

Euclides

816
357
492

jaargang 69 1993 | 1994 mei

Redactie

Drs. H. Bakker
 Drs. R. Bosch
 Drs. J.H. de Geus
 Drs. M.C. van Hoorn (hoofdredacteur)
 J. Koekkoek
 N.T. Lakeman (beeldredacteur)
 D. Prins (secretaris)
 W. Schaafsma
 Ir. V.E. Schmidt (penningmeester)
 Mw. Y. Schuringa-Schogt (eindredacteur)
 Mw. drs. A. Verweij
 A. van der Wal
 Drs. G. Zwaneveld (voorzitter)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,
 8034 RA Zwolle, tel. 038-539985.
Secretaris Drs. J.W. Maassen, Traviatastraat 132,
 2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie F.F.J. Gaillard, Jorisstraat 43,
 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18; fax. 076-65 32 18.
 Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 60,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 42,50; contributie zonder Euclides f 35,00. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Advertenties zenden aan:
 ACQUI MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
 Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 1,5
- maximaal 47 aanslagen per regel
- eenzijdig beschreven papier
- met de tekst bijgeleverd op diskette (3,5 of 5,25 inch) in WP 5.1, of eventueel in ASCII-files
- en liefst voorzien te zijn van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De ruimte die een artikel of mededeling bij plaatsing in beslag neemt kan worden bepaald door uit te gaan van 48 tekstregels per kolom bij een kolomhoogte van 20 cm; aan de hand hiervan kan ook het ruimtebeslag van illustraties worden bepaald.

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 2 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f 66,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 43,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Woltersgroep Groningen b.v., afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. ABN-AMRO 44 60 67 105.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgiro hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 11,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

● Inhoud ● ● ● ● ●

Bijdragen 226

P. Drijvers *Een pagina omslaan. . . .* 226

Grafische rekenmachines en computeralgebrapakketten zijn technologische hulpmiddelen, die stimulerend werken.

Anne van Streun *De wiskunde in de nieuwe vwo-profielen* 231

Voor de reorganisatie van de wiskunde in de bovenbouw van havo en vwo worden nu plannen ontwikkeld. De invulling van de profielen is een belangrijk onderdeel van de nieuwe plannen.

Pythagoras gered! 237

Het wiskundetijdschrift voor jongeren kan blijven bestaan.

Mededelingen 230, 243

Interview 238

Martinus van Hoorn *'Nooit meer: waar heb ik dat voor nodig?'*

Serie 'Rekenen in W12-16' 239

Ed de Moor en Adri Treffers *Breuken, globaal!*

Werkbladen 240

Bijdrage 242

Wim Schaafsma *Commentaar bij de werkbladen 'Systematisch tellen'*

Boekbespreking 243

Bijdrage 244

H.A. Heijmans *Ervaringen met het softwarepakket DRAAD*

Bij de lessen in ruimteteekunde kan DRAAD een dynamische vervanging zijn van het krijtbord, waarop tekeningen maken altijd veel tijd kost.

40 jaar geleden 247

Bijdragen 248

Wim Schaafsma *'Leraren die de wiskundekar in de tegengestelde richting trekken'* 248

Verslag van een studiemiddag over wiskundeonderwijs in de basisvorming.

Bert Zwaneveld *Wiskunde en computers toegepast* 250

Op het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap vertelden drie wiskundigen over hun werk bij RIVM, Joh. Enschede en KNMI.

M.C. van Hoorn *Impressies van een regionale bijeenkomst* 252

Recreatie 253

Verenigingsnieuws 254

Marian Kollenveld *Van de bestuurstafel*

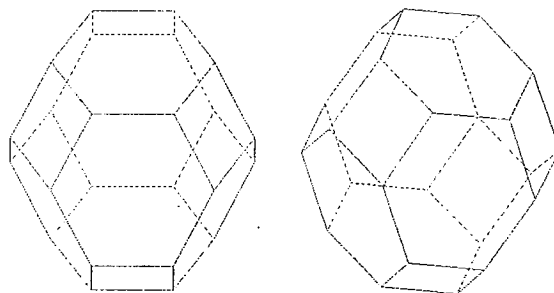
Bijdrage 255

F. Heijermans *Deelbaarheid en getallenstelsels*

Over kenmerken van deelbaarheid bestaan stellingen, met bewijzen.

Adressen van auteurs 256

Kalender 256



Draaien met DRAAD

► Een pagina omslaan....

P. Drijvers

Inleiding

Zoals u wellicht weet, kan een leerling uit de bovenbouw van havo of vwo bij het maken van wiskunde-opgaven veel profijt hebben van de technologische hulpmiddelen die tegenwoordig beschikbaar zijn, zoals grafische rekenmachines en computer-algebrapakketten. Dat ik deze twee in één adem noem, wil niet zeggen dat het vergelijkbare instrumenten zijn. De mogelijkheden van een grafische rekenmachine zijn beperkt tot het tekenen van grafieken en het uitvoeren van numerieke berekeningen. Een computeralgebrapakket kan ook tekenen en numeriek rekenen, maar essentieel is het vermogen om symbolisch te rekenen en met formules te manipuleren. In dit artikel plaats ik de grafische rekenmachine en computeralgebra ondanks dit verschil op één lijn vanwege de overeenkomsten: beide zijn belangrijke wiskundige hulpmiddelen, waaraan met name bij analyse veel handwerk kan worden uitbesteed. Beide stellen bovendien de inhoud van het curriculum en de didactiek ter discussie. En tenslotte zullen de grenzen tussen grafische rekenmachine en computeralgebra vervagen door de miniaturisering van de laatste.

Optimisten stellen dat we een historische episode meemaken. Immers, eindelijk zal de technologie ons in de wiskundeles bevrijden van het banale reken-

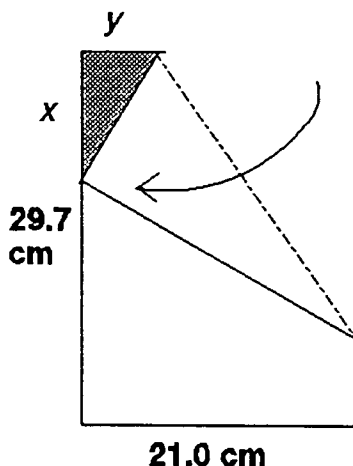
werk met de bijbehorende fouten, en kunnen we onze aandacht besteden aan de essentie van de wiskunde, namelijk aan het aanleren van concepten, aan redeneren, aan abstraheren. Ten tweede komt er ruimte vrij voor probleemoplossen, voor echte realistische wiskunde en voor empirisch onderzoek waarin de leerling zijn/haar eigen wiskunde ontwikkelt. Kortom, het is tijd voor een omwenteling, een revolutie, en in het Grote Boek van het Wiskunde-onderwijs kan een nieuwe pagina opgeslagen worden.

Sceptici daarentegen stellen zich voorzichtiger op. Onder het motto 'eerst zien en dan geloven' wordt verwezen naar de 'gewone' rekenmachine, die toch evenmin een revolutie teweeg heeft gebracht. (Of we daarmee gelukkig moeten zijn is een andere kwestie....) In elk geval weigeren ze de revolutie: beter geen oude schoenen weggooien zolang de nieuwe nog niet ingelopen zijn. En dat is natuurlijk heel verstandig.

Het beeld van de revolutie van de nieuwe pagina en de voorzichtigheid van de sceptici deed mij denken aan een opgave die ik enige tijd geleden in De Nieuwe Wiskrant zag staan (zie [1]). Ik gebruik deze opgave ten eerste om een grafische rekenmachine en een computeralgebrapakket naast elkaar te zetten. Ten tweede wil ik illustreren hoe naar mijn smaak het gebruik van dergelijke hulpmiddelen het experimenteren, en het onderzoeken van een probleemsituatie wel degelijk kan stimuleren. Overigens is deze opgave in deze vorm niet met leerlingen uitgetest. Een korte versie staat in [2], maar de bedoeling van dit artikel is slechts om een boeiend voorbeeld te geven van het gebruik van technologie.

Een gedeeltelijke omwenteling

Als compromis tussen de optimisten en de sceptici stel ik een gedeeltelijke omwenteling voor. Eenvoudiger gezegd: een vouw. Men neme een vel papier van A4-formaat. Op het pak waar het vel uitkomt, staat dat de afmetingen daarvan 21.0 bij 29.7 cm zijn. Vouw het vel om zoals hierna is aangegeven. De vraag is nu: hoe groot is de oppervlakte van



de gearceerde driehoek maximaal?

Als oriëntatie kunt u zelf met behulp van ruitjespapier een schatting maken. In een klassesituatie is het denkbaar dat de schattingen van leerlingen verzameld worden. Als u de maximale oppervlakte al weet, kunt u meteen nagaan hoeveel leerlingen vergeten zijn om door 2 te delen.

Laten we het onderzoek naar de maximale oppervlakte maar beginnen met een grafiekje, nu we een grafische rekenmachine bij de hand hebben. Daarvoor moet wel wat gerekend worden: Pythagoras in de driehoek, en dan het gegeven dat de schuine zijde gelijk is aan $21 - y$, dat geeft:

$$y = \frac{21^2 - x^2}{2 * 21}.$$

Dit is als Y1 ingevoerd in de grafische rekenmachine, in dit geval de TI-81 van Texas Instruments. Y2 is dan de oppervlaktefunctie. Het functiebestand en de grafieken ziet u hiernaast.

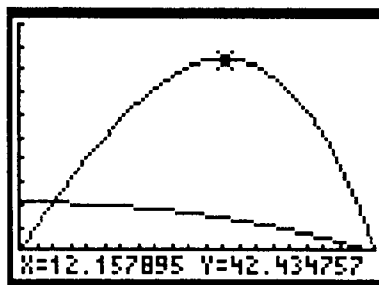
De grafiek van Y2 suggereert duidelijk een maximale oppervlakte. Door de grafiek met TRACE te volgen blijkt die oppervlakte ruim 42 te zijn voor een x-waarde in de buurt van 12. De waarde van y blijkt dan ongeveer 7 te zijn. Natuurlijk kan met ZOOM een nauwkeuriger schatting gemaakt worden.

Deze opgave is bekend en staat in veel boeken. Tijdens de conferentie 'Technology in Mathematics

```

:Y1=(21^2-X^2)/(2*
21)
:Y2=X*Y1/2
:Y3=
:Y4=

```



Teaching' in Birmingham in september j.l. werd dit voorbeeld ook gebruikt. De spreker vond dat het op bovenstaande wijze bevredigend afgerond was. Dat ik die mening niet deel, blijkt uit het vervolg.

Nu wat precieser

De optimale y-waarde van ongeveer 7 doet een lichtje branden. Het kan natuurlijk toeval zijn, maar die 7 verhoudt zich mooi tot 21, de lengte van de zijde die omgevouwen wordt. Zou dat exact kloppen?

Ik ga de analytische methode toepassen, en gebruik daarvoor DERIVE (Soft Warehouse) als computer-algebra pakket. Dit is een voor de hand liggende keuze, omdat DERIVE menugestuurd is en in vergelijking met grote broers als Maple en Mathematica weinig eisen stelt aan de hardware. Lesmateriaal waarin DERIVE een rol speelt vindt u in [3].

Net als met de grafische rekenmachine kan ik met DERIVE ook grafieken tekenen, volgen en uitvergrooten, maar dat is al gebeurd met de TI-81 en blijft nu buiten beschouwing.

1: $x^2 + y^2 = (21 - y)^2$	9: $\text{SOLVE} \left[\frac{d}{dx} \text{OPPERVLAKTE}(x) = 0, x \right]$
2: $\text{OPPERVLAKTE}(x) := \frac{x \cdot y}{2}$	10: $\{x = -7\sqrt{3}, x = 7\sqrt{3}\}$
3: "Oplossen van (1) naar y:"	11: $\text{OPPERVLAKTE}(7\sqrt{3})$
4: $y = \frac{441 - x^2}{42}$	12: $\frac{49\sqrt{3}}{2}$
5: "Invullen van (4) in (2):"	13: 42.4352
6: $\text{OPPERVLAKTE}(x) := \frac{x(441 - x^2)}{84}$	14: $y = \frac{441 - (7\sqrt{3})^2}{42}$
7: "Afgeleide op nul stellen:"	15: $y = 7$
	16: "

In regel 1 en 2 zijn de twee verbanden ingevoerd. Hieruit hoef ik niet zelf y op te lossen: dat gebeurt in regel 4. In regel 6 ontstaat door substitutie de oppervlakte als functie van x . Regel 9 geeft de exacte nulpunten van de afgeleide van de oppervlaktefunctie. Natuurlijk is alleen de positieve oplossing relevant. Regel 10 geeft de decimale benadering daarvan, die inderdaad in de buurt van 12 ligt. De optimale oppervlakte is iets meer dan 42, en de bijbehorende y -waarde is exact gelijk aan het derde deel van de breedte, te weten 7. (Overigens beschouwt DERIVE de breedte van 21 cm als een exacte waarde en niet als de afronding die het in werkelijkheid is.)

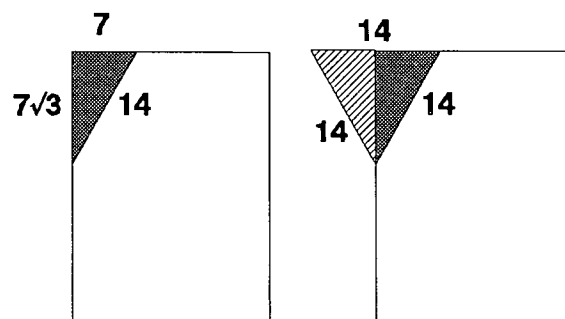
Het vermoeden klopt dus! Merk op dat het werk voor de gebruiker bestaat uit het bedenken van een strategie, het ontwerpen van een plan. De uitvoering ervan is niet moeilijk meer.

Meetkundig standpunt

De numerieke uitvoer van de TI-81 gaf een idee van de exacte waarde van de optimale y . Dit idee is door het algebraïsch rekenwerk van DERIVE bevestigd. Deze uitkomst geeft op zijn beurt aanleiding tot een meetkundige kijk op het probleem. Overigens wordt deze lijn (grafisch/numeriek $\rightarrow$ exact $\rightarrow$ meetkundig) vrij consequent gevolgd in het pakket Optimaliseren (zie [2]).

Hieronder staat de optimale driehoek afgebeeld. Analytisch is nu bewezen dat het de helft van een gelijkzijdige driehoek is. In eerste instantie verbaast me dat: waarom kom je in een situatie als deze zo'n mooie verhouding tegen? Kennelijk is de optimale rechthoekige driehoek waarvan schuine zijde en rechte zijde samen 21 zijn, een 30/60/90-driehoek!

De verklaring hiervoor blijkt na spiegeling van de driehoek. Dan ontstaat namelijk een driehoek met een vaste omtrek van 42 cm. En van dergelijke driehoeken heeft juist de gelijkzijdige driehoek de maximale oppervlakte. Voor een bewijs hiervan verwijs ik naar [4].

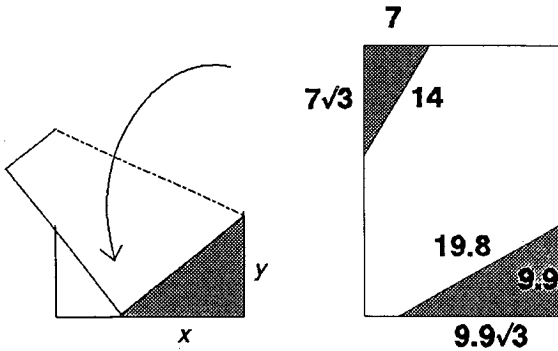


Verder vouwen

De eerste ervaringen inspireren tot uitbreiding van de omwenteling. Daarom vouw ik de pagina nu zoals hiernaast is aangegeven. Hoe groot zou dan de maximale oppervlakte van de gearceerde driehoek zijn? Ik vraag mij af of de optimale oppervlakte gelijk zal zijn aan die bij de eerste manier van vouwen gevonden is. En zou er weer zo'n mooie verhouding tussen de zijden van de optimale driehoek bestaan?

De werkwijze van het eerste probleem wordt dus herhaald. Een aardig punt hier is het feit dat ik slechts overal de getallen 21 in 29.7 hoef te veranderen. Het doorrekenen van deze variant kost dus weinig moeite. Dit is een algemeen aspect aan het gebruik van technologie: het variëren van een probleemsituatie is erg eenvoudig, hetgeen wegen opent naar exploratie.

Inderdaad blijkt dat er weer gevouwen moet worden op $2/3$ van de zijde en dat dan de helft van een gelijkzijdige driehoek met omtrek $2 \cdot 29.7$ tevoorschijn komt. Hieronder staan de twee optimale driehoeken in één figuur.

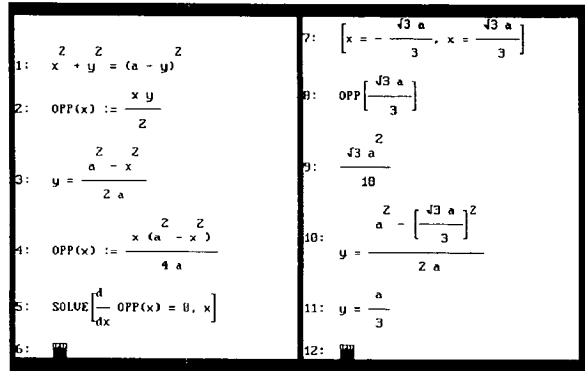


De oppervlakte van de onderste is echter duidelijk groter dan die van de bovenste: afgerond 84.879 versus 42.435. Dat is vrijwel het dubbele, maar niet precies. Waarom niet? En vooral: waarom wel bijna? Het antwoord ligt in het feit dat de verhouding tussen hoogte en breedte van een vel A4-papier in principe gelijk aan $\sqrt{2}$ is. De afmetingen die de fabrikant opgeeft, zijn slechts een benadering daarvan. Deelt u 29.7 maar eens door 21: de eerste vier decimalen zijn goed. Bij een fictief vel papier dat het exacte A4-formaat heeft, zou de verhouding van de oppervlakten dus exact gelijk aan 2 zijn.

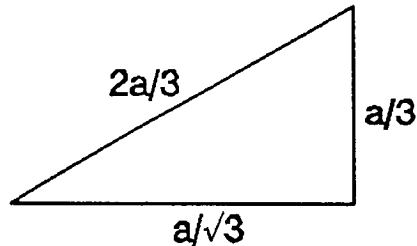
Vouwen in het algemeen

Hoe zit het nu bij een vel papier van andere afmetingen? Natuurlijk vervalt de factor (bijna) 2, omdat die voortkwam uit de specifieke verhouding tussen de zijden bij de afmetingen van A4-papier. Die verhouding geldt ook bij de andere A-formaten, maar natuurlijk niet bij een willekeurig rechthoekig stuk papier. Blijft de rest van het verhaal wel staan?

Stel dat ik een vel papier van a bij b cm heb. Ik vouw de zijde van lengte a om, en bereken met DERIVE de maximale oppervlakte van de driehoek.



En jawel: de zijde moet op lengte $a/3$ omgevouwen worden. De driehoek die ontstaat is weer de bekende 30/60/90 driehoek, zoals hieronder is afgebeeld.



Aan de formule van de optimale oppervlakte is te zien, dat je het beste de langste zijde kunt omvouw. Maar: de basis van de driehoek is gelijk aan $a/\sqrt{3}$. Dit moet natuurlijk wel kleiner dan b zijn, anders ontstaat er geen driehoek. Bij A4-formaat geldt dat $b = a/\sqrt{2}$. Omdat $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ is aan de voorwaarde voldaan. De bevindingen blijken afgezien van deze randvoorwaarde ook algemeen geldig te zijn.

Een aardige conclusie!

Een bundel grafieken

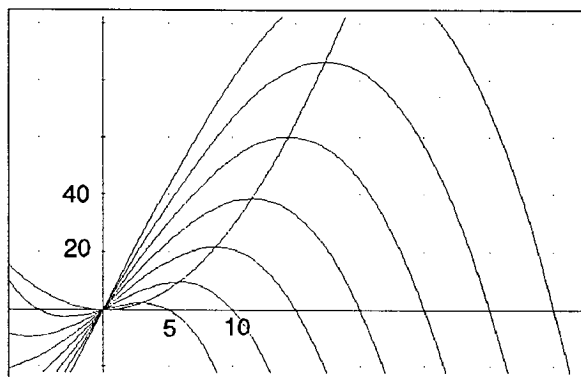
Als besluit van de exploratie van deze situatie wil ik nog enkele grafieken tekenen van de oppervlaktefunctie voor diverse waarden van a . Net als in het vwo B-examen (1993-I) kan men zich afvragen: op welke kromme liggen de

toppen van deze grafieken? Uit de bovenstaande DERIVE-uitvoer blijkt dat zo'n top coördinaten

$(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a^2\sqrt{3}}{18})$ heeft. Hieruit valt de vergelijking van

de kromme door de toppen af te leiden: $y = \frac{\sqrt{3}x^2}{6}$

Met DERIVE is het volgende plaatje gemaakt, al zijn de eenheden op de assen er achteraf bij gezet. (Overigens had ik hiervoor evengoed de TI-81 kunnen gebruiken.) De waarde van a loopt van 5 tot 35 met stapjes van 5.



Slotopmerking

Tot zover het voorbeeld. De sceptici zullen nu wellicht opmerken: Mooi, maar alles wat we nu gezien hebben kan ook met de hand! En natuurlijk is dat zo, maar het is wel een open deur: alles wat een rekenmachine of een computer kan, kan ook met de hand, want die machines zijn niet slimmer dan wij. Het nadeel van het handwerk is alleen dat het langzamer gaat en dat er meer rekenfouten insluipen. Gevolg daarvan is dat sommige leerzame activiteiten met de hand vaak achterwege blijven: denk aan het snel doorrekenen van verschillende gevallen, aan het vlug tekenen van een grafiek (of meteen maar een heleboel), aan het zoeken van verschillende oplossingen voor hetzelfde probleem, of aan het

verifiëren van generalisaties. Het gebruik van de technologie vergroot de dynamiek en de mogelijkheden tot visualisatie, en dat kan een impuls zijn voor allerlei wiskundige activiteiten. Daarnaast kan het gebruik van de hulpmiddelen de fantasie prikkelen en uitdagend zijn, al zal niet iedereen daar even gevoelig voor zijn. Dat neemt niet weg dat naar mijn mening een zorgvuldige inpassing van technologie de wiskunde interessanter, uitdagender en levendiger kan maken. En in die zin hoor ik dus zeker tot de optimisten.

Noten

- [1] M. van Reeuwijk: *Een zakcomputer voor iedere leerling in: De Nieuwe Wiskrant* 10-3, maart 1991
- [2] P. Drijvers, M. Kindt: *Optimaliseren met een grafische rekenmachine*, Freudenthal instituut, Utrecht, 1993
- [3] P. Drijvers: *Wiskunde leren met Derive*. Docentenboek: ISBN 90 01 25992 8. Leerlingenboek: ISBN 90 01 25991 X, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1992
- [4] I. Niven: *Maxima and minima without calculus*, Dolciani Mathematical Expositions 6, 1981, Mathematics Association of America



Mededeling

Studiedag Oude Wiskunde in modern onderwijs

Op zaterdag 4 juni 1994 vindt de Studiedag *Oude Wiskunde in modern onderwijs* plaats, en wel van 10.00 uur tot 15.00 uur in Transitorium 1 van de Rijks Universiteit Utrecht (Leuvenlaan 1, Uithof, Utrecht).

Op het programma staan, na de opening door Jan van Maanen, lezingen van John Fauvel (UK), over de waarde en het gebruik van geschiedenis in het wiskunde-onderwijs, en van V. Frederick Rickey (USA), over geschiedenis als hulpmiddel bij de behandeling van de analyse. Verder worden enkele workshops gehouden. Opgave vooraf is noodzakelijk. Dit kan, schriftelijk of telefonisch, gebeuren bij Dr.J.P.Hogendijk, Rijks Universiteit Utrecht, Vakgroep Wiskunde, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht, telefoon 030-533697.

Deelname kost f 30,- (voor studenten f 15,-). Dit bedrag dient overgemaakt te worden op postgiro 759167 t.n.v. het Landelijk Werkverband Geschiedenis en Maatschappelijke Functie van de Wiskunde, te Den Dolder.

► De wiskunde in de nieuwe vwo-profielen¹

Anne van Streun

Probleemstelling

Het zal de lezer niet zijn ontgaan dat er reorganisatieplannen voor de bovenbouw van het havo en vwo zijn ontwikkeld. Gezien de positieve ontvangst van deze plannen in de politiek lijkt het geen tijdverspilling om ons met de invulling van profielen bezig te houden. In dit artikel draait het om de vraag hoe wij de vakken wiskunde in de bovenbouw van het vwo zodanig kunnen programmeren, dat de verschillende doelgroepen het bij hen passend wiskunde-onderwijs ontvangen. Enerzijds heeft dat te maken met de organisatie in de school, anderzijds met de invulling van de vakken, en de volgorde in de leerstof.

Onderwijs passend bij de doelgroep

Als wiskundeleraar en schooldecaan heb ik de structuurwijziging door de mammoetwet (dat wil zeggen: de introductie van de vakkenpakketten) en de invoering van nieuwe leerplannen wiskunde in 1968, en daarna, actief meebeleefd. Ondersteund door eminente wiskundigen (onder wie Freudenthal en Van der Blij) werd de inhoud van het wiskunde-onderwijs in 1968 bij de tijd gebracht, wat toen veel aandacht betekende voor de formele taal. Aan de top

van de wiskundepiramide had men het nieuwe vak wiskunde 1 gedacht, waarin eindelijk de differentiaal- en integraalrekening heel precies voor B-leerlingen in het vwo zou worden uiteengezet. De wiskundeleraren die dat vak zouden moeten geven herkenden veel van wat zij zelf in hun wiskundestudie hadden gedaan. Een prachtig vak voor leerlingen die een echte B-studie met veel wiskunde wilden doen.

Terwijl ik als jong wiskundeleraar enthousiast werd gemaakt voor het nieuwe vak wiskunde 1, kreeg ik als schooldecaan de wensen- en eisenlijstjes binnen van de vervolgstudies. Bijna alle faculteiten eisten het vak wiskunde 1 als toegangsvoorwaarde, niemand eiste wiskunde 2. Het gevolg is bekend. De inhoud van wiskunde 1 werd volgens de doelstellingen van de CMLW² op B-niveau vastgelegd, terwijl de leerlingenpopulatie in de klas een veel bredere samenstelling had. Veel water in de wijn bij de examens, toch veel onvoldoendes, de wiskundedocenten hadden in de les geen tijd voor interessante uitstapjes, voor echte B-leerlingen had het vak weinig inspirerends. Zij kozen uit liefhebberij het vak wiskunde 2, waarbij de docenten in de les wel tijd en gelegenheid hadden om meer van de wiskunde te laten zien.

Na de HEWET-operatie, met de invoering van wiskunde A en B, ziet het plaatje er heel anders uit. Veel leerlingen die een economische of sociale studie ambiëren, hebben in het vak wiskunde A een voor hen veel geschiktere vooropleiding gekregen. Aan de analyse uit wiskunde 1 is ruimtemeetkunde toegevoegd. Wiskunde B trekt nu inderdaad minder kandidaten dan voorheen wiskunde 1 (46 % tegen 70 %), maar duidelijk meer dan wiskunde B in de bovenbouw van het havo (30 %), dat wel een echte B-invulling heeft gekregen. Terecht wordt in het rapport *Wiskunde in beweging*³ becijferd dat door het wegvallen van wiskunde 2 de vwo-leerlingen minder gelegenheid hebben gekregen om zich voor te bereiden op de B-studies. De ruimtemeetkunde heeft geen duidelijke aansluiting bij welke vervolgstudie dan ook, en de analyse in wiskunde B (verschraald door die 70% van voorheen) is niet opgewaarderd.

De les die de geschiedenis van de leerplanontwikkeling wiskunde in de bovenbouw van het vwo ons leert, is dat de inhoud van een vak heel duidelijk

moet worden afgestemd op de doelgroep die het vak gaat kiezen. Enerzijds is er de behoefte om het algemene peil van wiskundige kennis hoog te houden, anderzijds valt te constateren dat voor het deel van de doelgroep die in aanmerking kan komen voor een pittige B-studie, het huidige aanbod niet toereikend is. Een analoog probleem doet zich voor bij leerlingen die zowel een vervolgstudie in de economische wetenschappen als in de technische of medische wetenschappen open willen houden. Voor hen is een stevig stuk statistiek in het vwo bijzonder relevant, zodat zij nu gedwongen zijn om heel het vak wiskunde A te kiezen. De toegepaste analyse in dat vak is voor hen grotendeels een dubblure. Het vak statistiek staat overigens in bijna elke vervolgstudie (ook in de B-faculteiten) op het programma, en paste daarom juist mooi in het oude vak wiskunde 1. Kijken we tenslotte naar het verloop van het keuzeproces voor wiskunde A en B op vwo en havo. Een ongewenst neveneffect van deze nieuwe vakken-indeling is dat de meisjes sterk ondervertegenwoordigd zijn bij wiskunde B, omdat er nu in 4 havo en 5 vwo moet worden gekozen tussen twee soorten wiskunde, wat voorheen niet het geval was. Daar komt nog bij dat de ruimtemeetskunde, het nieuwe onderdeel in wiskunde B (vwo en havo), meisjes duidelijk meer problemen geeft en ook meer afschrikt dan jongens. Voor psychologen is dat geen verrassing, omdat meisjes na de basisschool bij allerlei intelligentietests significant slechter scoren op ruimtelijk inzicht dan jongens. Het is nog een vraag hoe dat zal zijn na enkele jaren basisvorming (W12-16), met onder andere ruimtemeetskunde.

De voorgestelde profielen vwo

In het kader van dit artikel voert het te ver om het gehele rapport *Tweede fase, scharnier tussen basisvorming en hoger onderwijs* van de stuurgroep onder leiding van mevr. Ginjaar-Maas te bespreken. Twee hoofdpunten licht ik er uit. Het is de bedoeling om veel meer dan tot nu toe de leerlingen te stimuleren tot het zelfstandig studeren en het leren dragen van verantwoordelijkheid. De vakken en de

leerstof worden daarom niet meer geformuleerd in lesuren per week, maar in uren studielast. Los van periodes voor schoolonderzoeken en centrale examens is de vereiste inspanning van de leerlingen geschat op 1520 uur per jaar, of 4550 uur in de leerjaren 4, 5 en 6 vwo. In principe moet het mogelijk worden om een vak, of een onderdeel van een vak, elk half jaar af te sluiten met een schoolonderzoek of een centraal examen. Dat is een opzet van een studie zoals die in het hoger onderwijs regel is.

Alle vwo-leerlingen bestuderen de vakken en deelvakken uit *een gemeenschappelijk deel*, dat een studielast heeft van 2100 uur. In het gemeenschappelijke deel zit een wiskundevak met een studielast van 300 uur. Dat vak noem ik in het vervolg de Algemene Wiskunde, af te korten met AW.

Daarnaast moeten de leerlingen tenminste één van de volgende *vier profielverplichte delen* (1450 uur studielast) met vakken en deelvakken kiezen:

- Cultuur en Maatschappij, met wiskundige elementen in de algemene economie;
- Natuur en Gezondheid, met een extra vak wiskunde (NGW, studielast 300 uur),
- Economie en Maatschappij, met een extra vak wiskunde (EMW, studielast 300 uur);
- Natuur en Techniek, met een extra vak wiskunde (NTW, studielast 400 uur).

Over de invulling van de vakken NGW, EMW en NTW worden geen harde uitspraken gedaan, zodat het in principe mogelijk is dat er vier gescheiden vakken wiskunde, namelijk AW, NGW, EMW en NTW worden ontwikkeld en aangeboden. Dat staat op gespannen voet met de wens dat leerlingen door middel van hun vrij te kiezen vakken of deelvakken (studielast 1000 uur) twee profielen moeten kunnen combineren. Daarnaast lijkt het aanbieden van vier verschillende vakken in strijd met de wens om vakken goed op elkaar af te stemmen, en ook is het inhoudelijk niet goed te beargumenteren dat de vier profielgroepen volledig verschillende wiskunde nodig hebben.

Haken en ogen

Laten we eens proberen om ons uitgangspunt, namelijk om het te geven wiskunde-onderwijs te laten passen bij de doelgroep leerlingen, toe te passen op

de nieuwe situatie. Neem bijvoorbeeld het vak Algemene Wiskunde (AW) met een studielast van 300 uur. Terecht merkt de stuurgroep op dat het verplichte gemeenschappelijke deel vroeg in 4-5-6 vwo moet worden geprogrammeerd. Dus zetten we het eerst maar eens voor de helft in 4 vwo (150 uur studielast lijkt wel van dezelfde orde van grootte als de huidige 3 lessen⁴ per week) en stellen we de inhoud gelijk aan de huidige leerstof van 4 vwo. Dat is voor 75 % analyse, voorbereidend op de analyse in wiskunde A en B. Is dat niet wat eenzijdig voor de algemene wiskunde, die voor iedereen is? En hoe kunnen we de leerlingen dan door ervaring met andere wiskunde voorbereiden op de keuze van de profielen?

Goed, we vullen de AW in als echte algemene wiskunde, met verbanden, statistiek, grafen en matrices, grafische verwerking enzovoort. Zetten we dat helemaal in 4 vwo, equivalent aan 6 lessen per week? Dan is de keuze van een wiskundevak in 5 vwo wel een heel grote gok. Waarschijnlijk verschilt de wiskunde in EMW, in NGW en in NTW sterk van deze AW in 4 vwo.

Vooruit, we zetten AW gewoon in 5 en 6 vwo, ondanks het advies van de stuurgroep om het verplichte deel vroeg af te werken. En dan maar wat van die andere wiskundevakken in 4 vwo, voor alle leerlingen die niet het profiel Cultuur en Maatschappij hebben gekozen. Maar waarschijnlijk hebben ze in 4 vwo nog geen profiel gekozen, terwijl in elk geval een vroegtijdige negatieve keus niet gewenst is. Is het overigens zo'n goed idee om de Algemene Wiskunde te onderwijzen en te laten bestuderen door leerlingen in 5 en 6 vwo die bijvoorbeeld ook al grote stukken statistiek in EMW of analyse in NTW hebben bestudeerd? En bevat het vak AW dan helemaal geen wiskunde waar in die andere wiskundevakken op moet worden voortgebouwd?

We kijken maar eens naar de wiskunde in NTW, de echte B-wiskunde, bestemd voor leerlingen die met een B-studie in het wo verder willen gaan. De studielast is op 400 uur gesteld, zo iets als 4 lessen in 5 vwo en 6 vwo. Vergeleken met het huidige vak wiskunde B is dat een vermindering van de zwaarte, tenzij net als nu in 4 vwo door middel van AW een stevige grondslag voor de analyse wordt gelegd. Maar dat heeft zo zijn bezwaren, zoals we hebben

gezien. Wellicht kan het een stevig B-vak worden, als wij gedurende die 400 uur tenminste vanaf het begin de goede doelgroep (de echte B-leerlingen) voor ons hebben.

Wat moet de inhoud worden van de wiskunde in NGW, het wiskundevak in het profiel Natuur en Gezondheid? Oppervlakkig gezien ligt het voor de hand om gewoon de eerste 300 uur studielast van de wiskunde B in NTW te nemen. Dat wordt wel de doodsteek voor het vak NTW, want dan wordt het onderwijs en het niveau van dat B-vak voor driekwart afgestemd op een veel bredere groep van leerlingen, die medicijnen of biologie willen gaan studeren. (De studiecommissie-wiskunde B zou zich meteen kunnen opheffen.)

En hoe zit het eigenlijk met de statistiek, die in de vervolgstudies in de Natuur en Gezondheid een belangrijker rol speelt dan de voortgezette analyse in NTW? Weer een discrepantie tussen doelgroep en vakinhoud!

Het wiskundevak in het profiel Economie en Maatschappij is nu nog niet aan bod geweest. Hoe ligt het met de relatie tussen de Algemene Wiskunde en dit vak EMW? En verschilt de analyse in EMW echt van die in NGW of in NTW? Wellicht doet de lezer er goed aan om nu eerst een kopje koffie te gaan drinken en de hele problematiek op zich te laten inwerken. Mijn poging, hierna, om allerlei tegenstrijdig lijkende eisen toch tot een harmonisch en onderwijskundig verantwoord pakket van vakken te combineren, valt dan hopelijk in vruchtbare aarde.

Opsplitsing in studie-eenheden

In de voorafgaande beschouwingen zijn we nog sterk binnen het kader van de huidige schoolpraktijk gebleven. Leerlingen kiezen een vak of zij kiezen het niet. Het werken met studielast en de mogelijkheid om een vak per half jaar af te sluiten maakt een veel flexibeler organisatie van het onderwijs mogelijk. Natuurlijk zitten er nogal wat haken en ogen aan het begrip studielast. Als voorzitter van de studierichtingscommissies Wiskunde & Informatica van de RUG maak ik regelmatig mee dat studenten bij de evaluatie klagen over de zwaarte van een vak, en zwijgen over een te licht vak. In het kader van de

invoering van de profielen is zeker landelijk en per school enig empirisch onderzoek nodig om de lessen van nu redelijk correct te vertalen naar studielast straks. Voor het gemak van de lezer schat ik 50 uur studielast op ongeveer 1 huidig lesuur per week over de periode van 1 schooljaar.

In het vervolg noem ik 50 uur studielast een studie-eenheid. Het vak AW is dan 6 studie-eenheden, de vakken NGW en EMW zijn eveneens 6 studie-eenheden, en NTW wordt 8 studie-eenheden. In de schoolpraktijk van nu hebben leerlingen zelden meer dan 4 lessen per week voor een bepaald schoolvak, dat is 4 studie-eenheden. In een half jaar met 4 lessen per week wordt dat 2 studie-eenheden. Een leerling zal in een schooljaar zo'n 30 studie-eenheden moeten behalen om op schema te liggen. Terug naar de inhoud van de wiskundevakken, die ik in brokken van 2 studie-eenheden wil verdelen om de geschetste problematiek te verhelderen. De Algemene Wiskunde laat zich mijns inziens goed identificeren. De inhoud van de Algemene Wiskunde heeft alles te maken met gecijferdheid, met het verwerken van informatie en met het afronden van de lange leerlijnen uit de onderbouw. Het algemene vak AW wordt opgesplitst in drie brokken van 2 studie-eenheden, AW_1 , AW_2 , AW_3 .

De wiskunde die een belangrijke rol speelt in de economische en sociale wetenschappen, de gamma-wetenschappen, heeft bij ons ten onrechte de naam wiskunde A (voor alfa-wetenschappen) gekregen. De wiskunde voor de gamma-wetenschappen noem ik in het vervolg C-wiskunde, en het vak EMW uit het profiel Economie en Maatschappij is opgebouwd uit de studiebrokken CW_1 , CW_2 , CW_3 van elk 2 studie-eenheden.

De wiskunde die een belangrijke rol speelt in de techniek en natuurwetenschappen, de bèta-wetenschappen, noem ik B-wiskunde. Het vak NTW is opgebouwd uit de studiebrokken BW_1 , BW_2 , BW_3 , BW_4 van elk 2 studie-eenheden, waarbij ik CW_1 en BW_1 in het volgende voorstel aan elkaar gelijk stel (en vervolgens BCW_1 noem).

De wiskunde uit het profiel Natuur en Gezondheid heeft naar mijn mening geen eigen identiteit en zal een combinatie van C-wiskunde en B-wiskunde

moeten worden. Het vak NGW wordt in mijn uitwerking $BCW_1 + BW_2 + CW_2$.

Samenvattend:

$$AW = AW_1 + AW_2 + AW_3$$

$$BW = BCW_1 + BW_2 + BW_3 + BW_4$$

$$CW = BCW_1 + CW_2 + CW_3$$

Bij geschikt gekozen inhouden kan de stapeling van studiebrokken heel beperkt blijven. Bij de voorgestelde inhouden, hierna uitgewerkt, is de volgende hiërarchie noodzakelijk:

AW_1 is een ingangsvoorwaarde voor BCW_1 ,

AW_2 is een ingangsvoorwaarde voor AW_3 , CW_2 en CW_3 ,

BCW_1 is een ingangsvoorwaarde voor BW_2 ,

BW_2 is een ingangsvoorwaarde voor BW_3 en BW_4 .

Invulling en situering van de studiebrokken

Het wordt tijd om een voorzet te doen voor de invulling van de studiebrokken, waarbij de onderlinge stapeling zoveel mogelijk wordt beperkt. Dat is bijzonder belangrijk voor de schoolorganisatie en voor de mogelijkheid om bij een bepaald profiel in de vrije ruimte een studiebrok uit een ander profiel te kunnen kiezen. Mijn argumentatie bij de voorgestelde keuze van de leerinhouden blijft in het kader van dit artikel beperkt. De NVvW doet er denk ik goed aan om te zijner tijd op openbare discussiebijeenkomsten met de leden de invulling te preciseren. Met name de afstemming tussen leerinhoud en doelgroep is daarbij essentieel.

A-wiskunde

AW_1 Verbanden

Voortzetting en afronding van de lijn van verbanden, formules, grafieken en functies uit 3 vwo met inzet van een grafische rekenmachine, en toepassing van de beginselen van de differentiaalrekening op toegepaste situaties bij allerlei typen verbanden.

Toename, afname, veranderingen, snelheden, extrema.

Plaats: eerste periode van 4 vwo (4 lessen per week).

Argumentatie: maatschappelijk relevant, mits niet technisch ingevuld; voorbereidend voor 3 van de 4 profielen, goed te doen voor alle leerlingen in 4 vwo.

AW₂ Informatieverwerking

Zowel het statistisch verwerken van gegevens, het werken met een database en het concluderen op basis van een database. Grafen en matrices en andere gangbare manieren om gegevens vast te leggen en te bewerken. Gebruik van geavanceerde rekenmachines bij de statistiek en bij het rekenen met matrices.

Plaats: tweede periode 4 vwo (4 lessen per week), of tweede periode 4 vwo en eerste periode 5 vwo (2 lessen per week).

Argumentatie: maatschappelijk relevant, mits praktijkgericht ingevuld met echte situaties, echt computerwerk en echte dataverzamelingen. Op deze manier ingevuld geen doublure met andere studiebrokken uit de profielf delen.

AW₃ Redeneren met gegevens

Werken aan de gecijferheid door redeneringen op basis van statistieken, grafen, getallen, visualiseren en grafieken kritisch te toetsen en te verbeteren. Causaliteit en correlatie meenemen, en eenvoudige kansverhalen.

Plaats: 5 vwo, geconcentreerd in één periode (4 lessen per week) of verdeeld over twee periodes (2 lessen per week).

Argumentatie: afronding van de algemeen wiskundige vorming met toespitsing op het redeneren met de wiskunde, die in het dagelijks leven, in eenvoudige echte toepassingen (havo A) en in de kranten voorkomt.

Wegens het probleemstellend karakter ook interessant voor leerlingen die meer wiskunde in hun profiel opnemen.

C-wiskunde

BCW₁ Toegepaste Analyse

De kern van de toegepaste analyse uit het huidige vak wiskunde A, maar zonder technisch rekenwerk en met het gebruik van de grafische rekenmachine. Minder gericht op functies en meer op echte toepassingen.

Numerieke integratie met oppervlakten meenemen.

Plaats: tweede periode 4 vwo (4 lessen per week), of tweede periode 4 vwo en eerste periode 5 vwo (2 lessen per week).

Voorwaarden: volgt op AW₁, geeft toegang tot BW₂.

Argumentatie: in het economisch en sociaalwetenschappelijk vervolgonderwijs spelen deze begrippen een belangrijke rol, terwijl in medische studies dit deel van de analyse de natuurkunde in het vwo en wo ondersteunt.

CW₂ Discrete wiskunde

Matrices, grafen, lineair programmeren, optimaliseren en wat kansrekening uit het huidige vak wiskunde A, voorzover niet opgenomen in AW₂.

Plaats: 5 vwo of 6 vwo (2 tot 4 lessen per week).

Voorwaarden: volgt op AW₂.

Argumentatie: maatschappelijk relevant, komt voor in vervolgstudies.

CW₃ Kansverdelingen en hypothesetoetsen

De kansverdelingen uit wiskunde A, en meer werk maken van hypothesetoetsen, ook meer typen toetsen.

Plaats: 5 vwo of 6 vwo (2 tot 4 lessen per week).

Voorwaarden: volgt op AW₂.

Argumentatie: essentieel vakonderdeel bij bijna alle studies in wo. Daar is in het vwo meer aandacht voor nodig.

B-wiskunde

BCW₁ Toegepaste Analyse

De kern van de toegepaste analyse uit het huidige vak wiskunde A, maar zonder technisch rekenwerk en met gebruik van de grafische rekenmachine. Minder gericht op functies en meer op echte toepassingen.

Numerieke integratie met oppervlakten meenemen.

Plaats: tweede periode 4 vwo (4 lessen per week), of tweede periode 4 vwo en eerste periode 5 vwo (2 lessen per week).

Voorwaarden: volgt op AW₁, geeft toegang tot BW₂.

Argumentatie: een eerste brede opbouw van de begrippen uit de differentiaalrekening, aan de hand van contexten waarin die begrippen functioneren, is didactisch goed. Zie ook bij C-wiskunde.



BW₂ Voortgezette analyse

Vervolg van differentiaal- en integraalrekening, zoals nu in wiskunde B voorkomt. Natuurwetenschappelijke contexten meenemen.

Plaats: 5 vwo (2 tot 4 lesuren per week).

Voorwaarden: volgt op BCW₁.

Argumentatie: het is moeilijk voorstelbaar dat in de technische en natuurwetenschappelijke studies een stevig brok analyse kan worden gemist.

BW₃ Ruimtemeetkunde en dwarsverbanden?

Integratie van ruimtelijke situaties en toepassingen van de analyse.

Plaats: 5 vwo en/of 6 vwo (2 tot 4 lesuren per week).

Voorwaarden: volgt op BW₂.

Argumentatie: het tekenen en rekenen in de ruimte-meetkunde krijgt nu zoveel aandacht in de onderbouw, dat niet zonder meer de huidige ruimte-meetkunde kan worden gehandhaafd. Dit te meer omdat vervolgstudies nauwelijks zijn geïnteresseerd in dat onderwerp. Concentratie op bewijzen is een optie, evenals toepassingen van de analyse in ruimtelijke situaties, analoog de dwarsverbanden in havo B. De studietoets wiskunde B zal zich hierover moeten uitspreken.

BW₄ Modelvorming en differentiaalvergelijkingen?

De differentiaalvergelijkingen zijn nu een onbevredigende sluitpost in de analyse van het vwo, terwijl zij in de modelvorming essentieel zijn.

Plaats: 6 vwo (2 tot 4 lesuren per week).

Voorwaarden: volgt op BW₂.

Argumentatie: flink tijd steken in de modelvorming en gebruik maken van computerprogramma's bij het numeriek oplossen geeft een mooi vakonderdeel, dat voor de vervolgstudies in techniek en natuurwetenschappen waardevol is. De studietoets wiskunde B zal zich over de plaats van de differentiaalvergelijkingen uitspreken.

De keuze van de leerlingen

De invoering van de profielen in combinatie met de mogelijkheid om een vak of deelvak in studie-eenheden op te splitsen en halfjaarlijks af te sluiten, maakt het mogelijk om het keuzeproces van de leerlingen meer gespreid in de tijd en minder geforceerd te laten verlopen dan thans. In de voorgestelde opzet bij de wiskundevakken kunnen leerlingen heel lang allerlei profielen open laten, zolang de studie van de verschillende onderdelen goed verloopt. Er is geen alles-of-niets-keuze meer voor wiskunde A of B, of voor de wiskunde in Natuur en Gezondheid of in Natuur en Techniek.

Een interessant nieuw aspect van het plan voor de profielen is de mogelijkheid om naast de verplicht aan te bieden vakken en deelvakken, voor wiskunde in het voorafgaande besproken, ook andere vakonderdelen te ontwikkelen, te onderwijzen en te toetsen. Leerlingen kunnen in hun vrije ruimte van 100 uur studielast zulke vakonderdelen kiezen of zelfs buiten de school studiepunten halen. Het is bijvoorbeeld heel goed mogelijk om voor leerlingen die in wiskunde als wetenschappelijke discipline zijn geïnteresseerd, een cursus of studieblok Geschiedenis van de Wiskunde te ontwikkelen met een omvang van 200 uren studielast. Ook is denkbaar dat leerlingen trainingsbijeenkomsten gaan volgen in het kader van een wiskunde-olympiade (A of B) of een bedrijfswiskundige stage gaan volgen. De praktijk zal moeten uitwijzen wat daar van terecht komt. In ieder geval lijkt het verstandig om de verplichte vakken en deelvakken in een profiel niet te laat te programmeren, zodat leerlingen die al voor een deel halverwege het zesde jaar kunnen afsluiten of een half jaar later kunnen herkansen.

De relatie met de havo-profielen

Dezelfde exercitie als bij het vwo kan ook op de nieuwe havo-profielen worden toegepast. Er is een vak Algemene wiskunde AW geprogrammeerd met een studielast van 150 uur. Dat zal ongetwijfeld het niet-statistiek gedeelte van het huidige vak havo A gaan bevatten met een afronding in havo 4. De wiskunde in het profiel Economie en Maatschappij (studielast 200 uur) zal wel voor de helft uit toegepaste analyse (BCW₁) en voor de andere helft uit statistiek

of informatieverwerking (CW₂) moeten bestaan. De wiskunde uit het profiel Natuur en Gezondheid (studielast 200 uur) kan worden opgebouwd uit BCW₁ en CW₂. De wiskunde uit het profiel Natuur en Techniek (300 uur studielast) kan dan opgebouwd worden uit de studiebrokken BCW₁, BW₂ (voortgezette analyse) en BW₃ (bijvoorbeeld dwarsverbanden tussen analyse en ruimtemeetkunde).

Conclusies

Invoering van de profielen in de bovenbouw van het havo-vwo heeft ingrijpende gevolgen voor de programmering en inhoud van de wiskundevakken. Zowel voor het keuzeproces van de leerlingen als voor de onderwijsbaarheid van de beoogde vakken kan één en ander slecht uitpakken. Aan de ene kant is een vroegtijdige vastlegging op gehele vakken in strijd met de nieuwe opzet in de bovenbouw. Aan de andere kant doet een optie, waarin wiskunde B in Natuur en Techniek gewoon een uitbreiding met 100 uur studielast is van wiskunde B in Natuur en Gezondheid, de leerlingen met een uitzicht op een studie in techniek of natuurwetenschappen ernstig tekort. Handhaving van het voor hen vereiste niveau in wiskunde B creëert weer een vak met veel onvolledig en uiteindelijk een te laag niveau, analoog aan wiskunde 1 indertijd. Inhoudelijk moet een combinatie van statistiek en toegepaste analyse kunnen worden gekozen zonder de huidige overlap tussen wiskunde A en B op het vwo. De inhoud van de algemene wiskunde in vwo moet enerzijds afrondend zijn en anderzijds toch genoeg bieden voor de 90 % van de leerlingen die meer wiskunde kiezen dan dit minimum. Met name de programmering in 4 vwo is daarbij essentieel.

Zoals geschetst is het mogelijk om op een adequate wijze de inhoud van het wiskunde-onderwijs te laten passen bij de doelgroep die iets aan die inhoud heeft. Adequaat, zodat leerlingen binnen hun mogelijkheden en ambities geleidelijk hun plafond kunnen bereiken en optimale keuzes kunnen maken. Adequaat, zodat wiskundeleraars voor de goede groepen leerlingen het passende onderwijs kunnen verzorgen, zonder dat zij door de maatschappelijke druk weer in de houdgreep komen tussen handhaving van het vereiste niveau en beperking van de schade in slechte leerresultaten van hun leerlingen.

Noten

1. De auteur bedankt de redactie en de hoofdredacteur voor de grondige bewerking van het conceptartikel.
2. CMLW = Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, in 1968.
3. *Wiskunde in beweging*, rapport van de Verkenningcommissie Wiskunde, 1992.
4. Het is uitdrukkelijk niet de bedoeling dat 50 uur studielast in de nieuwe situatie met maar 1 lesuur per week wordt vertaald, maar het is wel een goede maat om de huidige studielast (gekopieerd aan lessen) te vergelijken met de toekomstige situatie.

► Pythagoras gered!

Het heeft niet veel gescheeld, maar het wiskundetijdschrift voor jongeren Pythagoras is weer gered. Pythagoras heeft de afgelopen jaren al vaker het een en ander te verduren gehad. Sinds kort was het ondergebracht bij de uitgeverij MEMO te Utrecht. Deze uitgeverij is in januari 1994 failliet gegaan, om precies te zijn doordat de Rijks Universiteit Utrecht beslag liet leggen. Het zij zo.

Nu is Pythagoras ondergebracht bij het NIAM (Postbus 97734, 2509 GC Den Haag, telefoon 070-3143581, t.a.v. Ton Fokker). Men kan ook contact opnemen met de Stichting Christiaan Huygens, p.a. Henk Huijsmans, Molenstraat 31, 4841 CA Prinsenbeek. Dit is met name het adres voor het inzenden van bijdragen.

Het zusterijdschrift Archimedes is nu, na jaren samen met Pythagoras te zijn uitgegeven, ondergebracht bij Ten Brink te Meppel, de uitgever van NVOX, het tijdschrift van de NVON. De NVON is de zustervereniging van de NVvW voor docenten natuurwetenschappelijke vakken.

De redactie wenst Pythagoras, en ook Archimedes, veel succes!

► 'Nooit meer: waar heb ik dat voor nodig?'

Peter Willems, 44 jaar, sinds 1971 leraar aan de categorale vbo-school Elkervoorde te Deurne, heeft dit jaar 1 brugklas, 4 uur per week.

In deze klas zitten leerlingen die binnen de school kunnen doorgaan in de vbo-afdelingen verzorging, mode & kleding, uiterlijke verzorging, administratie en verkoop.

Wou je graag een brugklas?

Ja, heel graag. Wij waren (en zijn) een experimenteerschool voor W12-16, en dan wil je na 4 jaar pakketjes wel eens een boek. Voor mij is het gebruiken van een boek een verademing.

Hoe hebben jullie een boek gekozen?

Dat hebben we heel grondig gedaan, eerst hadden we een selectie van drie boeken, en met behulp van een checklist zijn we tot onze keuze (RW) gekomen. De checklist bevatte allerlei praktische overwegingen, zoals het werken naar de kerndoelen, de bijgeleverde sheets (die gebruiken we altijd), de toetsen op diskette, en we vonden het vooral een helder en eenvoudig geschreven boek, dat voor iedere belangstellingssfeer voldoende biedt.

Hoe werken jullie met het boek?

Elke keer bespreken we in de sectie een hoofdstuk voor. Het gaat dan over: welke opdrachten doen we klassikaal, welk huiswerk geven we, waar gebruiken we welk concreet materiaal.



Hebben jullie een wiskundewerklokaal?

Ja, tot onze vreugde kon er dit jaar een wiskundewerklokaal worden gerealiseerd. We hebben daar diverse materialen, in het lokaal zijn naast de deur twee linialen aangebracht, zodat de leerlingen zien dat de deur 2 meter hoog is, zijn op de vloer vierkante meters te zien, hangt aan de wand een spoorkaart (behorend bij 'Kaart en graaf'), is er een computertafel, ook een mobiele watertafel (voor inhoudsbepalingen) hebben we een vitrine met elke maand een puzzel (meestal iets in de geest van het tv-programma 'O, zit dat zo?'), en veel meer.

Kun je belangrijke ervaringen noemen?

Ja, het is voor de leerlingen niet vanzelfsprekend wat ze moeten opschrijven, daar oefen ik dus regelmatig met ze in. Ze beoordelen dan ook elkaars antwoorden. Zo leren ze bovendien beter een vraag te lezen.

En verder hoeft ik nooit meer de vraag te beantwoorden waarvoor wiskunde eigenlijk nodig is. Alles is praktisch bruikbaar.

Elke leerling kan nu na afloop van de schoolloopbaan zeggen: wiskunde heeft me toch iets geboden. Dat is het mooiste.

Martinus van Hoorn

'Rekenen in W12-16'

► Breuken, globaal!

Ed de Moor en Adri Treffers

Vraag: Wat begrijpen de leerlingen van breuken?

Antwoord: Weinig!

Vraag: Wat begrijpen wij van wat leerlingen niet begrijpen: Antwoord: Steeds meer!

Hierover gaat dit stukje, want het is onmogelijk op één Euclides-pagina samen te vatten wat er gedurende de laatste twintig jaar aan onderzoek heeft plaats gevonden op dit gebied en welke vorderingen er gemaakt zijn ten aanzien van de didactiek.

Als illustratie bij de eerste vraag geven we de volgende opgave uit een grootschalig Amerikaans onderzoek:

* $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ is ongeveer

Kies uit de volgende mogelijkheden:

a) 1; b) 2; c) 19; d) 21; e) weet niet

Slechts een kwart van de dertienjarige leerlingen kiest het goede antwoord. Ruim de helft kiest voor 19 of 21. Gelet op wat er in Nederland op het onderdeel schattend rekenen gescoord wordt, zal dit bij onze leerlingen niet veel beter zijn. Een dergelijk resultaat wijst op een enorme deficiëntie ten aanzien van het begrip van breuken als meetgetallen. De beide breuken liggen op de getallenlijn vlak bij 1, dus ... Overigens, de resultaten van het formeel opereren met eenvoudige kale breuken vallen in Nederland nog mee, zo blijkt uit de Cito-onderzoeken.

Sommige didactici pleiten er voor de breuken maar af te schaffen. Ons inziens is dit echter onmogelijk, omdat een dergelijke rigoureuze ingreep een verantwoorde opbouw van een verticale leerlijn in de weg zou staan. Met name waar het om inzicht in procenten, verhoudingen en decimale getallen gaat. Een andere vraag is echter of het mogelijk zou zijn, net als bij de decimale breuken, de nadruk van het opereren met te verplaatsen naar inzicht in de aard van de gewone breuken. Wat dit aangaat – en daarmee zijn we bij de tweede vraag van onze aanhef – wijzen we op het komende deel 3A van de 'Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool'. Daarin worden onder meer de verschillende aspecten die aan het breukbegrip kleven, besproken en in verband gebracht met de nieuwe didactische inzichten. Zo wordt afgerekend met het eenzijdige 'deelgeheel'-model, dat gelieerd is aan de breukencirkel. Uiteraard heeft dat model in bepaalde situaties zijn betekenis, maar ook de andere aspecten als 'breuk als meetgetal'; als 'operator'; breuk als resultaat van 'eerlijk verdelen', als 'verhoudingsgetal' worden nu voor het eerste in een breder perspectief geplaatst en met elkaar in verband gebracht. De didactische opbouw zal grofweg via de stadia 'context', 'model' en '(semi-)formeel' verlopen. De resultaten van voorlopig nog kleinschalig onderzoek in de klas-situatie zijn zeer bemoedigend. Een kernaspect van deze aanpak is dat breuken opgevat worden als *benoemde getallen*. Hiermee wordt de *betekenis* gegeven aan een breuk. Tevens wordt van meet af aan aandacht besteed aan het *positioneren* van de breuken *op de getallenlijn*, dus net als bij de kommagetallen: orde van grootte. De *samenhang* met de *kommagetallen* speelt daarbij een grote rol. Steeds wordt getracht de *operaties* in verband te brengen met *eenvoudige toepassingen*.

De cursiveringen geven in steekwoorden precies de kerndoelen van het basisonderwijs aan. De *formele operaties met eenvoudige breuken* behoren daar ook toe, maar voor alles geldt: ook met breuken, eerst globaal rekenen.

► Systematisch tellen (1)

1.

Op een afvaltoernooi kortebaanschaatsen wordt na 5 rondes de winnaar bekend. Dus: steeds schaatsen twee deelnemers tegen elkaar, de snelste mag naar de volgende ronde, de verliezer gaat erwtensoep eten. Hoeveel deelnemers waren er geweest toen de winnaar tot zijn opluchting merkte dat de erwtensoep op was?

2.

“Hendrik”, zegt tante Wimmie, “ik wil aan de lange muur van onze huiskamer een mooie plank om al mijn porseleinen poezebeeldjes op te zetten”. Met trouwe hondeogen sjokt oom Hendrik naar de auto, rijdt naar de Gamma, koopt de plank en de steunen om de plank te bevestigen en rijdt kalmpjes met een grote plank en steunen naar huis. Als tante Wimmie de plank ziet zegt ze: “Hoe kan je nou een blankhouten plank kopen als ik een witte muur heb?”. Oom Hendrik denkt niets, oom Hendrik gaat de plank omruilen, en komt een halfuurtje later met een witte plank thuis. Als tante Wimmie de plank ziet zegt ze: “Hendrik, hoe kan je nou een witte plank kopen met rechte hoeken? Je weet toch dat ik afgeronde hoeken wil?”. Oom Hendrik gaat gewoon rustigjes de plank ophangen. Tante Wimmie begint nog iets te zeggen over de rechterkant hoger, nee nu links wat lager, maar oom Hendrik vertrouwt alleen op de waterpas en begint onverstoorbaar aan het ophangen van de plank. Na een halfuurtje hangt de plank en daar komt tante Wimmie met haar 15 porseleinen poezebeesten. Vrolijk zegt tante Wimmie: “Nou zeg es Hendrik, met welk poezebeeld zal ik beginnen, en welke moet daarnaast?”. Oom Hendrik denkt niet aan het aantal mogelijkheden om 15 poezebeeldjes te rangschikken. Tante Wimmie is nog niet klaar met het rangschikken van de poezebeeldjes. Hoeveel mogelijke rangschikkingen kan ze maken?

► **Systematisch tellen (2)**

3.

Ergens in Zuid-Amerika kwam een nieuwe president aan de macht. De gewone mensen waren arm. Maar een president weet via belastingen veel geld bijeen te krijgen.

Zijn vrouw bekeek de garderobe van de vorige presidentsvrouw. Gelukkig hadden ze dezelfde maten. “Tjonge”, zei ze tegen haar man, de nieuwe president, “dit is niks. Ik heb bijna geen mogelijkheden om me te kleden”. Haar man keek ook even in de garderobekast en telde snel 123 paren schoenen en 254 jurken en maar 3 panties. Hij gaf zijn vrouw gelijk en bestelde 2 panties extra.

Hoeveel mogelijkheden had zijn vrouw nu extra om zich te kleden ?

4.

Een lekker saaie som: teken een assenstelsel. Op hoeveel manieren kan ik van punt $(-3,-5)$ naar punt $(2,2)$ komen ? Je mag alleen naar rechts of omhoog.

maar wat heb ik nou geleerd, hoe moet ik dat nou leren ?

► **Commentaar bij de werkbladen 'Systematisch tellen'**

Wim Schaafsma

Onderwijs geven op een gereformeerde school heeft zo zijn charmes: voor de buitenwereld zijn gereformeerden arrogante betweters die het eeuwige leven al in de broekzak hebben, intern zijn het bekwame lezers van kleine lettertjes die maling hebben aan reputaties of andere borstklapperij.

Kortom: experimenteren is leuk, maar mijn kinderen hebben recht op goed onderwijs, ze hebben recht op een goede waardering voor hun prestaties: zorg dan maar dat ze de mogelijkheden hebben op goede waardering voor hun prestaties.

Gelukkig hebben andersdenkende leraren en ouders ook zo'n houding, en dus is er op experimenteer-scholen veel nagedacht over HET PROBLEEM. Want er is natuurlijk wel een probleem:

W12-16 kan dat zo mooi formuleren: de pakketjes zijn geen echte affe voorbeelden, ze zijn richtinggevend...

Ho,ho,...., mooie woorden, maar je zal er maar lesgeven, of erger nog: leerling zijn. Ook W12-16 heeft zich dat gerealiseerd, ook 'Lelystad' (de enige echte experimenteerschool van Nederland).

Het probleem is: de pakketjes zijn(vul maar in),

Leerlingen (en soms leraren) missen het overzicht, en ze missen schaduwssommen.

Daarvoor is het het volgende bedacht (en W12-16 heeft dat overgenomen): kennen/kunnen-lijstjes. Leerlingen moeten dan zelf per bladzijde, paragraafjes, of hoofdstukken aangeven wat er van hen wordt verlangd op het gebied van vaardigheden of kennis. De leerlingen doen dat in het begin onder begeleiding, soms in groepjes, daarna soms individueel. Ze (de leraren) zijn daar heel goed in. Ik ben dat niet. Ik heb daar nog te weinig geduld voor. Ik wil leerlingen vooral schaduwssommen aanbieden. Na een pakketje probeer ik zoveel mogelijk schaduwssommen te bedenken, die bied ik aan. Goede schaduwssommen zijn sommen die in een andere context dezelfde wiskundige vaardigheden van leerlingen vragen als de eerste hoofdsommen. En als ik die heb aangeboden, dan vraag bij de begeleiding (tijdens hulp of bij het nakijken): bij welke som in het pakketje hoort deze som ?

Systematisch tellen is een leuk pakket, maar pittig. Dat merkte ik steeds weer bij repetities: lage cijfers. Ook als ik tijdens de les zelf met voorbeelden sommen van de pakketjes voorbereidde. Mondeling gebrachte voorbereidende sommen blijken dan te vluchtig. Een mavo-leerling hecht belang aan schaduwssommen op papier. Waar die rustig voor kan gaan zitten. De vraag blijft of dat tijdens het pakket moet, of als eindevaluatie... Ik doe dat aan het eind, om het onderzoekende karakter dat het nieuwe wiskundeonderwijs heeft niet teveel te ondergraven. Maar er zullen misschien goede argumenten voor een andere werkwijze zijn.

Pakketjes, maar ook de nieuwe wiskundeboeken, zijn woordrijke boeken geworden. Dat heeft zo zijn achtergronden; repetities zullen daar in ieder geval bij moeten aansluiten. Sommige pakketjes of leraren proberen het leren van de leerlingen ook nog op te vijzelen door leerlingen zelf sommen te laten bedenken. Dat streven waardeer ik, maar een dergelijk worstelen met het creatieve vermogen van leerlingen ervaar ik al genoeg tijdens mijn lessen Nederlands. Ik denk dat andere leraren met ken-

nen/kunnen-lijstjes en het zelf bedenken van sommen heel goede ervaringen hebben. Ik denk ook dat ze heel belangrijke doelen bereiken (of nastreven) met deze werkvormen. Het lukt mij nog niet. En daarom bedenk ik soms voor mijn leerlingen woordrijke contexten, maar ook schaamteloos flauwe schaduwsommen.

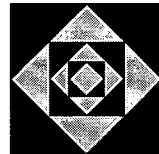
Boekbespreking

Alan J. Bishop, Stieg Mellin Olsen, Joop van Dormolen: *Mathematical Knowledge: Its Growth through Teaching*. Kluwer Academic Publishers. ISBN 0-7923-1344-5. f 130,-; 220 blz.

Een klaslokaal, leerlingen, een leraar: wiskundeles. Geen ordeproblemen. De leraar verstaat zijn vak. En dan komen de vragen. Wat gebeurt daar? Wat doen de leerlingen? Wat willen de leerlingen? Wat doet de leraar? Wat wil de leraar? Welke processen spelen zich af bij de leerlingen? En bij de leraar? Welke interacties: leraar-leerling; leerling-medeerling; leraar-leerstof; leerling-leerstof? Wat is de rol van de leraar bij de begripsvorming en wat is hierbij de rol van de leerling? Hoe worden begrippen overgedragen? Kunnen begrippen wel worden overgedragen? Waarom wiskunde? Welke wiskunde? Zegt de leerling wat de leraar wil horen? Of praat de leerling over zijn eigen wiskunde, d.w.z. de wiskunde die hij zich heeft eigen gemaakt? Wat zijn de impliciete, vaak niet uitgesproken, lesdoelen? Welke waarden spelen impliciet een rol in de wiskundeles? De wiskundeles is een sociaal gebeuren. De wiskunde is een geïntegreerd deel van onze samenleving, van onze cultuur. Kan men dan nog zeggen dat wiskunde waardevrij is? Bovendien blijken wiskunde en wiskunde-onderwijs afhankelijk te zijn van de cultuur waarin ze zich manifesteren. Zijn er ondanks die afhankelijkheid toch overeenkomsten? Vragen die gesteld worden en waarop diep wordt ingegaan in het boek 'Mathematical Knowledge: Its Growth through Teaching', dat geschreven is door de Bacometgroep. (Basic Components of Mathematics Education for Teachers). De groep is een internationaal gezelschap, waarvan de leden afkomstig zijn uit verschillende onderwijsstradities en cultures. Leden van deze groep hebben ieder een bijdrage voor dit boek geschreven. Dat leverde negen hoofdstukken op, die goed op elkaar aansluiten en daardoor een geheel vormen. Doel is het ontstaan en de groei van de wiskundekennis, zoals die plaats heeft in de klas, te benaderen vanuit de verschillende achtergronden van de schrijvers en hierdoor de kernen van dit proces bloot te leggen. De auteurs geven hiermee een belangrijke bijdrage in de onstuimige ontwikkelingen van de didactiek van de wiskunde, zoals die zich in de laatste decennia voordoen. Het boek zal daarom in de eerste plaats bestemd zijn voor didactici en lerarenopleiders.

J.J. Sloff

Mededeling



VIERKANT programma's

Wiskunde kan een plezierige intellectuele uitdaging zijn. VIERKANT wil voor jongeren mogelijkheden creëren om met echte wiskunde kennis te maken. Voor onze activiteiten verwachten we 12-16 jarige kinderen die wiskundige onderzoekingen leuk vinden en genoeg interesse hebben om daarover dieper na te denken. We vragen u en uw collega's ons te helpen door deze mededeling onder de aandacht te brengen van de kinderen in uw school.

Wiskundeclubs

Twee parallelle series van 6 wiskundeclub-middagen zullen plaats vinden in mei en juni. Op iedere clubmiddag zullen diverse leuke opdrachten en vraagstukken worden opgegeven. De kinderen zullen zelf, met hulp van de begeleider de problemen oplossen. De onderwerpen van de problemen (bijv. grafentheorie, getallentheorie) en de aanpak (veel aandacht voor de abstracte wiskundige concepten en het zelf bewijzen van stellingen) zijn geschikt om de wiskundige horizon te verbreden en vaardigheid van de deelnemers te vergroten. De onderwerpen van de diverse clubmiddagen zijn onafhankelijk van elkaar, dus het is niet noodzakelijk (maar wel raadzaam) om iedere week te komen. Er zijn twee locaties waar dezelfde programma's worden gegeven. In het Hermann Wesselink College in Amstelveen, Startbaan 3.

elke donderdag (19, 26 mei; 2, 9, 16, 23 juni)

van 15.30 tot 17.00,

contactpersoon: Dhr. C. Buissant des Amorie, tel: 020-6459751.

In het Amsterdams Lyceum in Amsterdam, Valeriusplein 15.

elke dinsdag (17, 24, 31 mei; 7, 14, 21 juni)

van 15.30 tot 17.00,

contactpersoon: Dhr. J. Colle, tel: 020-6627790.

Wiskundekamp

In de laatste week van de zomervakantie, vanaf 29 augustus zal VIERKANT een 5-daags wiskundekamp organiseren. In het kamp zullen diverse wiskundige programma's aangeboden worden: natuurlijk het oplossen van spannende vraagstukken: eigen onderzoek over thema's zoals de gulden snede of oneindigheid. Er zal een 'computer lab' beschikbaar zijn, waarin de kinderen zelf kunstwerken kunnen ontwerpen met behulp van de computer, ter visualisatie van wiskundige concepten (bijv. symmetrie, fractals). De onderzoeks-activiteiten (ca. 5 uur per dag) zullen worden aangevuld met lezingen, spelletjes en sportactiviteiten. Verdere informatie en aanmeldingsformulieren zijn te verkrijgen bij het onderstaande adres van VIERKANT.

dr. Zsófia Ruttkay, vice-voorzitter VIERKANT

Faculteit Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit Amsterdam

De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam

Tel: 020-5485782 of 035-561192

► Ervaringen met het softwarepakket DRAAD*

H.A. Heijmans

Ruim twee jaar werk ik als docent wiskunde in de bovenbouw vwo bij de lessen ruimtemeetkunde met het pakket DRAAD. Voor de docent die over de juiste technische hulpmiddelen zoals een pc met voldoende groot scherm (overhead of grootbeeld TV) beschikt, kan het programma voor een deel een vervanging van het aloude krijtbord betekenen, een dynamische vervanging met meer mogelijkheden dan het statische bord. Menig collega zal de situatie aan het begin van een les kennen, wanneer het opgegeven huiswerk, bestaande uit enige opgaven ruimtemeetkunde, besproken dient te worden. De leerlingen hebben de tekeningen al kant en klaar in hun schrift, de docent moet ze allemaal nog op het bord tekenen. Arbeidsintensieve minuten voor de docent, waarbij de leerlingen werkeloos toezien. DRAAD maakt het mogelijk deze ruimtefiguren thuis op de pc aan te maken, zodat ze direct voor gebruik in de les gereed zijn.

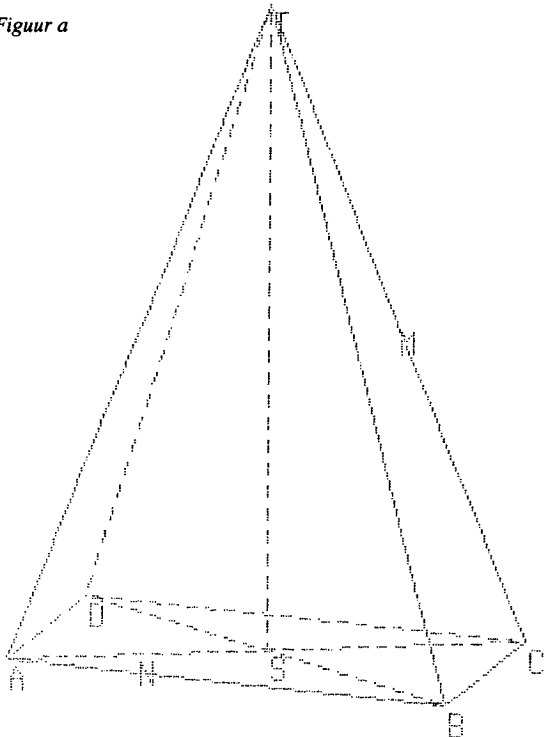
Zelf heb ik bij alle van toepassingen zijnde opgaven uit de door ons al 22 jaar gebruikte methode Getal en Ruimte de tekeningen in DRAAD gemaakt en op de harde schijf van de in mijn vaste lokaal opgestelde pc gezet. Zodoende zijn ze op elk gewenst moment op te roepen door de afdeling (havo of vwo), het hoofdstuk en het nummer van de opgave in te toetsen. Het aanmaken van ruimtefiguren gaat

met DRAAD op een bijzonder eenvoudige wijze. Men definieert hoekpunten via hun coördinaten en lijnstukken via hun eindpunten. Ook kan men de kleur van elk lijnstuk kiezen. Hierbij biedt een VGA-scherm waarover ik thuis beschik uiteraard meer mogelijkheden dan het CGA-scherm op mijn TV in de klas. Met deze kleuren kan men bepaalde doorsneden van zekere vlakken met de ruimtefiguur accentueren. Is de docent tevreden met de aange maakte figuur, dan wordt het plaatje opgeslagen onder een herkenbare naam, bijv. OPG25 of OPG27A.

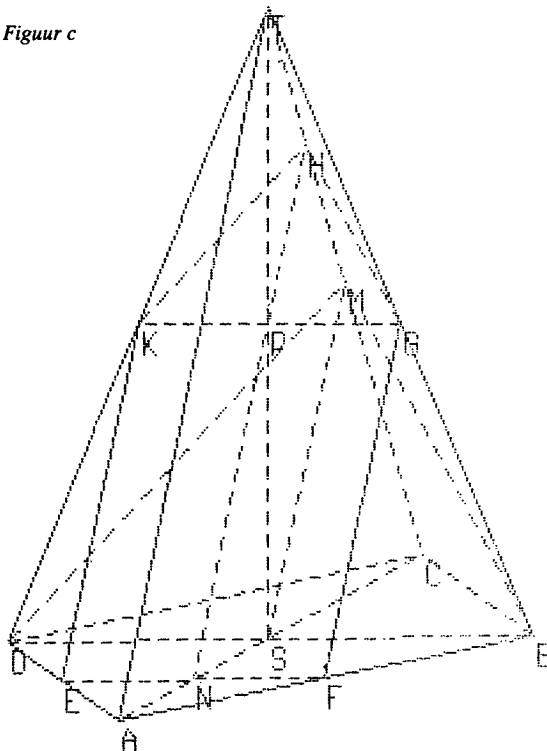
Begin je in de les aan een zekere opgave, dan heb je met een paar toetsaanslagen de bijbehorende figuur op het scherm. Deze kun je op verschillende manieren presenteren: met of zonder coördinaatassen, met of zonder letters bij de hoekpunten, als massieve figuur of als draadmodel of de meer voorkomende situatie daar tussenin met onzichtbare lijnstukken gestippeld. Daarna komt naar mijn idee een van de grootste voordelen van DRAAD: je kunt de figuur wentelen rond x-as, y-as of z-as, over ieder veelvoud van 5° . Is een zekere doorsnede niet goed zichtbaar dan draai je net zo lang totdat je de optimale kijkhoek gevonden hebt. Zo heb ik ooit een klas ervan kunnen overtuigen dat een doorsnede een scheef parallellogram bevatte, waar ze uit de tekening in het boek het sterke vermoeden hadden dat het een rechthoek betrof (Getal en Ruimte deel 5/6V-B3 algemene herhaling, blz. 152 opgave 7). Draai gewoon net zo lang tot je recht tegen de doorsnede aankijkt. Ook heb ik zo mijn collega in 5 havo de oplossing kunnen geven van de beruchte laatste opgave (17) van het havo-wiskunde B-examen, eerste tijdvak 1992 (het snoepspotje). Draai maar met DRAAD en kijk wat je dan ziet!

Om iets van DRAAD te laten zien zijn van beide genoemde opgaven enkele plaatjes van met dit programma gemaakte schermbeelden afgedrukt. Figuur a toont het begin van de opgave uit Getal en Ruimte: Gegeven piramide T ABCD. ABCD is een rechthoek met $AB = 8$ en $BC = 4$. De hoogte $TS = 10$. V is het vlak door B, D en het midden van M van CT. W is het vlak door het midden N van AS en evenwijdig met V. Teken de doorsnede van W met de piramide en bereken de oppervlakte van deze doorsnede.

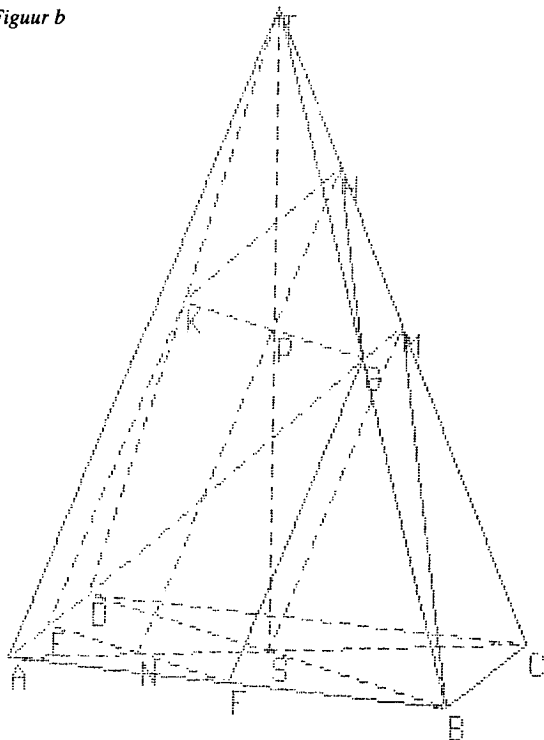
Figuur a



Figuur c



Figuur b



Figuur b toont de doorsneden van V en W met de piramide. EFGK leek hierbij voor veel leerlingen op een rechthoek. Bij draaiing van de piramide (figuur c) blijkt dat niet zo te zijn.

Voor een andere tijdrovende bezigheid, het tekenen van een volledige of gedeeltelijke (op één i.p.v. drie coördinaatvlakken) drievlaksprojectie van een ruimtefiguur, is DRAAD ook prettig gereedschap. Kies 'projecteren' uit het hoofdmenu en 'alle' of een enkel coördinaatvlak. Nadeel hierbij is dat de letters bij twee samenvallende punten ook over elkaar vallen, hetgeen de leesbaarheid niet ten goede komt. Schakel in zulke gevallen de optie 'letters' uit.

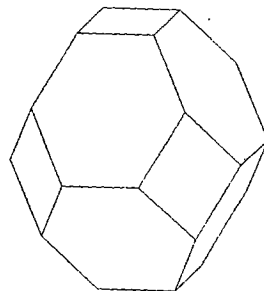
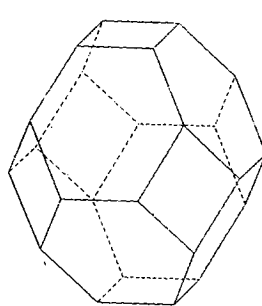
Met de optie 'schaal' uit het hoofdmenu kan de figuur ook nog vergroot of verkleind worden.

Het programma biedt nog meer mogelijkheden dan de hierboven genoemde opties. Uiteraard is een schermafdruck op de printer mogelijk. Een duidelijke handleiding wordt meegeleverd, evenals een aantal reeds kant-en-klare ruimtefiguren op schijf.

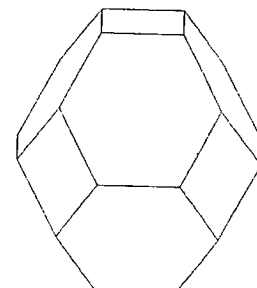
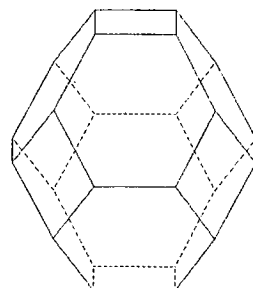
In de laatste opgave (4) van het eerste landelijke examen havo wiskunde B wordt een octaëder veranderd in een halfregelmatig veertienvlak, dat na kanteling een snoeppotje oplevert. Getekend moest worden het bovenaanzicht van dit snoeppotje. Een lastige opgave, niet alleen voor de leerlingen. Met DRAAD voer je de coördinaten van de hoekpunten en de namen van de ribben in en je gaat dan draaien tot je het juiste aanzicht hebt. Je begint bijvoorbeeld met de stand van figuur 8 van het examen (zie figuren d en e), draait dit een beetje (figuren f en g), kantelt het zodat een zesvlak onder komt (figuren h en i, dit is het snoeppotje) en draait tenslotte tot je recht tegen de bovenkant aankijkt (figuren j en k). Figuur k geeft de oplossing van het probleem.

Ook voor docenten die over een overheadprojector beschikken en met sheets werken biedt DRAAD voordelen. Het programma is dynamisch, laat figuren draaien. Sheets zijn statisch. Een verandering van kijkhoek zoals hiervoor gedemonstreerd met het snoeppotje, is met DRAAD onbeperkt mogelijk en kost slechts de eenmalige aanmaak van één figuur. Een animatie met sheets is erg arbeidsintensief en lang niet zo mooi. Denk ook aan de opslag. Honderden dynamisch te veranderen figuren op één schijfje of duizenden in kast of tas gepropte sheets.

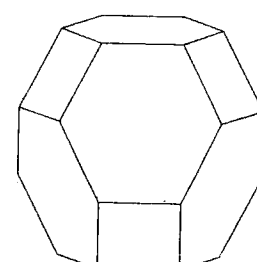
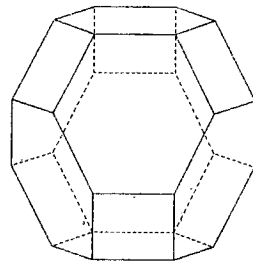
Tot zover de voordelen voor een docent die snel even een ruimtefiguur wil laten zien, eventueel vanuit verschillende gezichtspunten bekeken. Het programma is zeker niet een volledige vervanging van het bord, slechts een extra, tijdbesparend hulpmiddel. Wil je de leerlingen laten zien hoe een tekening lijnstuk na lijnstuk opgebouwd wordt, dan moet je dat nog op de ouderwetse manier op het bord laten zien. Of DRAAD geeft je de complete figuur en je zet de toelichting (1. trek lijn PQ; 2. bepaal het snijpunt R van de lijnen PQ en AB, etc.) op het bord. Het bord is ook onmisbaar bij alle bij de opgave behorende berekeningen. DRAAD blijft niet meer dan een extra hulpmiddel, dat ik wel in de loop van twee jaar heb waarden als een plezierig en tijdbesparend instrument.



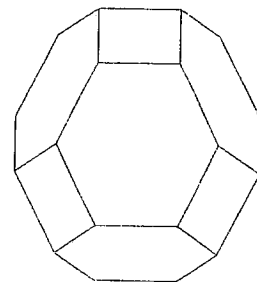
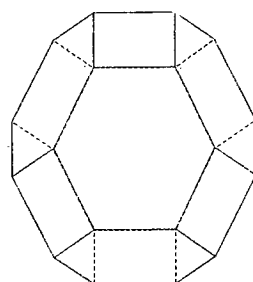
Figuren d en e



Figuren f en g



Figuren h en i



Figuren j en k

Een beperking van DRAAD is dat er uitsluitend met rechte lijnen gewerkt kan worden. Ruimtekrommen, cilinders, kegels, bollen, ook deze zou ik graag in mijn figuren verwerken. Dit gaat helaas niet.

Wat ik verder in DRAAD mis, is de mogelijkheid om de aangemaakte ruimtefiguren aan afbeeldingen te onderwerpen zoals translaties, rotaties, spiegelingen en puntvermenigvuldigingen. De eerder genoemde draaimogelijkheid rond x -, y - of z -as is geen echte rotatie, aangezien het hele coördinatenstelsel meedraait. Het is alleen een verandering van kijkrichting.

Het zou ook prettig zijn als je op ieder detail van de tekening zou kunnen inzoomen. Nu kun je via de optie schaal alleen inzoomen op de oorsprong.

Voor gebruik door leerlingen zie ik bij DRAAD minder mogelijkheden. Je kunt ze een uurtje enige figuren laten maken, maar ze leren er mijns inziens weinig mee dat ze bij het oplossen van examenopgaven van nut is. Bij het examen staan al kant en klare ruimtefiguren getekend en bij het constructiewerk dat dan nog van hen gevraagd wordt biedt DRAAD geen voordelen.

Wie een goed oefenprogramma voor leerlingen zoekt over het construeren van doorsneden kan ik Ruimte-Meetkunde aanbevelen, van dezelfde uitgever als DRAAD.

* Een programma van H. Spek; uitgeverij Visiria, Lopik.

● 40 jaar geleden ● ●

► Vraagstukken

872. In de gelijkzijdige driehoek ABC is O het midden van de basis AB . Men tekent in de driehoek de halve cirkel met O als middelpunt, die raak t aan de opstaande zijden AC en BC . Daarna laat men de figuur om CO als as wentelen.

Een vlak V , evenwijdig met het grondvlak van de ontstane kegel, snijdt de as OC in het punt M . Van de cirkeldoorsnijding, die dit vlak met de kegel geeft, beschouwt men steeds het gedeelte, dat buiten de bol is gelegen.

Als de straal van de cirkel 1 is en $OM = x$ gesteld wordt, druk dan de oppervlakte van het genoemde gedeelte in x uit. Stel het verloop van de waarden, die men voor de oppervlakte vindt, als M het lijnstuk OC doorloopt, grafisch voor.

Wat is x , als de oppervlakte gelijk is aan $\frac{1}{3}\pi k^2$?

Bij een bepaalde waarde van k vindt men drie waarden door x , corresponderende met 3 verschillende vlakken V . Kies k zo, dat een dezer vlakken gelijke afstanden heeft tot de beide andere vlakken.

873. Van het lijnstuk $\overline{AB}$ is het punt I het midden. Het vlak V gaat door I en staat loodrecht op AB . Verder is een punt S gegeven; de afstand van S tot vlak V is h (> 0); de lengte van $SI = a$.

Men beschouwt de door S gaande rechten l , die zo gelegen zijn, dat de afstand van A tot l gelijk is aan de afstand van B tot l . Bepaal de meetkundige plaats van de snijpunten M van deze rechten met het vlak V .

Als S' de projectie van S op vlak V voorstelt en M is het snijpunt van een rechte l met V , waarbij $SM = x$ is, bepaal x dan zo, dat de inhoud van het viervlak $SS'MI$ maximaal is.

875. Van $\triangle ABC$ is gegeven: $O = 215$; $h_c = 12$; $\angle A - \angle B = 33^\circ 26' 16''$.

Bereken de onbekende elementen.

Vraagstukken uit Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 41 (1953-1954)

► 'Leraren die de wiskundekar in tegengestelde richting trekken'

Een studiemiddag op een vrijdag in januari over wiskundeonderwijs in de basisvorming

Wim Schaafsma

De uitnodiging voor deze studiemiddag kreeg ik op drie manieren: op naam via school, op naam thuis en via Euclides. Dat geeft te denken, in ieder geval: dat mocht ik blijkbaar niet missen. Gelukkig vond de conrector dat ook, en ik mocht zomaar op een schooldag naar het nieuwe APS-gebouw op een steenworp afstand van station Utrecht-Lunetten.

Mij wachtte, zo was het voornemen geformuleerd in de uitnodiging, een 'evaluatieve terugblik' op 'een tamelijk unieke ontwikkeling'. Met deze ontwikkeling wordt de stormachtige ontwikkeling bedoeld die het wiskundeonderwijs sinds de jaren zeventig heeft beleefd. En dan de aanleiding tot deze studiemiddag, ook niet mis: de aanbieding van een nieuwe 'didactiekbijbel' ⁽¹⁾, geschreven door Bram Lagerwerf.

Halverwege de zeventiger jaren was er in het onderwijs van het vak Nederlands ook sprake van zo'n tamelijk unieke ontwikkeling in wat toen moedertaalonderwijs heette en toen was er ook zo'n 'didactiekbijbel' ⁽²⁾. De sectie Nederlands was in die tijd

op onze school vrijwel de enige die meer dan één keer per jaar vergaderde (de wiskundesectie was de andere: zij vergaderde twee keer per jaar), en heeft van dat boek maandelijks een hoofdstuk besproken. Elke leraar moest een keer een hoofdstuk voorbereiden, en per maand werden zijn conclusies besproken. Die discussies hadden geen directe invloed op de lessen Nederlands, maar op langere termijn zijn er nogal wat veranderingen ten goede doorgevoerd (ook in mijn lessen), onder invloed van deze discussies. Een 'didactische ruggesteun' kan dus zeker zijn nut afwerpen.

Maar deze bijeenkomst was niet gericht op de gewone wiskundeleraren: zo'n honderdtal bekenden uit het wiskundewereldje konden luisteren naar meer toespraken dan de uitnodiging had vermeld. En van het gesprokene ging veel over de thema's: de didactiek, de vernieuwing, de leraar en de didactiek van de vernieuwing. Deze bijeenkomst was er voor de vernieuwers...

Joop van Dormolen, door Marja Meeder ⁽³⁾ aangekondigd als 'de nestor van het wiskundeonderwijs' gaf dat ook al aan: 'ik voel me als een dominee die weigert te preken. Degenen die het gebodene niet willen aannemen, zijn toch verloren. Degenen die het gebodene aangenomen hebben, hebben de kennis al'. Maar steeds kwam in zijn toespraak terug: 'koop het boek!'. Naast enige kritiek op Lagerwerfs boek noemde hij als grootste voordeel dat we nu 'theorie achter de praktijkvoorbeelden hebben'. En Lagerwerf laat volgens Van Dormolen zien dat contexten niet vertroebelen, maar dat contexten leiden, via overeenkomstige structuurherkenning (beeldniveau) en schaniveau, tot theorievorming. Lagerwerf heeft oude theorieën rond contexten geherstructureerd voor het huidige wiskundeonderwijs in de basisvorming. Nog maar zes maanden Bavo en nu al een didactiekboek...

Drs. J.C.J. van Luyn ⁽⁴⁾, zeker geen onbekende in het wiskundewereldje gezien zijn optreden op de methodekeuzeconferenties (Utrecht, Dalfsen), liet volgens Marja Meeder in zijn toespraak 'een warme menselijke kant' zien. J. van Luyn: 'Het onderwijs is een proces tussen mensen. En het aardige is: mensen zijn onvoorspelbaar'. Met groot sprekerstalent

werden meer van dit soort voorspelbare kreten geuit, we hadden ze al eens gehoord. Een toehoorder vond dat blijkbaar ook en wilde via een vraag het een en ander uitgewerkt zien. Maar helaas, het tijdschema liet dat niet toe, blijkbaar werd er niet aan 'onderwijs als onvoorspelbaar proces' gedaan.

Prof.dr. N.A.J. Lagerweij ⁽⁵⁾ probeerde via 'kritisch' ondervragen van (zo zegt de uitnodiging) drie mensen die al lang nauw betrokken zijn bij het ontwikkelingsproces van het wiskundeonderwijs in Nederland ⁽⁶⁾, wel het een en ander verduidelijkt te zien.

En dan komen er, mits deze werkvorm goed wordt gehanteerd, toch meer dan algemene kreten.

Bij zijn vragen stond steeds centraal: het onderwijs vernieuwt, hoe krijg je het onderwijs mee?

'De basisschool lijkt op een mislukking uit te lopen voor rekenen, wiskunde, en taal, gezien de persberichten, hoe gaan jullie dat oplossen of hebben jullie dat opgelost in de basisvorming?'.

Jan de Lange verwacht over tien jaar dezelfde resultaten met betrekking tot de basisvorming. Onderwijsverbetering is meer dan alleen maar nieuw materiaal aanbieden.

Henk Staal constateert dat de leraar 't zelf moet doen, maar zet vooral vraagtekens bij de validiteit van de toetsing van de resultaten.

Hans Pouw wijst op het belang van de positie van enkele proefscholen al in het vroege begin van het experiment.

'Men wil wel veranderen, maar men wil niet veranderd worden'.

Hoe hebben jullie dat opgelost? Even verderop in het vraaggesprek laat hij op de overheadprojector een sheet zien van een 'paard-en-wagen-kar': de kar wordt voorwaarts getrokken door een jonge enthousiaste (vernieuwingsgezinde) leraar, oudere leraren pogen de kar in allerlei vertragende richtingen te sturen.

Jan de Lange: Ik heb geen verstand van nascholing, maar er wordt te weinig gedaan aan begeleiding van onderwijsgeveenden. In 't buitenland is de nascholing beter georganiseerd: 1. tijdens kantooruren. 2. betaald. 3. met recht op promotie.

Henk Staal: Door bundeling van de organisatie van de nascholing komen er goede produkten op de markt. Als eenling in de opleiding in Amsterdam had ik dat soort materiaal nooit kunnen ontwikkelen.

Hans Pouw: Door de invoering van het sectie-abonnement hebben we gepoogd de hele sectie dezelfde richting op te laten koersen.

Jan de Lange wijst dan nog op een drietal niet onbelangrijke punten: er is nauwelijks onderzoek gedaan naar problemen die leraren tegenkomen bij vernieuwing (volgens hem een lijst van tenminste dertig problemen), het probleem van het maken van toetsen, en als laatste: '... onderwijs moet anders worden dan voorbereiden op 't eindexamen'.

Henk Staal vindt tenslotte nog dat er helemaal geen tegenstelling is tussen vernieuwing en wat een sectie wil. Er is een groot draagvlak voor de vernieuwing (Jan de Lange had al eerder gezegd: 'Er is maar één uniformiteit in het onderwijs: wat er is, dat is niks'). De Wageningse Methode bijvoorbeeld is uit het onderwijs zelf voortgekomen.

Later komt in dit simultaan-interview toch naar voren dat de leraren wel gedwongen moeten worden tot vernieuwing via harde instrumenten als toetsen Bavo en eindexamens. Wat bij Lagerweij dan tot zijn conclusie leidt: 'Ik tref hier een optimistisch klimaat over vernieuwing. Ik heb daarin een groot wantrouwen: veranderen is een probleem, niet-veranderen is prettig'. Waarop Jan de Lange niet kan nalaten te concluderen: wiskundeonderwijs in Nederland is traditiegetrouw vooruitstrevend. Behalve een kleine groep in het eerstegraadsgebied. Deze zal op een eilandje proberen zich te onttrekken aan elke vernieuwing.

Nadat Bram Lagerwerf nog enkele korte beschrijvingen geeft van de pijn van het schrijven, en vervolgens komt tot de gebruikelijke dankwoorden volgen nog twee verrassingen: de aanbieding van het boek gaat zeker niet geruisloos. Ook de directeur van het APS (dhr G.van den Hoven) en dr. L.S.J.M. Henkens, directeur VO van het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen, halen in blesuretijd nog uit met kloeke verhalen.

Vooral de laatste spreker zal de vernieuwingsafkerige leraar hebben kunnen doen gruwen. Eerst kwamen er nog kietelende uitspraken als:

- 'Wiskunde heeft betekenis voor de persoonlijke vorming van de leerling. Het speelt een bepalende rol bij de studie- en beroepskeuze'.

- 'In een zich ontwikkelende informatiemaatschappij met hoogwaardige technologie als belangrijke economische factor is wiskunde een *hoeksteen in het onderwijs*'.

- 'Het is van groot belang dat de instroom naar de B-studierichtingen niet stagneert'.

'Wiskunde A is teveel een meisjesvak....verlies aan potentieel talent'.

- 'Op dit moment is vernieuwing van wiskundeonderwijs in ons land in feite nog teveel afhankelijk van toevalligheden, het zou niet een ad hoc, maar een *continu* en een gestructureerd proces moeten zijn..'

Na het wijzen op de ontwikkelingen van het Profiel Onderwijs in de Tweede Fase, de introductie van doorstroomprofielen in de bovenbouw van het mavo/vbo, komen de uitsmijters:

- 'Deze ontwikkelingen vormen een goed startpunt voor een meer structurele aanpak van *inhoudelijke* vernieuwingen over de hele linie. Om de examenprogramma's actueel te houden zal een systematisch herzieningsproces moeten worden opgezet. Er zal moeten worden nagedacht over de organisatie van *continue* herziening'.

Bij het Freudenthal instituut en het APS zal men deze uitspraken met genoegen hebben beluisterd: brood op de plank.

(*1) Bram Lagerwerf, *Wiskundeonderwijs in de basisvorming*, Een didactische ruggeleuning voor wiskundeleraars. Groningen, 1994.

(*2) Jan Griffioen, *Zeggen-schap*, Grondslagen en een uitwerking van een didactiek van het Nederlands in het voortgezet onderwijs. Groningen, 1975.

(*3) Marja Meeder, coördinator wiskunde, APS.

(*4) Drs.J.C.J.van Luyn, Procesmanagement Basisvorming.

(*5) Prof.dr.N.A.J.Lagerwerf, hoogleraar vakgroep Onderwijskunde, Rijksuniversiteit Utrecht.

(*6) Prof.dr.Jan de Lange, hoogleraar-directeur Freudenthal instituut, Rijksuniversiteit Utrecht.

(*7) Henk Staal, verbonden aan de lerarenopleiding van de Hogeschool Amsterdam.

(*8) Hans Pouw, coördinator voortgezet onderwijs, APS.

► Wiskunde en computers toegepast

Bert Zwaneveld

Begin januari, op het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap, vertelden drie wiskundigen hoe zij in hun werk (bij het RIVM, Joh. Enschede en het KNMI) met wiskunde omgaan.

Wiskunde bij het RIVM: van keuken tot oceaan

De eerste spreker was O. Klepper. Bij het RIVM (Rijks Instituut voor Volksgezondheid en Milieuhygiëne) is er geen duidelijke scheiding tussen de taken van de *onderzoeker*, die in het veld zijn metingen doet, de *wiskundige*, die abstracte modellen probeert op te stellen, en de *beleidsmaker*, die beslissingen baseert op wetenschappelijk verantwoorde uitkomsten.

Hij illustreerde dit met twee voorbeelden: de vorming van stikstofdioxide bij het aansteken van een gasfornuis, en de opname van kooldioxide door de oceanen. Bij het eerste gaat het om de vele kortstondige hoge concentraties kort na elkaar, die giftig kunnen zijn. Er wordt gezocht naar een model waarmee de effecten van maatregelen als ventilatie en aansluiten op een schoorsteen bestudeerd kunnen worden. Bij het tweede voorbeeld gaat het om een langdurig proces, dat gezien het broeikaseffect van

mondiaal belang is. Hierbij is modelmatig onderzocht wat de invloed is van de opname van kool-dioxide door organismen die in de oceaan leven.

In dit verslag wordt niet op de wiskundige achtergronden ingegaan. Vermeldenswaard is dat de gebruikte wiskunde bij beide voorbeelden beperkt is: wat differentiaalvergelijkingen, lineaire algebra en kansrekening en statistiek. Nog opvallender is dat er wiskundig gezien maar heel beperkt analytisch/algebraïsch wordt gewerkt, er is wel een model, maar bij het uitwerken wordt het werk door de computer gedaan.

Joh. Enschede, drukker van het Nederlandse geld

De tweede spreker was S. Spannenburg, die over het probleem van de kleurkopieerapparaten voor de gelddrukkers vertelde. Producenten van waardepapieren hebben de ontwikkeling van de *digital full colour copiers* met lood in de schoenen zien aankomen. Maar die ontwikkeling is niet tegen te houden. De kwaliteit van de apparaten lijkt dusdanig dat er geen kruid tegen gewassen is. Met betrekkelijk eenvoudige wiskundige modellen, met name Fouriertransformaties, kunnen echter fundamentele verschillen tussen menselijke waarneming en digitaal scannen (kopiëren) worden aangetoond. Deze verschillen kunnen zo uitgebuit worden dat scanner en mens niet noodzakelijk dezelfde beelden waarnemen.

De essentie van de ontwikkelde methode is dat aan het originele waardepapier extra informatie wordt toegevoegd, die voor het menselijk oog onzichtbaar is. Bij het kopiëren wordt de extra informatie zichtbaar. Dat kan tot uiting komen in het door elkaar lopen van kleuren, of zelfs in het weergeven van volledig andere beelden.

Het werk van de wiskundige bij Joh. Enschedé is wat theoretischer van aard dan bij het RIVM, maar ook hier is de gebruikte wiskunde betrekkelijk eenvoudig, Fouriertransformaties en lineaire algebra, en ook hier wordt het zware werk door de computer uitgevoerd. In dit speciale geval komt er ook nog heel wat experimenteren bij.

De kwaliteit van de meerdaagse weersvoorspellingen van het KNMI

De laatste spreker was J. Barkmeijer van het KNMI. Het is algemeen bekend dat het voorspellen van het weer geen sinecure is. Een voorspelling kan na een week nog een goede kwaliteit hebben, maar net zo goed al na een dag volstrekt onbruikbaar zijn. Eén van de oorzaken hiervan is de *gevoelige afhankelijkheid van de begincondities*.

Toch bestaat de mogelijkheid om in een onvoorspelbaar lijkende situatie nog iets te zeggen over de betrouwbaarheid van een voorspelling. Met een efficiënte techniek kunnen foutjes in de begincondities worden opgespoord; deze kleine foutjes kunnen tot grote fouten in de voorspelling leiden.

Wiskundig gezien wordt het weer als volgt voorspeld. Er is een aantal gekoppelde differentiaalvergelijkingen waarin de relevante variabelen voorkomen, zoals luchtdruk en temperatuur. De metingen die dagelijks worden gedaan zijn de beginvoorwaarden bij dit stelsel. Het aantal metingen dat over de hele wereld wordt gedaan is bijzonder groot. De meeste Europese landen laten het stelsel voor hun land op numerieke wijze, op een supercomputer, oplossen.

De foutengroei wordt op een aantal manieren bekeken. Voor de voorspelling tot drie dagen wordt een lineaire foutengroei aangenomen, dat wil zeggen dat de fout te schatten is met een macht van de matrix waarin de fouten worden opgeslagen. Vooraf is dan aardig goed te berekenen binnen welke marges de waarden van de voorspelde variabelen zullen liggen. Voor voorspellingen voor een langere duur is de foutengroei zeker niet meer lineair. Om toch iets te kunnen zeggen worden simulaties gemaakt waarbij bewust verstoringen in de begincondities worden aangebracht. Leiden de simulaties bij vrijwel alle verstoorde begincondities tot hetzelfde weertype, dan zegt men op statistische gronden dat een redelijk betrouwbare voorspelling mogelijk is.

Nu had men op deze wijze het weer voor de dag na de lezingen voorspeld. En alle simulaties wezen op regenweer. Helaas (!): het werd een voor begin januari schitterende zondag.

► **Impressies van een regionale bijeenkomst**

M.C. van Hoorn

Ruim 100 docenten, een aantal bestuursleden, discussieleiders of inleiders, verzamelden zich op 22 februari van 16 tot 20 uur op een lokatie te Zwolle. Eerst was er een welkomstwoord van de voorzitter. Daarna gingen de aanwezigen uiteen naar vier lokalen, waar de aangekondigde thema's aan de orde kwamen.

Voor de pauze bezocht ik de werkgroep wiskunde B-vwo. Jan van Maanen en Jeanne Breeman leidden de onderwerpen in, daarna ontstond een goede discussie.

- moet elk programma-onderdeel nuttig zijn voor later? (over ruimtemeetkunde die nergens wordt gevraagd);
 - bewijzen en redeneren: méér daarvan, dat vindt iedereen, maar hoe? Alleen enkele voorbeelden, of een hele axiomatic?
 - weg met de differentiaalvergelijkingen, althans op de wijze waarop ze nu worden onderwezen;
 - welke B-wiskunde willen we in het nieuwe profiel Natuur & Techniek? en in het profiel Natuur & Gezondheid?
 - welke wiskunde is nodig voor een aanstaand bioloog of een aanstaand econoom?
- Uiteraard is er nog weinig definitiefs te zeggen. Jan van Maanen besluit met een citaat uit NRC-

Handelsblad (Rob Knoppert, 21 februari 1994): 'Harnas van profielen lost niets op'. Zou deze auteur gelijk hebben?

Na de pauze heb ik me hoofdzakelijk verveeld, bij een APS-werkgroep over toetsing van de basisvorming. Met deze toetsing is het een en ander mis: kwalitatief niet in orde (= algemene mening), qua doelstelling niet helder, organisatorisch ongeregeld. Maar, wordt gezegd, de Tweede Kamer wil zo'n toetsing. Het Cito kan daar, zegt het Cito, niets aan doen. Het Cito heeft alleen maar aan de Minister geadviseerd het zo te doen. Enfin, het bekende verhaal. Ook de discussieleidster vertrouwt het Cito niet. Helaas heeft ze weinig tijd gehad zich op de discussie voor te bereiden. In arren moede begint ze zelfs met een oubollige meerkeuze-enquête, waarmee ook al de deelnemers aan de Koppelconferenties (januari/februari 1994) werden bezig gehouden. Jammer, jammer.

Inmiddels heeft het APS de zorgen over de toetsen voor de basisvorming neergelegd in een uitvoerige notitie, die gestuurd is naar het Cito, de NVvW, de inspectie, de Cevo, het Procesmanagement Basisvorming, de SLO, het Freudenthal instituut en zijn huisorgaan, en ook naar Euclides. Zodoende kan ik er bij dezen over berichten.

Het APS heeft volkomen gelijk met deze actie. In de notitie wordt onder meer een gedeelte gebruikt uit het artikel van Bram van der Wal (Euclides 69-4, december 1993), overigens zonder dat deze bron vermeld wordt. Maar misschien heeft men op het APS dezelfde conclusie getrokken als Bram van der Wal.

Terug naar de regionale bijeenkomst. Ondanks de vermelde kritiek op een onderdeel van het programma meen ik dat de NVvW met het organiseren van zulke bijeenkomsten een uitstekende greep heeft gedaan. Qua idee, opzet en organisatie: voortreffelijk.

Uit de evaluatie is vast wel gebleken dat niet elk onderdeel even geslaagd was. Volgende bijeenkomsten kunnen dus alleen nog maar beter zijn!

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

► Opgave 654

Onlangs verscheen 'Breinbrekers' (1993, Kosmos - Z&K Uitgevers, Utrecht/Antwerpen) van David Wells. De ondertitel dekt volledig de lading: 'Uitdagende en leerzame doordenkpuzzels voor iedereen'.

Een uiterst nuttig boek voor een laatste les voor de vakantie. Leerlingen zullen er veel plezier aan beleven!

Ook reeksen, onder de titel 'Volgende letter, alstublieft' ontbreken niet. Helaas is het de bekende ETDVVZZAN oftewel Een, Twee, Drie, ... De volgende letter is dus een T. Minder vaak kom je de reeks HTDVVZZAN tegen. Dit is Honderd, Tweehonderd, Driehonderd, ... Dus in dit geval is de volgende letter een D!!!

Ditmaal heb ik vijf reeksen in de puzzelmand liggen. Wat is het logische verband in elke reeks en hoe worden ze dan vervolgd? Het is me bekend dat elke getallenreeks vervolgd kan worden met elk willekeurig getal door er een n -de graads functie van te maken (met n voldoende groot). Dit soort oplossingen tellen niet. Neen, in elke reeks is er een echt *logisch* verband tussen de termen. Hier komen ze. Succes!

(1) 12 - 1 - 1 - 1 - 2 - 1 - ...

(2) 1 - 2 - 7 - 12 - 13 - 14 - ...

(3) 5 - 8 - 12 - 20 - 50 - 80 - ...

(4) E - WE - RI - IE - IJ - E - ...

(5) HULP - NATUUR - WERELD - RANG - COLONNE - ZINTUIG - ...

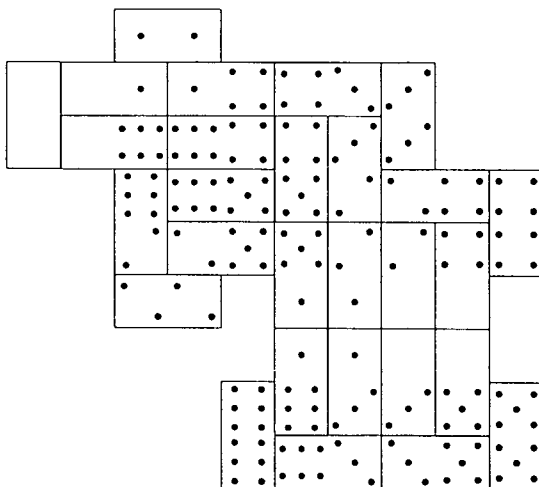
Voor elke juiste reeks 1 punt voor de ladder.

Inzending graag binnen 1 maand na verschijning.

De naam prof.dr. Frederik Schuh (7 februari 1875 -- 6 januari 1966) bracht bij sommige lezers dierbare herinneringen boven:

'Van Boetzelaerlaan 28, Den Haag, samen deden we een spel, wat had hij een collectie boeken, vooral veel puzzelboeken ... Hij was razend snel, loste alles op ... soms moesten we stoppen, dan kwamen er studenten, ...', zo begint *Hans Verdonk* (14), Den Haag, zijn brief.

Er moest een quadrille gelegd worden met de 28 stenen van een dominospel. Verdeel de figuur eerst in vierkanten van vier velden. De 'dubbelen' liggen nu aan de zijkant. De contouren van de stenen vormen bij zo'n dubbele de letter T. Noem de zeven 'buitenkanten' dubbel nul t/m dubbel zes. (Dit kan op 7! manieren.) Intern vormen de contouren van de stenen in zo'n vierkant van vier dezelfde velden een kruis. De ligging van de stenen ligt nu vast. De nummering van de zeven interne vierkanten van vier velden is door redeneren snel te vinden. Dan blijkt dat er maar 1 unieke oplossing is. De volgende oplossing is van de prijswinnaar. Veel dank voor deze mooie tekening met echte dominostenen.



'Zijn er nog meer oplossingen Hans' zou Fred me gevraagd hebben ... Hij ging altijd maar door, zo beëindigt Hans Verdonk zijn brief!

Met 52 punten is de prijswinnaar:

Jacques Haubrich

Aeneaslaan 21

5631 LA Eindhoven

De boekenbon van f 25,- is je van harte gegund!



► Van de bestuurstafel

Marian Kollenveld

Platform VVVO

Sinds enige tijd participeert de NVvW in het Platform van Vakinhoudelijke Verenigingen in het Voortgezet Onderwijs. Het platform wordt gevormd door de diverse verenigingen van de vakken in het voortgezet onderwijs. Inmiddels zijn bijna alle vakken vertegenwoordigd. In het platform overleggen bestuursleden (of hun vertegenwoordigers) van de diverse verenigingen over onderwerpen in het voortgezet onderwijs die het eigen vakgebied overstijgen en waarbij het van belang kan zijn de krachten te bundelen om op die wijze meer te bereiken dan voor elke vereniging apart mogelijk zou zijn. Het platform is ook een geaccepteerde gesprekspartner op het ministerie van onderwijs, waar twee keer per jaar, in maart en oktober, overleg plaatsvindt. Het platform onderhoudt onder meer contacten met het Project Management Basisvorming en de Stichting Leerplan Ontwikkeling. Er is overleg over de nascholing en de mogelijke rol van de vakinhoudelijke verenigingen daarin en uiteraard houdt men zich bezig met de nieuwe tweede fase in het kader van de profielnota. Het platform heeft de Stuurgroep benaderd om afspraken te maken over de betrokkenheid van de vakinhoudelijke verenigingen als het gaat om de vakinhoudelijke invulling van die profielen, wat naar verwachting het volgend cursusjaar zijn beslag zal krijgen.

Tweede fase v.o.

In de plannen voor de vernieuwde bovenbouw krijgt de wiskunde een belangrijke plaats. In de huidige plannen is in het gemeenschappelijke deel van het onderwijsprogramma zowel voor havo als voor vwo een stuk wiskunde A opgenomen. Wiskunde is als apart vak ook opgenomen in drie van de vier profielen. Een aantal jaren terug was er een heftige discussie over de vraag of wiskunde voor iedereen een verplicht vak zou moeten zijn. Die gedachte is toen onder grote druk verlaten, maar nu zonder merkbare commotie weer terug.

Vrouwen en Wiskunde

De werkgroep Vrouwen & Wiskunde heeft op haar landelijke dag in het voorjaar gepraat over de toetsen van de basisvorming en de nieuwe tweede fase en de mogelijke gevolgen daarvan voor meisjes. Een verslag van deze dag zal in Euclides verschijnen. De Stuurgroep heeft zich ontvankelijk getoond voor de argumentatie van de werkgroep V&W dat het nuttig is om ook emancipatiedeskundigheid binnen de diverse werkgroepen te brengen die zich met de uitwerking van de nota bezighouden en een lid van V&W in de werkgroep Profielen opgenomen.

Project (I)VBO-SLO

Op verzoek van de vereniging voert de SLO een project uit over wiskunde in het beroepsonderwijs. Zowel tijdens de jaarvergadering als op de regionale bijeenkomsten was een werkgroep (over een nieuwe keuken) aan dit project gewijd. Dit project heeft helaas veel vertraging opgelopen. Het project moet uiteindelijk resulteren in lesboekjes als voorbeeldmateriaal en zal ook beschikbaar zijn voor andere scholen. Ook hierover leest u meer in Euclides.

Regionale bijeenkomsten

Certificaten die niet zijn afgehaald worden niet automatisch toegezonden.

► Deelbaarheid en getallenstelsels

F. Heierman

In de eindtermen van het rekenonderwijs van de basisschool komt men sinds lange tijd niet meer de deelbaarheid door de getallen 2 tot en met 10 (uitgezonderd 7) tegen. Toch kent menige brugklasleerling de kenmerken van deelbaarheid. Vragen naar deelbaarheid door 3 leveren in elke brugklas nog altijd een aantal vingers op ('Meester, ik weet het'). Vragen naar deelbaarheid door 4 worden in het algemeen door meer leerlingen beantwoord. Niet alle antwoorden blijken dan echter goed te zijn. Een fout antwoord is bijvoorbeeld: 'Een getal is deelbaar door 4 als de som der cijfers deelbaar door 4 is'. Elke leraar zal op zijn eigen wijze op dit antwoord reageren.

Door te filosoferen over fouten van leerlingen kan een leraar soms tot aardige ideeën komen. De opmerking 'Een getal is deelbaar door 4 als de som der cijfers deelbaar is door 4' is goed als dat getal geschreven is in het 5,9,13,...-tallig positiestelsel! Alvorens deze opmerking te staven wil ik ingaan op het kenmerk van deelbaarheid door 9 (een getal is deelbaar door 9 dan en slechts dan als de som der cijfers deelbaar door 9 is). Het bewijs van dit kenmerk is zeer eenvoudig te begrijpen. Het geeft een aardig inzicht in uitgangspunt (*wat is gegeven*) en doel (*wat moet ik bewijzen*).

Neem zonder beperking der algemeenheid aan: het getal bestaat uit 4 cijfers (in dit geval aangegeven door de letters a, b, c en d).

$$\begin{aligned}abcd &= a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d = a \cdot 10^3 \\&\quad + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d \\&= a + b + c + d - a - b - c - d + a \cdot 10^3 \\&\quad + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d \\&= a + b + c + d + a(10^3 - 1) \\&\quad + b(10^2 - 1) + c(10 - 1) \\&= S + R\end{aligned}$$

S (de som der cijfers) = $a + b + c + d$

R (de restterm) = $a(10^3 - 1) + b(10^2 - 1) + c(10 - 1)$

Nu geldt: $10^n - 1$ is deelbaar door 9 voor gehele positieve n , dus R is deelbaar door 9. Als ook S deelbaar is door 9, moet het getal $abcd$ eveneens deelbaar door 9 zijn. Omgekeerd als het getal $abcd$ deelbaar door 9 is, moet S (de som der cijfers) deelbaar door 9 zijn. Voor delers van 9, bijvoorbeeld 3, geldt deze regel ook (een getal is deelbaar door 3 dan en slechts dan als de som der cijfers deelbaar door 3 is), aangezien 3 eveneens een deler van de restterm R is.

Vervolgens richten wij onze aandacht op de bewering, dat een getal in het 5-tallig positiestelsel deelbaar is door 4 dan en slechts dan als de som der cijfers deelbaar is door 4. We kunnen deze stelling generaliseren tot:

een getal in het p -tallig positiestelsel is deelbaar door $p - 1$ dan en slechts dan als de som der cijfers deelbaar is door $p - 1$. Deze laatste wat meer abstracte stelling, die overigens op dezelfde wijze kan worden bewezen als deelbaarheid door 9 in het voorgaande, zullen wij bewijzen.

$$\begin{aligned}abcd &= a \cdot p^3 + b \cdot p^2 + c \cdot p + d \\&= a + b + c + d + a(p^3 - 1) + b(p^2 - 1) + \\&\quad c(p - 1) \\&= S + R\end{aligned}$$

S (de som der cijfers) = $a + b + c + d$

R (de restterm) = $a(p^3 - 1) + b(p^2 - 1) + c(p - 1)$

$p^n - 1 = (p - 1)(p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + 1)$

(n is geheel en positief)

Dus $p - 1$ is een deler van $p^n - 1$, met andere woorden $p - 1$ is een deler van R , waarmee het bewijs van de stelling voltooid is.

Niet alleen $p - 1$, maar ook elke deler d van $p - 1$ is een deler van R . We kunnen dus ook zeggen: 'Een getal geschreven in het 5,9,13,...-tallig stelsel is deelbaar door 4 dan en slechts dan als de som der cijfers deelbaar is door 4'.

Voorbeeld: $496 = 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0$.

In het 5-tallig stelsel is 496 dus te schrijven als 3441.

De som der cijfers is 12 (dus deelbaar door 4). Dit getal 12 ($2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$) is in het 5-tallig stelsel 22.

De som der cijfers is 4, wederom deelbaar door 4.

Een minder bekend criterium in de theorie van de deelbaarheid van de getallen is de deelbaarheid door 11. Een getal is deelbaar door 11 dan en slechts dan als de som der cijfers op even posities min de som der cijfers op oneven posities deelbaar is door 11.

Het bewijs verloopt wederom vrijwel analoog aan de deelbaarheid door 9.

$$\begin{aligned}abcd &= b + d - a - c + a(10^3 + 1) + b(10^2 - 1) \\&\quad + c(10 + 1) \\&= V + R\end{aligned}$$

V (verschil der sommen) $= b + d - (a + c)$

R (restterm) $= a(10^3 + 1) + b(10^2 - 1) + c(10 + 1)$

De termen $10 + 1$, $10^3 + 1$, $10^5 + 1$ zijn deelbaar door 11.

De termen $10^2 - 1$, $10^4 - 1$, $10^6 - 1$ zijn deelbaar door 11.

Dus de restterm is deelbaar door 11, waarmee het bewijs geleverd is.

Ook deze stelling is te generaliseren:

$abcd$ geschreven in het p -tallig positiestelsel is deelbaar door $p + 1$ dan en slechts dan als de som der cijfers op even posities min de som der cijfers op oneven posities deelbaar is door $p + 1$.

Men benutte voor dit bewijs onderstaande uitdrukking.

$$\begin{aligned}abcd &= b + d - a - c + a(p^3 + 1) + b(p^2 - 1) + \\&\quad c(p + 1) \\&= V + R\end{aligned}$$

De rest R is deelbaar door $p + 1$ omdat voor gehele positieve m geldt:

$$\begin{aligned}1: p^{2m-1} + 1 &= \\&= (p + 1)(p^{2m-2} - p^{2m-3} + p^{2m-4} - \dots + 1).\end{aligned}$$

$p^{2m-1} + 1$ is dus deelbaar door $p + 1$.

$$2: p^{2m} - 1 \text{ is deelbaar door } p + 1.$$

Bewijs door middel van volledige inductie.

Voor $m = 1$ geldt: $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

Stel voor m geldt de inductie-aanname, dus $p^{2m} - 1$ is deelbaar door $p + 1$. voor $m + 1$ geldt dan: $p^{2(m+1)} - 1 = p^{2m+2} - 1 = p^{2m+2} - p^{2m} + p^{2m} - 1 = p^{2m}(p^2 - 1) + p^{2m} - 1$.

$p^2 - 1$ is deelbaar door $p + 1$.

$p^{2m} - 1$ is ook deelbaar door $p + 1$ volgens de inductie-aanname. Bewijs voltooid.

Als V deelbaar is door $p + 1$ is $abcd$ het ook, omdat R deelbaar is door $p + 1$, en omgekeerd.

Natuurlijk geldt deze stelling ook weer voor delers van $p + 1$. In het 9-tallig stelsel geldt bijvoorbeeld: $abcd$ is deelbaar door 10 respectievelijk 5 respectievelijk 2 dan en slechts dan als de som der cijfers op even posities min de som der cijfers op oneven posities deelbaar is door 10 resp. 5 resp. 2.

Dit verhaal kan in twee zinnen samengevat worden:

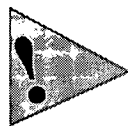
1. Het getal $abcd$ in het p -tallig positiestelsel is deelbaar door $p - 1$ respectievelijk een deler d van $p - 1$ dan en slechts dan als de som der cijfers deelbaar is door $p - 1$ respectievelijk d .

2. Het getal $abcd$ in het p -tallig positiestelsel is deelbaar door $p + 1$ respectievelijk een deler d van $p + 1$ dan en slechts dan als de som der cijfers op even posities min de som der cijfers op oneven posities deelbaar is door $p + 1$ respectievelijk d .



Adressen van auteurs

P. Drijvers, Freudenthal instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht
F. Heierman, Roelof Hartstraat 68ⁿ, 1071 VM Amsterdam
H.A. Heijmans, p/a O.S.G. De Ring van Putten, Postbus 25, 3200 AD Spijkensisse
M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam
M.P. Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
E. de Moor, Vondelkerkstraat 32, 1054 KZ Amsterdam
W. Schaafsma, Kolbleikolk 6, 8017 NJ Zwolle
A. van Streun, RUG, vakgroep Wiskunde, Postbus 800, 9700 AV Groningen
G. Zwaneveld, Bieslanderweg 18, 6213 AJ Maastricht



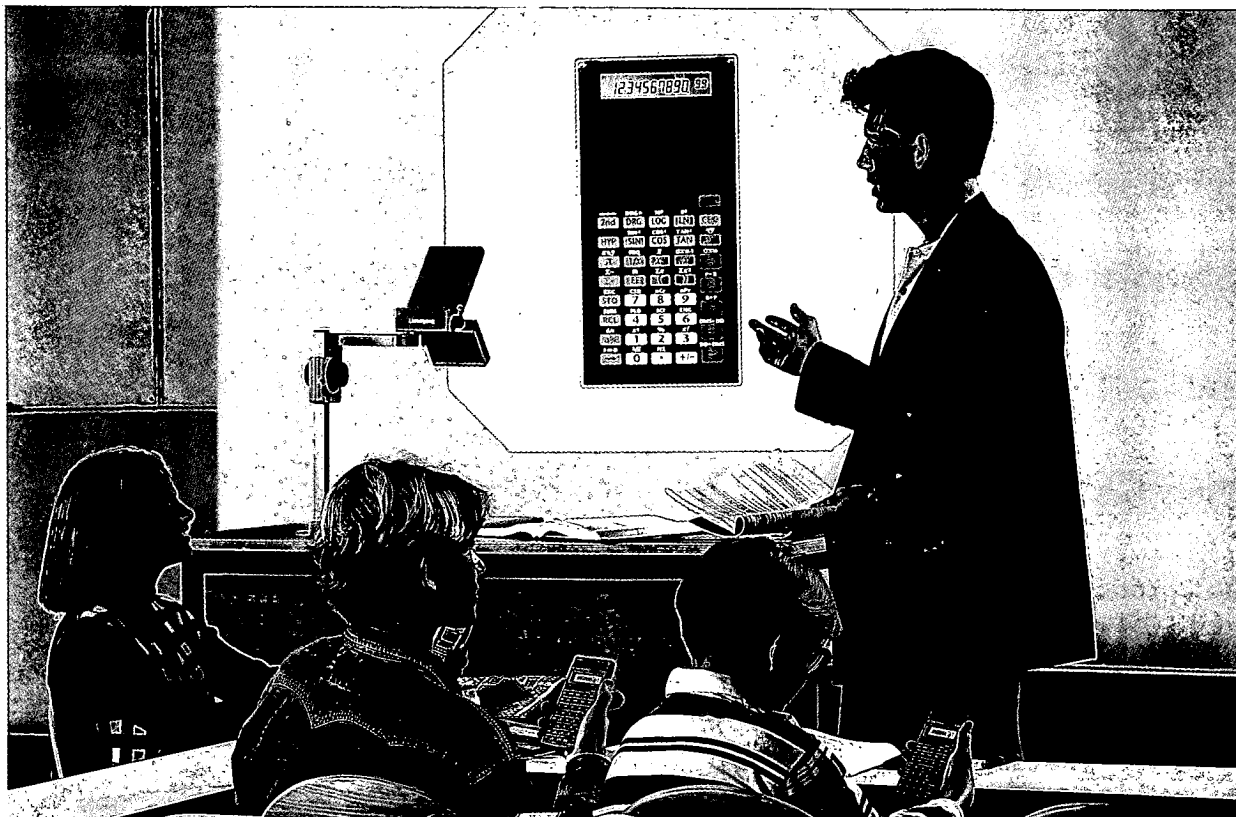
Kalender

18 mei 1994: Utrecht, Lezing over het Fermat-vermoeden, zie Euclides 69-4 bladzijde 120.

18 mei 1994: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

24, 27 mei en 1 juni 1994: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen. Zie Euclides 69-7 bladzijde 222.

8 juni 1994: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.



Overhead rekenmachine voor het middelbaar onderwijs.

Met de nieuwe wetenschappelijke **TI-30X** Overhead rekenmachine van Texas Instruments en Stokes Publishing kunt u meer doen in uw les, omdat uw leerlingen de stof eerder onder

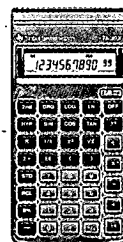
Daarnaast is het apparaat geschikt voor statistische berekeningen met één variabele en heeft het krachtige functies voor trigonometrische berekeningen.

IEDEREEN NU BIJ DE LES

de knie krijgen. Deze zeer functionele overhead rekenmachine heeft precies dezelfde functies als die van de gewone **TI-30X** rekenmachine, zodat de klas het rekenvoorbeeld kan volgen. Bovendien is het apparaat gebruikersvriendelijk, u legt het gewoon op een standaard overhead projector. Het display en toetsenbord worden geprojecteerd op een scherm en u kunt met de hele klas de rekenopgaven behandelen. Uw leerlingen zien welke toetsen u indrukt terwijl u stap voor stap de opgaven doorneemt. Zo worden uw leerlingen actiever bij de les betrokken. U werkt immers samen.

De **TI-30X** werd ontwikkeld in samenwerking met leraren zoals u en is volledig afgestemd op het wiskundeprogramma voor het middelbaar onderwijs. Uw leerlingen krijgen precies datgene waar ze behoefte aan hebben. Zo kunnen breuken worden ingevoerd, zoals ze normaal worden geschreven en vervolgens worden opgeteld, afgetrokken, vermenigvuldigd en gedeeld.

De **TI-30X** heeft alle benodigde functies voor wiskundevraagstukken van algemene aard, wetenschappelijke berekeningen en statistiek. En dat alles voor een redelijke prijs.



TI-30X

Texas Instruments
Rutherfordweg 102
3542 CG Utrecht
Tel. 030 - 417422



Scientific 30X
Overhead™
rekenmachine

Inhoud

Inhoud 225

P. Drijvers: Een pagina omslaan. . . . 226

Mededelingen 230, 243

Anne van Streun: De wiskunde in de nieuwe vwo-profielen 231

Pythagoras gered! 237

Martinus van Hoorn: 'Nooit meer: waar heb ik dat voor nodig?' 238

Ed de Moor en Adri Treffers: Breuken, globaal! 239

Werkbladen 240

Wim Schaafsma: Commentaar bij de werkbladen 'Systematisch tellen' 242

Boekbespreking 243

H.A. Heijmans: Ervaringen met het softwarepakket DRAAD 244

40 jaar geleden 247

Wim Schaafsma: 'Leraren die de wiskundekar in tegengestelde richting trekken' 248

Bert Zwaneveld: Wiskunde en computers toegepast 250

M.C. van Hoorn: Impressies van een regionale bijeenkomst 252

Recreatie 253

Marian Kollenveld: Van de bestuurstafel 254

F. Heierman: Deelbaarheid en getallenstelsels 255

Adressen van auteurs 256

Kalender 256