?
- Wil je wel zoveel mogelijk verschillende contexten?

Speciale aandacht is ook nodig voor de problemen met zwakke leerlingen, de diepgang van de stof en de functie van de context.

Truus eindigde haar betoog met een voorbeeldtoets over statistiek, die ze op haar eigen school had gebruikt. Deze toetste ook samenwerking en computergebruik en was bovendien nuttig voor de eigen school.

Naast andere mogelijke discussies over de kwaliteit van de toetsen is ook niet duidelijk of er nagedacht is over de vraag of de toetsen wel geschikt zijn voor meisjes en jongens. Aan de werkgroep Vrouwen en Wiskunde is in elk geval niets gevraagd. Er is ook geen enkele wiskundedocent bij de toetsing betrokken. Evenmin is bekend of er bij de registratie ook naar eventuele verschillen tussen jongens en meisjes zal worden gekeken.

Het laatste woord over deze problematiek was duidelijk nog niet gezegd.

40 jaar geleden

UIT DE PRACTIJK
Wiskunde-opdrachten voor een werkweek

Het komt de laatste tijd steeds vaker voor, dat een school voor een der klassen een werkweek gaat organiseren. Een der voordelen van zo'n werkweek is, dat een bepaald onderdeel van een vak op een geheel andere, intensere manier met de leerlingen behandeld kan worden dan op school.
We komen er op school bijvoorbeeld niet gemakkelijk toe in de Stereometrie-lessen, wanneer we het maken van uitslagen bespreken, de uitgeslagen lichamen ook werkelijk te vervaardigen. En toch wordt de werkelijke betekenis van het maken van een uitslag pas duidelijk bij het vervaardigen van het voorwerp. Ook het verband tussen een projectiefiguur en een uitslag komt in de gewone lessen meestal niet ter sprake. In de Beschrijvende Meetkunde leren onze leerlingen ware groottes bepalen van lijnstukken en hoeken, maar doordat ze deze nooit verder gebruiken, blijven deze constructies maar theoretische kwesties.
Deze overwegingen brachten mij ertoe, toen er een werkweek voorbereid werd voor de leerlingen van de vierde en vijfde klas van de (zesjarige) H.B.S.-B voor meisjes te Groningen, om opdrachten te vervaardigen, die het maken van projectie-tekeningen, uitslagen en het daarna in elkaar zetten van de getekende lichamen bevatten.
Omdat misschien deze opdrachten ook voor anderen bruikbaar zijn, doe ik ze hieronder volgen. Vooraf moet ik echter eerst mededelen wat aan deze opdrachten vooraf ging. De vierde klas heeft nog geen Beschrijvende Meetkunde. Maar ter voorbereiding daarvan laat ik al wel twee projecties tekenen van eenvoudige lichamen. Daarbij leer ik coördinaten gebruiken, zodat de opdrachten voor de werkweek ook met coördinaten opgegeven konden worden.
In de aan de werkweek voorafgaande lessen liet ik projecties tekenen van pyramides en omwentelingskegels en uitslagen daarvan construeren. Later liet ik deze pyramides en kegels doorsnijden met een loodrecht op het verticale vlak staande balk. Ook nu werden uitslagen geconstrueerd. Ware lengtes konden uit de projecties worden afgelezen of worden gevonden door de pyramide of kegel zo te draaien, dat de betreffende ribbe evenwijdig kwam met het verticale vlak.

G. Krooshof in Euclides 30 1954-1955

Boekbespreking

In de serie 'Discovering Calculus with ..' zijn inmiddels vier delen verschenen, te weten:

1. Derive; 2. Maple; 3. Mathematica; 4. Graphing Calculators.

We bespreken hier de delen 3 en 4.

Deel 3
Mathematica is een computeralgebra programma, of beter: een programma waarmee symbolische (en numerieke) berekeningen kunnen worden uitgevoerd. Dit betreft berekeningen op het gebied van de analyse (nulpunten, differentiaal- en integraalrekening, reeksen etc.) en de lineaire algebra (matrixbewerkingen, eigenwaarden etc.). Het hier te bespreken boek bevat een serie practica die elk aan de hand van voorbeelden een aantal Mathematica constructen behandelen. Vervolgens worden deze constructen gebruikt om een onderwerp uit de analyse te introduceren of te illustreren. Elke paragraaf eindigt met een serie oefeningen.

De voorbeelden en opgaven sluiten voor een deel aan bij het boek Calculus (4th ed.) van Howard Anton. Er is veel aandacht voor het visualiseren van objecten (grafieken van functies; parameterkrommen; oppervlakken etc.).

Het boek is een prima introductie voor het werken met Mathematica. Er is echter nauwelijks sprake van het ontdekken van eigenschappen uit de analyse. Wel krijgt de lezer voldoende gereedschappen aangereikt om een aantal niet-triviale problemen op te lossen.

Deel 4
De globale structuur van deel 4 komt overeen met die van deel 3: een vijftigtal projecten die elk beginnen met een korte introductie op het te bestuderen onderwerp, gevolgd door een serie opgaven. De opbouw van de projecten is echter zo, dat hier inderdaad sprake is van 'Discovering Calculus'. Door het genereren van grafieken krijgt de leerling de gelegenheid eigenschappen van diverse typen functies te ontdekken. Zo zijn er opdrachten waar eerst de grafiek getekend wordt, waarna vragen over de betreffende functie worden gesteld. In andere opgaven dient eerst een aantal vragen beantwoord te worden, waarna de grafiek getekend wordt ter verificatie.

Ter illustratie geven we de titels van een aantal hoofdstukken: (0) graphs; (3) lines, circles and parabolas; (5) visualisation of limits; (8) continuity; (11) graphic representation of the derivative; (17) graphs of rational functions; (20) applied maximum and minimum problems; (30) volumes of solids of revolution; (46) conic sections; (49) parametric curves; (50) vectors in the plane.

Bij elk project staat aangegeven welke paragrafen uit Howard Antons boek aansluiten bij het behandelde onderwerp.
De opzet van de cursus is onafhankelijk van de gebruikte grafische calculator. De appendix bevat een korte beschrijving van de verzameling basisoperaties voor een aantal gangbare machines.

Collega's die de grafische calculator als didactisch hulpmiddel willen gaan gebruiken kunnen in dit deel zeker veel inspiratie opdoen.

Harm Bakker

Braden c.s.
Discovering Calculus with MATHEMATICA
John Wiley & Sons; $ 14.50;
170 bladzijden;
ISBN 0-471-53969-4

Joan McCarter
Discovering Calculus with GRAPHING CALCULATORS
John Wiley & Sons; $ 14.50;
167 bladzijden;
ISBN 0-471-55609-2

Boekbespreking

P. Doucet / P.B. Sloep
Mathematical Modeling in the Life Sciences
Ellis Horwood; $ 33.95;
490 bladzijden;
ISBN 0-13-562018-X

Deze cursus is opgezet vanuit het besef dat wiskunde steeds belangrijker wordt in de biologie en daarmee gerelateerde disciplines (landbouw, geneeskunde, milieukunde). De nadruk wordt meer gelegd op het leren van de taal van de wiskunde dan op het aanleren van een verzameling rekentrucs. Vandaar dat er voornamelijk gekeken wordt naar het bouwen van een wiskundig model, met veel aandacht voor het vergelijken van diverse alternatieven.

Als wiskundige hoofdthema's hebben de schrijvers gekozen voor (gewone) differentiaalvergelijkingen en stochastische modellen. De behandeling van het traditioneel veel onderwezen onderwerp Lineaire Algebra is tot een minimum teruggebracht.

Het boek bestaat uit 20 hoofdstukken. In de eerste 14 staan de wiskundige concepten, technieken en methoden van de modelbouwer centraal, geïllustreerd met eenvoudige voorbeelden uit biologie, fysiologie etc. De volgende 5 hoofdstukken gaan elk in op een onderwerp uit een deelgebied van de biologie (Chemische Kinematica, Fysiologie, Groei, Populatiedynamica, Visserij). Diverse benaderingen worden beschreven en vergeleken, waarbij verschillende technieken uit het eerste deel worden aangewend om tot een oplossing te komen. Het laatste hoofdstuk bevat een overzicht van een aantal begrippen en resultaten uit de gebruikte wiskunde.

Dit boek wordt onder andere gebruikt bij cursussen van de Open Universiteit. Vandaar dat de tekst uitgebreider is dan gebruikelijk bij een cursus met mondelinge ondersteuning.

Voor de lezer met belangstelling voor toepassingen van wiskunde een zeer toegankelijk boek.

Harald Scheid
Zahlentheorie
Wissenschafts Verlag Mannheim;
68 DM; 504 bladzijden. ;
ISBN 3-411-14841-1

Dit boek geeft een uitgebreide inleiding in de elementaire getaltheorie. We geven een overzicht van de hoofdstukken.
I: deelbaarheid; kettingbreuken; Farey rijen; Fibonacci getallen;
II: Euclidische ringen; gehelen van Gauss; de vergelijking van Pell;
III: rekenen met restklassen en toepassingen daarvan (Fermat, eeuwige kalender, coderingen, magische vierkanten, priemen van Mersenne en Fermat);
IV: congruenties en diophantische vergelijkingen, waaronder kwadraatresten, getallen als som van kwadraten en Pythagoreïsche drietallen;
V: getaltheoretische functies; volmaakte en bevriende getallen;
VI: de priemgetalstelling: een elementair bewijs van $\pi(x) \approx x/\log(x)$ en de rij $a + k.m$ bevat voor $\mathrm{ggd}(a, m) = 1$ oneindig veel priemen;
VII: additieve getaltheorie;
VIII: zeefmethoden: de zeef van Selberg toegepast op o.a. het priemtweelingenprobleem, het vermoeden van Goldbach en de representatie van breuken in stambreuken.

De tekst is elementair in de zin dat het geen hoge eisen stelt aan de voorkennis van de lezer. Enige kennis en vaardigheid m.b.t. matrices, determinanten en complexe getallen is voldoende om de degelijk geschreven uiteenzetting te kunnen volgen. Ieder hoofdstuk wordt afgesloten met een forse verzameling vraagstukken, waarvan ook de antwoorden zijn opgenomen.

Harm Bakker

Oplossing 653

Gevraagd werden convexe lichamen met 12 hoekpunten, waarbij de zijvlakken uit regelmatige veelhoeken bestaan. Deze lichamen zijn dus met polydron te maken. (Voor informatie over polydron kunt u de firma Lekopro bellen: 020 - 6907519). Euclides bewees dat er 5 Platonische lichamen zijn, Kepler liet zien dat de convexe regelmatige lichamen bestaan uit de 5 Platonische, de 13 Archimedische en uit de 2 oneindige families: de prisma's en de antiprisma's. Verder zijn er nog 92 niet-regelmatige convexe lichamen met regelmatige veelhoeken als zijvlakken.

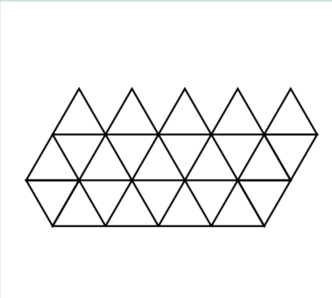
Alle inzenders tezamen vonden 9 verschillende oplossingen. Om zeker te weten of ze dit allemaal waren moest uw puzzelredacteur op literatuuronderzoek. In het tijdschrift 'Canadian Journal of Mathematics' van januari 1966 vond ik het volgende overzichtsartikel: 'Convex polyhedra with regular faces' door Norman W. Johnson. En jawel, er is een tiende oplossing!

De 10 lichamen heten in het Engels:
1. Icosahedron
2. Cuboctahedron
3. Truncated tetrahedron
4. 6-gonal prism
5. 6-gonal antiprism
6. Square cupola
7. Elongated pentagonal dipyramid
8. Triangular orthobicupola
9. Biaugmented pentagonal prism
10. Sphenomegacorona

Alleen *W.J. van Elk* (20), Delft en *Lourens van den Brom* (31), Krommenie vonden de eerste negen oplossingen en verdienden daarmee 5 ladderpunten.

Met 53 punten is winnaar van een boekenbon van ƒ 25,–:
Tamme Afman
W.D. van Dommelenstraat 14
8181 MA Heerde

Heel hartelijk gefeliciteerd.



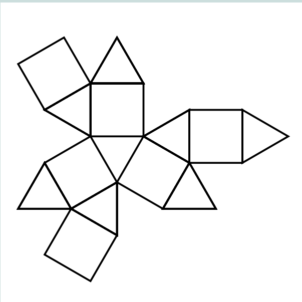
1 Icosahedron

Opgave 656

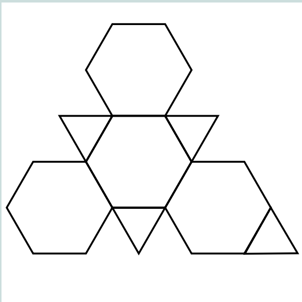
'Euclides': al 69 jaar oud en dus aan het begin van de zeventigste jaargang. Misschien kent u het grapje dat alle getallen bijzonder zijn. Stel dat er getallen zijn zonder een speciale eigenschap. Neem uit deze verzameling het kleinste getal, dan is dit getal bijzonder, want het is het kleinste getal zonder een unieke eigenschap!

De redactie is zeer benieuwd naar de bijzondere, unieke eigenschappen van het getal 70.
Weet u die ? Schrijf ze ons binnen 1 maand na verschijning! Elke inzending levert maximaal 5 ladderpunten op.

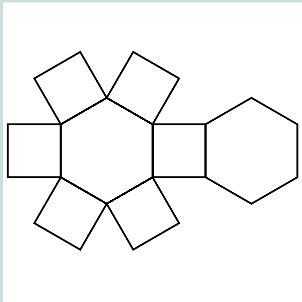
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan
Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.



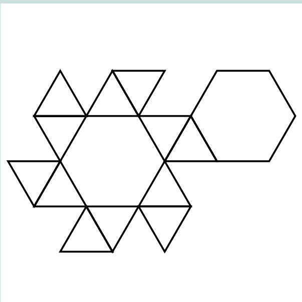
2 Cuboctahedron



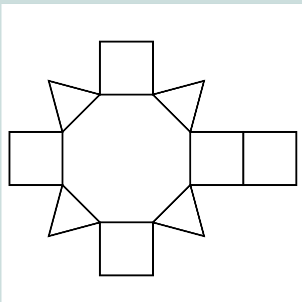
3 Truncated tetrahedron



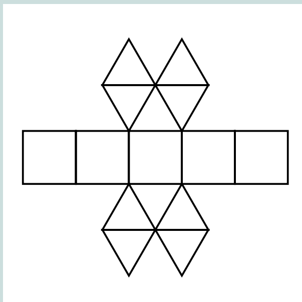
4 6-gonal prism



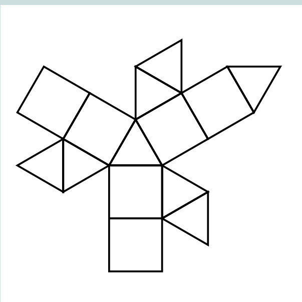
5 6-gonal antiprism



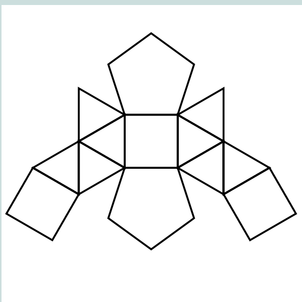
6 Square cupola



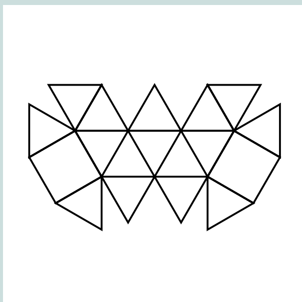
7 Elongated pentagonal dipyramid



8 Triangular orthbicupola



9 Biaugmented pentagonal prism



10 Sphenomegacorona

Adressen van auteurs

H. Bakker
Jan Steenstraat 11, 8932 EA Leeuwarden

R. Bosch
Heiakker 16, 4841 CR Prinsenbeek

L. van den Broek
Graafseweg 387, 6532 ZN Nijmegen

V. Hermans
Bartoklaan 14, 2253 CX Voorschoten

M.C. van Hoorn
Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam

J. Koekkoek
Stullenbaan 34, 1606 JC Enkhuizen

M.P. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

F.M. Vriesendorp
Graaf Anselmdek 34, 3434 DT Nieuwegein

Z. Warmelink
Jan Steenstraat 11, 8932 EA Leeuwarden

P. van Wingerden
Ch. de Bourbonlaan 66, 3708 CD Zeist

Kalender

2 en 3 september 1994

Amsterdam
vakantiecursus Computer-algebra, zie Euclides 69-9

16 september 1994

Eindhoven
tweede ronde Wiskunde Olympiade in de Technische Universiteit

12 november 1994

Bilthoven
Jaarvergadering/Studiedag 1994

Richtlijnen voor auteurs

Aanleveren
Kopij dient bij voorkeur te worden aangeleverd op een diskette (3,5 of 5,25 inch) in WP5.1 (MS-DOS) of ASCII-bestand. Gedrukte of geschreven kopij kan vertraging opleveren.
De tekst mag geen lay-out bevatten. De tekst moet zo kaal mogelijk worden aangeleverd, zonder woordafbrekingen e.d.; geef alinea's wel met harde returns aan.
Lever bij de diskette altijd een drietal afdrukken van de tekst aan, waarop bijvoorbeeld staat aangegeven waar u de illustraties had gedacht.

Tekst
Maak een korte, bondige titel; vermeld de naam van de auteur zonder eventuele titels.
Paragrafen worden aangeduid met korte tussenkoppen (maximaal 23 aanslagen); per kopje vervallen er 4 regels basistekst.
De basistekst komt in een 3-koloms stramien. Een volle pagina telt $3 \times 54 = 162$ regels van 35 aanslagen per regel.
Wiskundige artikelen komen in een 2-koloms stramien. Een volle pagina telt hier $2 \times 54 = 108$ regels van 58 aanslagen per regel.

Illustraties
Voorzie uw tekst van toepasselijke illustraties.
Tekeningen, grafieken: scherpe figuren met zwarte pen of inkt gemaakt, of geprint op een goede printer.
Tabellen: scherp origineel op apart vel aanleveren.
Foto's: liefst zwart/wit met scherp contrast.
Voorzie illustraties van een verklarend bijschrift (op apart vel; bij meer illustraties zowel de illustraties als de bijschriften nummeren). Indien een illustratie op een bepaalde plaats in de tekst moet worden opgenomen dient dit duidelijk te worden aangegeven.

Verschijningsdata van Euclides
Omstreeks de 1e van de maanden september, december en mei; omstreeks de 15e van de maanden oktober, januari, februari, maart en juni.
Kopij voor het volgend nummer moet uiterlijk 7 weken voor verschijning in het bezit van de redactie zijn; voor de acht middenpagina's (in artikelen voor deze bladzijden mogen geen illustraties, tabellen of formules voorkomen!) geldt een termijn van 5 weken.