

Euclides

816
357
492

jaargang 69 1993 | 1994 februari/maart

Redactie

Drs. H. Bakker
 Drs. R. Bosch
 Drs. J.H. de Geus
 Drs. M.C. van Hoorn (hoofdredacteur)
 J. Koekkoek
 N.T. Lakeman (beeldredacteur)
 D. Prins (secretaris)
 W. Schaafsma
 Ir. V.E. Schmidt (penningmeester)
 Mw. Y. Schuringa-Schogt (eindredacteur)
 Mw. drs. A. Verweij
 A. van der Wal
 Drs. G. Zwaneveld (voorzitter)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,
 8034 RA Zwolle, tel. 038-539985.
Secretaris Drs. J.W. Maassen, Traviatastraat 132,
 2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie F.F.J. Gaillard, Jorisstraat 43,
 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18; fax. 076-65 32 18.
 Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 60,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 42,50; contributie zonder Euclides f 35,00. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Advertenties zenden aan:
 ACQU' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
 Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
 - regelafstand van 1,5
 - maximaal 47 aanslagen per regel
 - eenzijdig beschreven papier
 - met de tekst bijgeleverd op diskette (3,5 of 5,25 inch) in WP 5.1, of eventueel in ASCII-files
 - en liefst voorzien te zijn van (genummerde) illustraties
 - die gescheiden zijn van de tekst
 - aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
 - waar nodig voorzien van bijschriften
- De ruimte die een artikel of mededeling bij plaatsing in beslag neemt kan worden bepaald door uit te gaan van 48 tekstregels per kolom bij een kolomhoogte van 20 cm; aan de hand hiervan kan ook het ruimtebeslag van illustraties worden bepaald.

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 2 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f 66,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 43,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Woltersgroep Groningen b.v., afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. ABN-AMRO 44 60 67 105.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgiro hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 11,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

● Inhoud ● ● ● ● ●

Bijdragen 162

Leon van den Broek *Daglengthe* 162

Afleiding van een formule voor de daglengthe als functie van de dag van het jaar en van de geografische breedte.

Fred Weerman *Over talen- en wiskunde-knobbels* 167

Contextrijke wiskunde brengt met zich mee dat de wiskundeleraar meer met taalproblemen wordt geconfronteerd dan vroeger.

Interview 173

Martinus van Hoom *'Als leraar ben je er voor alle leerlingen'*

Boekbeschuwing 174

Jelske Kuijper *Wiskunde leren in kleine heterogene groepen*

Bespreking van een proefschrift dat voor een groot deel bestaat uit observatieverslagen.

Mededelingen 175, 182, 192

40 jaar geleden 175

Werkbladen 176

Bijdrage 178

F. van der Blij *Een boeiende vraag (I)*

Over kettingbreuken en differentievergelijkingen.

Serie 'Rekenen in W12-16' 183

Monica Wijers *Handig rekenen*

Bij gebruik van de zakrekenmachine zijn hoofd-rekenen en schatten belangrijk.

Bijdrage 184

H.N. Schuring *De 32e Nederlandse Wiskunde Olympiade 1993*

Resultaten, opgaven en oplossingen.

Recreatie 188

Bijdrage 189

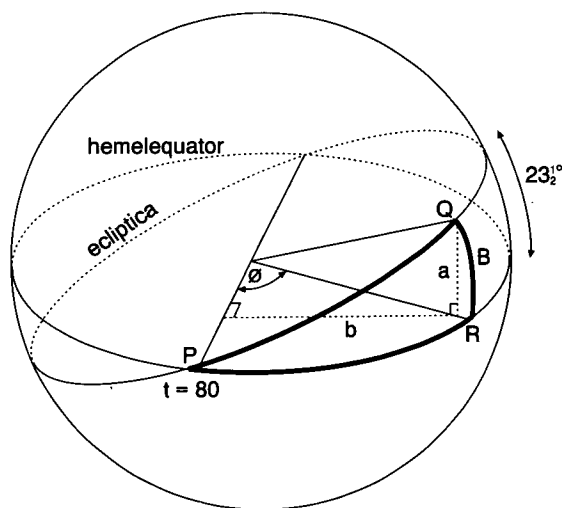
Ynske Schuringa *Opening Centrum Vrouwen en Exacte Vakken*

Verenigingsnieuws 190

Notulen jaarvergadering 1993

Adressen van auteurs 192

Kalender 192



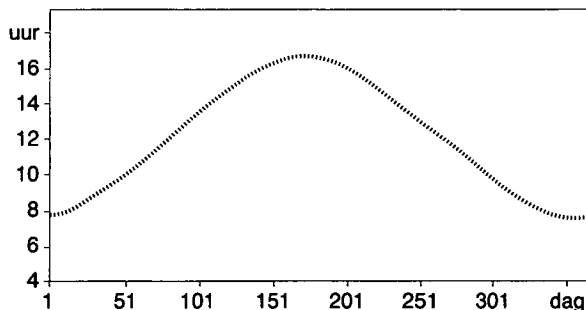
De ecliptica maakt een hoek van $23\frac{1}{2}^\circ$ met het vlak van de evenaar.

► Daglengte

Leon van den Broek

Inleiding

Daglengte is een aardig onderwerp binnen de wiskunde A-stof voor het vwo. Zie bijvoorbeeld opgave 3 van het vwo-examen wiskunde A van 1991, eerste tijdvak.



Figuur 1

In figuur 1 staat de grafiek van de daglengte als functie van de dag van het jaar voor Nederland (52° NB). Deze grafiek is getekend op grond van zonsopkomst en -ondergang in de Sterrengids 1992, uitgave de Koepel te Utrecht. Zo te zien een keurige sinusoïde, met een gemiddelde van ruim 12 uur, een amplitude van ongeveer $4\frac{1}{2}$ uur en een periode van 365 dagen. Voor meer noordelijk gelegen plaatsen zal de grafiek anders zijn; daar is immers de kortste dag van het jaar korter dan bij ons en is de langste dag langer. Dus is de amplitude

daar groter. Voor plaatsen die dichter bij de evenaar liggen is de amplitude kleiner. En op de evenaar zelf is de daglengte constant 12 uur, voor elke dag van het jaar. Bijgevolg verwachtte ik een formule van de gedaante

$$D = 12 + F \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (t - 80)\right), \text{ waarbij } D \text{ de dag-}$$

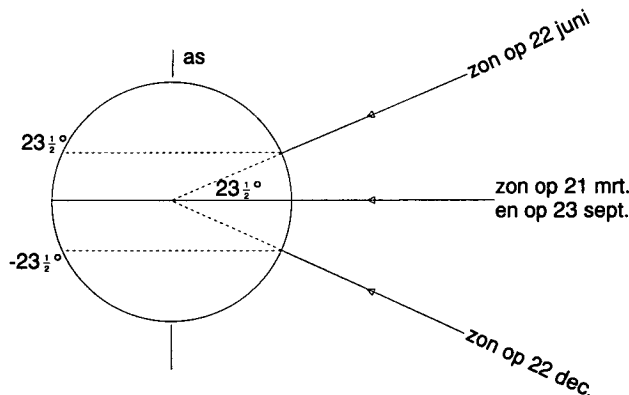
lengte is in uren en t de tijd in dagen ($t = 1$ op 1 januari). De factor F zou afhangen van de geografische breedte.

Bij nader onderzoek bleek de grafiek bij grotere breedtes echter helemaal geen sinusoïde meer te zijn. In dit artikel leid ik een (bij benadering) goede formule af voor de daglengte als functie van de dag van het jaar en van de geografische breedte. In het bijzonder zal ik kijken naar plaatsen op de poolcirkel en daarboven. Ik heb hierbij flink wat goniometrie en ruimtemeetkunde (wiskunde-B!) nodig.

Opmerking: dat de gemiddelde daglengte meer is dan 12 uur komt doordat de zon geen punt is en door de refractie. Deze aspecten laat ik buiten beschouwing.

De plaats van de zon

De zon staat op 21 maart (het begin van de lente) boven de evenaar, op 22 juni boven de kreeftskeerkring ($23\frac{1}{2}^\circ$ NB), op 23 september weer boven de evenaar en op 22 december boven de steenbokskeerkring ($-23\frac{1}{2}^\circ$ NB); zie figuur 2. De tussenliggende periodes zijn niet precies een kwart jaar. Maar de afwijkingen zijn gering.



Figuur 2

De geografische breedte van de zon noemen we B (in graden NB), dat is de breedtegraad waar de zon recht boven staat. B wordt op dag t ongeveer gegeven door de formule:

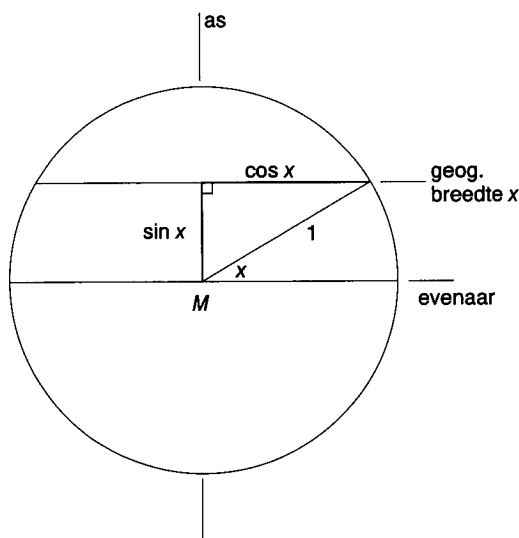
$$B = 23\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (t - 80)\right).$$

In de appendix leg ik deze formule uit.

Merk op dat $t = 80$ op 21 maart.

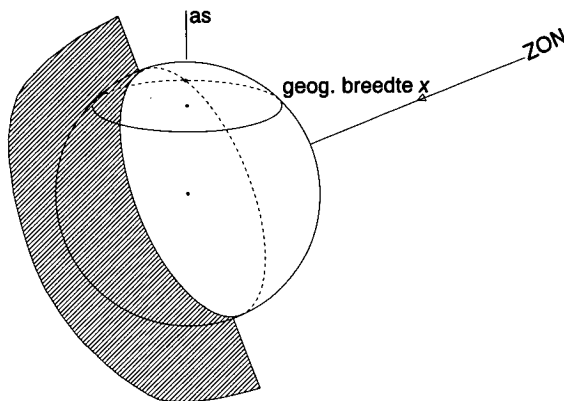
De lengte van de dag

We nemen de straal van de aarde als eenheid. Een plaats op geografische breedte x beschrijft dagelijks een cirkelvormige baan om de aardas met straal $\cos x$. De baan ligt in een vlak op afstand $\sin x$ tot het middelpunt M van de aarde; zie figuur 3.

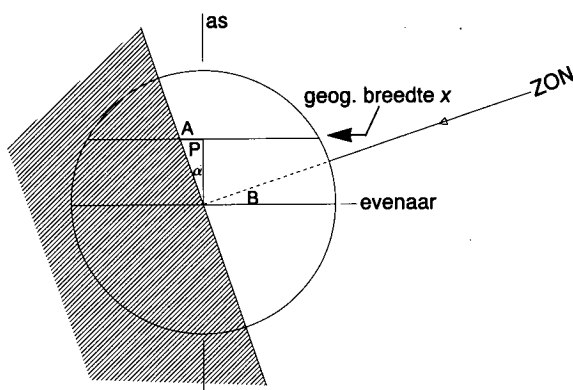


Figuur 3

In figuur 4 wordt de aarde beschenen door de zon. We willen berekenen hoeveel uur de plaats zich per dag in de verlichte helft van de aarde bevindt. De baan van de plaats passeert twee keer de grens tussen het donkere en het verlichte stuk, namelijk als de zon ondergaat en als hij opkomt. Beide grenspunten zijn in figuur 5 aangegeven met de letter A.



Figuur 4



Figuur 5

Het is duidelijk hoe het plaatje eruit zal zien voor andere waarden van B (dus op andere data) en voor andere geografische breedtes x . We bekijken enkele speciale gevallen.

- Op de evenaar is de daglengte altijd 12 uur. Immers, de zonnebaan ligt half in het verlichte en half in het donkere deel. Op niet te grote geografische breedtes varieert de daglengte maar weinig.

- Op de noordpool is de daglengte tussen 21 maart en 23 september 24 uur. In die periode staat de zon boven het noordelijk halfrond; de noordpool blijft dan in het verlichte deel. Gaan we vanuit de noordpool zuidwaarts, dan wordt de 'pooldag' (de periode dat de zon niet ondergaat) snel korter.

- Op 22 juni staat de zon boven de kreeftskewering ($23\frac{1}{2}^{\circ}\text{NB}$). Op die dag blijft de poolcirkel ($66\frac{1}{2}^{\circ}\text{NB}$) net in het verlichte deel. De zon gaat die dag dus net niet onder op de poolcirkel. Zie figuur 5a.

- Op 21 maart en 23 september staat de zon boven de evenaar. Dan is de daglengte op elke geografische breedte (tussen noord- en zuidpool) 12 uur. Zie figuur 5b.

Een formule voor de daglengte

Bekijk opnieuw figuur 5. Er geldt $\alpha = B$, en dus $p = \sin x \cdot \tan B$.

In figuur 6 bekijken we de cirkelvormige baan van de plaats, dat is dus de breedtecirkel op geografische breedte x . [Figuur 6 is een 'bovenaanzicht', met de aardas als kijkrichting.] Er geldt:

$$\cos \beta = \frac{p}{\cos x} = \frac{\sin x \cdot \tan B}{\cos x} = \tan x \cdot \tan B.$$

We zijn nu in staat de middelpuntshoek te berekenen van het door de zon verlichte deel van de cirkel. Die middelpuntshoek is

$$2\pi - 2\beta = 2\pi - 2 \cdot \arccos(\tan x \cdot \tan B) = \pi + 2 \cdot \arcsin(\tan x \cdot \tan B).$$

In 24 uur voltooit de plaats de draaihoek van 2π .

Door te vermenigvuldigen met $\frac{24}{2\pi}$ volgt nu de daglengte in uren:

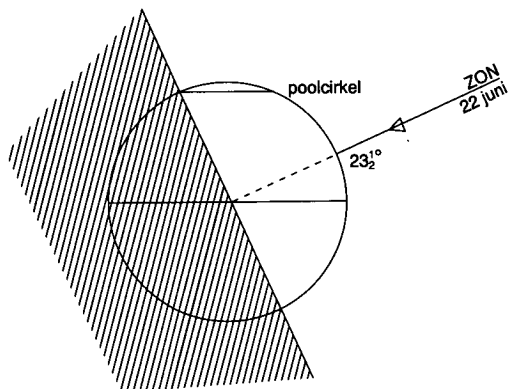
$$D = 12 + \frac{24}{\pi} \cdot \arcsin(\tan x \cdot \tan B).$$

Vullen we de eerder gestelde formule voor B in, dan vinden we de bizarre uitdrukking:

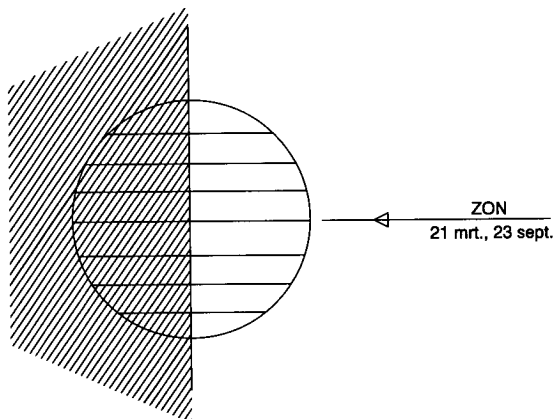
$$D = 12 +$$

$$\frac{24}{\pi} \cdot \arcsin\left(\tan x \cdot \tan\left(23\frac{1}{2}^{\circ} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (t - 80)\right)\right)\right).$$

Deze formule blijkt aardig te kloppen met de gegevens uit 'The Astronomical Almanac for the year 1992'. En we kunnen de speciale gevallen in de vorige paragraaf verifiëren.



Figuur 5a



Figuur 5b

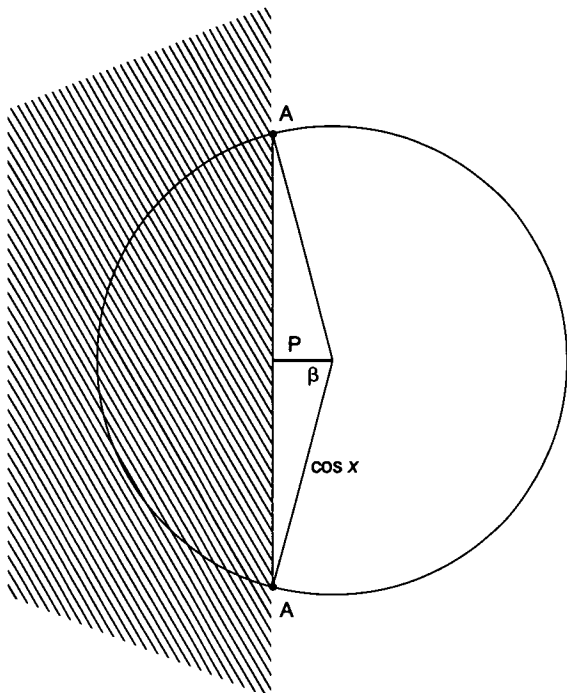
In Nederland

In Nederland is $x = 52^{\circ}$ en dus $\tan x \approx 1,3$. In figuur 7 staat de grafiek van D als functie van t ; zowaar een redelijke sinusoïde. Dat is niet zo vreemd als we bedenken dat voor een niet te grote hoek Φ geldt:

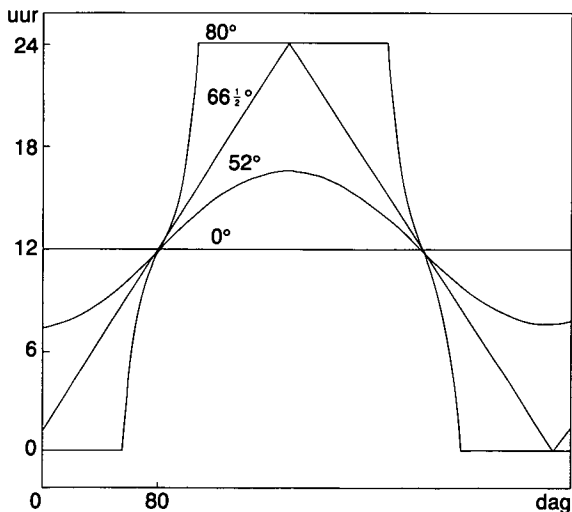
$$\tan \Phi \approx \Phi \cdot \frac{\pi}{180}, \text{ en dat voor een niet te groot getal}$$

y geldt: $\arcsin y \approx y$. Voor Nederland zijn deze benaderingen redelijk. We vinden dan:

$$D \approx 12 + \frac{2}{15} \cdot \tan 52 \cdot 23\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (t - 80)\right).$$



Figuur 6

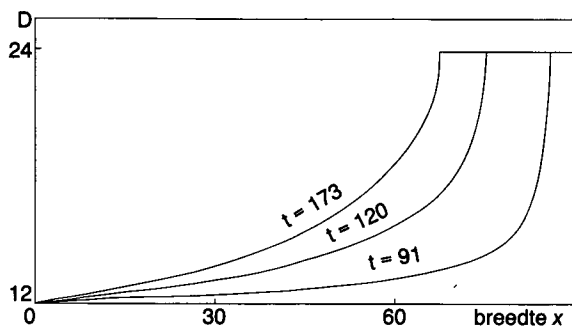


Figuur 7

Op de poolcirkel

Op de poolcirkel is $x = 66\frac{1}{2}^\circ$ en dus $\tan x \approx 2,3$. De vereenvoudigingen die we voor Nederland toepas-

ten geven nu geen goede benadering. Met behulp van de computer vinden we de grafiek die in figuur 7 staat.



Figuur 8

Boven de poolcirkel

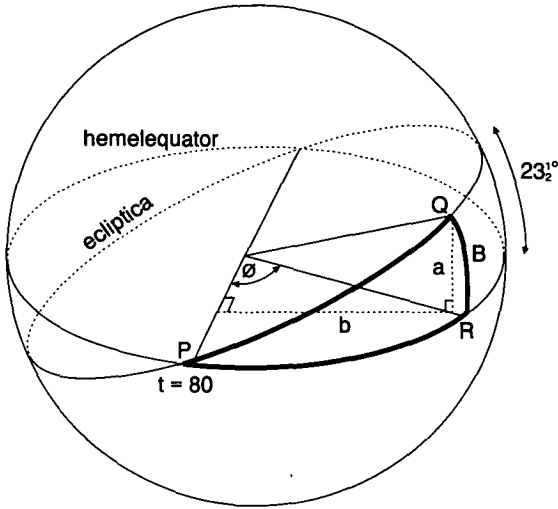
Als $\tan x \cdot \tan B > 1$, dan geldt de formule niet meer, en dat komt voor bij plaatsen boven $66\frac{1}{2}^\circ\text{NB}$. Dat komt doordat punt A in figuur 4 dan niet meer bestaat. Dan moet de grafiek afgetopt worden. Zie figuur 7 voor het geval 80°NB . In het extreme geval van de noordpool is de daglengte tussen 21 maart en 23 september constant 24 uur en daarbuiten constant 0 uur.

Op koninginnedag

Wat is de daglengte op 30 april op een willekeurige geografische breedte? Ofwel: beschrijf D als functie van x , als $t = 120$. In figuur 8 staan de grafieken van D als functie van x op 21 maart ($t = 80$), op 1 april ($t = 91$), op koninginnedag ($t = 120$) en op 22 juni ($t = 173$).

Appendix: de formule voor B

De zon maakt nagenoeg een eenparige cirkelbeweging om de aarde. Het vlak van de baan van de zon (de ecliptica) maakt een hoek van $23\frac{1}{2}^\circ$ met het vlak van de evenaar. We gaan in figuur 9 de waarde van B uitdrukken in de dag t . Op dag 80 is de zon in punt P, op dag t in punt Q.



Figuur 9

$$\tan 23\frac{1}{2} = \frac{a}{b} = \frac{\sin B}{\cos B \cdot \sin \Phi} = \frac{\tan B}{\sin \Phi}, \text{ zodat}$$

$$\sin \Phi = \tan B \cdot \cotan 23\frac{1}{2}.$$

Omdat de boldriehoek PQR rechthoekig is in R , geldt:

$$\cos \Phi = \cos \text{boog } PR = \frac{\cos \text{boog } PQ}{\cos \text{boog } QR} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)}{\cos B}$$

Uit $\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi = 1$ volgt na enig rekenwerk:

$$\tan^2 B = \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)}{\cos^2\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right) + \cotan^2 23\frac{1}{2}}$$

De grafiek voor B die deze formule oplevert staat in figuur 10. Het is een redelijke sinusoïde:

$$B = 23\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right).$$

Deze laatste benadering voor B kun je analytisch als volgt verklaren.

$\cotan^2 23\frac{1}{2} \approx 5,29$ is betrekkelijk groot ten opzichte

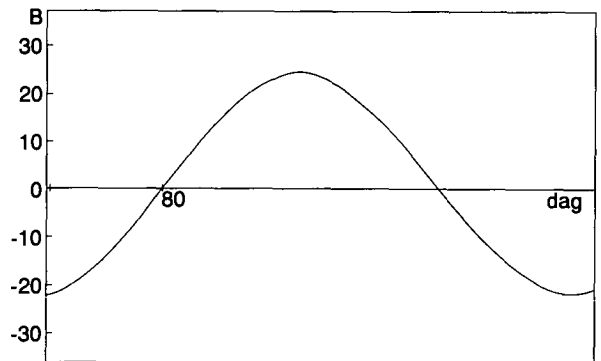
van $\cos^2\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)$. Dus:

$$\tan^2 B \approx \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)}{\cotan^2 23\frac{1}{2}} =$$

$$\sin^2\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right) \cdot \tan^2 23\frac{1}{2} \approx$$

$$\tan^2\left(\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right) \cdot 23\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Dus } B = 23\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right).$$



Figuur 10

► Over talen- en wiskundeknobbels

Fred Weerman

1 Inleiding¹

In de populaire fysiologie moet er een streng onderscheid worden gemaakt tussen talenknobbels en wiskundeknobbels. De algemene opinie wil dat deze knobbels in complementaire distributie zijn: een talenknobbel betekent zoveel als een wiskundeput en vice versa. Zo bezien breken er droeve tijden aan nu taal in het zogenaamde contextrijke wiskundeonderwijs een belangrijkere rol zal gaan spelen. Wiskundeopgaven worden inherent onoplosbaar: wie een wiskundeknobbel heeft, gaat alsnog ten onder door zijn talen-put.

Aan het slot van dit artikel hoop ik u er onder andere van overtuigd te hebben dat er een hoopvoller verband bestaat tussen wiskunde en taalkunde dan dat deskundigheid in het ene vak leidt tot onkunde in het andere. Ik wil u proberen duidelijk te maken hoe vanuit taalkundig oogpunt aangekeken kan worden tegen taal bij wiskunde. Daartoe zal ik eerst ingaan op taal (namelijk in paragraaf 2), daarna op wat je zou kunnen noemen, 'de taal van de wiskunde' (paragraaf 3). Gewapend met deze kennis zal worden stilgestaan bij taal in het wiskundeonderwijs (paragraaf 4). De conclusie volgt in paragraaf 5.

De veronderstelling dat niet iedereen beschikt over een talenknobbel schiet in ieder geval op een zeer essentieel punt tekort. Ieder gezond mens is namelijk in staat een *moedertaal* te leren. Die prestatie is even vanzelfsprekend als wonderlijk. Het wonderlijke zit hem erin dat het systeem dat aan taal ten grondslag moet liggen zeer ingewikkeld is, terwijl kinderen dat systeem in de eerste fase van hun leven spelenderwijs leren: nagenoeg zonder letterlijke instructie, en op basis van een beperkte hoeveelheid taalfeiten die zij toevallig oppikken uit hun omgeving.²

Bezien we bijvoorbeeld de twee verschillende posities voor werkwoorden in het Nederlands, een voorin de zin en een achterin de zin. Beide posities ziet u in (1a), waar *zal* op de tweede plek staat en *geven* helemaal achteraan. De zinnen (1b-d) laten zien dat je de werkwoorden niet van plek kunt laten wisselen of bij elkaar kunt zetten. De zinnen (1b-d) botsen met de systematiek van het Nederlands (we noemen ze *ongrammaticaal*, hetgeen wordt aangegeven met een asterisk:*). Het werkwoord voorin is de persoonsvorm, de overige werkwoorden staan achteraan.³ Zin (1e) illustreert tenslotte dat het hier gaat om een bijzonderheid van het Nederlands; in het Engels staan de beide werkwoorden wel bij elkaar, en wel tussen het subject (*he*) en de objecten (*Mary* en *a present*).

- (1) a. hij *zal* Marie een cadeau *geven*
 b. *hij *geven* Marie een cadeau *zal*
 c. *hij *zal* *geven* Marie een cadeau
 d. *hij Marie een cadeau *zal* *geven*
 e. he *will* give Mary a present

Het is heel goed mogelijk dat u zich nog nooit had gerealiseerd dat de Nederlandse systematiek is zoals in (1a) wordt geïllustreerd, hoewel u deze systematiek wel kent: u weet dat (1a) goed is, en dat (1b-d) fout zijn. Uit onderzoek blijkt dat Nederlands lerende kinderen dezelfde systematiek ruim voor hun vijfde levensjaar geheel en al onder de knie hebben!

Het gemak waarmee een mens een moedertaal leert, staat in fel contrast met de moeite die op latere leeftijd gedaan moet worden om een tweede ofwel vreemde taal te leren. En ondanks die moeite

is bovendien het resultaat veel wisselvalliger: een tweedetaalleerder blijft bijna altijd herkenbaar als iemand die de taal niet tot in alle finesses beheerst. Zo is het niet onwaarschijnlijk dat u tweedetaalleerders van het Nederlands, in tegenstelling tot taallerende kinderen, fouten hoort maken als (1c). In belangrijke mate lijkt dit onafhankelijk te zijn van de talige achtergrond van de tweedetaalleerder. Welke verklaring geven taalkundigen voor het wonderlijke vermogen om een moedertaal te leren, en voor het contrast tussen eerste taalverwerving en tweede taalverwerving? De opvatting heerst dat de mens in zekere zin is voorgeprogrammeerd om taal te leren, en dat dit taalleerprogramma, net zoals andere biologische processen, gekoppeld is aan een kritische periode. De invoer bestaat uit de taalfeiten die het kind tijdens de kritische periode tegenkomt.

Na de kritische periode is een mens aangewezen op andere leerprincipes; zowel wat betreft zijn eigen moedertaal als wat betreft vreemde talen. Die andere leerprincipes kunnen overigens ook al in de kritische periode werkzaam zijn. Het leren van woorden is bijvoorbeeld iets dat in de kritische periode begint, maar veel langer doorgaat en dus niet geheel en al gestuurd wordt door dat biologische taalleerprogramma. Anderzijds zijn er aan woorden systematische eigenschappen te onderkennen die weer wel direct of indirect het resultaat kunnen zijn van het aangeboren programma. Stel bijvoorbeeld dat ik het nieuwe woord *sommentaalkunde* introduceer. Het is een regel die op de een of andere wijze voortvloeit uit het aangeboren programma, die bepaalt dat dit woord alleen kan duiden op een soort taalkunde en niet op een soort sommen. Als het laatste het geval zou zijn, zouden we zeggen: *taalkundesommen*.

De systematiek van een moedertaal leert iemand dus al zeer vroeg. Dat neemt niet weg dat er daarna ook voor de moedertaal nog van alles geleerd moet worden. Hiervoor noemde ik al het leren van woorden. Bij uitstek vroeg geleerd worden woorden die een taallerend kind vaak tegenkomt en die een hoge voorstelbaarheid hebben.⁴ Typisch laat geleerd worden woorden waarvan de betekenis alleen logisch of verbaal te duiden is. Men denke bijvoor-

beeld aan woorden als *bepalen* of voegwoorden als *mits*, *tenzij* en *hoewel*, die niet zelden tot in 6 vwo niet gekend worden (men denke trouwens ook aan frases als 'men denke . . .').

Daarnaast leert men ook bepaalde constructies pas later. Denkt u aan (2a) als variant van (1a):

- (2) a. Marie een cadeau gegeven hebbend (verliet hij het huis...)
- b. *gegeven hebbend Marie een cadeau ...

Opmerkenswaardig is dat deze constructie, hoewel later geleerd, toch de systematiek volgt die vroeger is geleerd, namelijk die welke voorschrijft dat Nederlandse werkwoorden (op de persoonsvorm na) achteraan moeten staan, vgl. de ongrammaticale uiting in (2b).

Naast andere cognitieve principes kan er dus met recht gesproken worden van zoiets als een talenknobbel, ofwel een aangeboren taalvermogen. Laten we wat preciezer kijken naar de resultaten van deze talenknobbel. Wat zijn de eigenschappen van menselijke taal (ook wel genoemd: natuurlijke taal)? Een viertal centrale eigenschappen staat opgesomd onder (3):

- (3) Menselijke taal wordt gekarakteriseerd door ...
- a. een systematische relatie tussen geluid/tekens en betekenis
- b. opdeelbaarheid in kleinere, discrete eenheden
- c. manipuleerbaarheid
- d. recursiviteit

De eigenschap genoemd in (3a) is hiervoor al aan de orde geweest, waar de zinnen in (1) illustreerden dat er aan taal een systematiek ten grondslag ligt. Ook de eigenschappen in (3b) kunnen we aan de hand van (1) illustreren. Taal is opdeelbaar in kleinere, discrete eenheden. Taal is opdeelbaar in zinnen en die zinnen zijn weer opdeelbaar in woordgroepen. Een van de woordgroepen in (1a) is: *een cadeau*. De woordgroep is weer opdeelbaar in woorden, in het onderhavige geval *een* en *cadeau*. Een woord is tenslotte weer opdeelbaar in klanken. Met het feit dat taal manipuleerbaar is (vgl. (3c)) bedoel ik dat een taalgebruiker de zin om kan zetten in allerlei varianten. Bijvoorbeeld, (1a) kan in een verleden tijd worden gezet (vgl. (4a)), hij kan meervoudig worden gemaakt (4b) of passief (4c), er kan een andere woordgroep vooraan worden geplaatst (4d), etc.

- (4) a. Hij zou Marie een cadeau geven
 b. Zij zullen Marie een cadeau geven
 c. Marie zal een cadeau gegeven worden
 d. Een cadeau zal hij Marie geven

De meest intrigerende en volgens sommige onderzoekers meest wezenlijke eigenschap van menselijke taal is de recursiviteit, waardoor een taal in principe oneindig veel zinnen omvat. Zo kan zin (1a) worden ingebed in een andere zin, waardoor zoiets ontstaat als (5a). Het resultaat kan weer ingebed worden in een andere zin, waardoor (5b) ontstaat. Deze zin kan weer . . . , enfin, u weet nu hoe het verder gaat.

- (5) a. Piet denkt dat hij Marie een cadeau zal geven
 b. Kees zegt dat Piet denkt dat hij Marie een cadeau zal geven
 c. Henk vreest dat Wim . . . dat Kees zegt dat Piet denkt dat hij Marie een cadeau zal geven

Misschien kwamen de eigenschappen in (3) u als wiskundige bekend voor. Niet omdat u zich verdiept hebt in de karakteristieken van de menselijke talenknobbel, maar omdat u hier iets herkende van het systeem dat u als wiskundige dagelijks gebruikt. Een eerste aanwijzing dat de talenknobbel en de wiskundeknobbel toch meer met elkaar te maken hebben? Laten we met (3) in het achterhoofd wat preciezer kijken naar de taal van de wiskunde.

3 De taal van de wiskunde

Bij 'de taal van de wiskunde' bent u wellicht geneigd te denken aan vaktermen die u hanteert, zoals *optellen*, *aftrekken*, *vermenigvuldigen*, *kwadrateren*, *is* ('=') etc. In feite zijn deze vaktermen echter net zo goed Nederlands als alle andere woorden die ik in dit artikel tot nu toe heb gebruikt. Deze woorden volgen geheel en al de systematiek van het Nederlands. Het bijzondere van deze Nederlandse woorden is dat ze gebruikt worden in een speciaal vakgebied en een daarbij behorende betekenis hebben. Men spreekt van *vakjargon* (of soms, eigenlijk ten onrechte, van *vaktaal*). Het is evident dat de speciale vakbetekenis voor de niet-ingewijde grote problemen op kan leveren, niet in het minst omdat de speciale betekenis voor de ingewijde volkomen

vanzelfsprekend is. Bovendien kan de dagelijkse betekenis ver af staan van de vakbetekenis, hoewel de dagelijkse betekenis misschien ooit de oorsprong van de vakbetekenis vormde.

Het gaat mij nu niet om het vakjargon. Waar ik met 'de taal van de wiskunde' hier op doel kan geïllustreerd worden met behulp van de uitingen in (6):

- (6) a. $8 + 2 = 10$
 b. $8 + 3 = 10$
 c. $2x + 5 = 10$
 d. $*2\ 8 + = 10$

(6a-c) zijn uitingen uit de taal van de rekenkunde/wiskunde. De taal van de wiskunde is een kunstmatige of formele taal, waarin met het oog op speciale doelen geabstraheerd wordt van irrelevante gegevens uit de natuurlijke taal, en waarin ook gepoogd wordt de dubbelzinnigheid van de natuurlijke taal te vermijden. Niettemin heeft ook deze kunstmatige taal de eigenschappen die we zojuist bij (3) tegenkwamen, zoals ik nu zal laten zien.

Dat er een systematische relatie is tussen tekens en betekenis (vgl. (3a)) behoeft eigenlijk geen uitleg. Dankzij deze systematiek kunnen we ook spreken van uitingen die in strijd zijn met de systematiek, en dus ongrammaticaal kunnen worden genoemd; (6a) is volgens de meest bekende taal grammaticaal en (6d) niet (vandaar de asterisk).

Merk op dat grammaticaal of ongrammaticaal zijn los staat van de vraag of iets waar of onwaar is. Ook als u liegt gebruikt u doorgaans grammaticaal correct Nederlands. Evenzo is (6b) wellicht onwaar, maar wel degelijk grammaticaal. In de grammaticale uiting (6c) is de waarheid zelfs niet direct vaststelbaar. Hetzelfde komt voor in natuurlijke taal, zoals u kunt vaststellen aan de hand van (1a). Men vergelijk ook een zin als (7):

- (7) Wie geeft Marie een cadeau?

De tweede eigenschap, de opdeelbaarheid in kleinere discrete eenheden (vgl. (3b)), behoeft eveneens nauwelijks uitleg. De in (6) gehanteerde eenheden staan opgesomd in (8):

- (8) 8, 2, 3, 5, 10, x, +, =

Met de manipuleerbaarheid (vgl. (3c)) komen we bij wat u wellicht zult zien als een zeer wezenlijke karakteristiek van uw vak. Zoals op uitingen in de natuurlijke taal allerlei bewerkingen kunnen worden toegepast (zie (4)), zo kunnen ook de uitingen in (6) worden gemanipuleerd:

- (9) a. $2^3 + 2 = 10$ (vgl. (6a))
 b. $2x = 10 - 5$ (vgl. (6c))

Tenslotte dan de recursiviteit (vgl. (3d)). Ook hier is uitleg nauwelijks vereist omdat de wiskunde bij wijze van spreken de oneindigheid heeft uitgevonden. Zoals u weet kunt u de uiting in (10) eindeloos uitbreiden.

(10) $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \dots$

De parallel met de zinsinbedding dringt zich nog verder op wanneer u denkt aan het tientallig stelsel, waar 1 tot en met 10 het beginpunt vormen, waarna dezelfde reeks een stap dieper herhaald wordt en daarna nog een stap dieper etc.

We kunnen nu verschillende conclusies trekken. Een belangrijke conclusie lijkt me dat we kunnen spreken van de taal van de wiskunde in vergelijking met natuurlijke taal. Die vergelijking is niet zomaar een metafoor, maar een die berust op zeer wezenlijke vergelijkbaarheid. U bent dus taalkundiger dan u wellicht dacht. De vergelijkbaarheid maakt het mogelijk om nu preciezer te kijken naar contextrijke wiskunde.

4 Contextrijke wiskundeonderwijs

Contextrijke wiskunde impliceert dat van de ene taal naar de andere moet worden geschakeld. Stel dat iemand uit een in natuurlijke taal uitgedrukte situatie een wiskundig probleem moet destilleren, vervolgens dit probleem in wiskundige taal moet oplossen, en dan de oplossing moet toepassen in de oorspronkelijke situatie, en daarbij de oplossing moet weergeven in natuurlijke taal. Schematisch kunnen we nu de volgende vijf talige stappen onderscheiden:

(11)

a. natuurlijke taaluiting x	-->	BETEKENIS X
b. BETEKENIS X	-->	formele taaluiting a
c. formele taaluiting a	-manipulaties->	formele taaluiting b
d. formele taaluiting b	-->	BETEKENIS Y
e. BETEKENIS Y	-->	natuurlijke taaluiting y

Op basis van de voorafgaande paragrafen kunt u deze vijf stappen met recht talig noemen. Dat neemt niet weg dat de wiskundige het meest te zeggen heeft over de stappen (11 b-d). De taalkundige bemoeit zich doorgaans met de uiteinden, (11a/e) dus.

Je kunt zeggen dat de 'ouderwetse' contextloze wiskunde verborgen zit in stap (11c). In dit artikel verdienen derhalve de overige stappen de meeste aandacht. Vanzelfsprekend richt ik hier de aandacht vooral op (11a/e), maar ik begin met een enkel woord over (11b/d).

De combinatie (11a/b) en de spiegel ervan, (11d/e), kunnen elk gekarakteriseerd worden als een vertaling. Een voorwaarde voor het maken van een geslaagde vertaling is dat men beide talen goed kent. Ieder die meer dan één taal redelijk goed beheerst, heeft de ervaring dat zich soms bepaalde dingen in de ene taal makkelijker onder woorden lijken te laten brengen dan in de andere taal. Het schakelen tussen verschillende talen wordt hierdoor extra gecompliceerd. In dit verband is ook de sensatie relevant van iemand die een tijd een andere taal gebruikt heeft, en het gemak waarmee dat uiteindelijk gaat omschrijft als 'dat hij nu ook denkt in de andere taal'.

Wie dus (11b/d) met succes wil nemen, dient de taal van de wiskunde goed te beheersen, en de werkelijkheid vanuit deze taal te kunnen benoemen; laten we maar zeggen: hij moet in deze taal kunnen denken. Net zoals dat geldt voor de beheersing van een tweede natuurlijke taal, is dat bepaald geen kleine opgave.

Vanuit de filosofie dat het er eigenlijk om te doen is dat iemand uit een situatie in de werkelijkheid een wiskundig probleem destilleert, dit oplost en weer toepast in de werkelijkheid, valt er wat voor te zeggen om de stappen (11a/e) zoveel mogelijk te mijden. Om een beeld te krijgen van de werkelijkheid is taal immers niet noodzakelijk: je kunt iets zien, horen, voelen en zo je conclusies trekken. Vanuit dit oogpunt is het terecht dat er veel met plaatjes

wordt gewerkt en dat er geen al te hoge taal-eisen worden gesteld aan de actieve stap (11e). Het is echter niet makkelijk om taal geheel te mijden, nog afgezien van het feit dat ook het verkrijgen van een beeld van de werkelijkheid via andere middelen dan taal zo z'n eigen communicatieproblemen met zich meebrengt.

Op het eerste gezicht verbleken bovendien de mogelijke problemen bij de stappen (11a/e) bij die van (11b/d). Immers, in paragraaf 2 is betoogd dat moedertaalsprekers hun moedertaal perfect beheersen dankzij het aangeboren vermogen om een moedertaal te leren. Inderdaad kunt u er van uitgaan, en er gebruik van maken, dat uw leerlingen de systematiek van het Nederlands even perfect kennen als u – als zij althans moedertaalsprekers zijn. Als dat laatste niet het geval is, zijn er aanzienlijke complicaties, waarop ik nog in zal gaan. Eerst echter iets over de problemen van de moedertaalsprekers, want die zijn er natuurlijk ook.

Het probleem van de moedertaalsprekers zit 'm hierin dat zij weliswaar thuis Nederlands hebben geleerd met nagenoeg dezelfde systematiek als de taal die op school wordt gehanteerd, maar dat de *schooltaal* toch op het eerste gezicht aanzienlijk kan verschillen van de *thuis taal*. De schooltaal is namelijk, al dan niet gesproken, schrijftaal, dat wil zeggen de gestandaardiseerde, gestileerde en geavanceerde variant van het Nederlands die gehanteerd wordt in openbare, formelere situaties. In vergelijking met de taal die iemand wellicht thuis tegenkomt, wordt de (gesproken) schrijftaal gekenmerkt door meer gecompliceerde constructies en – vooral – andere woorden. Voor iemand zoals u, die geheel en al thuis is in deze schrijftaal, is dat verschil soms moeilijk voorstelbaar: uitingen als in (12) zijn dan ook zeer gebruikelijk:

- (12) a. Mevrouw X is vandaag *verhinderd*
b. De *onderstaande* beweringen zijn *onjuist*
c. Het proefwerk is *redelijk* gemaakt
d. Deze afspraak is *direct van kracht*

Toch zou u de brugklassers niet de kost moeten geven die moeite hebben met de gecursiveerde frasen in (12). Men vergelijkte verder wat in paragraaf 2 is opgemerkt over woorden en constructies die relatief laat geleerd worden.

Het spreekt voor zich dat dit probleem niet voor iedere leerling in gelijke mate geldt. Wordt thuis de schrijftaal gesproken of wordt er veel gelezen, dan ligt de situatie anders dan wanneer dit niet het geval is. U mag er echter vanuit gaan dat u voor leerlingen niet zelden net zo onverstaanbaar bent als een gespecialiseerd politicus onverstaanbaar is voor u. Dit is geen pleidooi om de schrijftaal dan maar te mijden en uw toevlucht te zoeken tot het basisidoom van vroeg geleerde woorden. Uiteindelijk zal de leerling immers niet om de schrijftaal heen kunnen. Het is dus zaak zich bewust te zijn van mogelijke problemen, en zo redundant te zijn dat iemand de schrijftaal kan leren.

Een extra complicatie hierbij is dat leerlingen vaak geacht worden *geschreven* natuurlijke taal als uitgangspunt te nemen. Intonatie, gebaren en feedback die *mondelinge* communicatie kenmerken, vallen weg. De leerling moet dus niet alleen de gebruikte taal kennen, maar ook de vaardigheid hebben om om te gaan met op schrift gestelde taal. Vanuit de filosofie dat het uiteindelijk doel zit bij de stappen (11b/d) is er reden om de leerling hier zoveel mogelijk tegemoet te treden.

De problemen nemen aanzienlijk toe wanneer een leerling het Nederlands niet als moedertaal heeft geleerd of niet op de wijze waarop dat doorgaans geldt voor autochtone kinderen. Welke problemen er bij komen, hangt af van de precieze talige situatie. Zo kan het zijn dat een allochtoon kind op straat wel aardig wat van de systematiek van het Nederlands heeft opgepikt, maar vooral een veel kleinere woordenschat heeft dan een gemiddeld autochtoon kind. Het kan ook zijn dat belangrijke delen van die systematiek afwezig zijn en dus via tweede taalverwerving aangebracht moeten worden. Wellicht ten overvloede: wie niet over de totale systematiek van het Nederlands beschikt, heeft aanzienlijk minder sleutels om een boodschap te begrijpen. Als u in een Nederlandse tekst geconfronteerd wordt met een zin als (13) kunt u daar nog wel een touw aan vast knopen.

- (13) Toen sprokte kol een porg

In deze zin staan drie onbekende woorden: *sprokte*, *kol* en *porg*. Dankzij uw systematische kennis van het Nederlands kunt u weten dat *sprokken*, wat het

dan ook betekent, een werkwoord moet zijn dat hier in de verleden tijd staat. *Kol*, wat het ook betekent, moet het subject zijn ('degene die iets doet') en vermoedelijk is het een eigennaam, terwijl *een porg* het object is ('degene/datgene die/dat iets overkomt') en juist geen eigennaam is. Wie de systematiek mist, tast volledig in het duister.

5 Slot

Het is evident dat werken met contextrijke wiskunde betekent dat de wiskundeleraar met meer taal- en vertaalproblemen wordt geconfronteerd dan vroeger het geval was. En daarmee zijn we terug bij de suggestie dat een talenknobbel nu ook voor wiskunde noodzakelijk lijkt. Er zijn daarbij echter wel troostende opmerkingen te maken, al is de troost misschien wat schraal.

Zo moet erop gewezen worden dat de taalproblemen die nu via de contexten meer openlijke aandacht krijgen, natuurlijk al lang bestonden. Ik doel op andere lessen dan de wiskundelessen, waar vaak met heel wat meer context gewerkt moet worden. In feite waren die taalproblemen natuurlijk ook al aanwezig in de wiskundes: u maakt immers bij de communicatie gebruik van formele taal en natuurlijke taal. Anders gezegd, het taalprobleem dat erbij komt, is kwalitatief al aanwezig en is kwantitatief gering vergeleken bij wat er al is.

Je zou kunnen zeggen dat de discussie ons er nog eens op wijst dat het beheersen van taal weliswaar niet een voldoende voorwaarde is voor schoolsucces, maar op z'n minst een noodzakelijke voorwaarde. Het hanteren van taalproblemen is dan ook niet iets dat een enkele leraar Nederlands aangaat, maar typisch iets wat een gezamenlijke aanpak vergt. Dat geldt a fortiori voor de taalproblemen van allochtone kinderen, die voor de oplossing van hun problemen nog meer dan andere kinderen op de school zijn aangewezen. Het veronachtzamen van deze problemen kan grote individuele en maatschappelijke gevolgen hebben.

Dat de leraar wiskunde zich met taalproblemen bemoeit is om nog een andere reden niet vreemd. Ik

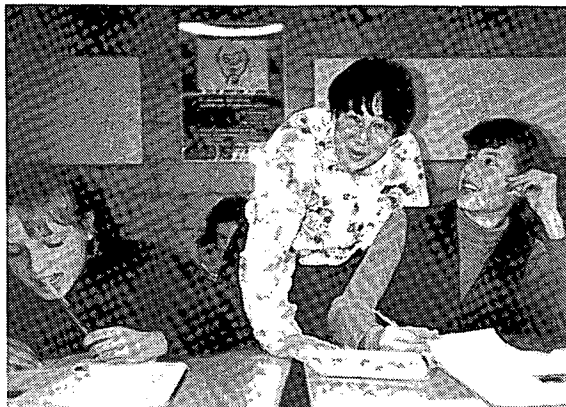
heb immers proberen te betogen dat de wiskundige eigenlijk een soort taalkundige is. De achtereenvolgende stappen die uw leerling moet zetten, wanneer hij uit de werkelijkheid een probleem moet destilleren om dit vervolgens op te lossen, zijn in wezen talige stappen. De vergelijkbaarheid van de taal van de wiskunde en natuurlijke taal is meer dan een handige metafoor. Dat brengt ons weer bij de talenknobbel en wiskundeknobbel waarmee we begonnen. Inderdaad, de vergelijkbaarheid heeft er in recent onderzoek toe geleid te veronderstellen dat de aangeboren talenknobbel voor een belangrijk deel samen moet vallen met de wiskundeknobbel.⁵

Noten

1. Dit artikel is in grote lijnen een schriftelijke weergave van een lezing gehouden op 7 november 1992 te Bilthoven op de studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars. Ik ben Judith Cramer dankbaar voor vele praktijkvoorbeelden, waarvan hier slechts een fractie verwerkt kon worden. Joop van Dormolen ben ik dankbaar voor literatuurverwijzingen naar wiskundigen die over taal bij/van wiskunde hebben geschreven.
2. De grondslag voor het taalkundig onderzoek dat plaatsvindt vanuit dit perspectief is gelegd door de Amerikaanse taalkundige en filosoof Noam Chomsky. Een recente, goed toegankelijke inleiding tot de zgn. generatieve visie op taalleren is Frijn & De Haan (1990).
3. Overigens staat het tweede werkwoord niet altijd achteraan, zoals zin (i) laat zien:
(i) hij *zal* een cadeau *geven* aan Marie
Ook in deze ogenschijnlijke uitzonderingen zit een systematiek. De woordgroep die in (i) rechts van het tweede werkwoord staat begint met een voorzetsel. Zulke woordgroepen blijken in het algemeen een vrijere positie te hebben dan de variant zonder voorzetsel. Vergelijk ook (iia-b):
(ii) a. *hij *zal* een cadeau Marie *geven*
 b. hij *zal* een cadeau aan Marie *geven*
4. Een interessante studie over het basisidioom is Van Loon-Vervoom (1989).
5. Men vergelijkte Koster (1988) en Wynn (1992).

Verwijzingen

- Frijn, J. & G. de Haan, 1990, *Het taallerend kind*, Foris, Dordrecht.
Koster, J., 1988, *Doelloze structuren*, Foris, Dordrecht.
Loon-Vervoom, W.A. van, 1989, *Eigenschappen van basiswoorden*, Swets & Zeitlinger B.V., Amsterdam/Lisse.
Wynn, K., 1992, 'Addition and Subtraction by Human Infants', in *Nature* aug. 27, p.749-750.



► 'Als leraar ben je er voor alle leerlingen'

Marianne Lintvelt, 43 jaar, sinds 1977 lerares aan de school in Purmerend die nu – na een fusie – het Da Vinci College heet, heeft dit jaar twee brugklassen, een mavo-havo-klas en een havo-vwo-klas. De eerste klassen krijgen drie uur wiskunde per week. In totaal zijn er dertien eerste klassen.

Wou je het liefst één of meer brugklassen?

Ja, ik wilde graag zien hoe het werken met de nieuwe methode en het nieuwe leerplan gaat. Ik vind het erg fijn om twee verschillende brugklassen te hebben, hoewel ik tot nu toe niet veel verschillen ontdekt heb.

Welke methode gebruiken jullie, en bevat het werken ermee?

We hebben als sectie veel tijd gestoken in het kiezen van een nieuwe methode. We hebben nu MW (6e editie), deze methode had ook mijn voorkeur. Voorgaande jaren werkte ik met veel plezier met een oudere versie, en nu zie ik nog heel wat bekende opgaven.

Heb je alle hoofdstukken tot nu toe gedaan?

Ja, behalve de herhaling. Van ieder hoofdstuk maken de MH-leerlingen basisstof en extra oefeningen; de gemengde opdrachten zijn voor de snelle leerlingen (en dat zijn er heel wat). De HV-leerlingen maken de basisstof, gemengde opdrachten en de pluspagina's. De samenvatting en het testbeeld wor-

den bij de voorbereiding op een proefwerk gebruikt. De GWA (geïntegreerde wiskundige activiteiten), namelijk de kubushuisjes, heb ik in groepjes van vier laten maken.

Hoe gaat het?

Mijn leerlingen vinden wiskunde een leuk vak en het boek spreekt hen erg aan. Mijn MH-leerlingen vinden dat er soms moeilijke taal in het boek staat, 'maar als je goed doorleest, staat alles goed uitgelegd'. Het hoofdstuk over verhoudingen werd tot nu toe als het meest moeilijke ervaren.

Het boek leent zich, voor beide groepen die ik heb, goed voor zelfwerkzaamheid.

Kun je een onverwacht voorval noemen?

Opvallend vond ik hoe gemakkelijk leerlingen met de stof uit het hoofdstuk over lichamen omgingen. Vragen als: vanuit welke richting is een foto genomen, teken een aanzicht van een bouwwerk, werden moeiteloos beantwoord. Vooraf had ik gedacht dat dit moeilijk zou zijn.

Wat vind je de hoofdzaak bij het geven van wiskunde?

Als leraar ben je er voor alle leerlingen. Ik vind het belangrijk dat alle leerlingen plezier in wiskunde hebben. Met het nieuwe leerplan en de gekozen methode denk ik dat dat wel zal gebeuren.

Martinus van Hoorn

► Wiskunde leren in kleine heterogene groepen

Jelske Kuijper

In 1991 promoveerde Rijkje Dekker aan de Rijksuniversiteit Utrecht op het proefschrift '*Wiskunde leren in kleine heterogene groepen*'*. In dit boek plaatst zij een experiment met groepjes leerlingen in een theoretisch kader, gebaseerd op onder meer de theorie van P.van Hiele en D.van Hiele-Geldof over niveauverhoging tijdens het leerproces. Zij beschrijft een wiskundepakket dat ze ontwerpt, observeert groepjes leerlingen die hiermee aan de slag gaan en trekt uit haar observaties enige conclusies. Daarbij is zij met name gericht op de niveauverhoging die het samenwerken van leerlingen, die een zeer verschillende aanleg voor wiskunde hebben, al dan niet met zich mee brengt.

Een groot deel van het proefschrift wordt in beslag genomen door de observatieverslagen van de vier lessen (van 75 minuten elk) in vijf groepjes brugklasleerlingen. Elk groepje is heterogeen samengesteld, zowel wat betreft het gegeven schooladvies (dit varieert van lbo t/m vwo), als wat betreft de prestaties bij het vak wiskunde. De verslagen zijn een verkorte weergave van de ongeveer 45 pagina's per les, waarin bandopnamen en aantekeningen werden verwerkt. In de aantekeningen krijgen de geringste gebeurtenissen, tekeningetjes en gebaren een plaats.

Hoe belangrijk deze gedetailleerde weergave ook is voor een onderzoek, voor de leesbaarheid van het proefschrift is het een handicap. Na zich volledig te hebben ingeleefd in de ervaringen in het eerste heterogene groepje, moet de lezer zich opnieuw en opnieuw een voorstelling maken van de diverse leerlingen in telkens een ander groepje, met weer een ander meisje met mavo-/havo-advies en weer een jongen met lbo-/mavo-advies. Dekker beëindigt haar werk met het analyseren van de processen in de verschillende groepjes en haalt daarbij verduidelijkende fragmenten nog eens naar voren.

De docent heeft in de opzet van het experiment een duidelijk omschreven rol. Hij grijpt bij het proces in een groepje zelden in, en als hij het doet is het om iets kort uit te leggen, een eindje op weg te helpen en vooral om de leerling te vragen zijn oplossingen te verklaren. Daarnaast zijn er doelbewust klassikale momenten ingelast, waarin de klas het hele proces van tonen, uitleggen, bekritisseren en verbeteren doorloopt; de docent is dan discussieleider.

Dekker constateert, dat heterogeniteit in een groep onder alle genoemde voorwaarden niet belemmerend, maar juist niveauverhogend werkt voor alle leden van de groep, voor de één gaat het snel, voor de ander gebeurt het in een laat stadium. In twee van de groepjes is de heterogeniteit qua voorkennis erg groot. Aardig is het te constateren dat in deze twee groepjes de participatie van de leerlingen het meest evenwichtig verdeeld is. De leerlingen met veel voorkennis domineren kennelijk niet de discussie. Er blijkt echter ook, dat de leerlingen met *oplossingen op een lager niveau* minder uitleg geven dan de snellere leerlingen, terwijl dat (het uitleggen) juist het proces van de niveauverhoging versnelt. De vraag waarmee Dekker eindigt is dan ook wat er aan gedaan kan worden die leerlingen daar wel toe te krijgen.

De term *oplossingen op een lager niveau* is van Dekker; het mag discutabel heten of iedereen nog het woord *oplossing* wil gebruiken als het niveau laag is.

Voor mij blijft het de vraag of je leerlingen die sneller vooruitgaan dan anderen er altijd een plezier mee doet ze in heterogene groepjes te laten werken. Het is duidelijk dat ze zelf ook leren van

hun uitleg aan anderen. Het is ook duidelijk dat samenwerken, zoals het in deze groepjes plaats vindt, voldoet aan een belangrijke eis bij de basisvorming. Maar ik kan me voorstellen dat het voor de betere leerling ook goed kan zijn als hij zo nu en dan in galop mag.

Dit is niet de enige vraag waarmee ik na het lezen van het proefschrift blijf zitten. Maar enkele vragen stipt Dekker zelf al aan, bijvoorbeeld die van de representativiteit van het onderzoek. Het is een beperkt onderzoek, het speelt zich af in een betrekkelijk ideale situatie, het is gebaseerd op speciaal ontworpen lesmateriaal. Voor mij komt daar nog bij de beperking tot slechts één onderwerp (tijd-afstand-grafieken); valt voor andere stukken leerstof ook altijd geschikt materiaal te ontwerpen? En in hoeverre waren de leerlingen geïnformeerd over het onderzoek, en werden ze daardoor en door de aanwezigheid van de observator beïnvloed? In hoeverre blijkt er in een later stadium nog sprake te zijn van de bewerkstelligde niveauverhoging?

Maar dit zijn aanmerkingen die het lezen van het proefschrift, voor wie van het aangedragen materiaal en de vele suggesties iets wil leren, niet in de weg moeten staan.

* Rijkje Dekker, Wiskunde leren in kleine heterogene groepen; Rijksuniversiteit Utrecht, 1991.
De Lier, Academisch Boeken Centrum.

Mededeling

Studiedag Vrouwen en Wiskunde

De werkgroep Vrouwen en Wiskunde organiseert in samenwerking met de werkgroep Vrouwen en Natuurwetenschappen op 19 maart a.s. een studiedag voor docenten, studenten en andere belangstellenden. Deze studiedag vindt plaats in het CSB-zalen-centrum te Utrecht. Op deze dag worden twee thema's aan de orde gesteld:

1. De plannen voor de profilering van de tweede fase voortgezet onderwijs en de eventuele gevolgen voor meisjes en exacte vakken.
2. De voorbeeldopgaven eindtoetsen basisvorming.

Meer informatie kunt u krijgen bij het Centrum Vrouwen en Exacte Vakken, Postbus 85475, 3508 AL Utrecht. Tel. 030-856746 op di, woe, do.

● 40 jaar geleden ● ●

► Vraagstukken

841. a. Los op: ${}^2\log {}^2\log(2^{x+1} + 3) = 1 + {}^2\log x$ en benader de uitkomst met behulp van een logaritentafel.

b. Bepaal de positieve waarden van x , waarvoor geldt:

$${}^x\log(x+3) < {}^x\log 2x.$$

842. De termen van de oneindig voortlopende rekenkundige reeks

596, 594, 592,

verenigt men op de volgende wijze tot groepen:

(596); (594, 592); (590, 588, 586);

De k de groep bevat dus k termen.

Bepaal het rangnummer van de eerste groep, waarin een negatief getal voorkomt.

843. Los x en y op uit het volgende stelsel vergelijkingen:

$$x(y^2 - 3y - 10) = 4y^2 - 12y - 40;$$

$$\sqrt{4y+5} + \sqrt{3y+1} = 2^{x-2} + 1.$$

844. Zijn D , E en F de raakpunten van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$ met de zijden BC , CA en AB en I_a , I_b en I_c de middelpunten van de aangeschreven cirkels, die aan die zijden raken, dan gaan de rechten I_aD , I_bE en I_cF door één punt. Bewijs dat.

845. AD , BE en CF zijn de deellijnen in $\triangle ABC$. De as van AD snijdt de zijlijn BC in P , die van BE snijdt de zijlijn AC in Q en die van CF snijdt de zijlijn AB in R . Bewijs, dat P , Q en R collineair zijn.

Vraagstukken uit Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 41 (1953-1954). De nrs. 841 t/m 843 waren afkomstig uit het Eindexamen H.B.S.-B 1953.

● Werkblad ●

1. Als je bij de schoenmaker je schooltas laat repareren zit er op de reparatiekosten BTW.

a. Als de reparatiekosten zonder BTW f 25,- bedragen, en daar zit 9% BTW op, hoeveel moet je dan betalen?

b. De regering wil het BTW-tarief voor reparatiekosten wijzigen van 9% in 18%.

Hoeveel zou je dan voor het repareren van je schooltas moeten gaan betalen?

c. Van een andere reparatie is bekend, dat de kosten met 9% BTW f 30,- bedragen.

Hoe groot zijn de kosten met 18% BTW?

2. Van een mavo-school met drie mavo 3-klassen is op zekere dag gekeken hoeveel leerlingen een geodriehoek en ook hoeveel leerlingen een zakrekenmachine bij zich hadden.

<i>klas</i>	<i>aantal leerlingen</i>	<i>aantal geo's</i>	<i>aantal ZRM's</i>
m3a	25	17	21
m3b	29	21	24
m3c	21	13	17

a. Hoeveel % van de leerlingen uit m3a had een geodriehoek bij zich? En hoeveel % uit m3b? En hoeveel % uit m3c?

Welke klas heeft procentueel de meeste geodriehoeken bij zich?

b. Welke klas heeft procentueel de meeste rekenmachines bij zich?

● Werkblad ●

3. Bij de spoorwegen is van alles bedacht om de reizigers de trein in te krijgen, door ze kortingen te geven.

Eén van deze manieren is de rail-aktief-kaart.

Een rail-aktief-kaart kost f 99,- en geeft recht op 40% korting op alle enkele reizen en retours (mits er na 9 uur 's ochtends gereisd wordt).



a. Een enkele reis Zwolle-Amsterdam kost met deze kortingskaart f 14,50.

Hoeveel kost deze reis zonder korting?

b. Hoe vaak moet iemand deze reis maken om de aanschaf van de rail-aktief-kaart terug te verdienen?

4. In een bedrijf zijn de onderhandelingen over de salarissen voor volgend jaar begonnen. De vakbonden eisen 2,45% meer netto salaris. De werkgever biedt geen salarisverhoging, maar wel een eenmalige netto-uitkering van f 750,-.

a. Benno verdient per maand netto f 1700,-.

Wat zou Benno het liefste willen: het voorstel van de vakbonden, of het aanbod van de werkgever?

b. Wiesje verdient per maand netto f 3000,-.

Wat zou Wiesje het liefste willen?

c. Bij welk netto maandsalaris maakt het niet uit welk voorstel wordt aangenomen?

► Een boeiende vraag (I)

F. van der Blij

Enige tijd geleden kreeg ik van de heer W.A.K. Maas uit Oosterbeek een inspirerende brief. Een neef van hem had hem twee problemen opgegeven. Of ik er iets mee kon?

Het eerste was de kettingbreuk

$$\frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{\frac{1}{4}}{\dots}}}}$$

Een beetje proberen levert ons

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{8}{11} = 0.72727 \dots$$

en gaan we verder tot $1/4$ dan wordt de waarde: $0.71698\dots$, als we afbreken bij $1/5$, $1/6$ en $1/7$ vinden we $0.71844\dots$, $0.71826\dots$ en $0.71828\dots$

Zou $e - 2 = 0.71828\dots$ de waarde kunnen zijn?

Hoe zou je zo iets bewijzen?

Het leek iets te maken te hebben met de differentievergelijking:

$$t(k-1) = \frac{1/k}{1 + t(k)}.$$

Maar hoe los je die op?

Het prettige van zulke vragen is dat je er direct mee aan het werk kunt gaan, wat experimenteren met rekenmachine en hoofdrekenen om verdere vermoedens te krijgen. En dan gaan denken. En niet te gauw in de bibliotheek gaan zoeken of er ergens iets over staat. Vast en zeker zal er wel eens iets gepubliceerd zijn wat met deze problemen verband houdt. Maar het is leuker eerst zelf eens te zoeken.

De redactie stelde voor er een vervolgverhaal van te maken. Er komen twee afleveringen. In de eerste aflevering gaan we de kettingbreuk te lijf. In de tweede de differentievergelijking en we laten verder zien hoe deze twee samenhangen. Tot slot zullen we toch nog even in de literatuur zoeken.

Omdat kettingbreuken noch differentievergelijkingen tot de dagelijkse lectuur van de lezer zullen behoren gaan we iets breder op deze objecten in dan voor ons probleem nodig is.

De bedoeling van deze artikelen is iets van het zoek-procédé te laten zien, iets van het spannende van het zelf ontdekken. De resultaten zijn onbelangrijk.

Wellicht is het voor de lezers van Euclides aardig om eens met mij mee te denken over de vraag hoe je zulke problemen oplost.

Maar eerst een heel ander verhaal om duidelijk te maken wat kettingbreuken zijn en waarvoor je ze gebruiken kan.

Ik maakte op de rekenmachine een deling van twee gehele getallen van vijf cijfers. Op het venster zie ik 0.7182818287 .

Zou ik die twee getallen hieruit kunnen terug vinden?

Even een rare redenering; ik zoek tien cijfers en ik weet tien cijfers; helemaal onmogelijk lijkt het dus niet. Nog een andere opmerking: twee verschillende breuken (met tellers en noemers van vijf cijfers) hebben een verschil dat groter dan

$$\frac{1}{99998} - \frac{1}{99999} \approx 10^{-10}$$

is. Dus zullen de antwoorden van zulke delingen altijd tenminste in het laatste van de tien cijfers op het display moeten verschillen. Maar al met al, proberen is wel onbegonnen werk! Hier helpen nu kettingbreuken.

We gaan uit van een getal x tussen 0 en 1. Dan is $1/x$ groter dan 1. We schrijven:

$$\frac{1}{x} = a_1 + y$$

waarin a_1 geheel is en $0 \leq y < 1$.

Nu is (als $y \neq 0$) $1/y$ groter dan 1, we schrijven:

$$\frac{1}{y} = a_2 + z$$

waarin a_2 geheel is en $0 \leq z < 1$.

Enzovoorts.

Stelling:

Als x een rationaal getal is breekt deze procedure een keer af, we vinden een keer een rest 0.

Stelling:

De rij $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ legt het getal x eenduidig vast. (Voor de extra belangstellende nog de opmerking dat deze rij dan en slechts dan periodiek wordt als x de wortel is van een vierkantsvergelijking met gehele coëfficiënten.)

Ons idee is nu dat we voor het decimale getal in de display de rij $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ kunnen bepalen en uit deze rij weer de gewone, er bij behorende, breuk kunnen construeren. De echte gezochte breuk en de decimale breuk zullen niet veel verschillen.

Bewering: (slordig geformuleerd)

Als twee getallen x en y niet 'veel' verschillen zullen de bijbehorende rijen gehele getallen een 'flink stuk' samenvallen.

Als bij het rationale getal x de rij: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ hoort, dan zal bij een goede benadering y een rij $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}^*, a_{k+2}^*, \dots$ horen met 'nogal grote' a_{k+1}^* .

We laten het aan de lezer over om te proberen van deze slordige beweringen netjes geformuleerde stellingen te maken en deze te bewijzen. We zullen heuristisch te werk gaan, misschien werkt het (je weet nooit hoe een koe een haas vangt) en hebben we eenmaal een vermoeden voor de gewone breuk dan kunnen we eenvoudig controleren of de deling op het display inderdaad de gewenste cijfers geeft. We gaan er nog even op in hoe we uit de rij $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ de gewone breuk construeren. We kunnen de kettingbreuk natuurlijk gewoon uitschrijven op een groot vel papier en dan stap voor stap de breuk-

strepen op de laatste na weg werken. Maar dat is wel een heel gedoe! Er is een handig algoritme. We bekijken de stappen één voor één:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} &= \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1}, \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} \\ &= \frac{a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3} \end{aligned}$$

We schrijven deze breuken als:

$$\frac{T_1}{N_1}, \frac{T_2}{N_2}, \frac{T_3}{N_3}, \dots$$

met dus:

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 & N_1 &= a_1 \\ T_2 &= a_2 & N_2 &= a_1 a_2 + 1 \\ T_3 &= a_2 a_3 + 1 & N_3 &= a_1 a_2 a_3 + a_3 + a_1 \\ T_4 &= a_2 a_3 a_4 + a_4 + a_2 & N_4 &= a_1 a_2 a_3 a_4 + a_3 a_4 \\ & & & + a_1 a_4 + a_1 a_2 + 1 \end{aligned}$$

Zouden we algemene formules voor T_k en N_k kunnen vinden? Dat lukt niet, maar er zijn fraaie recurrente betrekkingen. Zowel T_k als N_k voldoen aan de betrekking:

$$X_{k+2} = a_{k+2} X_{k+1} + X_k.$$

Deze regel klopt in bovenstaande tabel, om hem te bewijzen behoeven we nog slechts een inductiestap te bewijzen.

Hoe ontstaat

$$\frac{T_{k+1}}{N_{k+1}} \text{ uit } \frac{T_k}{N_k}?$$

In T_{k+1} en N_{k+1} komt a_{k+1} voor. Als we deze a_{k+1} vervangen door

$$a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+2}} \text{ komen we bij } \frac{T_{k+2}}{N_{k+2}}.$$

Uit de inductieveronderstelling weten we:

$$T_{k+1} = a_{k+1} T_k + T_{k-1} \text{ en } N_{k+1} = a_{k+1} N_k + N_{k-1}$$

$$T_{k+2}^* = \left(a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+2}} \right) T_k + T_{k-1} \text{ en}$$

$$N_{k+2}^* = \left(a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+2}} \right) N_k + N_{k-1}.$$

Maar dit is nog niet goed, we werken immers breuken weg om de volgende benadering te krijgen; we schrijven:

$$T_{k+2} = a_{k+2} T_{k+1}^* \text{ en } N_{k+2} = a_{k+2} N_{k+1}^*$$

en dus

$$\begin{aligned} T_{k+2} &= (a_{k+1}a_{k+2} + 1)T_k + a_{k+2}T_{k-1} \\ &= a_{k+2}(a_{k+1}T_k + T_{k-1}) + T_k \\ &= a_{k+2}T_{k+1} + T_k. \end{aligned}$$

De inductiestap is voltooid! Voor N_k gaat het precies eender.

Om het nog overzichtelijker te maken voeren we in $T_{-1} = 1; N_{-1} = 0; T_0 = 0; N_0 = 1$.

In het volgende schema zijn nu de opeenvolgende benaderende breuken

$$\frac{T_k}{N_k}$$

achtereenvolgens uit te rekenen.

			a_1	a_2	a_3	a_4
T	1	0	1	a_2	$a_2a_3 + 1$	$a_2a_3a_4 + a_4 + a_2$
N	0	1	a_1	$a_1a_2 + 1$	$a_1a_2a_3 + a_3 + a_1$	$a_1a_2a_3a_4 + a_3a_4 + a_1a_4 + a_1a_2 + 1$

Het schema werkt als volgt:

			a_{k+2}
	T_k	T_{k+1}	u
	N_k	N_{k+1}	v

met

$$u = a_{k+2} T_{k+1} + T_k, v = a_{k+2} N_{k+1} + N_k.$$

Nu hebben we genoeg materiaal om ons sommetje op te lossen.

Bij 0.7182818287 hoort de rij (met de rekenmachine eenvoudig te vinden)

1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 85, ...

In ons schema:

	1	2	1	1	4	1	1	6	1	1	8	1	1
1	0	1	2	3	5	23	28	51	334	385	719	6137	6856
0	1	1	3	4	7	32	39	71	465	536	1001	8544	9545

Berekenen we 12993/18089 met de rekenmachine dan komt er inderdaad 0.7182818287 in het venster te staan. (Voor de liefhebbers nog een extra opmerking: bereken ik op de TI-81 de rij voor 0.7182818287 dan komt er inderdaad de bovengenoemde rij. Maar bereken ik de rij voor 12993/18089 dan komt er een andere rij, omdat de rekenmachine meer decimalen vasthoudt dan in het display getoond worden, er komt dan een veel mooiere rij, namelijk 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 2, 109273, ... maar de gewone breuk die we met deze rij vinden door tot het 'grote' getal te gaan is dezelfde als die we eerder vonden.)

Wat heeft dit alles met het door de heer Maas gestelde probleem te maken? Zijn kettingbreuk ziet er heel anders uit, de getallen staan op een andere plaats en zijn niet geheel!

Stiekem zagen we natuurlijk al een stukje van de kettingbreuk in rij voor $e - 2 = 0.718281828459 \dots$. Maar dat helpt echt niet. (De kettingbreuk van $e - 2$ is inderdaad heel mooi, opeenvolgende even getallen voorafgegaan en gevolgd door een 1.)

Echt wiskundig generaliserend bezien we nu de kettingbreuk:

$$a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \frac{b_3}{a_4 + \frac{b_4}{\dots}}}}$$

Hierbij maken we weer gewone breuken

$$\frac{T_1}{N_1} = \frac{b_1}{a_1}, \frac{T_2}{N_2} = \frac{b_1a_2}{a_1a_2 + b_2};$$

$$\frac{T_3}{N_3} = \frac{b_1a_2a_3 + b_1b_3}{a_1a_2a_3 + b_2a_3 + a_1b_3}$$

Geheel analoog aan het bovenstaande geldt nu:

$$T_{k+2} = a_{k+2}T_{k+1} + b_{k+2}T_k,$$

$$N_{k+2} = a_{k+2}N_{k+1} + b_{k+2}N_k.$$

Nu we de eis $a_k \in \mathbb{Z}^+$ en $b_k = 1$ lieten vallen is er natuurlijk geen eenduidigheid meer.

Om de waarde van de kettingbreuk te bepalen moeten we proberen T_k en N_k te berekenen en vervolgens

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T_k}{N_k}$$

bepalen.

De differentievergelijking

$$(*) X_{k+2} = a_{k+2}X_{k+1} + b_{k+2}X_k$$

is lineair, als we twee oplossingen P_k en Q_k gevonden hebben is $\lambda P_k + \mu Q_k$ voor iedere λ en μ ook een oplossing. Dit volgt direct door substitutie.

Wanneer we twee beginwaarden X_1 en X_2 weten zijn alle X_k voor $k \geq 3$ door de vergelijking (*) vastgelegd.

Bij twee gevonden oplossingen P_k en Q_k kunnen we proberen λ en μ te bepalen uit

$$\lambda P_1 + \mu Q_1 = X_1$$

$$\lambda P_2 + \mu Q_2 = X_2$$

en dan is de rij X_k gevonden.

(Het gaat er dus om twee oplossingen te vinden, die niet een veelvoud van elkaar zijn.)

Bij de kettingbreuk van de heer Maas geldt $a_k = 1$ en $b_k = \frac{1}{k}$.

We moeten dus de vergelijking

$$X_{k+2} = X_{k+1} + \frac{1}{k+2} X_k$$

oplossen.

Eén oplossing zien we direct:

$$X_k = k + 2$$

Maar hoe vinden we een tweede?

(In de literatuur, bijvoorbeeld in een klassiek boek als van Nörlund *Differenzenrechnung* staat wel een methode, maar die wil ik nu niet gaan opzoeken.)

Schrijven we $A_k = k + 2$, dan is $A_{-1} = 1$, $A_0 = 2$.

We zoeken van (*) oplossingen met

$$T_{-1} = 1 \quad T_0 = 0$$

$$N_{-1} = 0 \quad N_0 = 1$$

Stel nu

$$A_k = \lambda T_k + \mu N_k$$

dan geldt $\lambda = 1$ en $\mu = 2$ dus

$$A_k = T_k + 2N_k,$$

$$k + 2 = T_k + 2N_k,$$

$$\frac{T_k}{N_k} = \frac{k+2}{N_k} - 2 = L_k - 2.$$

Het vermoeden was

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T_k}{N_k} = e - 2$$

Zou

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = e?$$

We berekenen nu wat waarden van N_k en van L_k :

$$N_0 = 1$$

$$L_0 = 2$$

$$N_1 = 1$$

$$L_1 = 3$$

$$N_2 = 3/2$$

$$L_2 = 8/3$$

$$N_3 = 11/6$$

$$L_3 = 30/11$$

$$N_4 = 53/24$$

$$L_4 = 144/53$$

$$N_5 = 103/40$$

$$L_5 = 280/103$$

$$N_6 = 2119/720$$

$$L_6 = 5760/2119$$

De tellers van de L_k lijken mooie getallen te zijn, die wellicht met faculteiten samenhangen, de noemers bevatten vreemde (grote) priemfactoren. Omdat de limiet e moet zijn brengt dit er ons toe te proberen te bewijzen dat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{L_k} = \frac{1}{e}.$$

Nu geldt

$$\frac{1}{e} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!}.$$

Het zou mooi zijn als de partiële sommen van deze reeks iets met L_k te maken zouden hebben. We schrijven er een aantal op:

$$1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{11}{30}, \frac{53}{144}, \frac{103}{280}, \frac{2119}{5760}, \dots$$

We vermoeden dus dat

$$\frac{1}{L_k} = \sum_{s=0}^{k+2} \frac{(-1)^s}{s!}.$$

Het klopt voor de beginwaarden, we gaan met inductie het bewijs leveren. Laat voor alle $n < k$ de relatie gelden, dan

$$N_k = N_{k-1} + \frac{1}{k} N_{k-2},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_k} &= \frac{1}{k+2} \left[(k+1) \cdot \sum_{s=0}^{k+1} \frac{(-1)^s}{s!} + \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^s}{s!} \right] \\ &= \frac{1}{k+2} \left[(k+2) \cdot \sum_{s=0}^{k+1} \frac{(-1)^s}{s!} - \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{s=0}^{k+1} \frac{(-1)^s}{s!} + \frac{(-1)^{k+2}}{(k+2)!} = \sum_{s=0}^{k+2} \frac{(-1)^s}{s!}.$$

Samenvattend constateren we dat we bewezen hebben

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{L_k} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} = \frac{1}{e}$$

$$\text{en dus } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T(k)}{N(k)} = e - 2.$$

Waarmee de berekening van de kettingbreuk voltooid is.

Volgende keer gaan we de differentievergelijking te lijf. Aan de hand van

$$t(k) = \frac{1}{k \cdot t(k-1)} - 1$$

kunt u alvast met rekenmachine (of computer) bij verschillende beginwaarden voor $t(0)$ eens proberen of de rij tot een limiet lijkt te naderen!

(Over kettingbreuken is in vele boeken over algebra en getaltheorie wel wat te vinden, een klassiek boek met veel informatie is O. Perron: *Die Lehre von den Kettenbruechen*, I en II.)

Mededelingen

Statistische Dag 1994

Op woensdag 30 maart 1994, van 9.30 tot 16.30 uur, vindt de jaarlijkse Statistische Dag van de Vereniging Voor Statistiek plaats in de Jaarbeurs te Utrecht.

De hoofdlezing in de ochtend en een thema-sessie in de middag staan in het teken van kwantitatieve methoden in dienst van mens en milieu. De ochtendlezing zal gehouden worden door de heer van Egmond van het Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieuhygiëne, die zal ingaan op de toepassing van kwantitatieve methoden (wiskunde) bij het RIVM. De thema-sessie 's middags kent nog enkele lezingen uit het RIVM en daarbuiten met de nadruk op milieutoepassingen. Daarnaast vinden parallel sessies

plaats over een diversiteit aan onderwerpen uit de statistiek en operations research.

De VVS nodigt u van harte uit deze dag te bezoeken. De kosten bedragen f 40,-, inclusief lunch. Na aanmelding worden het programma, een lunchbon en een acceptgiro toegezonden.

Aanmelden graag zo spoedig mogelijk bij:

VVS-Administratie

3-MA

Postbus 282

1850 AG Heilo

onder vermelding van adres en woonplaats. Aanmelding houdt de toezegging in de kosten ad f 40,- te voldoen.

Evolutie? Reken maar!

Themadag aan de faculteit Wiskunde en Informatica van de Universiteit Utrecht op zaterdag 16 april 1994

Onze wereld is constant in beweging, in ontwikkeling. Techniek, natuur, mens en dier evolueren. Aan veel hedendaagse ontwikkelingen ligt het werk van wiskundigen en informatici ten grondslag.

De wiskunde en informatica evolueren zelf ook. De stormachtige ontwikkelingen in het computergebruik zullen niemand ontgaan zijn, maar ook in de wiskunde met zijn eeuwenlange geschiedenis worden nog steeds nieuwe ontdekkingen gedaan: de chaostheorie of het ontwikkelen van grootschalige computersimulaties (computational science) zijn daar voorbeelden van.

De faculteit Wiskunde en Informatica nodigt wiskundeleraars en hun leerlingen uit voor een kijkje achter de schermen. De faculteit hoopt leerlingen duidelijk te maken dat het onderzoek aan de universiteit soms nog maar weinig lijkt op de wiskunde en de informatica waar ze op het vwo kennis mee maken.

Naast het leerlingenprogramma (dat is afgestemd op 4/5 vwo) is er ook een speciaal docentenprogramma: daarin komen nieuwe ontwikkelingen binnen het onderwijs aan de orde, o.a. toetsen ontwerpen, een nieuw lespakket over logaritmen, evolutie als context voor de wiskundeles. Ook is een discussieworkshop gepland over ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs.

Behalve leerlingen van 4/5 vwo en hun docenten zijn ook andere belangstellenden van harte welkom.

Ook zal op de themadag het winnende team van de Wiskunde A-Olympiade bekend gemaakt worden. De prijsuitreiking is aan het eind van de middag.

Datum: zaterdag 16 april 1994

Tijd: 10 - 16 uur

Plaats: Trans 1, Leuvenlaan 1, de Uithof, Utrecht

Toegang: gratis

Aanmelden: verplicht, voor 14 maart a.s.; vraag het aanmeldingsformulier aan: tel. 030-611611 (Freudenthal instituut, Ada Ritzer-de Graaf/Betty Heijman).

'Rekenen in W 12-16'

► Handig rekenen

Monica Wijers

Een leerling uit de brugklas stuit op het probleem $970 : 100$ en lost dat zo op:

$$\begin{array}{r} 100/970 \setminus 9,07 \\ \underline{900} \\ 700 \\ \underline{700} \\ 0 \end{array}$$

Cijferen geeft zekerheid, vooral voor zwakke rekenaars, zo horen we vaak zeggen. Uit onderzoek blijkt echter dat er heel veel fouten bij cijferen worden gemaakt. In dit geval zou een rekenmachine een zekerder weg geweest zijn. Maar wij zijn van mening dat zo iets toch uit het hoofd gedaan zou moeten worden. Staartdelingen en onder elkaar vermenigvuldigen worden in het dagelijks leven nauwelijks gebruikt.

In het W12-16 programma wordt dan ook geen expliciete aandacht aan cijferen besteed. Daarvoor in de plaats wordt de zakrekenmachine gebruikt, gecombineerd met hoofdrekenen en schattend rekenen. Om dat vaardig te kunnen moeten de leerlingen inzicht hebben in de getallen zelf en in de structuur van de bewerkingen; bovendien is een goede beheersing in het getalgebied tot 100 een vereiste. Met deze bagage willen we leerlingen in staat stellen een handige oplossingsstrategie te kiezen.

Maar hoe ga je daar in de klas mee om? In een voorgaand stukje over de kommagetallen hebben we al

wat voorbeelden laten zien. Hier volgen nog enkele suggesties.

Delingen uitvoeren, zeker met grote of lastige getallen, gebeurt handig en snel met de zakrekenmachine, ook hierbij is schatten vooraf belangrijk. Willen we aandacht besteden aan inzicht in de bewerking, dan is een vraag naar de rest bij een deling op de zakrekenmachine een geschikte vraag.

De kaartclub heeft een prijs in de loterij gewonnen van f 12500. Aan het lot hebben 38 mensen meebetaald. De prijs moet eerlijk verdeeld worden.

Besloten wordt in hele gulden uit te betalen en de rest weer in de pot te storten waaruit de nieuwe loten betaald worden. Hoeveel gaat er in de pot?

Andere mogelijkheden zijn sommen waarbij niet de uitkomst hoeft te worden berekend maar waar op grond van schatten (redeneren) het goede antwoord kan worden gekozen.

$$99,4 \times 5,5 =$$

Welk antwoord zal het goede zijn?

$$54,67 \quad 546,7 \quad 5,467$$

Om leerlingen te laten ervaren dat uit het hoofd rekenen soms echt sneller is dan met de zakrekenmachine zijn er wedstrijden uit te voeren. Bij het ontwerpen van sommen voor zo'n wedstrijd is het belangrijk te realiseren dat vermenigvuldigen met machten van 10 uit het hoofd razendsnel gaat (moet gaan) en dat het intypen van alle nullen op de zakrekenmachine veel werk is.

Een andere motivatie voor hoofdrekenen en schattend rekenen kan gevonden worden in geldrekenen: Geef een prijslijstje, met de vraag: heb ik genoeg aan f 25,- om deze boodschappen af te rekenen? Eerst schatten en daarna controle met de zakrekenmachine.

Hoofdrekenen moet onderhouden worden, wil het snel blijven gaan. Veel leerlingen blijken bijvoorbeeld de 2 minuten testen uit Praktisch Rekenen leuke activiteiten te vinden. De opgaven worden zo gekozen dat handige strategieën voordeel opleveren: bijvoorbeeld eerst 20×35 vragen en dan 19×35 . Blijf geregeld stilstaan bij de door leerlingen gekozen manier van rekenen. En daag ze uit tot het zoeken van handige strategieën, als dit mogelijk is. Een flexibele houding, daar gaat het om!



De 32e Nederlandse Wiskunde Olympiade 1993

H.N. Schuring

De eerste ronde

De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1993 is gespeeld op vrijdag 12 maart. Uit een vorig jaar gehouden enquête is gebleken dat meer dan 95% van de wedstrijdleiders een voorkeur had voor een vrijdag voor de organisatie van de eerste ronde. De deelnemers kregen 3 uur de tijd om te proberen een antwoord te vinden op 13 opgaven; 6 in categorie A, waarop 2 punten per opgave gescoord kon worden, 4 in categorie B, voor 3 punten per opgave en 3 in categorie C met 4 punten per opgave. De maximale score bedroeg dan ook 36 punten, wat geen der deelnemers behaald heeft.

Het overzicht van de eerste ronde 1993 is gebaseerd op de resultaten van 2111 deelnemers, die de wedstrijdleiders van 224 scholen naar ons opgestuurd hebben.

De cesuur is gelegd bij score 21, wat zeggen wil dat deelnemers die 21 of meer punten behaalden, worden uitgenodigd voor de tweede ronde.

Op het resultatenformulier hebben we gevraagd aan te geven hoeveel leerlingen de verschillende opgaven goed gemaakt hebben. Dit is gedaan voor 2002 deelnemers, zodat we een goede indruk van de moeilijkheid van de diverse opgaven gekregen heb-

ben. Slechts 1 leerling heeft opgave C3 goed beantwoord. De oppervlakte van een rechthoekige driehoek werd gevraagd als de afstand van de voetpunten van hoogtelijn, bissectrice en zwaartelijn uit de rechte hoek gegeven is. Opgave A6, het bepalen van het aantal verschillende zeshoeken, opgebouwd uit 2 rode, 2 groene en 2 blauwe gelijkzijdige driehoeken, heeft evenals opgave C2, het bepalen van de hoogste macht van 2 waardoor 1993! deelbaar is, slechts 4% goede antwoorden opgeleverd.

score	frequentie	cumulatieve frequentie
36	-	0
34	-	0
33	-	0
32	4	4
31	1	5
30	9	14
29	1	15
28	3	18
27	11	29
26	5	34
25	9	43
24	4	47
23	21	68
22	20	88
21	23	111
cesuur -----		
20	21	132
19	35	167
18	35	202
17	52	254
16	53	307
15	49	356
14	90	446
13	57	503
12	96	599
11	107	706
10	100	806
9	156	962
8	75	1037
7	170	1207
6	199	1406
5	115	1521
4	255	1776
3	30	1806
2	214	2020
0	91	2111

Overzicht scores eerste ronde

Het spelletje 4 op een rij (opgave A1) en het magische vierkant (opgave A2) werden door de deelnemers beheerst, gezien de score van meer dan 73%.

Hieronder volgt het scoringsresultaat van alle opgaven:

opgave	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	B3	B4	C1	C2	C3
percentage	73	75	39	24	47	4	47	29	19	11	8	4	-

Van het Lorentz-Lyceum te Eindhoven is de somscore van de beste vijf deelnemers 111. Dit resultaat is het hoogste van het land, zodat deze school de Shell-wisselprijs behaald heeft.

Van de 2111 deelnemers komen er 1124 uit 5 vwo, 78 uit 5 havo, 591 uit 4 vwo, 155 uit 4 havo en 163 uit een lagere klas.

Van de 111 deelnemers die uitgenodigd worden voor de tweede ronde komen er 81 uit 5 vwo, 1 uit 5 havo, 17 uit 4 vwo, 1 uit 4 havo en 11 uit een lagere klas.

De tweede ronde

Op 17 september 1993 is in Eindhoven de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade gehouden. Van de 111 uitgenodigde leerlingen hebben er 107 deelgenomen. Ze hadden drie uur de tijd om vijf opgaven op te lossen.

De maximale score per opgave was 10 punten.

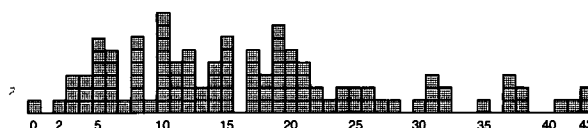
Door bij gelijke eindscore rekening te houden met het behaalde puntenaantal in de eerste ronde, zijn de volgende tien deelnemers prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1993:

	2e ronde	1e ronde
1. Kevin Backhouse, Helmond	43 punten	30 punten
2. Henk Boluijt, Dinteloord	43 punten	22 punten
3. Diego Lont, Vaassen	42 punten	23 punten
4. Simon Kronemeijer, Kampen	41 punten	30 punten
5. Erik Kieft, Kesteren	38 punten	30 punten
6. Gert-Jan Smit, Waddinxveen	38 punten	27 punten
7. Paul Huynen, Dommelen	37 punten	30 punten
8. Robin Wessels, Enschede	37 punten	28 punten
9. Cyriel de Jong, Valkenburg	37 punten	27 punten
10. Peter van Venrooy, Wijnandsrade	35 punten	32 punten



Van links naar rechts op de voorste rij: Erik Kieft, Peter Venrooy, Simon Kronemeijer, Robin Wessels; op de tweede rij: Diego Lont, Cyriel de Jong, Kevin Backhouse, Gert-Jan Smit; op de derde rij: Paul Huynen, Henk Boluijt

Het onderstaande staafdiagram geeft een overzicht van de scores van alle deelnemers aan de tweede ronde.

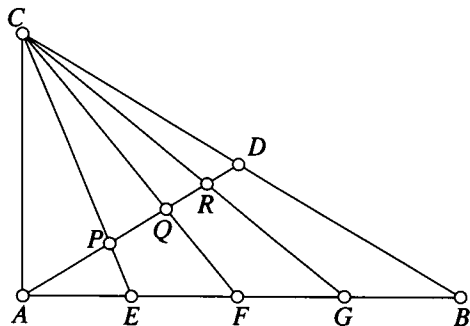


Opgaven 2e ronde

1. V is de verzameling getallen $\{1, 2, 3, \dots, 24, 25\}$.

- Laat zien dat uit V een deelverzameling van 16 getallen gekozen kan worden waarvoor geldt dat het product van geen enkel tweetal getallen uit die deelverzameling het kwadraat van een geheel getal is.
- Laat zien dat elke deelverzameling van V met 17 of meer elementen een tweetal getallen bevat waarvan het product een kwadraat van een geheel getal is.

2. Gegeven is een driehoek ABC , $\angle A = 90^\circ$. D is het midden van BC , F is het midden van AB , E het midden van AF en G het midden van FB . AD snijdt CE , CF en CG respectievelijk in P , Q en R . Bepaal de verhouding van de lengten van de lijnstukken van PQ en QR .

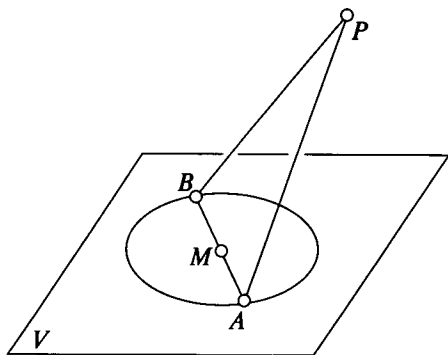


3. Een rij getallen is als volgt gedefinieerd:

$$u_1 = a, u_2 = b, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \text{ voor } n \geq 2.$$

Er bestaat een getal L waartoe de getallen u_n steeds dichter naderen naarmate n groter wordt. Toon dit aan en druk de waarde van L ($\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$) uit in a en b .

4. In een vlak V ligt een cirkel C met middelpunt M . P is een punt dat niet op de cirkel ligt.



- a) Bewijs dat $AP^2 + BP^2$ constant is bij vaste P voor elke middellijn AB van C .
b) AB is weer een willekeurige middellijn van C en P is nu een variabel punt op een bol die het vlak V niet snijdt.

Hoe moet P op de bol gekozen worden zodat $AP^2 + BP^2$ minimaal is?

5. Op een lijn zijn elf verschillende punten gegeven $P_1, P_2, \dots, P_{11}$. Voor elk tweetal punten geldt: afstand $P_i P_j \leq 1$. Bewijs dat de som van alle (55) afstanden $P_i P_j$, $1 \leq i < j \leq 11$ kleiner is dan 30.

Oplossingen

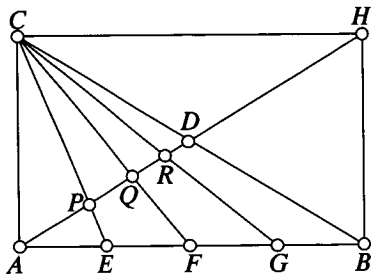
1. Als je probeert een deelverzameling te kiezen waarbij geen enkel tweetal getallen als product een kwadraat oplevert dan kun je van
- 1) de kwadraten 1, 4, 9, 16, 25 er maar hoogstens één gebruiken, zodat je dus minstens vier van deze vijf getallen moet weglaten;
 - 2) elk van de tweetallen (3, 12), (5, 20), (6, 24) maar hoogstens één getal gebruiken, zodat je dus minstens drie van deze zes getallen moet weglaten;
 - 3) het drietal 2, 8, 18 er maar hoogstens één gebruiken, zodat je dus minstens twee van deze drie getallen moet weglaten.
- In totaal moet je dus minstens $4 + 3 + 2 = 9$ getallen weglaten, zodat er dus hoogstens 16 getallen in zo'n deelverzameling kunnen zitten. Daarmee is b) bewezen. Een voorbeeld van zo'n deelverzameling met 16 getallen is $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23\}$

2. Laat H het spiegelbeeld zijn van A bij spiegeling in D . Noem de lengte van AH x . We gebruiken drie maal de gelijkvormigheid van twee driehoeken.

$$\triangle AEP \sim \triangle HCP \text{ met verhouding } 1:4, \text{ dus } AP = \frac{1}{5}x;$$

$$\triangle AFQ \sim \triangle HCQ \text{ met verhouding } 2:4, \text{ dus } AQ = \frac{1}{3}x;$$

$$\triangle AGR \sim \triangle HCR \text{ met verhouding } 3:4, \text{ dus } AR = \frac{3}{7}x;$$



Hieruit volgt $PQ = \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x = \frac{2}{15}x$; $QR = \frac{3}{7}x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{21}x$, zodat $PQ : QR = \frac{2}{15} : \frac{2}{21} = 7 : 5$.

Opmerking: Het gegeven dat $\angle A = 90^\circ$ is overbodig. $ABHC$ is altijd een parallellogram en dat is voldoende voor de berekening van de verhouding.

3. Uit $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n-1}$ volgt $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n-1}$ en $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$

Het verschil tussen twee opeenvolgende termen wordt dus telkens met een factor $-\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd. Het verschil tussen de tweede en eerste term is $b-a$, het verschil tussen de derde en tweede term is $-\frac{1}{2}(b-a)$, tussen de vierde en derde term $\frac{1}{4}(b-a)$. Met die kennis kunnen we een algemene term van de rij opschrijven:

$$a + (b-a) \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-\frac{1}{2})^{k-2} \right) \text{ voor } k \geq 2.$$

De limiet van de rij kunnen we dus vinden m.b.v. de limiet van de reeks $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots$. Die limiet is gelijk aan $2/3$ *).

Dus de limiet van de rij wordt $a + \frac{2}{3}(b-a) = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$.

*) $1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$. Bewijs: vermenigvuldig met $1-r$.

De limiet van de somrij bestaat als de limiet van r^{k+1} bestaat als k naar oneindig gaat. Voor $r = -\frac{1}{2}$ bestaat die limiet ($= 0$) en is de limiet van de somrij $\frac{1}{1-r}$. Invullen van $r = -\frac{1}{2}$ geeft $\frac{2}{3}$.

4. a) P, A, B en M liggen in een vlak. De cosinusregel toepassen in de twee driehoeken AMP en BMP levert:

$$AP^2 = AM^2 + MP^2 - 2AM \cdot MP \cos \angle AMP$$

$$BP^2 = BM^2 + MP^2 - 2BM \cdot MP \cos \angle BMP$$

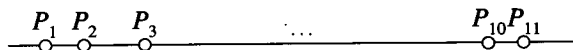
en omdat $\angle AMP + \angle BMP = 180^\circ$

geldt $\cos \angle AMP = -\cos \angle BMP$. Optellen geeft als resultaat:

$AP^2 + BP^2 = AM^2 + BM^2 + 2MP^2$ dus constant omdat AM, BM en MP een constante lengte hebben.

b) Omdat voor elk punt P op de bol geldt $AP^2 + BP^2 = AM^2 + BM^2 + 2MP^2$ en AM en BM een vaste waarde hebben, vinden we dus een minimum voor de uitdrukking bij een minimale lengte van MP . Dus moet P het snijpunt zijn van de bol met het verbindingslijnstuk van M met het middelpunt van de bol.

5. Voor het gemak leggen we de punten geordend op de lijn met $P_1 P_{11} = 1$.



We schrijven de som van al de mogelijke afstanden op een speciale manier uit, waarbij we soms de precieze waarde kunnen geven en soms een afchatting moeten maken.

$$P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_4 + \dots + P_9 P_{10} + P_{10} P_{11} = 1$$

$$P_1 P_3 + P_3 P_5 + P_5 P_7 + P_7 P_9 + P_9 P_{11} = 1$$

$$P_2 P_4 + P_4 P_6 + P_6 P_8 + P_8 P_{10} < 1$$

$$P_1 P_4 + P_4 P_7 + P_7 P_{10} < 1$$

$$P_2 P_5 + P_5 P_8 + P_8 P_{11} < 1$$

$$P_3 P_6 + P_6 P_9 < 1$$

$$P_1 P_5 + P_5 P_9 < 1$$

$$P_2 P_6 + P_6 P_{10} < 1$$

$$P_3 P_7 + P_7 P_{11} < 1$$

$$P_4 P_8 < 1$$

$$P_1 P_6 + P_6 P_{11} = 1$$

Bovenstaande 36 afstanden zijn samen korter dan 11. De 19 afstanden die overblijven zijn onderling niet te combineren. Ze worden elk apart afgeschat: alle zijn kleiner dan 1 behalve $P_1 P_{11}$ die gelijk aan 1 is, dus alle 19 samen afgeschat: < 19 . Voor alle afstanden geldt dus dat ze samen kleiner zijn 30.

De som is zo dicht bij 30 te krijgen als je maar wilt door P_1 t/m P_5 erg dicht bij elkaar te kiezen en op een afstand van bijna 1 P_6 t/m P_{11} ook erg dicht bij elkaar.

● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

► Oplossing 649

De opgave bestond uit drie alphametics, die bedacht waren door Nob. Yoshigahara, Tokyo. Eronder staat steeds de unieke oplossing.

$$(1) \quad A + \text{CRAZY} + \text{CRAZY} + \text{PARTY} = \text{PUZZLE} \\ 5 + 96584 + 96584 + 25634 = 218807$$

$$(2) \quad \text{ARE} \times \text{YOU} = \text{CRAZY?} \\ 518 \times 609 = 315462$$

$$(3) \quad \text{YOU} \times \text{ARE} = \text{CRAZY} \\ 453 \times 168 = 76104$$

Dit zijn werkelijk schitterende opgaven: slechts 1 oplossing, de tekst heeft een betekenis en bij (1) zijn alle tien cijfers gebruikt.

Een aantal puzzelaars bedacht in dezelfde sfeer nieuwe opgaven. Dan pas blijkt hoe moeilijk het is om originele opgaven te maken met tien verschillende letters en slechts 1 oplossing. Sommigen zonden (4) in, met tien verschillende letters. Maar deze heeft (helaas) twee oplossingen.

$$(4) \quad \text{YOU} \times \text{ARE} + \text{NOT} = \text{CRAZY} \\ 408 \times 159 + 302 = 65174 \\ 562 \times 149 + 367 = 84105$$

Zelf heb ik nog aan (5) zitten puzzelen. Maar deze heeft 5 oplossingen. Om toch een unieke oplossing te krijgen, stel ik voor: gegeven 1 oplossing, zoek een andere oplossing waarbij geen enkel cijfer op zijn plaats blijft staan!

$$(5) \quad \text{YOU} \times \text{ARE} - \text{NOT} = \text{CRAZY} \\ 294 \times 105 - 698 = 30172$$

Met 51 punten is winnaar van de boekenbon van f 25,- geworden:

Bert ten Hoeve, Lodewijkstraat 33, 3417 VC Montfoort.

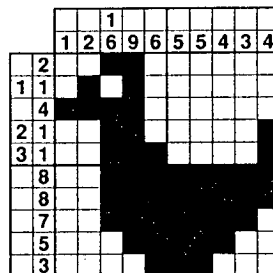
Heel hartelijk gefeliciteerd.

► Opgave 652

Op de ruilmiddag van de '13th International Puzzle Collectors Party 1993' kregen de deelnemers van James Dalgety, Yeovil zijn boekje 'The Sunday Telegraph Book of nonograms, No. 1' (1993, Pan Books).

Deze nieuwe puzzelsoort is in 1987 bedacht door de Japanse Non Ishida. In 1989 vervolmaakt door James Dalgety. Hij gaf deze puzzel de naam NON-ogram. Sinds 1990 bevat The Sunday Telegraph dit type puzzel, waarvan er nu 79 gebundeld zijn.

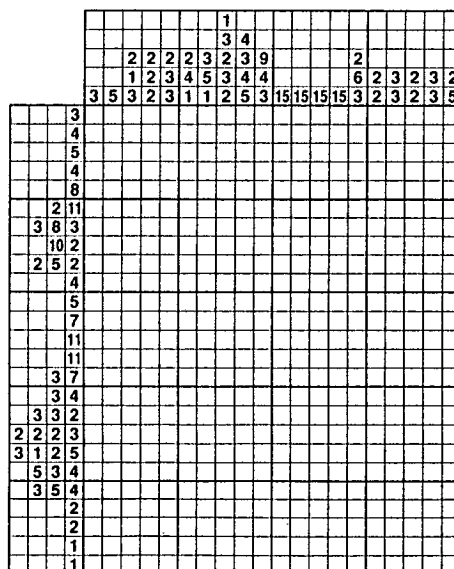
Een voorbeeld met oplossing:



De getallen op de rand geven op volgorde aan hoeveel opeenvolgende zwarte vakjes er in die rij of kolom staan. Staan er meerdere getallen, zoals op de vijfde rij een 3 en een 1, dan moeten ze gescheiden worden door een of meerdere lege vakjes. Door redeneren vindt men zo de bedoelde tekening. Nog een tip: als men zeker weet dat een vakje leeg blijft, dan kan men er het beste een stip in zetten.

Dan nu de opgave, als eerbetoon aan het Nederlands voetbalelftal, bedacht door Non Ishida.

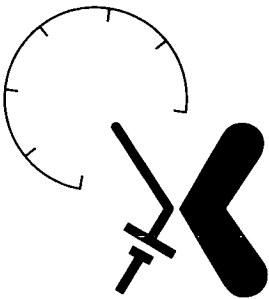
Inzending binnen 1 maand levert 5 ladderpunten op.



► Opening Centrum Vrouwen en Exacte Vakken

Ynske Schuringa

De officiële opening op 5 november 1993 van het Centrum Vrouwen en Exacte Vakken geschiedde op originele wijze: een wit laken werd natgespoten met behulp van een plantenspuit. Hierdoor verscheen op het laken het nieuwe logo - in kleur - van de Stichting Vrouwen en Exacte Vakken, waarin het samengaan van de werkgroepen Vrouwen en Wiskunde en Vrouwen en Natuurwetenschappen gesymboliseerd wordt. Verder werd de samenwerking nog uitgebeeld in twee reusachtige magneten,



**CENTRUM VROUWEN
EN EXACTE VAKKEN**

Het nieuwe logo



die elk gedragen werden door een groepje leden van een der werkgroepen.

Plaats van handeling was de Rijn-zaal in het APS-gebouw in Utrecht. Na een welkomstwoord van dagvoorzitter Sylvia van der Werf hield de voorzitter van de Stichting, Maria Cornelisse, een korte inleiding.

De opening werd verricht door mevrouw Blokdijk, Loco Secretaris-Generaal van het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen. Vervolgens hield mevrouw Netelenbos - Tweede Kamerlid voor de PvdA - een lezing, getiteld 'Hoe kan dit centrum bijdragen aan emancipatie van meisjes en vrouwen?' Uit de percentages die zij noemde bleek dat er nog steeds veel minder meisjes voor wiskunde kiezen dan jongens. De nieuwe Stichting kan dus voorlopig de functie van 'luis in de pels' blijven vervullen.

De aanbieding van het nieuwe boek *Vrouwen en Werk** aan mevrouw Ginjaar-Maas kon helaas niet doorgaan, omdat het vrijdagmiddag-verkeer mevrouw Ginjaar niet liet doorgaan. Het boek zag er fraai uit, het heeft de werkgroep Vrouwen en Wiskunde ook veel meer tijd en energie gekost dan tevoren ingeschat was.

De bijeenkomst eindigde met een glaasje en een hapje, met muzikale begeleiding van een strijke. De redactie wenst de Stichting een goede toekomst!

**Een bespreking van dit boek volgt later.*



Notulen jaarvergadering 1993

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 13 november 1993 in het gebouw van het Nieuwe Lyceum te Bilthoven.

Om 10.03 uur opent de voorzitter, dr. J. van Lint, de vergadering. Hij verwelkomt alle aanwezigen en in het bijzonder de ereleden prof. dr. F. van der Blij, dr. J. van Dormolen en dr. Th. Korthagen, de inspecteurs drs. W. Kleijne en dr. J.G. Nijenhuis, de vertegenwoordigers van de NVORWO, de redactie van Euclides en de organisatoren en medewerkers aan de studiedag.

Vervolgens spreekt de voorzitter de jaarrede uit.

Hierna worden de notulen van de algemene vergadering van 7 november 1992 en het jaarverslag van de secretaris goedgekeurd onder dank aan de secretaris.

Het verslag van de kascommissie wordt voorgelezen, waarna de penningmeester wordt gedechargeerd met dank voor het vele door hem en de heer F.F.J. Gaillard verrichte werk. De voorzitter dankt de aftredende kascommissie en daar er geen tegenkandidaten zijn, worden zonder stemming in de kascommissie benoemd mevrouw drs. M. Kerssen-Muilwijk uit Nuenen en de heer drs. G. Stroomer uit Zevenaar.

De voorzitter gaat hierna over tot de bestuursverkiezing. Aftredend zijn mevrouw H.Goemans-Wallis en de heer C. Th. J. Hoogsteder. Daar beiden zich niet herkiesbaar hebben gesteld en er geen tegen-

kandidaten zijn worden de voorgestelde kandidaten, de heren R.J. Bloem, R.J. Jongeling en S.H. Schaafsma tot bestuursleden gekozen. Tijdens de bestuursverkiezing merkt de heer ir. A.J.H.F.M. Keultjes op dat hij de zin 'Al tijdens de studie wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen heeft hij zeer bewust gekozen voor een loopbaan in het onderwijs' in 'Wie zijn de nieuwe bestuurskandidaten?' in Euclides (nr. 1 pag. 29) niet gepast vindt in een kennismakingsomschrijving van een bestuurskandidaat.

De voorzitter neemt afscheid van de vertrekkende bestuursleden. Hij wijst op het vele werk dat de heer Hoogsteder vooral binnenskamers en in de didactiekcommissie verrichtte en is verheugd dat de heer Hoogsteder zijn werkzaamheden in de didactiekcommissie zal voortzetten. Mevrouw Goemans heeft zich altijd bijzonder voor het vbo ingezet, een werk waar zij vaak alleen voor stond, maar waar zij nu twee opvolgers voor krijgt.

Het volgende agendapunt is de contributie voor het jaar 1994/1995. De heer drs. J.F.M. Wisbrun vraagt hierbij het woord en wijst op zijn oproep in Euclides 'Wij eisen contributieverhoging!!!' om contributieverhoging voor steun aan het wiskundeonderwijs in een Derde-Wereldland. Mevrouw drs. H.B. Verhage staat sympathiek tegenover dit voorstel maar vraagt zich af hoe dit georganiseerd moet worden. Voor een bestemming zal een groep wijzen moeten worden aangewezen.

De penningmeester dankt de heer Wisbrun voor de vooraankondiging van zijn voorstel. Hij voegt hieraan toe dat ook vorig jaar al om een bijdrage voor een ICMI-fonds is gevraagd. Daarom zijn via de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde, de NOCW, nadere gegevens gevraagd, waarna van de ICMI een bedankbrief kwam met enige methoden om geld over te maken. Het bestuur is bereid om voor dit jaar f 1000,- over te maken. Voortaan kan aan de leden een vrijwillige bijdrage gevraagd worden. De heer Gaillard moet dan uitzoeken welke mogelijkheden er hiervoor zijn.

Volgens de penningmeester is de NVvW een vereniging van wiskundeleraren in Nederland die niet als doel heeft – hoe mooi ook – om fondsen te werven voor de Derde Wereld. Een contributieverhoging van f 10,- na de reeds gevraagde f 5,- levert een verhoging van een kwart van de huidige contributie.

Het bestuur is bang dat dit tot ledenverlies leidt. De penningmeester is ook bang dat leden die niet op de vergadering zijn, verrast kunnen worden door deze grote contributieverhoging. Hij stelt daarom voor om volgend jaar augustus een concreet plan in Euclides te publiceren zodat iedereen dit tijdig voor de jaarvergadering kan zien.

De heer Wisbrun merkt op dat de vereniging ook buiten de eigen deur moet kijken, terwijl de heer A.J. Pach constateert dat vorig jaar gezegd is 'Wij wachten nog een jaar' en dat dit dus nu is. Hij vraagt om een vast bedrag als vrijwillige bijdrage.

Mevrouw A.N.M. Bijleveld stelt om belastingtechnische redenen voor een aparte rekening voor deze vrijwillige bijdrage te openen. De voorzitter dringt aan op een vrijwillige bijdrage terwijl de heer Gaillard meedeelt dat technisch alles te verwezenlijken is. Het blijkt dat er nog teveel onduidelijkheden zijn om de voorstellen in stemming te brengen waarop de heer L.H. Rietveld voorstelt de stemming aan te houden tot de rondvraag, zodat men dan met concreet geformuleerde voorstellen kan komen. De heer Wisbrun roept iedereen die zijn voorstel steunt op naar de rondvraag te komen. De heer J.B. van de Groep wijst er op dat de rondvraag niet is om besluiten te nemen. Daarom wordt het agendapunt 'vaststelling contributie' verplaatst tot voor de rondvraag.

De voorzitter deelt vervolgens mede dat een oud-lid van de vereniging zijn boekenverzameling aan de vereniging heeft nagelaten. Deze boeken, die op de 'markt' zijn in te zien, mogen aan het einde van de dag worden meegenomen. Een bijdrage voor de Derde-Wereld is hierbij gewenst.

Ook maakt de voorzitter nog bekend dat de didactiekprijsvraag van de NVvW en de NVORWO één inzending had. Het is een inzending van Nandy en Ron Hos, die tijdens de pauze met hun inzending zullen demonstreren. Daarna zal prof. Van der Blij, de voorzitter van de jury, de prijs uitreiken.

De voorzitter geeft nu het woord aan de heer F.J. Mahieu die iets vertelt over de nieuwe positie van Euclides. Tot 1 augustus was dit blad het orgaan van de NVvW, maar eigendom van Wolters-Noordhoff b.v. Sinds 1 augustus is de NVvW ook eigenaar van het blad. Dit betekent naast de mogelijkheid om een andere drukker te kiezen, vooral een eigen beleid, waaronder ook een eigen advertentiebeleid. Nu moet men aan de toekomst denken en een werk-

groep heeft reeds een nader onderzoek ingesteld. Om dit toe te lichten, krijgt de heer drs. G. Zwaneveld, de voorzitter van de redactie, het woord. Omdat men niet gelukkig meer is met de huidige vormgeving heeft men zich 9 maanden voorbereid op een nieuw ontwerp. Uitgaande van de sterke punten van het blad en verdere wensen van de redactie is een ontwerper aan het werk geslagen. Het resultaat wordt aan de hand van voorbeelden getoond.

De voorzitter dankt de heer Zwaneveld en de redactie en geeft na het ochtendgedeelte van de jaarvergadering vervolgens het woord aan de heer L. Spijkerboer om de studiedag in te leiden.

Na de studiedag wordt om 16.11 uur de jaarvergadering voortgezet.

Na mededelingen over mee te nemen boeken en af te halen certificaten komt de contributie aan de orde. De penningmeester stelt voor de contributie vast te stellen op f 65,- en daarboven een vrijwillige bijdrage van f 5,- te vragen, zodat leden zelf op de acceptgiro 65 of 70 moeten invullen. Over de bestemming van de vrijwillige bijdrage zal een commissie zich moeten buigen. De meerderheid van de aanwezigen is voor dit voorstel.

De heer dr. J. van Dormolen wijst op de mogelijkheid het bedrag te verdubbelen; wellicht via het Ministerie van Ontwikkelingssamenwerking, maar anders via het Vredenduin-Fonds.

In de rondvraag vraagt allereerst de heer Keultjes het woord. Hij wijst op een zijns inziens grote fout in het antwoordmodel bij het eindexamen wiskunde A vwo waarvan misschien kandidaten de dupe zijn geworden en vraagt of het niet tijd wordt een mechanisme in te stellen om hier formeel iets aan te doen. De voorzitter adviseert hierover naar de CEVO te schrijven.

De heer J. van Eijnsden verwijst naar een artikel in Euclides over software die in Amerika kan worden aangevraagd. Hij vraagt of dit niet anders kan. Mevrouw drs. A. Verweij adviseert haar een leeg schijfje te sturen. Zij zet het programma dan op dit schijfje.

De heer Van de Groep constateert dat er in het veld grote bezorgdheid is over de aansluiting onderbouw bovenbouw in havo en vwo. Hij vraagt of dit probleem erkend wordt, of de kloof overbrugbaar is en of er wat aan gedaan wordt. De voorzitter zegt dat hier reeds mensen aan werken.

Mededeling

30^{ste} Nederlands Mathematisch Congres

Mevrouw M. Meeder voegt er nog aan toe dat er binnen de Samenwerkingsgroep aandacht voor dit probleem is en er door mevrouw drs. A. Breeman en de heer C. Hoogland aan gewerkt wordt. Wellicht leidt dit tot een publikatie. De heer Van Dormolen meent dat er geen problemen zullen zijn als de schrijvers van schoolboeken hun werk goed doen.

Mevrouw drs. G. Fokkens vraagt aandacht voor de continuïteitscorrectie bij het eindexamen. In de regel behoeften bij het ontbreken van deze correctie geen punten te worden afgetrokken; in het tweede tijdvak dit jaar echter wel. Zij vraagt of het bestuur een beslissing kan forceren om duidelijkheid te krijgen.

De heer J.J. Breeman antwoordt dat een beslissing forceren niet mogelijk is. Wel is reeds besloten om op de regionale bijeenkomsten in februari in ten minste twee bijeenkomsten de examenproblematiek aan de orde te stellen. Naar aanleiding hiervan kan men verder zien. De voorzitter voegt hier nog aan toe dat in het tweede tijdvak speciaal een vraagstuk is opgenomen waar een correctie noodzakelijk was om te laten zien dat dit tot de examenstof behoort.

De heer Gaillard vraagt de aanwezigen na afloop de enquête-formulieren in te leveren.

Aan het eind van de rondvraag dankt de voorzitter de leiders van de werkgroepen en in het bijzonder de organisatoren, mevrouw M. Meeder, de heren L. Spijkerboer en M. Kindt en de sprekers voor de geslaagde studiedag. Hij dankt de conciërges, huis-houdelijke dienst en schoolleiding van het Nieuwe Lyceum voor de goede verzorging en de verleende gastvrijheid.

Hierna sluit hij om 16.28 uur de jaarvergadering.

Het 30^{ste} Nederlands Mathematisch Congres wordt op **donderdag 7 en vrijdag 8 april 1994** gehouden in het Witte Singel Doelen-complex van de Rijksuniversiteit Leiden, Cleveringaplaats 1, Leiden. Het congres wordt georganiseerd door de afdeling Wiskunde en Informatica van de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen van de RUL.

Het 30^{ste} Nederlands Mathematisch Congres staat in het teken van de honderdste sterfdag van Thomas J. Stieltjes.

Het voorlopige programma omvat de volgende punten.

Hoofdvoordrachten

- 1) Openingsvoordracht en Stieltjeslezing: R. Askey (Madison): *The continuing impact of the work of Stieltjes*
- 2) Plenaire voordrachten over Stieltjes (op vrijdagochtend): J. Cassinet (Toulouse): *T.J. Stieltjes, une intégration toulousaine*
W.A.J. Luxemburg (Pasadena): *The impact of the notion of the Stieltjes integral on analysis*
- 3) Slotvoordracht: B. Edixhoven (Rennes): *De laatste stelling van Fermat*

Lerarenprogramma op donderdagmiddag

Minicursus Zeteltoewijzing na verkiezingen (J.M. Anthonisse en R. Tijdeman (RUL))

Een inleiding op VWO-5 niveau in de wiskundige theorie van de verschillende toewijzingsmethoden van zetels aan partijen. Geschikt voor leraren, leerlingen en andere geïnteresseerden.

B. Vroegop (Centrum voor lerarenopleidingen, RUL): voordracht, titel onbekend.

Kosten

De inschrijvingskosten bedragen f 35,- voor WG-leden, f 52,50 voor niet-leden en f 17,50 voor studenten. De lunch (facultatief) kost f 7,50 per keer. Het bedrag moet worden overgemaakt op girorekening 0153605 t.n.v. 30e Ned. Math. Congres, Niels Bohweg 1, 2333 CA Leiden. Degenen die zich al hebben ingeschreven maar het bedrag nog niet hebben overgemaakt worden verzocht dit zo snel mogelijk te doen.

Voor eventuele problemen of vragen kunt u contact opnemen met: J.H. Evertse (secretaris), Rijksuniversiteit Leiden, Afd. Wiskunde en Informatica, Postbus 9512, 2300 RA Leiden.

Tel. (071)-277128; fax (071)-276985.

Adressen van auteurs

F. van der Blij, Ruysdaellaan 6, 3732 CC Bithoven
L. van den Broek, Graafseweg 387, 6532 ZN Nijmegen
M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam
D.J. Kuijper, Oosternielandseweg 10, 9985 SC Oosternieland
H.N. Schuring, Cito, Postbus 1034, 6801 MG Arnhem
Y. Schuringa-Schogt, Novapad 4, 5632 AE Eindhoven
F. Weerman, Onderzoeksinstituut voor Taal en Spraak, Universiteit Utrecht, Trans 10, 3512 JK Utrecht
M. Wijers, Freudenthal instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht

Kalender

19 maart 1994: Utrecht, Studiedag Vrouwen en Wiskunde; zie blz. 175.

25 maart 1994: eerste ronde Wiskunde Olympiade op de scholen voor havo en vwo.

30 maart 1994: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

16 september 1994: Eindhoven, tweede ronde Wiskunde Olympiade in de Technische Universiteit.



LUZAC ***e x t r a*** ***examentraining***

In het voorjaar van 1994 organiseert het
Luzac College examentrainingsweekends in
de volgende vakken:

ECONOMIE (I en II)
en
WISKUNDE (A en B)
voor HAVO en VWO

Kenmerkend voor de weekends zijn:

- kleine groepen
- ervaren docenten
- helder lesmateriaal
- intensieve toetsing en begeleiding
- een programma dat is toegesneden op de individuele problemen

Wellicht zijn er ook op uw school leerlingen
voor wie een intensief trainingsweekend het
verschil kan uitmaken tussen zakken en
slagen.

Voor meer informatie bel of schrijf naar
Luzac College
Postbus 82284
2508 EG Den Haag
tel: 070-3469269

Inhoud

Inhoud 161

Leon van den Broek: Daglengte 162

Fred Weerman: Over talen- en wiskundeknobbels 167

Martinus van Hoorn: 'Als leraar ben je er voor alle leerlingen' 173

Jelske Kuiper: Wiskunde leren in kleine heterogene groepen 174

Mededelingen 175, 182, 192

40 jaar geleden 175

Werkbladen 176

F. van der Blij: Een boeiende vraag (I) 178

Monica Wijers: Handig rekenen 183

H.N. Schuring: De 32e Nederlandse Wiskunde Olympiade 1993 184

Recreatie 188

Ynske Schuringa: Opening Centrum Vrouwen en Exacte Vakken 189

Notulen jaarvergadering 1993 190

Adressen van auteurs 192

Kalender 192



Wiskundeleraar: een grensverleggend beroep? De HMN start dit jaar opnieuw een opleiding tot de internationaal erkende graad

master of arts (open) in mathematics education

in samenwerking met de University of Greenwich.

Het betreft een part-time studie met een totale netto studietijd van twaalf tot achttien weken. U kunt de studie binnen twee jaar afronden.

Deze opleiding biedt een internationale oriëntatie op het wiskunde-onderwijs en opent mogelijkheden voor een internationale carrière. Het grootste deel van de opleiding bestaat uit een research-project dat in uw eigen school moet worden uitgevoerd en dat de school ten goede kan komen.

Twee studieperiodes van één en twee weken in Engeland maken deel uit van de opleiding. U kunt daarbij rekenen op PLATO-subsidie voor reis- en verblijfkosten en indien nodig ook voor vervangingskosten.

U kunt deelnemen aan de opleiding als u in het bezit bent van een eerstegraads wiskunde-bevoegdheid of als u daarvoor aan de HMN studeert.

Voor meer informatie over deze studie kunt u terecht bij:
HMN Faculteit Educatieve Opleidingen, Vakgroep Wiskunde, dr. M. Riemersma
Postbus 14007, 3508 SB Utrecht (030) 54 72 32