

Euclides

816
357
492

jaargang 69 1993 | 1994 januari

Redactie

Drs. H. Bakker
Drs. R. Bosch
Drs. J.H. de Geus
Drs. M.C. van Hoom (hoofredacteur)
J. Koekkoek
N.T. Lakeman (beeldredacteur)
D. Prins (secretaris)
W. Schaafsma
Ir. V.E. Schmidt (penningmeester)
Mw. Y. Schuringa-Schogt (eindredacteur)
Mw. drs. A. Verweij
A. van der Wal
Drs. G. Zwaneveld (voorzitter)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,
8034 RA Zwolle, tel. 038-539985.
Secretaris Drs. J.W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie F.F.J. Gaillard, Jorisstraat 43,
4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18; fax. 076-65 32 18.
Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 60,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 42,50; contributie zonder Euclides f 35,00. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUI MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M.C. van Hoom, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
 - regelafstand van 1,5
 - maximaal 47 aanslagen per regel
 - eenzijdig beschreven papier
 - met de tekst bijgeleverd op diskette (3,5 of 5,25 inch) in WP 5.1, of eventueel in ASCII-files
 - en liefst voorzien te zijn van (genummerde) illustraties
 - die gescheiden zijn van de tekst
 - aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
 - waar nodig voorzien van bijschriften
- De ruimte die een artikel of mededeling bij plaatsing in beslag neemt kan worden bepaald door uit te gaan van 48 tekstregels per kolom bij een kolomhoogte van 20 cm; aan de hand hiervan kan ook het ruimtebeslag van illustraties worden bepaald.
- De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 2 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f 66,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 43,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Woltersgroep Groningen b.v., afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. ABN-AMRO 44 60 67 105.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgiro hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 11,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Bijdragen 130

R.H. Jeurissen *Toernooien en scores* 130

In een competitie is de winnaar de speler met de hoogste totaalscore, maar er zijn andere criteria denkbaar.

E.M. Koerts *Moraal in het wiskundelokaal?* 137

Hoe staat het met waarden en normen in de contextrijke wiskunde?

Pythagoras vernieuwd 142

Interview 143

Martinus van Hoorn *'Ik red me wel'*

Werkbladen 144

Boekbeschouwing 146

Bert Zwaneveld *Vlaamse wiskundendidactiek*

Ook voor de Nederlandse leraar is dit praktische boek interessant.

Bijdragen 148

George Schoemaker *Euclides, dit kan niet* 148

Kritiek op de mini-special over de nieuwe boeken voor de basisvorming.

Redactie *Kan dit niet, George?* 149

Reactie van de redactie.

Serie 'Rekenen in W12-16' 150

Ed de Moor *Kommagetallen, gebruik ze!*

Bijdrage 151

P.A. Hoogendoorn *Een kandidaat voor een schoonheidsprijs planimetrie?*

Een vraagstuk met een sierlijke oplossing.

Verschenen 151

Bijdragen 152

Ir. A. Keultjes *Reactie op bespreking examen vwo A* 152

M.C. van Hoorn *Modulen Wiskunde in bovenbouw havo/vwo?* 153

Bijdrage 154

Hans Stuurman *Wiskunde B op het vwo*

Ideeën om de problemen rond het programma op te lossen.

Mededelingen 155, 159, 160

Verenigingsnieuws 156

Marian Kollenveld *Van de bestuurstafl* 156

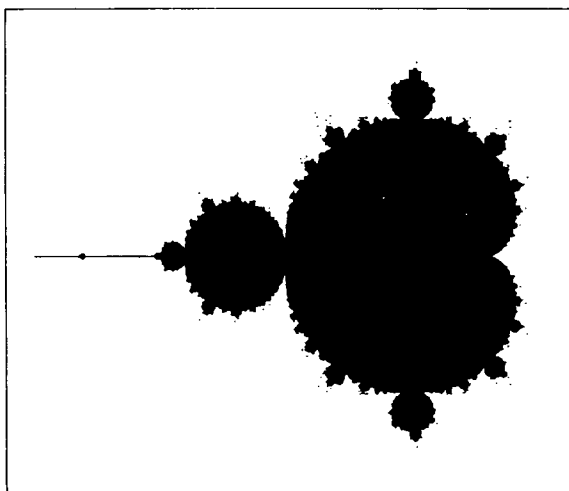
Regiobijeenkomsten NVvW 1994 157

40 jaar geleden 157

Recreatie 158

Adressen van auteurs 160

Kalender 160



Fractal van Mandelbrot

is eenvoudig te maken door b.v. op plaats (i, j) te zetten $j - i + 1$, gereduceerd modulo n , of ook $i + j - 1$. Zie voor $n = 5$ de eerste twee matrices hieronder. Bij de derde zijn de eerste drie ronden al 'zonder plan' gespeeld. Toch kan het toernooi in twee ronden worden afgemaakt. Dit is algemeen waar, zoals we nog zullen zien.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & * & 3 & * \\ 1 & * & 2 & * & 3 \\ * & 2 & 3 & 1 & * \\ 3 & * & 1 & * & 2 \\ * & 3 & * & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

► Toernooien en scores

R. H. Jeurissen

0 Samenvatting

Eerst bespreken we schema's voor diverse soorten toernooien. Dan kijken we naar de mogelijke reeksen van totaalscores die het resultaat kunnen zijn van een halve competitie.

Gewoonlijk wordt de speler met de hoogste totaalscore (de meeste wedstrijdpunten) als winnaar gezien. Er zijn echter andere criteria denkbaar. Twee ervan worden kort besproken.

1 Het toernooischema

Wil men tussen twee schaakclubs met elk n leden een wedstrijd organiseren waarbij elke speler van de eerste club één keer tegen elke speler van de tweede club speelt, en dit doen in ronden zó, dat elke speler ten hoogste één keer per ronde speelt, dan zijn minstens n ronden nodig en dat is ook genoeg. Een schema kunnen we de vorm van een $n \times n$ matrix geven waarin op plaats (i, j) het nummer staat van de ronde waarin speler i van de eerste club tegen speler j van de tweede club speelt. We hoeven dan slechts ervoor te zorgen dat alleen de getallen $1, 2, \dots, n$ voorkomen en dat geen rij of kolom tweemaal eenzelfde getal bevat. Anders gezegd: elke rij en elke kolom is een omschikking van $1, 2, \dots, n$. Dit is precies de definitie van een *Latijns Vierkant*. Zoiets

Spelen de leden van een club met n leden een onderlinge halve competitie, ook weer in ronden waarin elke speler slechts éénmaal mag aantreden, dan zijn er $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ wedstrijden.

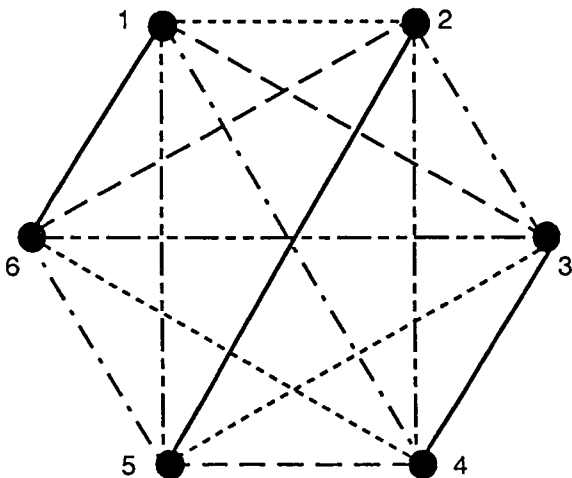
Is n even (resp. oneven), dan zijn dus zeker $n-1$ (resp. n) ronden nodig (met elk $\frac{n}{2}$ (resp. $\frac{n-1}{2}$) wedstrijden). Ook hier blijkt dat genoeg, wat we eerst voor oneven n laten zien. Elke speler moet dan één ronde vrij hebben. We maken weer een $n \times n$ matrix, zetten op plaats (i, j) het nummer van de ronde waarin i tegen j speelt als $i \neq j$, en op plaats (i, i) het nummer van de ronde waarin i vrij is. Weer moet dit een Latijns Vierkant zijn, maar nu ook nog symmetrisch. Dit kan voor elke oneven n door op plaats (i, j) $i + j - 1$ te zetten. Zie de tweede matrix boven. (Voor even n krijgen we weliswaar zo ook een symmetrisch Latijns Vierkant, maar dat geeft voor ons doel een ronde teveel.) Dat in het voorbeeld ook de diagonaal een omschikking is van $1, 2, \dots, n$ is geen toeval, immers in elke ronde moet er een vrije speler zijn. Voor even $n = 2k$ kunnen we het dan zo doen: neem een schema voor $2k-1$ spelers en laat speler $2k$ steeds aantreden tegen de speler die anders vrij zou zijn. Gebruik dus de diagonaal als laatste rij en kolom:

$$\begin{pmatrix} * & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & * & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & * & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & * & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & * & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & * \end{pmatrix}$$

Er zijn geen andere schema's voor $2k$ spelers dan de aldus gemaakte, wat we zien door speler $2k$ te laten uitvallen. Hier is het wél mogelijk dat een toernooi verkeerd begonnen wordt: de derde matrix hierboven is niet af te maken tot een symmetrisch Latijns Vierkant!

Bij de wedstrijd tussen twee schaakclubs met leden $a_1, \dots, a_n$ resp. $b_1, \dots, b_n$ bekijken we de *volledige bipartite graph* $K_{n,n}$ die als punten die $2n$ spelers heeft, als ribben alle n^2 ongeordende paren $\{a_i, b_j\}$. De ribben corresponderen met de te spelen partijen. Een ronde correspondeert met een verzameling van n ribben waarvan er geen twee een eindpunt gemeen hebben: een *volledige matching* in de graph. Het bestaan van een wedstrijdsschema voor n ronden is equivalent met het bestaan van een partitie van de ribbenverzameling in n twee aan twee disjuncte matchings. Kleuren we de ribben die horen bij de eerste ronde rood, die bij de tweede ronde blauw, etc., dan zien we dat het mogelijk is de ribben van de volledige bipartite graph zó elk met een uit n kleuren te voorzien dat ribben met eenzelfde kleur geen eindpunt gemeen hebben. Natuurlijk is n het minimum aantal kleuren waarmee dat kan, want in een punt komen n ribben bij elkaar. Men zegt dan dat de graph *kleurindex* n heeft.

Bij de halve competitie kunnen we analoog de partijen laten corresponderen met de ribben van een volledige graph K_n op n punten. Zie figuur 1.



Figuur 1

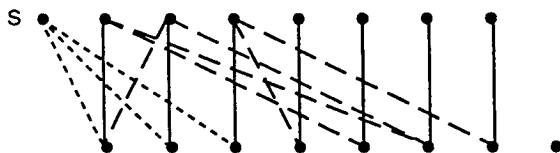
Voor oneven n zijn de matchings die corresponderen met de ronden niet volledig, er 'schiet een punt over'. De kleurindex van K_n is nu n als n oneven is, en $n - 1$ als n even is. (Voor elke graph geldt natuurlijk dat de kleurindex ten minste de maximale graad is. De stelling van Vizing zegt dat hij ten hoogste 1 groter is dan die maximale graad, voor een graph zonder lussen of meervoudige ribben.)

Tenslotte laten we nog zien dat, bij de wedstrijd tussen twee clubs, 'planloos' gespeelde ronden kunnen worden aangevuld. Vertaal het eerst naar graphen: we laten uit de volledige bipartite graph $K_{n,n}$ een aantal, zeg k , twee aan twee disjuncte volledige matchings weg (de gespeelde ronden). De resterende graph heeft in elk punt graad $n - k$. Als we, voor willekeurige k met $0 < k < n$, kunnen laten zien dat die weer een volledige matching heeft (de volgende ronde) zijn we klaar, immers we kunnen dit dan herhalen. Het komt nu dus neer op:

Stelling 1 *Een bipartite graph waarin elk punt dezelfde positieve graad heeft, bezit een volledige matching.*

Bewijs. Laat die graad d zijn. Per definitie van 'bipartite graph' is de puntverzameling de disjuncte vereniging van twee verzamelingen S en T zó, dat elke ribbe een eindpunt in S en een eindpunt in T heeft. Omdat elk punt graad d heeft zijn er $d|S|$ en ook $d|T|$ ribben, dus $(d > 0)$ vanzelf is $|S| = |T|$, zeg $|S| = n$. Eén ribbe vormt een matching, nog onvolledig als $n < 1$. We zijn klaar als we laten zien dat uit een matching met m ribben, $m < n$, er een met $m + 1$ ribben is te maken. Gemakshalve noemen we de ribben van de matching rode ribben, de andere blauwe. De rode ribben hebben samen $2m$ (verschillende) eindpunten, en zowel in S als in T zijn nog $n - m$ punten 'vrij'.

Ons doel is nu het vinden van een 'wisselpad': een rij punten $s_0, t_1, s_1, t_2, s_2, \dots, s_{k-1}, t_k$, twee aan twee verschillend, zó dat voor alle i geldt: (s_i, t_{i+1}) is een blauwe ribbe, (t_i, s_i) een rode en s_0 en t_k zijn vrij. Dan zijn namelijk de k ribben $\{t_i, s_i\}$ de enige rode met een eindpunt op dit pad en dus krijgen we een nieuwe matching, met een ribbe meer, als we de rode ribben op het pad blauw maken en de blauwe rood. (Als $k = 1$ komt dit neer op het toevoegen van een ribbe aan de matching, als $k > 1$ wordt een deel van



Figuur 2

de oude matching vervangen.) Neem nu voor s_0 een willekeurig vrij punt in S . (Zie figuur 2.) Laat $T_1 \subset T$ de verzameling zijn van de eindpunten van de (blauwe) ribben vanuit s_0 . Als T_1 een vrij punt bevat, zijn we klaar: we hebben een wisselpad met $k = 1$. Zo niet, dan gaat er vanuit elk punt van T_1 een rode ribbe naar een punt van S ; de eindpunten van die ribben vormen een deelverzameling S_1 van S , even groot als T_1 . Algemeen: is S_{i-1} gemaakt, dan wordt T_i de verzameling van die eindpunten van blauwe ribben vanuit S_{i-1} die niet al in een T_j met $j < i$ lagen, en S_i de verzameling van de eindpunten van de rode ribben vanuit T_i . Merk op dat de T_j per definitie twee aan twee disjunct zijn. Hetzelfde geldt voor de S_j , want een punt in, bijvoorbeeld, $S_2 \cap S_4$ zou eindpunt zijn van twee rode ribben, uit T_2 resp. T_4 . We zien daarmee ook dat $|S_j| = |T_j|$ voor $j > 0$ zolang T_j geen vrije punten heeft. Tenslotte: s_0 zit in geen der S_i , want is geen eindpunt van een rode ribbe.

Stel nu geen der T_i bevat een vrij punt. Omdat de T_i disjunct zijn, is er een k waarvoor geldt: $T_v = \emptyset$ voor $v > k$. Laat nu: $q = |T_1 \cup \dots \cup T_k|$. Vanwege $|S_i| = |T_i|$ en de disjunctheid is dan ook $q = |S_1 \cup \dots \cup S_k|$. Uit $\{s_0\} \cup S_1 \cup S_k$ 'vertrekken' nu $d + q(d - 1)$ blauwe ribben. Deze moeten, per definitie van de T_i , alle in een punt van $T_1 \cup \dots \cup T_k \cup T_{k+1} = T_1 \cup \dots \cup T_k$ 'arriveren', maar daar kunnen er ten hoogste $q(d - 1)$ 'terecht'. Tegenspraak; dit kan zich niet voordoen.

Dus voor zekere j heeft T_j een vrij punt t_j . Dan is er een blauwe ribbe van t_j naar een punt $s_{j-1} \in S_{j-1}$, van daaruit een rode naar een punt in $t_{j-1} \in T_{j-1}$, dan weer een blauwe naar S_{j-2} , enzovoort. We eindigen in s_0 en hebben een wisselpad gevonden.

2 Toernooi en matrix

We houden ons verder bezig met de halve competitie en met de vraag: wie heeft gewonnen?

Meestal wordt als winnaar de speler met de meeste gewonnen wedstrijden aangewezen. We zullen aannemen dat er geen gelijk spel mogelijk is en dat het alleen om winnen of verliezen gaat (geen doelpuntensaldo dus). De spelers noemen we $1, 2, \dots, n$. Het totale resultaat is dan weer te geven als een gerichte graph: de punten ervan zijn $1, 2, \dots, n$, de pijlen die geordende paren (i, j) waarvoor geldt: i heeft gewonnen van j . De graph ontstaat door een oriëntatie van de volledige ongerichte graph op $1, 2, \dots, n$: tussen elk tweetal punten is er precies één pijl. Zo'n graph noemen we een *toernooi*. Merk op dat dit model ook dienstig is als we n wijnen willen rangschikken door een proefpersoon (sic!) er telkens twee te laten vergelijken. We definiëren: de *score* s_i van i is het aantal door i gewonnen wedstrijden.

In ons model is dit de *uitgraad* van i . Bij zo'n toernooi hoort een $n \times n$ matrix met op plaats (i, j) een 1 als (i, j) een pijl is, anders een 0, de (*buur*)matrix van de graph, die eveneens het totale resultaat beschrijft. In dit model is de score van i de i^{de} rijssom in de matrix. Is A die matrix en $j = (1, 1, \dots, 1)^t$ dan is

$$(s_1, s_2, \dots, s_n)^t = Aj$$

We kunnen de spelers (achteraf) zó nummeren dat $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$. We noemen dan $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ de *scorevector* van het toernooi en de nummering een *goede*. Vermeldenswaard is nog: heeft een speler a een hogere score dan c en heeft hij (toch) van c verloren, dan moet er een speler b zijn die heeft verloren van a en gewonnen van c (anders zou c een hogere score dan a hebben).

Een voorbeeld van een scorevector is $(0, 1, 2, \dots, n - 1)$. Zoals je eenvoudig nagaat treedt deze dan en alleen dan op als voor elke i speler i heeft gewonnen van de spelers $1, 2, \dots, i - 1$. Dit zal gebeuren als de spelers elk verschillende 'theoretische sterkten' hebben en elke wedstrijd wordt gewonnen door de 'op papier' sterkste speler. Een ander uiterste is $(2, 2, 2, 2, 2)$; het toernooi lijkt volledig onbeslist. Bij $(1, 1, 2, 2)$ zijn er twee 'winnaars'.

Is er een echte deelverzameling $V = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ (met $0 < k < n$ dus) van spelers die elk verloren hebben van alle spelers niet in V , m.a.w. is (x, y) een pijl voor alle x, y met $x \notin V, y \in V$, dan heet het toernooi *reducibel*. Ook de matrix van zo'n toernooi heet *reducibel*. Bij een goede nummering heeft hij rechtsboven een $k \times (n - k)$ blok met 0'en, linksonder een $(n - k) \times k$ blok met 1'en, immers de spelers uit V hebben scores $< k$, de anderen scores $\geq k$. Die uit V krijgen dus de laagste k nummers.

3 Scorevectoren

We gaan nu na welke vectoren als scorevectoren kunnen optreden. Het gaat uiteraard alleen over vectoren $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ met gehele componenten, en we hebben al vastgelegd dat we steeds onderstellen dat $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$.

Laat $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ een scorevector zijn. Omdat er $\binom{n}{2}$ wedstrijden zijn gespeeld (en gewonnen) geldt:

$$\sum_{i=1}^n s_i = \binom{n}{2}. \quad (1)$$

(N.B.: $\binom{1}{2} = 0$). Kijkend naar de wedstrijden die $1, 2, \dots, k$ onderling hebben gespeeld zien we een deeltoernooi, met scores $s'_1, s'_2, \dots, s'_k$, zeg. Dus ook daarvoor: $\sum_{i=1}^k s'_i = \binom{k}{2}$. Omdat $s_i \geq s'_i$ voor $i = 1, 2, \dots, k$, hebben we:

$$\sum_{i=1}^k s_i \geq \binom{k}{2} \quad \text{voor } k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2)$$

Treedt voor zekere k hier het =-teken op, dan is, voor $i = 1, 2, \dots, k$, $s_i = s'_i$. Geen der spelers $1, 2, \dots, k$ heeft gewonnen van een der spelers $k+1, k+2, \dots, n$, dus het toernooi is *reducibel*. Is, omgekeerd, het toernooi *reducibel*, dan hebben we (zie de laatste zin in 2) in (2) gelijkheid voor ten minste één k . Dus:

Lemma 2 Een toernooi met scorevector $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ is *reducibel* dan en slechts dan als voor zekere k met $0 < k < n$ geldt:

$$\sum_{i=1}^k s_i = \binom{k}{2}.$$

Een toernooi met vector $(0, 1, 2, \dots, n-1)$ is wel erg *reducibel*, want voor elke k is $\sum_{i=1}^k s_i = \binom{k}{2}$.

In het algemeen echter zullen er zowel 'te grote' s_i (i.e. $s_i > i-1$), als 'te kleine' voorkomen.

Voorwaarde (1) is equivalent met $\sum_{i=1}^n s_i =$

$\sum_{i=1}^{n-1} (i-1)$ ofwel $\sum_{i=1}^{n-1} (s_i - i + 1) = 0$. Voorwaarde

(2) met $\sum_{i=1}^k (s_i - i + 1) \geq 0$ voor $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Als $\sum_{i=1}^k s_i > \binom{k}{2}$ ofwel $\sum_{i=1}^k (s_i - i + 1) > 0$ is er bij de eerste k s_i 's een 'overschot' dat moet worden gecompenseerd door de volgende:

$$\sum_{i=k+1}^n (s_i - i + 1) < 0.$$

De voorwaarden (1) en (2) zijn niet alleen nodige voorwaarden, maar samen zijn ze ook voldoende:

Stelling 3 De geheeltallige vector $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ met $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ is de scorevector van een toernooi dan en slechts dan als hij aan (1) en (2) voldoet.

Bewijs. We moeten nog laten zien dat zo'n vector die aan (1) en (2) voldoet bij een toernooi hoort. Gebruik inductie naar n . Het geval $n = 1$ is triviaal (als je dit niet vertrouwt: $n = 2$ en $n = 3$ ook). Neem aan dat de bewering juist is voor vectoren met minder dan n componenten en laat $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ een vector zijn als in de stelling die aan (1) en (2) voldoet.

Onderstel eerst eens dat $\sum_{i=1}^k s_i = \binom{k}{2}$ voor zekere k ,

$0 < k < n$. Volgens de inductieaanname is er op de punten $1, 2, \dots, k$ dan een toernooi T_1 met scorevector $(s_1, s_2, \dots, s_k)$. Maar ook is er een toernooi T_2 met scorevector $(s_{k+1} - k, s_{k+2} - k, \dots, s_n - k)$, want

$$\sum_{i=k+1}^{k+m} (s_i - k) = \sum_{i=1}^{k+m} s_i - \sum_{i=1}^k s_i - mk \geq \binom{k+m}{2} - \binom{k}{2} - mk = \binom{m}{2}$$

voor $m = 1, 2, \dots, n - k$, met gelijkheid als $m = n - k$. We nemen voor T_2 als punten $k+1, k+2, \dots, n$, verenigen T_1 en T_2 en voegen de pijlen (j, i) toe met $1 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq n$.

Dit geeft het gezochte toernooi.

Stel vervolgens dat $\sum_{i=1}^k s_i > \binom{k}{2}$ voor alle $k = 1, 2, \dots, n-1$. In het bijzonder is $s_1 > 0$ en als we s_1 met 1 verlagen en s_n met 1 verhogen is nog steeds aan (1) en (2) voldaan, en de volgorde blijft

goed. Treedt nu nog voor geen enkele k het =-teken op, dan verlagen we ook s_2 met 1 en verhogen nogmaals s_n met 1,....., treedt nu nog voor geen enkele k het gelijktteken op, dan verlagen we s_j met 1 en verhogen s_n met 1,..... We gaan door tot voor zekere k het gelijktteken optreedt (dat zal zeker een k met $k \geq j$ zijn).

Precies: neem de kleinste j waarvoor er een k is met $j \leq k < n$ en $\sum_{i=1}^k s_i = \binom{n}{2} + j$. Maak dan de vector $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ met $t_i = s_i - 1$ voor $i = 1, 2, \dots, j$, $t_n = s_n + j$, en $t_i = s_i$ voor $i = j + 1, j + 2, \dots, n - 1$. Er geldt $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ en de vector voldoet aan (1) en (2) met t i.p.v. s , zoals men eenvoudig nagaat. Bovendien is $\sum_{i=1}^n t_i = \binom{n}{2}$. Als boven: er is een toernooi met scorevector $(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Dit is reducibel en $(n, 1), (n, 2), \dots, (n, k)$ zijn pijlen. Het gezochte toernooi ontstaat door $(n, 1), (n, 2), \dots, (n, j)$ om te keren. We moeten nog wel laten zien dat een j als boven ook bestaat. Welnu, s_n is ten minste het gemiddelde der s_i , en dit is $n^{-1} \binom{n}{2} = \frac{n-1}{2}$. Dus $\sum_{i=1}^n s_i = \binom{n}{2} - s_n \leq \binom{n}{2} - \frac{n-1}{2} = \binom{n-1}{2} + \frac{n-1}{2}$. Dus zo'n j bestaat en is zelfs $\leq \frac{n-1}{2}$.

Voorbeeld. (2, 2, 2, 2, 6, 6, 6, 7, 7, 8) voldoet aan de voorwaarden. We geven, voor $k = 1, \dots, 11$, de $\sum_{i=1}^k s_i$, de $\binom{k}{2}$, en de overschotten

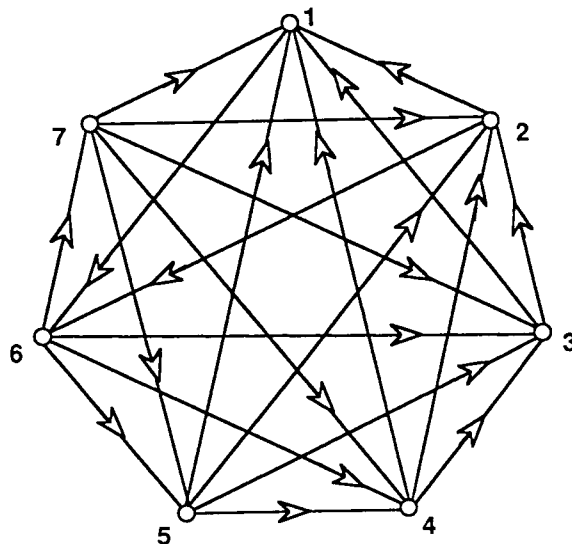
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	4	6	8	14	20	26	33	40	47	55
0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
2	3	3	2	4	5	5	5	4	2	0

De j uit het bewijs is 2, de k is 4 (of 10). Het te construeren toernooi krijgt dus pijlen naar elk punt in $\{1, 2, 3, 4\}$ vanuit elk punt in $\{5, 6, \dots, 11\}$, met de uitzonderingen (1, 11) en (2, 11).

Willen we het toernooi echt maken, dan moeten we nu toernooien maken met scorevectoren (1, 1, 2, 2) en (2, 2, 2, 3, 3, 3, 6). Daarbij is de laatste al weer meteen te splitsen in (2, 2, 2, 3, 3, 3) en (0). Al construerende hoeven we eigenlijk alleen de 'laag naar hoog' pijlen te onthouden: eerst dus (1, 11) en (2, 11), dan (bij (1, 1, 2, 2) is $j = k = 1$) een pijl (1, 4) en (bij (2, 2, 2, 3, 3, 3) met $j = 2, k = 5$) pijlen (5, 10) en (6, 10), tenslotte vinden we nog (5, 9).

Opmerkingen. De j uit het bewijs vindt men door de 'overschotten' $\sum_{i=1}^m s_i - \binom{m}{2}$ te bezien die $\leq m$ zijn, en daaronder het kleinste te nemen. De gegeven constructie geeft slechts één van de i.h.a. meerdere toernooien met de gegeven scorevector. Voor $n = 10$ bijvoorbeeld zijn er 1486 scorevectoren maar meer dan $9.7 \cdot 10^7$ niet-isomorfe toernooien.

4 Andere methoden om de winnaar aan te wijzen



Figuur 3

Beschouw het toernooi met matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en scorevector (1, 2, 2, 3, 4, 4, 5) (zie figuur 3). De nummering is een goede; het toernooi is irreducibel, want de 'overschotten' zijn 1, 2, 2, 2, 2, 1, 0. Speler 7 heeft de hoogste score. Hij won van 1, 2, 3, 4 en 5 die tezamen 12 wedstrijden wonnen. Speler 6 won maar 4 keer, van 3, 4, 5 en 7. Die wonnen samen

echter 14 wedstrijden. Is 6 'in tweede instantie' niet sterker dan 7? De uitgraad van een punt is het aantal manieren om vanuit dat punt in de graph één stap te doen (met een pijl mee). Wat we 'in tweede instantie' telden was het aantal pijlen dat vertrekt in een eindpunt van een pijl die in 7 resp. 6 begint, dus het aantal manieren om vanuit 7 resp. 6 twee stappen na elkaar te doen. Zou het dan niet nog verfijnder zijn met drie of nog meer stappen te werken, en raakt het eind zo niet zoek?

Het zal de lezer bekend zijn dat, zoals de (gespiegelde) scorevector A_j als i^{de} component het aantal wegen van lengte 1 vanuit punt i in het toernooi geeft, de vector A^k_j hetzelfde doet voor wegen van lengte k . Met een eenvoudig computer-programmaatje kunnen we snel met de A uit ons voorbeeld voor een aantal k 's de vector A^k_j berekenen (niet eerst A^k uit A^{k-1} , vlugger is $A^k_j = A(A^{k-1}_j)$ uit A^{k-1}_j . We geven wat resultaten, waarbij we alleen de laatste twee componenten vermelden (de andere zijn steeds kleiner). Zie figuur 4.

Hoewel de verfijnde score van speler 6 voor $k = 4$ en $k = 8$ weer onder die van speler 7 duikt, lijkt dit vanaf $k = 9$ niet meer het geval te zijn (tot $k = 30$ in elk geval niet). Maar blijft dat altijd zo?

Gelukkig komt de stelling van Perron-Frobenius ons hier te hulp. Hij zegt (o.a.) dat een irreducibele vierkante matrix A met alle elementen ≥ 0 een reële eigenwaarde λ heeft met $\lambda \geq |\mu|$ voor elke eigenwaarde μ , dat er bij λ een eigenvector is met alleen positieve componenten, en dat dat op veelvouden na de enige eigenvector bij λ is. Men kan bewijzen dat deze eigenvector de limiet is van de rij der vectoren $\lambda^{-k} A^k_j$. Daaruit volgt, dat de groottevolgorde der componenten van A^k_j vanaf zekere k stabiel wordt.

Met een computer-algebra pakket is het eenvoudig bij A de λ en zijn eigenvector te bepalen. De grootste component wijst dan de winnaar aan. In ons voorbeeld blijkt dat inderdaad speler 6 te zijn.

Opmerkingen. Bij een reducibel toernooi splitsen we het natuurlijk eerst en beperken ons dan tot het deeltoernooi met de hoge scores. De methode is ook toepasbaar bij een z.g. dubbele competitie en

eventuele gelijke spelen. Zet dan op plaats (i, j) een 2 als i beide wedstrijden van j wint, een $1\frac{1}{2}$ als hij één keer wint en één keer gelijk speelt, etcetera. Wie nog over alle gegevens beschikt kan nagaan of Feyenoord in 1993 terecht kampioen werd.

Voorbeelden. Bij een toernooi met scorevector $(2, 2, 2, 2, 2)$ geeft ook de verfijning geen beslissing: $A^j = (2^i, 2^i, 2^i, 2^i, 2^i)^t$. Hier is $\lambda = 2$ en j zelf de bijbehorende eigenvector. Bij $(1, 1, 2, 2)$ hoort, op isomorfie na (d.w.z. afgezien van de nummering), maar één toernooi. Immers geef de spelers met score 2 de nummers 3 en 4, met 4 voor de winnaar van de wedstrijd tussen beiden. Geef nummer 1 aan de andere speler die van 4 heeft verloren, nummer 2 aan de overblijvende speler. Dan moet 3 gewonnen hebben van 1 en 2, en 1 van 2. De matrix A wordt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Na 8 keer de scorevector te hebben verfijnd (A^8_j) vinden we $(9, 13, 17, 21)^t$. Hierna verandert de volgorde niet meer. (Bewijs met inductie: is $a < b < c < d$ met $d < a + b$, dan is voor $w = b$, $x = d$, $y = a + b$, $z = a + c$ wederom $w < x < y < z$ met $z < w + x$.)

De tussenstanden tijdens het verloop van een competitie kunnen natuurlijk ook al volgens deze methode worden bepaald. Het wordt spannender, omdat je door van een sterke speler te winnen een grote sprong in het klassement kunnen maken.

We bespreken heel kort nog een andere methode.

Als we ervan uitgaan dat er een volgorde van de spelers naar sterkte is, en dat elke afwijking van de daarbij verwachte uitslagen aan 'pech' of een 'off day' te wijten is, rijst de vraag hoe we het best uit het resultaat van het toernooi die volgorde zouden kunnen gissen. We nemen aan dat de waarschijnlijkste volgorde er een zal zijn met minimaal aantal 'pech-gevallen' en willen dus na afloop de spelers

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
6 ^{de} component	1	4	14	28	63	196	511	1173	3056	8288	20710	248606675
7 ^{de} component	1	5	12	25	70	196	496	1159	3115	8030	19965	243777757

Figuur 4

zó nummeren, dat het aantal keren dat een speler wint van een speler met hoger nummer (het aantal *upsets*) geminimaliseerd wordt. (Ik kan geen mooi Nederlands equivalent voor 'upset' verzinnen. Omslag, omkering, verstoring?) In het laatste gegeven voorbeeld is het aantal upsets 2. Het wordt 1 als we de nummers 1 en 2 verwisselen. Dit is hier het minimum (waarom kan 0 niet?). We zien dat onze twee methoden van rangschikken tot verschillend resultaat kunnen leiden.

Voorbeeld.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Twee toernooien met scorevector (1, 1, 2, 3, 3). Ze zijn essentieel verschillend (niet isomorf): we kunnen door het eerste toernooi te hernummeren niet het tweede krijgen, want in het eerste wint de enige speler met score 2 van een speler met score 3 en in het tweede niet. Het eerste heeft hij de gekozen nummering 3 upsets (want 3 énen boven de diagonaal), het tweede slechts 1. Dit laatste is minimaal: 0 upsets kan alleen bij een scorevector (0, 1, 2, 3, 4). In het eerste toernooi zijn na verwisselen van de nummers 4 en 5 nog maar 2 upsets. Enig proberen leert dat minder niet kan.

In het algemeen is de bepaling bij een gegeven toernooi van een nummering die het minimum aan upsets geeft een lastig probleem. Wel is vrij eenvoudig uit de scorevector een ondergrens voor dit minimum af te lezen. Merk eerst op: is bij zekere nummering t_i de uitgraad van punt i en is $t_i \geq i$, dan moeten er tenminste $t_i - i + 1$ pijlen van i naar een punt met hoger nummer wijzen. Is $t_j < j - 1$, dan wijzen er ten minste $j - 1 - t_j$ pijlen naar j vanuit een punt met lager nummer. Er zijn dus zeker $\sum^*(t_i - i + 1)$ en ook zeker $\sum^{**}(i - 1 - t_i)$ upsets, als $\sum^*$ en $\sum^{**}$ sommatie over de i met $t_i \geq i$ resp. t_i

$\leq i - 1$ beduiden. Maar beide getallen zijn gelijk omdat $\sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n (i - 1)$. We kunnen dus ook zeggen: er zijn ten minste $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |t_i - i + 1|$ upsets. Let wel: bij de gegeven nummering. Enig puzzelen leert: als $t_i > t_{i+1}$, dan is

$$|t_i - i + 1| + |t_{i+1} - (i + 1) + 1| \geq |t_{i+1} - i + 1| + |t_i - (i + 1) + 1|.$$

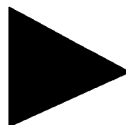
Door de nummers i en $i + 1$ te verwisselen wordt onze ondergrens dus zeker niet groter. Daaruit volgt:

Stelling 4 *Het aantal upsets in een toernooi met scorevector $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ is bij elke nummering ten minste $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |s_i - i + 1|$.*

Bij de scorevector (1, 1, 2, 3, 3) uit ons voorbeeld is deze grens 1. Hij kan door A niet gehaald worden. Overigens haalt A zijn minimum ook na verwisselen van de nummers 3 en 4, waardoor een niet goede nummering ontstaat. Er zijn zelfs voorbeelden waarbij het minimaal aantal upsets slechts bij een niet goede nummering kan worden bereikt. Wel moet een nummering waarbij het aantal upsets minimaal is zó zijn, dat, voor elke i , i verliest van $i + 1$, anders zou verwisselen van hun nummers 1 upset minder geven.

We vermelden ten slotte dat de grens in de stelling niet scherper kan, wat blijkt uit de volgende stelling:

Stelling 5 *Zij $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ een scorevector. Dan bestaat er een toernooi met die scorevector en een goede nummering waarbij er precies $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |s_i - i + 1|$ upsets zijn.*



Mededeling

Door technische omstandigheden is het decembernummer van *Euclides* pas in januari verschenen. Zo ontvangen de abonnees ook het januarinummer later dan zij gewend zijn. Helaas moet voor de vervolgaftleveringen eveneens rekening worden gehouden met enige vertraging.

► Moraal in het wiskundelokaal?*

E. M. Koerts

De basisvorming wordt tegelijk met het nieuwe leerplan wiskunde voor twaalf- tot zestienjarigen ingevoerd. Tevens ligt er een oproep van de minister om meer aandacht aan waarden en normen te besteden.¹ Praten over levensbeschouwing raakt weer in, moraliseren mag weer. Met het eerste kunnen we instemmen. Maar wat moeten we van het tweede vinden?

Aan deze vraag wordt hier aandacht besteed, vooral door contexten nader te verkennen.

Inleiding

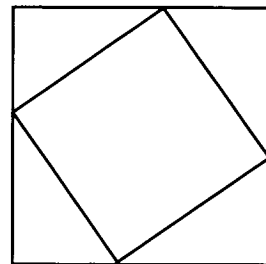
Op de basisschool is een stille revolutie gaande: het produktgerichte rekenonderwijs, waarin in hoofdzaak standaardoplossingen worden aangeleerd, wordt met grote snelheid vervangen door het meer procesgerichte in contexten ingebedde probleemoplossend rekenonderwijs.²

Bij wiskunde in het kader van de *basisvorming* zou je het liefst denken aan wiskunde voor het leven, het leven als producent en consument, als gezinslid, als deelnemer aan het maatschappelijk gebeuren. Vorming gaat de hele mens aan, lichamelijk, emotioneel, geestelijk en sociaal.³

Naast veranderingen in de werkwijze komen er bij de basisvorming ook veranderingen in de leerstof. Het meest opvallende element daarin is het gebruik van contexten. Wordt het gebruik van contexten een nieuwe truc om de oude ons bekende stof die er niet meer met de paplepel in wil, er alsnog bij de leerlingen in te krijgen?

Het wiskundeonderwijs krijgt vorm door het onderzoeken van probleemsituaties die in de gebruikte contexten besloten liggen. Uit zulke situaties komen wiskundige activiteiten voort, waar door de context betekenis aan gegeven wordt.⁴ De betekenis van een context zit in het opwekken van de verbeelding, van het vormen van een omgeving waarin een leerling wil en kan redeneren.⁵

Het uitgangspunt is dan niet de stelling van Pythagoras bijvoorbeeld, ook niet het bewijs, maar een concreet praktisch probleem. Kun je bijvoorbeeld vier driehoekige tegels van 3 bij 4 bij 5 zo tegen elkaar aan leggen dat er een vierkant ontstaat? Als dat gelukt is, zie je de stelling en tegelijk het bewijs.



Een stap verder is dat een concreet probleem in een niet-wiskundige context wordt geplaatst. Ook de toepassingen kunnen in een context geplaatst worden.

Wiskunde kun je onderwijzen en toepassen. Maar met welke doeleinden wil je dat en op welke gebieden wil je wiskunde toepassen? Dat zijn vragen met een normatieve lading.⁶ Dergelijke vragen zijn sinds jaar en dag aan de orde geweest.⁷ Ze worden opnieuw actueel door de invoering van de basisvorming en door de maatschappelijke discussie over de pedagogische taak van de school.

De school

De doelstellingen op schoolniveau geven aan wat de school met het te geven onderwijs wil. Concrete kerndoelen mogen niet geïsoleerd beschouwd worden. Als dat wel gebeurt, loopt het onderwijs het risico toetsgericht te worden, los van de algemene schooldoelen.⁸

Dit gevaar is weer actueel nu er toch een soort examen schijnt te komen ter afsluiting van de basisvorming. Een afsluitend examen van de basisvorming is funest voor een procesgericht wiskundeonderwijs en voor de identiteit van de school.

Misschien valt het allemaal nog mee en blijft er ruimte over voor een eigen invulling van het wiskundeonderwijs. Maar hoe kan dat gedaan worden? Enkele aspecten zullen hier aangestipt worden.

De leraren

De een zal misschien zeggen: 'Identiteit heeft te maken met mijn persoon. Ik kan dan niets met wiskunde. Dat staat daar buiten. Ik kan wel iets met leerlingen. Dat zijn ook mensen evenals ik. Dus identiteit speelt binnen de school in de sociale sfeer, bij het contact met de ander.'

Een ander zegt wellicht: 'Als je toch over leerstof wilt praten, zou je kunnen denken aan thema's uit de sociale en maatschappelijke sfeer. In de wiskunde gaat het tegenwoordig over werkloosheid, geboortebeperving, criminaliteit, alcoholgebruik, verkeersgedrag en dergelijke. De docent beschikt over vele aanknopingspunten bij zulke onderwerpen om verder te gaan dan een puur technische benadering.'

Schoolboeken

De minister zal toch niet blij zijn met de volgende tekst uit een schoolboek waar we na een leuk plaatje het volgende lezen:



'Je ziet hier een hoop spullen liggen. Deze hele verzameling moet op een rommelmarkt verkocht worden. Willie zit met zijn handen in het haar, want hij moet het allemaal naar de markt brengen. Maar dat is zijn zorg. Onze zorg is deze: in de titel wordt gevraagd wat een verzameling is. Probeer daar een antwoord op te vinden.'

Uit: Wiskunde voor het lager beroepsonderwijs deel 1a. Tilburg 1982.

Een ander boek begint over hetzelfde onderwerp op een totaal andere manier. We lezen het begin mee:

'Een paar weken geleden stond ik op een station te wachten op mijn trein. Aangezien het nog wel even duurde voordat de trein binnenreed, ijsbeerde ik wat op het perron.

Plotseling kwam een mevrouw naar me toegelopen en vroeg: 'Meneer, kunt u mij misschien helpen! Ik probeer iemand op te bellen in de telefooncel, maar het lukt me niet. Volgens mij is er iets mis met de cel!' Ik liep met de mevrouw mee naar de cel...'

Wie nieuwsgierig wordt naar het vervolg, moet het maar opzoeken in *Wiskunde in uitvoering*, deel 1. Behalve dat we nieuwsgierig worden naar het vervolg constateren we hier met een realistische situatie

te maken te hebben. Bovendien wordt hier een ander beeld geschetst van hulpvaardigheid dan in het eerder geciteerde schoolboek. Wiskunde kan blijkbaar bijdragen aan het verhaal van waarden en normen. Ook bij wiskunde gaat het uiteindelijk om de grondhouding van waaruit je met de werkelijkheid bezig bent. Dat is richtinggevend voor de manier waarop we met het wiskundige gereedschap omgaan.

Wiskunde en waarden

Kunnen we behalve via thema's uit de sociale en maatschappelijke sfeer nog andere verbanden leggen tussen wiskunde en waarden? Als je het voorstellingsvermogen tracht te ontwikkelen, ben je dan levensbeschouwelijk geïnspireerd bezig? Het beleven van de schoonheid van de wiskunde heeft voor de één niets te maken met identiteit, terwijl de ander iets goddelijks in de schoonheid van de wiskunde beleeft. Die verwondering en beleving draag je uit.



Fractal van Mandelbrot

Ik zie tot nog toe vier manieren om het thema wiskunde en waarden te benaderen. Deze zijn:

- I Kenmerken van de wiskunde;
- II Kenmerken van de wereld;
- III Verrijkte wiskunde;
- IV Metacontexten.

Benadering I: Kenmerken van de wiskunde

Bij deze benadering worden *kenmerken van de wiskunde*⁹ vergeleken met de eigen waarden of met de doelstellingen van de school. Volgens Bishop worden in elke cultuur bepaalde waarden met de wiskunde verbonden. Voorbeelden van dergelijke waarden zijn: rationaliteit, de emotionele behoefte aan zekerheid, aan verklaring, het streven naar vooruitgang en het open staan voor discussie.

Benadering II: Kenmerken van de wereld

Bij deze benadering worden *kenmerken van de wereld* vertaald naar wiskundige consequenties. We pogen dan de maatschappelijke context te bevragen naar haar waarde, deze te bespreken en te verbinden met de dagelijkse wiskundeles. Zo constateren we dat wiskunde op school aangeboden wordt als vak naast andere vakken. We zijn als docenten vaak nauwelijks op de hoogte met wat collega's van andere vakken aan onze leerlingen aanbieden. Zoiets vraagt om een beoordeling. Er kunnen misschien goede redenen zijn om deze situatie te handhaven. Het kan ook zijn dat we pleiten voor meer samenhang tussen de vakken.¹⁰

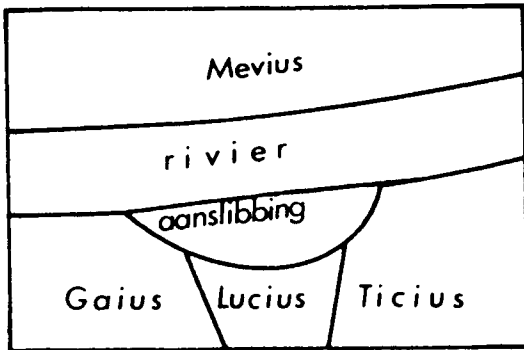
Benadering III: Verrijkte wiskunde

Bij deze benadering wordt de leerstof *wiskunde verrijkt* met onderwerpen zoals geschiedenis en kunst of worden ethische dilemma's toegevoegd.

Bij zijn onderzoek van de geschiedenis van de wiskunde kwam Van Maanen¹¹ een landverdelingsprobleem uit de oudheid tegen, een probleem waarover de jurist Bartolus in 1355 een tractaat schreef. Bartolus kwam tot de conclusie dat hij alleen met behulp van de meetkunde een oplossing kon geven.

Van Maanen werkt een en ander uit tot een brugklasproject en wil daarmee onder andere een voorbeeld geven van het maatschappelijk belang van de wiskunde: je kunt er conflicten tussen mensen mee oplossen.

Het probleem waar Bartolus over schreef, was het volgende.



- Er is een rivier en aan die rivier hebben allerlei mensen landerijen. Maar rivieren zijn grillig. Soms kiezen ze een nieuwe bedding, of ontstaat langs de oever aanslibbing. Zo ontstaat dus nieuw land. Wiens bezit wordt nu dat nieuwe land? Als de mensen daarover via overleg een beslissing nemen, is er natuurlijk niets aan de hand. Maar als ze er ruzie over krijgen, moet de rechter tussen beide komen.
- Wat vinden jullie de meest rechtvaardige manier om het nieuwe land te verdelen?

Met betrekking tot de kunst zijn me vele bijdragen bekend, maar ik heb behoefte aan meer overzicht. Wellicht is er iemand die deze poging wil ondernemen?

Waardenconflicten

Mijns inziens passen *waardenconflicten* goed binnen de huidige werkwijze in het wiskundelokaal. In het volgende voorbeeld¹² is sprake van een waardenconflict.

- Een moderne boer moet investeren wil hij vooruit komen. Hij heeft stallen nodig, een goed ventilatiesysteem, voedersilo's enzovoort. Daarvoor heeft hij geld nodig. Hij leent geld en moet veel rente betalen terwille van zijn investeringen. Om dat terug te verdienen, moet hij zo goed mogelijk produceren. Daar-

om heeft hij veel varkens. Het probleem daarmee is de mest, want die kan hij niet voldoende kwijt. Daardoor levert hij een bijdrage aan het mestoverschot door zijn manier van produceren.

In dit voorbeeld gaat het om het realiseren van twee waarden (welvaart en goed milieu). Waarden die niet gemakkelijk met elkaar verenigd kunnen worden. Zo is er sprake van een waardenconflict. Hoe hebben we het nu? Moet de wiskunde ook al een rol spelen bij het oplossen van ethische problemen? Bemoeit bèta zich al niet genoeg met alfa? Wiskunde is een aspect van de werkelijkheid, maar valt daarmee niet samen. De reikwijdte van de wiskunde is beperkt, maar de wiskunde is niet overbodig, maar zelfs een zinvol hulpmiddel. Die spanning moet de leraar wiskunde overbrengen, de spanning tussen enerzijds de beperktheid van het wiskundig gereedschap en anderzijds de generaliseerbaarheid van de mathematische aanpak. Die spanning kan voelbaar worden bij het 'oplossen' van waardenconflicten.

Waarom passen dergelijke dilemma's binnen de didactiek van de wiskunde? In het traditionele wiskundeonderwijs heeft elke vraag maar één antwoord en is er maar één manier om aan het antwoord te komen. Traditioneel is het stellen van gesloten vragen.

De vragen die het leven oproept zijn echter open vragen.^{13,14}

- Hoeveel sterren staan er aan de hemel?
- Hoeveel bruggen zijn er in Nederland?
- Hoe lang is die trein?

Benadering IV: Metacontexten

Tenslotte nog iets over de laatste benadering om verbanden te leggen tussen wiskunde en waarden. Bij *metacontexten* pleit ik niet voor moraliserende contexten, ook niet voor het censureren van contexten. Al heb ik moeite met kansvraagstukken over neerstortende vliegtuigen, met sommen over omgeslagen boten of helicopters boven Egyptische piramiden, ze kunnen gekoppeld worden aan de eigen waarden en die van klasgenoten. Houd wel rekening met emotionele blokkades.

De waarde van contexten wordt in de eerste plaats bepaald door de functie die ze hebben in het leerproces. Er zijn dan *soorten* contexten te onderscheiden.¹⁵

Er zijn contexten die er met de haren zijn bijgesleept (*soort nul*). Er zijn contexten waarbij een vertaalactiviteit nodig is om bij de wiskundige inhoud te komen (*soort één*). Bij *soort twee* is naast vertalen ook organiseren, ordenen en mathematiseren nodig. Contexten van *soort drie* zijn contexten waarbij nieuwe begrippen worden aangebracht, bijvoorbeeld groei in de vijver van Bommel. Daarnaast zijn er nog contexten van *soort vier* (Staring en Staring⁶). Hierbij wordt nagegaan of de contexten passen binnen de doelstellingen van de school.

Elke ordening van contexten suggereert dat de ene context beter of hoger is dan de andere. Maar wat is dan het criterium voor: goed? Moeten we aan de aan een context te stellen eisen er nu nog één toevoegen, namelijk: ethisch verantwoord? Ik betwijfel het. In de wereld word je geconfronteerd met goed en kwaad. Op school kun je niet kunstmatig het kwaad uitbannen. Ik pleit er voor te letten op de functie van de context in het leerproces, en op de pedagogische functie. Alle contexten zijn dan welkom.

Er kan onderscheid gemaakt worden tussen de feitelijke en de gewenste functie(s) van contexten. Het bewust kiezen behoort tot de verantwoordelijkheid van de leraar en tot die van de school (niet tot die van de overheid). De gekozen contexten kunnen opnieuw geordend worden, in bepaalde kaders geplaatst worden. Die kaders noem ik *metacontexten*. Een voorbeeld van een metacontext is de speltheorie. Als ik tijd had, zou ik willen onderzoeken of de speltheorie een kader kan vormen waarbinnen de leerstof wiskunde uit de basisvorming past. Misschien vormen verdelingsproblemen (van land, van geld, van woonruimte enz.) zelfs een metacontext voor alle vakken.

Besluit

Het is boeiend dat steeds meer mensen zich bezig houden met de identiteit van de school. Zelfs ministers doen er aan mee. De problematiek van waarden en normen is door de ministers verbonden aan moraal.

Leraren maatschappijleer of godsdienst en bestuurders van scholen denken veelal aan vakken als maatschappelijke of levensbeschouwelijke vorming.

Op het bordje van de wiskundeleraar past een ander facet van het verhaal over waarden en normen. Dat facet is prachtig geïllustreerd in een artikel van Goudriaan¹⁶ en de reacties daarop. Het ging over het *Rivierenland*, het dilemma van het door God gegeven rivierenland, de bedreiging van watersnood en de oplossing door dijkverhoging die gebaseerd zou zijn op rekenkundig drijfzand.

Het lezen van die reacties riep bij mij een vraag op. Zelf heb ik nogal wat leerlingen gehad die wiskunde of natuurkunde zijn gaan studeren. Hoe zouden zij probleemoplossend te werk gaan? Zouden in hun denken waarden en normen een rol spelen? Dat is het facet dat hier aan de orde was. Een mogelijke maar geenszins noodzakelijke en allerm minst uitputtende uitwerking is geschetst.

De moraal van dit verhaal is dat het in de klas niet om moraal gaat, maar om goed onderwijs. Als iemand, een minister bijvoorbeeld, wil dat leraren leerlingen geen zaken voorhouden die niet door de beugel kunnen, dan moet hij daarover kerndoelen formuleren en tijd en geld beschikbaar stellen. Zo werkt dat in een geprofessionaliseerd bedrijf.

Als de samenleving daar geen geld, tijd en ruimte voor beschikbaar stelt, werkt ze aan haar eigen ondergang.

** Met dank aan de redactie voor haar suggesties en haar commentaar op een eerdere versie.*

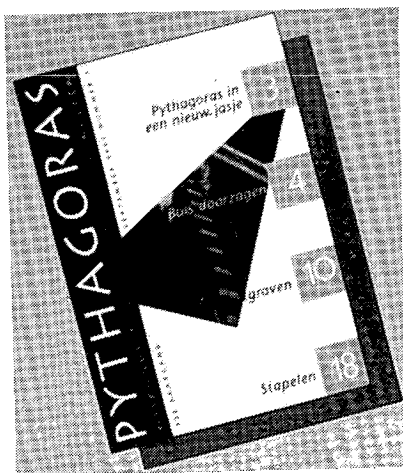
Noten

1. Ritzen, J.M.M. (1992). De pedagogische opdracht van het onderwijs – een uitnodiging tot gezamenlijke actie. zie ook *Uitleg*, 26 juni 1991, nr. 17.
2. Lange, J. de (1986). Redactioneel. *NW, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 5, nr 3, p 2.
3. Freudenthal, H. (1984). Basisvorming. *NRC Handelsblad*, 6 september 1984 zie *NW, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 10 (1991), nr 3, p 50-51.
4. Douwe Kok, Marja Meeder, Monica Wijers, Joop van Dormolen, (1992). *Wiskunde 12-16 een boek voor docenten*. Utrecht/ Enschede: Freudenthal instituut/ SLO.
5. Broekman, H.G.B. & Dormolen, J. van (1989). *Basisvorming*. Leiden: Stenfert Kroese.

6. Staring, M. & Staring, J. (1986). Verantwoordelijkheid en context-keuze in wiskunde-onderwijs. *NW, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 5, nr 3, p 3-9.
7. Bos, H.J.M. (1989/1990). Wiskunde en maatschappij. *Euclides*, 65, nr 9.
8. Blij, F. van der & Treffers, A. (1985). *Rekenen-wiskunde*; serie Werkdocumenten basisvorming in het onderwijs. 's-Gravenhage: WRR.
9. Bishop, A.J. (1988). *Mathematical Enculturation, A cultural Perspective on Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
10. Koerts, E.M. & Driel, L. van (1993). *Identiteit en basisvorming*. Kampen: Kok.
11. Maanen, J. van (1984/1985). Over het verdelen van aangeslibd land Een brugklas projekt. *Euclides*, 60, nr 4, p 161-168.
12. Laar, J. van de & Leeuw, J. de (z.j.). *Dialog: levensbeschouwelijke en ethische vorming*. Best: Damon.
13. Freudenthal, H. (1982/1983). Ga eens even schatten... *Willem Bartjens*, 2, nr 4, p 186-190.
14. Lagerwerf, B., Simons, E., Doevendans, G. & Heerebout, B. (1992). *Zorgverbreding 1*. Amsterdam: APS.
15. Lange, J. de (1979). Contextuele problemen. *Euclides*, 55, nr 2, p 50-60.
16. Goudriaan, H. Rivierenland. *Trouw*, 3 januari 1992.

Over de auteur:

Drs. E.M. Koerts is wiskundeleraar aan het Willem van Oranje College te Waalwijk.



► Pythagoras vernieuwd

Het tijdschrift **Pythagoras**, inmiddels bezig aan zijn 33e jaargang, verschijnt sinds vorig jaar bij de uitgeverij MEMO te Utrecht. MEMO heeft er geen gras over laten groeien. Nu, na een jaar al, heeft MEMO het tijdschrift Pythagoras een grondige facelift gegeven. Pythagoras is er flink van opgeknapt; door het grotere, nu zeer handzame formaat biedt het de mogelijkheid de artikelen op een heel aantrekkelijke manier te presenteren. En waar het vooral om gaat, voor leerlingen van scholen voor voortgezet onderwijs is de presentatie ook ongetwijfeld uitnodigend. Inhoudelijk biedt Pythagoras veel: puzzels, stukjes geschiedenis en wiskundige achtergronden voor de liefhebbers. Het is ondenkbaar dat iemand Pythagoras alleen maar doorbladert: iedereen wordt uitgedaagd zich te verdiepen in wat Pythagoras biedt. Een welgemeend compliment aan uitgever en redactie is dan ook zeker op zijn plaats.

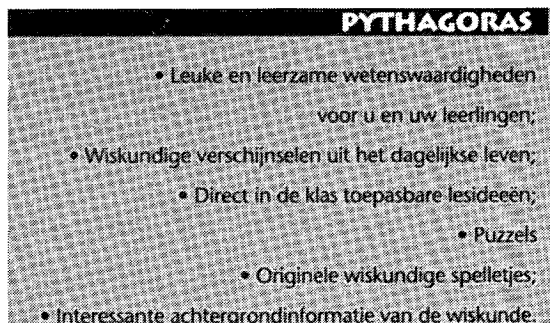
Zakelijke gegevens:

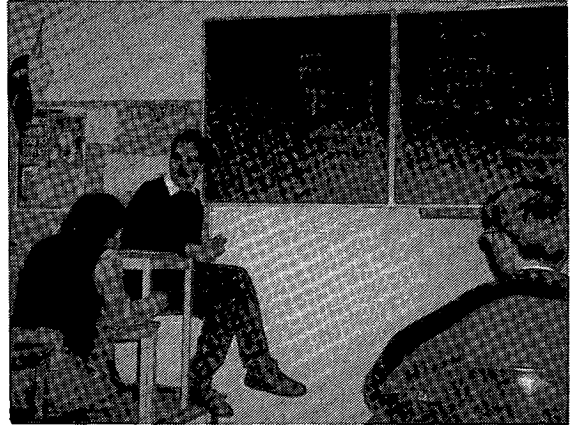
MEMO nv, Antwoordnummer 6236, 3500 VC Utrecht, telefoon 030-736400.

De abonnementsprijs is f 35,-; bij tussentijdse abonnering ontvangt u alle nummers van de lopende jaargang.

Wie minimaal 5 nieuwe abonnees werft, krijgt een gratis abonnement. Wie zich tegelijk op het natuurkundetijdschrift Archimedes abonneert, krijgt f 5,- korting.

Bijdragen kunnen worden gezonden naar Henk Huijsmans, Molenstraat 31, 4841 CA Prinsenbeek, of naar Frank Roos, Klink 19, 9356 DS Tolkert.





► 'Ik red me wel'

Wout de Goede, 46 jaar, leraar aan het Willem Lodewijk Gymnasium te Groningen, is nu bijna 25 jaar leraar, eerst aan een havo/vwo-school, daarna aan zijn huidige school. Hij heeft één brugklas.

Hoeveel wekelijkse wiskundelessen heeft je klas?
In feite gemiddeld 3,5 uur, ik heb ze 4 uur, maar ze krijgen van mij ook 0,5 uur informatiekunde.

Welke methode hebben jullie gekozen?
Ik heb me met de keuze van een methode niet ingelaten. Mijn collega koos voor Getal & Ruimte, en daar red ik me wel mee. In de bovenbouw houden we Wiskunde Lijn.

Heb je stof toegevoegd?
Nee, nog niet. Wel ga ik misschien zorgen voor meer vaardigheidstraining, in bijvoorbeeld letterrekenen, het vermenigvuldigen van tweetermen. De leerlingen moeten de technieken beheersen, ze kunnen dat ook, mits ik het met ze oefen. De extra stof die in het boek staat, doe ik allemaal; die extra stof kan gaan over Romeinse cijfers, of over balansen met één of twee schalen.

Heb je stof weggelaten?
Ook niet. Wel heb ik opgaven overgeslagen, waaronder alle plak- en knipwerk. Ik verbied mijn leerlingen niet om te gaan knippen en plakken, maar ik doe het niet in de klas. Ik heb ook geen behoefte aan een wiskundewerklokaal. Opgaven overslaan moet sowieso, omdat het boek erg vol is. Alleen al het tekenwerk kost veel tijd.

Wat is voor jou het nieuwe in de basisvorming?
Och, ik merk niet zoveel verschil. M'n leerlingen nu vinden wiskunde niet leuker dan m'n leerlingen vorig jaar. Zittenblijvers, aan wie ik het zou kunnen vragen, hadden we het afgelopen jaar niet. Leerlingen vinden sommen maken leuk. Sommigen werken flink vooruit; die maken dan alle opgaven, omdat ik nog niet weet welke ik ga overslaan. Het boek is leuker, iets wat je ook van ouders hoort. De wijze waarop grafieken worden geïntroduceerd is vriendelijker, daar moest je vroeger zelf wat bij doen.

Hoe gaat het met het rekenen?
Veel leerlingen hebben op de basisschool al coördinaten en negatieve getallen gehad. Negatieve getallen gaan in G&R met temperaturen, dat kennen ze al. In voorgaande jaren heb ik een enkele keer de heks (uit MW) erbij gehaald.

Hoe kijk je tegen het nieuwe programma aan?
Ik red me wel. Als iets me niet aanstaat, doe ik wel wat anders. Omdat ik klas 1 t/m klas 6 heb, en dat elk jaar weer, weet ik haarfijn waar de leerlingen naar toe moeten. Daarom heb ik ook het liefst geen parallelklassen. Ik betwijfel of het programma de attitude ten opzichte van wiskunde gaat veranderen. Hier heerst geen bèta-sfeer. Op de havo/vwo-school had je méér leerlingen die wiskunde gingen studeren. Toch heb ik in de 6e klas een groep die trouw mijn extra lessen over complexe getallen volgt, en ook wordt hier enthousiast meegedaan aan olympiades. 't Is verbazend wat leerlingen aan kunnen.

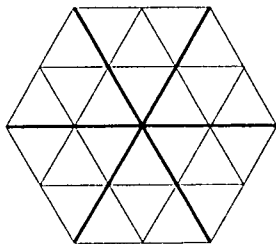
Martinus van Hoon

● Werkblad ●

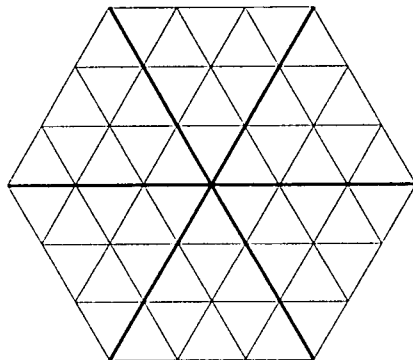
► Regelmatige patronen



rangnummer 1



rangnummer 2



rangnummer 3

Hierboven zie je het begin van een rij regelmatige zeshoeken. Ze zijn opgebouwd uit allemaal even grote gelijkzijdige driehoekjes. Elke figuur heeft een rangnummer.

Het rangnummer noemen we r , het aantal driehoekjes a .

We kunnen een tabel maken:

rangnummer r	aantal driehoekjes a
1	6
2	24
3	?
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮

2p 1 ☐ Hoeveel driehoekjes tel je bij rangnummer 3?

We zoeken een formule waarmee we voor elk rangnummer het aantal driehoekjes kunnen berekenen.

4p 2 ☐ Van de volgende drie formules is er één goed. Welke? Geef een toelichting bij je keuze.

$$a = 2r^2 + 4$$

$$a = 10r^2 - 16$$

$$a = 6r^2$$

2p 3 ☐ Bereken met de formule, die je bij vraag 2 gekozen hebt, het aantal driehoekjes dat bij rangnummer 8 hoort.

4p 4 ☐ Is er een rangnummer waarbij de zeshoek uit 726 driehoekjes bestaat? Licht je antwoord toe.

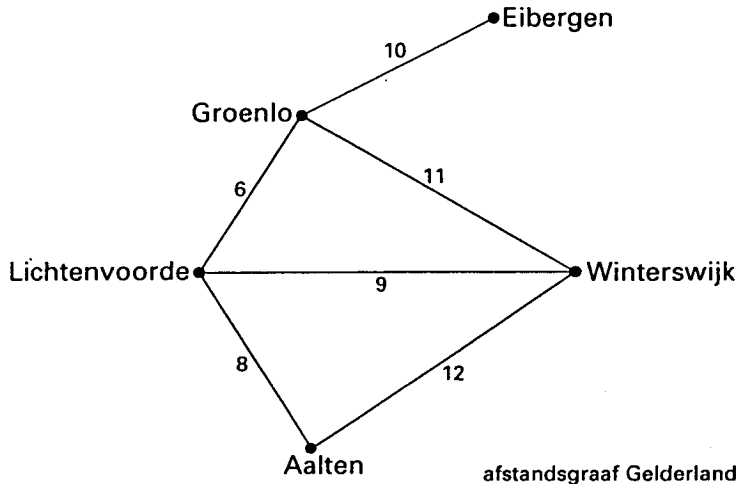
Uit: Examen vbo/mavo C (experimenteel), 1993, eerste tijdvak.

● Werkblad ●

► Vergaderen

Hieronder is een graaf getekend. Deze graaf geeft de voornaamste verbindingswegen aan tussen vijf gemeenten in Gelderland.

De afstanden (in km) staan erbij.



Bij deze graaf kun je een afstandstabel maken, waarin alle afstanden tussen de vijf gemeenten kunnen worden afgelezen. Op de bijlage bij vraag 22 staat zo'n tabel.

4p **22** ☐ Vul deze afstandstabel in én vul ook de totalen in.

De burgemeesters van de vijf gemeenten hebben één maal per maand een gezamenlijke vergadering. Zij gaan daar altijd met hun eigen auto naar toe. Vorige maand was de vergadering in Eibergen.

3p **23** ☐ Hoeveel kilometer hebben de burgemeesters voor die vergadering in totaal afgelegd? Leg je antwoord uit.

De burgemeesters besluiten om voor de volgende vergaderingen zo min mogelijk kilometers te rijden. Ze gaan nog wel steeds met hun eigen auto.

3p **24** ☐ In welke gemeente kunnen zij het beste vergaderen? Hoe kom je aan je antwoord?

De burgemeester van Winterswijk is de volgende maand met vakantie.

4p **25** ☐ In welke gemeente(n) kunnen de andere burgemeesters dan het beste vergaderen? Waarom is dat zo?

► Vlaamse wiskundedidactiek

Bert Zwaneveld

De *Inleiding tot de wiskundedidactiek** is voornamelijk geschreven voor beginnende leraren. Het boek is makkelijk leesbaar en vooral op de praktijk gericht. Het bevat ook voor de Nederlandse leraar lezenswaardige zaken. Hoewel ik niet zonder kritiek ben, wil ik beginnen met wat ik positief vind.

Het boek is – zoals gezegd – vooral op de praktijk gericht en bevat dus geen al te droog getheoretiseer. Het uitgangspunt is wat er in de klas gebeurt, of zou moeten dan wel kunnen gebeuren.

Inhoud

Het boek begint met een hoofdstuk dat *Op verkenning* heet, en uit twee delen bestaat. In het eerste deel staat de lesvoorbereiding centraal. Hierbij gaan de auteurs uit van het in België geldende leerplan.

Het tweede deel is een heel aardige inleiding over datgene wat uit de cognitieve psychologie gebruikt kan worden bij het wiskunde-onderwijs.

Het tweede hoofdstuk gaat over *Kennisverwerving*, en hierop volgt een hoofdstuk over *Kennisverwerking*: niet alleen de organisatie van oefeningen komt aan de orde, ook het gebruiken van heuristische methoden bij het oplossen van problemen krijgt alle aandacht.

Dan volgt een hoofdstuk dat *Scharnierzak* heet. De auteurs bedoelen hiermee (in een les, of in een hoofdstuk van het leerboek): het begin, de overgang van de ene fase naar de volgende, en de afsluiting. Door expliciet aan deze momenten aandacht te besteden kan een les beter gestructureerd worden.

In het hoofdstuk over *Differentiatie* wordt ingegaan op zaken die samenhangen met het feit dat leerlingen nu eenmaal niet allemaal hetzelfde zijn. Een aantal – overigens bekende – methoden om hiermee om te gaan wordt besproken.

Dan volgt in het hoofdstuk over *Motivatie* de bespreking van middelen om de motivatie te bevorderen:

- wiskunde moet realiteitswaarde hebben;
- variatie in leerstof, werkvormen en presentatie is nodig;
- over studievorderingen moet worden gerapporteerd;
- de leraar moet persoonlijkheid hebben;
- er moet gewerkt worden vanuit problemen, meer dan vanuit leerstof.

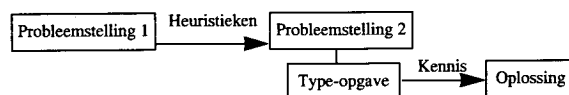
Hierna volgt een hoofdstuk *Studiebegeleiding*, het gaat over het leren gebruiken van een leerboek, het leren maken van aantekeningen, de voorbereiding op een examen, en het uitvoeren van een studietaak in de klas.

In het voorlaatste hoofdstuk komt de *Evaluatie* aan de orde, met zaken als: typen vragen in een proefwerk, nakijken, beoordeling, normering, en de follow-up van een proefwerk.

Het laatste hoofdstuk, *Huistaken*, gaat ten slotte in op de functie van huiswerk.

Oplosprocessen

In het hoofdstuk *Op verkenning* wordt iets over het oplossen van problemen verteld. Daarbij wordt een schema gepresenteerd voor oplosprocessen. Een probleem wordt met behulp van heuristische methoden naar (wat de auteurs noemen) een **type-opgave** getransformeerd. Ik denk dat wij in Nederland van een standaardprobleem zouden spreken.



Vervolgens wordt dit probleem opgelost met behulp van bekende kennis en technieken.

In het hoofdstuk over *Kennisverwerking* bepleiten de auteurs dat leraren er niet star aan vasthouden dat leerlingen werken met de aangeleerde formules, zeker niet als er een eenvoudiger methode is.

Bij de bespreking van stelsels vergelijkingen ontmoet een klas:

$$x + 2y = 3$$

$$x + 2y = 0$$

Iedereen ziet onmiddellijk dat dit een strijdig stelsel is. Is het dan nog zinvol te eisen dat dit met behulp van een hoofddeterminant en een karakteristieke determinant wordt vastgesteld?

(Dit zal wel een typisch Belgisch probleem zijn, maar er zijn tientallen andere die dagelijks ook in Nederlandse klassen voorkomen.)

Een aardige opgave in de deelparagraaf over kritische analyse van de opgave is de volgende.

Twee raketten vliegen recht op elkaar af. De eerste heeft een snelheid van 12000 km per uur en de tweede heeft een snelheid van 18000 km per uur. Bij de start waren de raketten 3086 km van elkaar verwijderd. Op welke afstand van elkaar bevinden deze raketten zich precies één minuut voor de botsing?

Kritiek

Ik hoop te hebben laten zien dat het boek geen starre visie geeft op hoe wiskunde onderwezen moet of kan worden. Tevens is hopelijk duidelijk geworden, dat het niet alleen voor België bruikbaar is, maar ook – soms met wat aanpassing – voor Nederland.

In het hoofdstuk over *Kennisverwerving* wordt gewezen op de relatie tussen begrippen, de taal waarin deze worden uitgedrukt, en de onderliggende logische structuur. Een leerling moet de naam van een begrip kennen en de kenmerken ervan weten: datgene wat de voorbeelden van het begrip gemeenschappelijk hebben. Hier wordt op een heel natuurlijke manier een relatie gelegd tussen de logisch-wiskundige structuur van een begrip en de aspecten waarop bij het onderwijzen van dat begrip gelet moet worden.

Wellicht komt dit de lezers die bekend zijn met Freudenthal, Van Hiele en Van Dormolen vertrouwd voor. En hiermee kom ik dan meteen op één

van mijn punten van kritiek. Nergens maken de auteurs duidelijk vanuit welke visie op wiskunde en wiskunde-onderwijs zij hun boek hebben geschreven. Uit het hieraan voorafgaande zou men kunnen opmaken dat zij zich (mede) op de genoemde didactici baseren. Maar zij zeggen dit nergens. Wat mijns inziens het meest opmerkelijk is, is dat zij slechts op één plaats (namelijk in het hoofdstuk *Motivatatie*), en dan nog een beetje terloops, melden dat er 'op dit moment in Nederland een duidelijke tendens is om bij wiskunde te vertrekken van concrete, levensechte problemen om daaruit algemene theorieën op te bouwen. In België daarentegen is men veeleer geneigd om een aanknoping met de realiteit als een toegeving aan didactici te beschouwen, iets wat liefst niet te veel tijd in beslag neemt, zodat men zo vlug mogelijk kan opklimmen tot abstracte theorieën en structuren.'

De auteurs zijn het met het laatste overigens niet eens, getuige hun opmerking dat bitter weinig leerlingen geboeid zijn door de vragen die dan gesteld worden.

Een ander punt van kritiek betreft het volledig negeren van de zakrekenmachine en de computer. Naar mijn mening kon dit anno 1988 (het verschijningsjaar van het boek) al echt niet meer. Dat stroomdiagrammen worden besproken als een hulpmiddel bij het aanleren van technieken als het oplossen van een vierkantsvergelijking doet hier niets aan af.

Ten slotte

Ik hoop met het voorafgaande duidelijk gemaakt te hebben dat het hier om een alleszins bruikbaar boek gaat. Wat mij betreft hadden de auteurs meer mogen aangeven vanuit welke visie op wiskunde-onderwijs het geschreven is. Het boek is gericht op de praktijk en bevat voldoende aardige en bruikbare voorbeelden, maar realistisch wiskunde-onderwijs en de moderne rekenapparatuur worden vrijwel volledig genegeerd.

Laat de Nederlandse leraar zelf tot een oordeel komen door het boek te lezen.

* M.J. Aspeel, N. Delagrange, F. de Roo, *Inleiding tot de Wiskundendidactiek*, 205 bladzijden; Acco, Leuven/Amersfoort 1988, ISBN 90334 17170.

► Euclides, dit kan niet

George Schoemaker

In het novembern timer van Euclides van de jaargang 1993/1994 schrijft de redactie van het *Vakblad voor de wiskundeleraar*:

(Ik vat kort samen, hier en daar neem ik stukjes van de echte tekst over. G.S.)

– ‘Euclides heeft zich weinig ingelaten met de keuze van een nieuwe of vernieuwde methode’.

– Evaluatie van het nieuwe programma vinden we nu op zijn plaats. Euclides draagt hieraan bij ‘door zo spoedig mogelijk reacties uit het veld te publiceren.’

– ‘Euclides wil daarbij overzicht bieden. Reacties uit het veld kunnen daartoe dienen. Wij vinden dat van tijd tot tijd meer moet gebeuren. Zo komen we nu met een overzicht van de methodes die momenteel uitgebracht worden voor klas 1’.

– ‘In 9 maal 2 bladzijden vindt u gegevens over 9 methodes. De redactie spreekt zelf geen oordelen uit. Dat is gedaan door 9 docenten wier namen bij de commentaren te vinden zijn’.

Volgt nog de standaardindeling van de 2 pagina’s met beschrijving van de methode, een plaatje bij het optellen van negatieve getallen en commentaar van de uitgever. Volgend jaar meer over methodes voor i-leerlingen.

Met dalende verbazing

Met dalende verbazing heb ik de boekbesprekingen

gelezen. Dat is toch helemaal niet mogelijk. Zo’n opzet vraagt om zeer oppervlakkige beweringen die niet gestaafd kunnen worden en reacties van uitgevers die moeite doen hun pissigheid te verbergen. Je laat je toch niet kennen. Of – ook weer oppervlakkige – mooie verhalen waardoor de uitgevers zich gekend voelen. Veel uitgevers zullen het liefst helemaal niet meedoen aan die flauwekul, maar dan riskeren ze zo’n zinnetje: ‘De uitgever bleek desgevraagd niet bereid’.

Bij het lezen van de besprekingen werd dit beeld bevestigd, vandaar mijn dalende verbazing. Bij *Wiskunde Lijn* was het bingo. Anne van Streun schrijft zeer kritisch over de oppervlakkigheid van het commentaar. Hij laat zich wel kennen.

Bij de bespreking van *AanZet* bleek het ook op anderhalve pagina te passen.

Na de bespreking van *De Wageningse Methode*, waarin een positieve toon duidelijk doorklinkt, schrijven de auteurs: ‘Wij voelen ons gekend’.

Ook bij *Piramide* zo’n zin. ‘Een sympathieke bespreking waarin we ons wel kunnen vinden’. Aan het eind van de twee bladzijden over *Piramide* de mededeling: ‘De uitgever laat desgevraagd weten dat de leverbaarheid van de brugklasdelen niet in discussie is, maar dat de ontwikkeling van volgende delen is opgeschort’.

Het kan ook anders

Een jaar geleden kwam het boekje *Methodekeuze in de basisvorming wiskunde* uit, met een overzicht van de methodes die op de markt kwamen. Het APS heeft dit tot stand gebracht voor de methodekeuzeconferenties.

Per methode staat daar al meer informatie in dan in deze artikelen. Toegegeven, persoonlijke beweringen zoals ‘Zelf zou ik niet vaak met het werkblok gaan werken en vanwege de jaarlijks terugkerende kosten zou ik dit niet aanschaffen’ moet men hierin missen.

De samenstellers hebben overzichtelijkheid en een zekere objectiviteit gebracht door de indeling maar ook door dezelfde schrijvers te kiezen.

Tegelijk met Euclides kwam de bundel *Bladeren in de nieuwe schoolboeken wiskunde*¹ uit. In deze bundel worden aspecten van de nieuwe boeken beschre-

ven, zoals groepswork, zakrekenmachine, taal enz., elk aspect door één schrijver voor een aantal nieuwe boeken. De toon is af en toe zeer kritisch. Maar kritiek wordt wel onderbouwd. Wat niet in deze bundel staat, de kern waar het volgens mij om gaat: de wiskundig-didactische opbouw van een heel boek. De bundelredactie pretendeert zulks niet, evenmin als de redactie van het boekje *Methodekeuze in de basisvorming wiskunde*. Dat zou een enorm werk zijn. Het moet een keer gebeuren door een kleine onafhankelijke groep die alle - te beginnen met de meest gangbare - methodes analyseert. Zo'n operatie heeft al eens eerder plaats gehad. Eind zeventiger jaren schreef Wiskobas zo'n wiskundig-didactische analyse van de bestaande reken-wiskunde-methodes voor de lagere school (dat heette toen nog zo). De publicatie heette *Rapportboekje*; dat vind ik nu niet meer zo'n handige titel. Belangrijk principe was daarbij dat in de analyse werd uitgegaan van de keuzen van de auteurs. Het is zeer de vraag of er nu een instantie of groep is die zoiets aandurft. Volgens mij zou dat alleen maar kunnen onder de paraplu van de vereniging.

Samengevat

Samenvattend zie ik dat Euclides een vorm van bespreking kiest die:

- oppervlakkig is,
- onnodig subjectief is,
- achterhaald is (er zijn al veel meer doorwrochte analyses gemaakt),
- goede contacten met uitgevers verstoort.

Dit laatste stoort me te meer daar bij de gehele ontwikkelings- en invoeringsoperatie van W12-16 enorm veel is geïnvesteerd in goede werkcontacten met de uitgevers.

We moeten proberen een echte wiskundig-didactische analyse te maken.

Dit kan niet. Of past het in de nieuwe 'journalistieke' koers?

► Kan dit niet, George?

Redactie Euclides

George Schoemaker vindt dat wij het niet goed doen. Dat is zijn goed recht.

We willen best nog meer verschillen opsommen tussen enerzijds *Bladeren in de nieuwe schoolboeken wiskunde*, en anderzijds de methodebeschrijvingen in Euclides 69-3. Zo komen in Euclides leraren aan het woord. Helaas vindt George Schoemaker hun bijdragen oppervlakkig. Wij zijn blij dat 9 leraren bereid waren hun indrukken weer te geven. Aan de totstandkoming van hun bijdragen is méér voorafgegaan dan een keer het boek doorbladeren.

George vindt de reacties van de uitgevers c.q. auteurs getuigen van ontstemming of onoprechtheid. Wij vinden dat uitgevers c.q. auteurs in geval van kritiek het recht hebben op een nawoord. Zij kiezen dan zelf hun woorden.

Het is verder prettig te weten dat George wel en niet onderbouwde beweringen van elkaar kan onderscheiden. Wie wil weten hoe hij zelf beweringen onderbouwt, leze in *Bladeren in de nieuwe schoolboeken wiskunde* het door hem geschreven hoofdstuk *Geïntegreerde wiskundige activiteiten in de nieuwe wiskundeboeken* (bladzijde 79-99); in dit hoofdstuk worden overigens 3 van de 9 methodes niet genoemd.

Noot van de redactie:

George Schoemaker heeft ons laten weten prijs te stellen op één z.i. toepasselijk nawoord: 'Bingo!' Bij dezen.

1. *Bladeren in de nieuwe schoolboeken wiskunde*, uitgave van APS en NVvW. Bestellen bij het APS, afdeling VODA, Postbus 85475, 3508 AL Utrecht, onder vermelding van nummer 400.703.

'Rekenen in W 12-16'

► Kommagetallen, gebruik ze!

Ed de Moor

Kommagetallen zijn uitgevonden voor de praktijk, en niet om leerlingen mee te pesten. Hun grootste toepassingsgebied in het dagelijks leven bestaat in het vergelijken van getallen. De literprijs van benzine staat bij de pomp aangegeven met drie cijfers achter de komma: $f\ 1,785$. Je houdt je vinger op het laatste cijfer en het getal krijgt een alledaagse betekenis: één gulden en 78 centen. Het vergelijken van kommagetallen wordt buitengewoon slecht beheerst:

Ring the biggest of the three numbers:

0,62 0,263 0,4
(17%) (50%) (28%)

Van de 98 twaalfjarigen van een Engelse comprehensive school staan de resultaten afgebeeld, 5% gaf geen antwoord. Een veel voorkomend misverstand 'hoe meer cijfers achter de komma, hoe groter het getal' spreekt hier duidelijk uit. Hoe anders had de uitslag kunnen zijn als de kinderen geleerd hadden aan een meetgetal te denken, bijvoorbeeld 0,62 km, 0,263 km en 0,4 km, zijnde 620, 263 en 400 meter. Helaas wordt dit ordenen van getallen vaak te formeel aangepakt. Zoals ook het rekenen met kommagetallen als een doel in zich wordt beschouwd. Cijferen met kommagetallen is tegenwoordig uit den boze. Eerst schatten en daarna de zakcalculator, dat is de aangewezen weg! Hoe weinig men daar in het

onderwijs nog aan gewend is moge blijken uit het volgende resultaat van een opgave uit het PPON-onderzoek van het Cito uit 1988.

Yvonne rekent uit op haar rekenmachine:

$$715,347 + 589,2 + 4,553 = 13091$$

Bij het opschrijven van het antwoord is ze de komma vergeten. Wat moet het antwoord zijn?

De gemiddelde goedscore hierop is 32%. Uit een individuele afname blijkt dat 28% de volgende regel gebruikt: "de meeste getallen hebben drie cijfers achter de komma, het antwoord heeft dat dus ook". Het valt eigenlijk nog mee dat maar 16% gaat cijferen, maar daarvan maakt meer dan de helft een fout! Slechts één op de acht leerlingen gaat schattend te werk: $700 + 600 = 1300$. Uit hetzelfde PPON-onderzoek blijkt dat kinderen aan het eind van de basisschool redelijk kunnen cijferen met kommagetallen. Het cijferen met kommagetallen kent specifieke moeilijkheden, zoals de *kommaplaatsingsregel* bij vermenigvuldigen. Het begrijpen van deze regels voert tot de meer formele structuur van de kommagetallen als decimale breuken. Als terugblik op ons getalsysteem nuttig om ook in het voortgezet onderwijs aan de orde te stellen. Maar van veel groter belang achten wij het betekenis kunnen geven aan een kommagetal via afronden of afkappen. Tevens zijn de zogenaamde *kommaschuifregels* van cruciale betekenis om op flexibele wijze met kommagetallen te kunnen rekenen. We bedoelen $10 \times 2,7$; $100 \times 0,27$; $27 : 1000$ en dergelijke. Ook hierbij dient zich de mogelijkheid aan om op de betekenis van het tientallig positiestelsel in te gaan. Maar deze regels zouden ook in eenvoudige hoofdrekenopgaven aan de orde gesteld kunnen worden: $2,5 \times 60 = 25 \times 6$ of $5 : 0,25 = 500 : 25$. Een en ander mondt uit in het gebruik van de wetenschappelijke notatie van kommagetallen. Globaal rekenen met kommagetallen vereist dus allereerst: een getal tot een handzame grootte terugbrengen, maar ook inzicht in de bewerkingen, en die terugbrengen tot één van de basale operaties ($3,8 \times 0,52 = 1/2 \times 4$). Wie dit beheerst is gecijferd en mag een zakrekenmachine gebruiken.

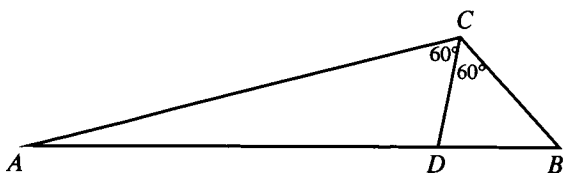
► Een kandidaat voor een schoonheidsprijs planimetrie?

P. A. Hoogendoorn

Met genoegen las ik in Euclides (jaargang 68, nummer 2) het artikel van M. Kindt over de bissectricestelling. Eerder had E. de Moor in Euclides geschreven over elegance van bewijzen (jaargang 67, nummer 5); Kindt verwijst ernaar.

Kindt waagt zich niet aan het ordenen van de bewijzen van de bissectricestelling naar elegance, wat mij spijt, want ik ken een vraagstuk dat ik beschouw als serieuze kandidaat voor een schoonheidsprijs, en dat een toepassing is van de bissectricestelling. Deze toepassing is zo fraai, dat geen jury de moed zou hebben het vraagstuk te diskwalificeren.

Opgave. Van driehoek ABC is gegeven: $AC = 6$, $BC = 2$, hoek $C = 120^\circ$. Bereken de lengte van de bissectrice uit hoekpunt C.



Oplossing. CD is bissectrice van hoek ACB. De bissectricestelling leert dat

$$AD : BD = AC : BC = 3 : 1$$

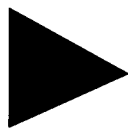
Dus is $AB : DB = 4 : 1$

BC is buitenbissectrice van hoek C van driehoek ACD. Hierop de bissectricestelling toepassen geeft $AB : DB = AC : DC$

Omdat $AC = 6$ en $AB : DB = 4 : 1$ volgt dat $6 : DC = 4 : 1$ en dus is de lengte van CD gelijk aan $1\frac{1}{2}$

Sierlijk vind ik het stuivertje wisselen van DC en BC: zijde wordt bissectrice en vice versa.

Ik gaf dit vraagstuk als opgave op een proefwerk waarbij de leerlingen (tweede klas hbs) twee aan twee mochten samenwerken. Dat was in 1946. Slechts één koppel leerlingen slaagde er in de oplossing te vinden. Beide leerlingen van het koppel waren zeer matige leerlingen. Ik weet nog niet hoe dat kon.



Verschenen

W. Barnier, N. Feldman: *Introduction to Advanced Mathematics*; Prentice Hall: ISBN 0-13-477084-6; 320 blz.; \$ 71,75.

De inhoud van dit boek zou tot de parate bagage van elke wiskundige moeten behoren. Het behandelt een aantal onderwerpen die nodig zijn om met enig succes de hogere jaren van een wiskundestudie te doorlopen: Introductie in de logica; Bewijsmethoden; Verzamelingenleer; Relaties en Functies; Equivalentierelaties en Partiële Ordeningen; Kardinaliteit; Boolese Algebra; Gehele getallen; Limieten en Reële getallen.

L. Salem, F. Testard, C. Salem: *The most beautiful Mathematical Formulas*; John Wiley & Sons; ISBN 0-471-55276-3; 141 blz.; \$ 12,95.

Dit boekje bevat een bloemlezing van elementaire wiskundige formules. Elke formule wordt redelijk informeel beargumenteerd. Ter illustratie noemen we een aantal: Oppervlakte van rechthoek en driehoek; Stelling van Pythagoras; Omtrek en Oppervlakte van een cirkel; Sinusregel; Benadering van sinus en cosinus voor kleine hoek; Benaderingen van pi; Wortelformule; Guldensnede-verhouding; Logaritmen; Som van de eerste n natuurlijke getallen en andere sommaties; n!; Eulerkarakteristiek; Lagrange: elk geheel getal is de som van vier kwadraten; Driehoek van Pascal; Binair getalsysteem.

► Reactie op bespreking examen vwo A

Ir. A. Keultjes

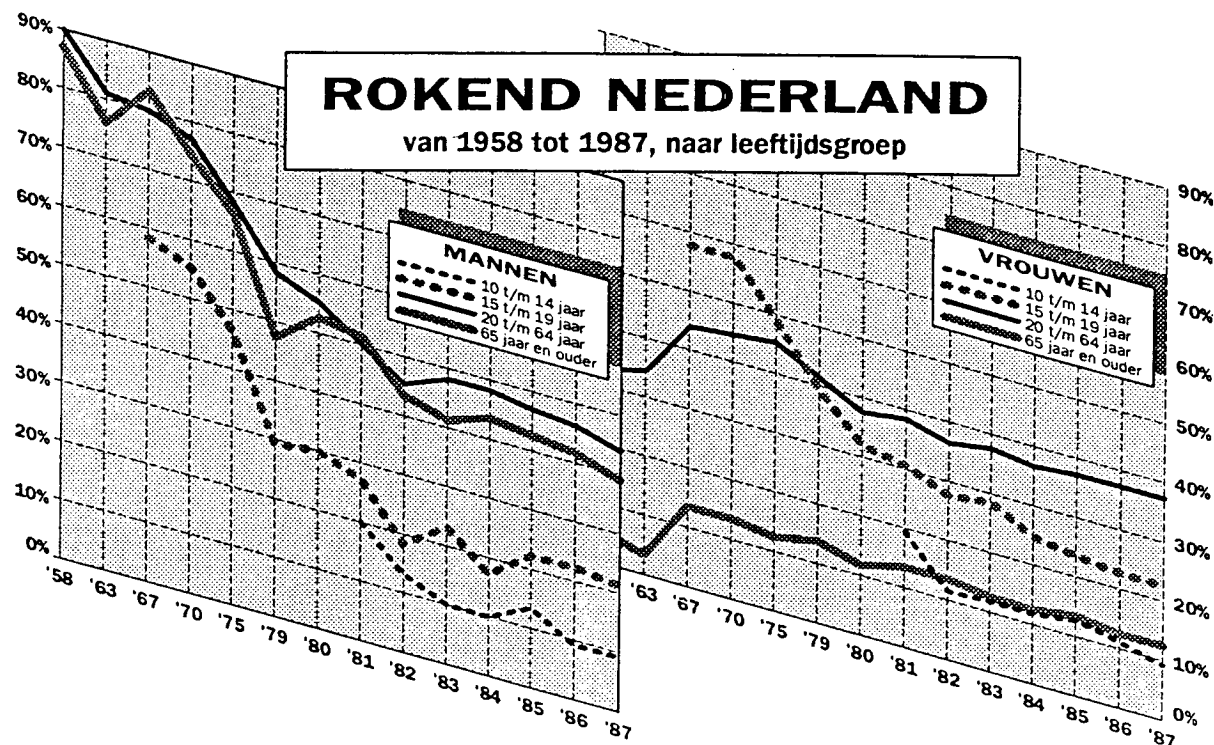
In hun bespreking van de eindexamens vwo en havo, eerste tijdvak 1993 (zie Euclides 69-2) geven de heren Schuring, Lagerwaard en Maassen de feiten met betrekking tot opgave 1, vraag 1 van het eindexamen vwo wiskunde A verdraaid weer.

Het is niet alleen zo dat *de scheve stand van de 'horizontale' as* door velen als juist antwoord werd gezien. Men had zeker wel mogen vermelden dat de

mathematische correctheid van het antwoord in het antwoordmodel aangevochten werd.

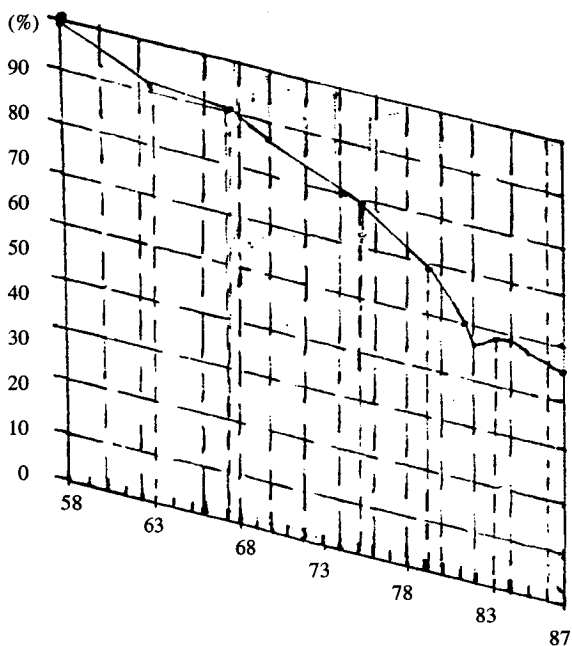
De onregelmatige verdeling van de 'horizontale' as is namelijk evident niet de belangrijkste oorzaak van de misleiding (deze misleiding was: een te sterke benadrukking van de daling). Dit is triviaal in te zien, namelijk door de grafiek over te tekenen, en dan wel met een regelmatige schaalverdeling op de tijdas. Er verandert zo uiteraard niets aan de 'overall' daling. Alleen het specifieke verloop verandert erdoor: in het begin wordt de daling wat minder door de uitrekking, maar daarentegen: aan het einde wordt de daling juist wat meer door induwen! Het argument dat door de onregelmatige schaalverdeling lokaal, aan het begin, de daling wordt opgeblazen is

Opgave 1 Roken en ziekteverzuim



Figuur 1: originele grafiek uit eindexamen met bijschrift

daarbij onjuist: we hadden aan het einde dezelfde grove schaalverdeling kunnen gebruiken. Dan was de steil getekende daling aan het begin gebleven, maar het eind van de grafiek wat ingedeukt. Zo'n argument voor de *onregelmatige schaalverdeling* als belangrijkste oorzaak van de misleiding, komt er in feite op neer dat aan het begin de intervallen op de tijdas 'te klein' afgemeten zouden zijn. En dat 'te klein' is nu niet bepaald mathematisch exact. Ik vind het een uitermate betreurenswaardige gang van zaken dat hieraan zo luchthartig voorbijgegaan wordt. Het is niet uitgesloten dat examenkandidaten ten onrechte hierdoor gezakt zijn (waar was nu het LAKS?). Mijns inziens had er zelfs voor het antwoord uit het antwoordmodel maar 1 van de 2 punten mogen worden gegeven.



Figuur 2: nieuwe grafiek voor mannen 20 t/m 64 jaar met regelmatige tijdasverdeling, gemaakt m.b.v. overtrekpapier

► Modulen wiskunde in bovenbouw havo/vwo?

M.C. van Hoorn

Op 27 januari j.l. verscheen *Een uitwerking op hoofdlijnen van de Nota's Profiel van de Tweede Fase van het Voortgezet Onderwijs*, als eerste uitwerking van de hand van de Stuurgroep Profiel Tweede Fase Voortgezet Onderwijs (de Commissie Ginjaar-Maas). In deze uitwerking staan, naast uitspraken over de organisatie van het onderwijs, ook onderwijsinhoudelijke uitspraken. Nadrukkelijk wordt de introductie van deelvakken aanbevolen. Ook de wiskunde in de bovenbouw van het havo en vwo lijkt daaraan niet te zullen ontkomen. Men denke aan een deelvak (of: moduul) statistiek voor aankomende technici, en andere deelvakken ten behoeve van andere vervolgopleidingen.

In dit licht gezien is het merkwaardig dat tegelijk een Studiecommissie Wiskunde B-programma (vwo) opereert, die uitsluitend naar de inhoud van het vak wiskunde B op het vwo moet kijken. Het is immers niet eens meer zeker of het vak wiskunde B op het vwo blijft bestaan.

Gelukkig heeft deze studiecommissie onlangs een gesprek gevoerd met de Commissie Ginjaar-Maas. Een resultaat van dit gesprek is, dat de Commissie Ginjaar-Maas aan de minister gaat vragen om de opdracht van de studiecommissie te verbreden. Hierdoor zou het werk van de studiecommissie kunnen aansluiten bij voorstellen van de Commissie Ginjaar-Maas.

Of ondertussen het programma wiskunde B voor het vwo wijzigingen ondergaat moeten we maar afwachten. Misschien kan de studiecommissie zich daarop eerst nog concentreren. En trouwens, zolang de studiecommissie niet een andere taakstelling heeft gekregen moet zij uitsluitend het programma wiskunde B (vwo) bekijken.

► **Wiskunde B op het vwo**

Hans Stuurman

Omdat er 'problemen zijn rond en met het huidige programma wiskunde B-vwo' is er een studiec commissie ingesteld met een inventariseringsopdracht, waarbij een indrukwekkend aantal aspecten in ogeschouw dient te worden genomen; zo valt te lezen in Euclides 8, pagina 247 van de vorige jaargang. Bij een aantal van die aspecten kan ik me weinig voorstellen, bij andere echter des te meer. Het vak gaat me zeer ter harte, vandaar deze poging een stroom gedachten te ordenen, waarbij ik hoop dat de commissie dit geluid uit het veld wil gebruiken en dat aan zich bijscholende en suf werkende collega's enige reacties ontlokt kunnen worden.

Het grootste probleem is volgens mij het tè volle programma. Met 4 uren in klas 5 en 4 uren in klas 6 lukt het steeds minder goed om alle onderwerpen op een verantwoorde manier af te ronden; er is óók enige rust nodig om lastige zaken te laten bezinken en ermee te oefenen. Met name bij de tijdrovende ruimtemeetkunde en de goniometrie kan er volgens mij best wat af, en ik vraag me af of het huidige staartje differentiaalvergelijkingen wel zinvol is. Het analyseblok, uitmondend in het onderzoek van krommen en grafieken van functies, vind ik een fraai, samenhangend geheel, dat voor leerlingen goed te bevatten is; het zal in mijn ogen in grote lijnen onaangetast dienen te blijven. Met het toekennen van een rol aan de graphic calculator moet uiterst voorzichtig worden omgesprongen; tussen

wiskunde A en de computer is het tot nu toe ook niets geworden. De meer gedetailleerde vraagstelling vanaf '88, en het geven van een lastig hanteerbare afgeleide die nagerekend moet worden, zodat wel de kennis nodig is maar geen stapeffecten ontstaan, vind ik verbeteringen: het maakt het voor de leerlingen eenvoudiger, zonder dat het veel afdoet aan het niveau. De diepgang van het huidige programma vind ik uitstekend; zonder de examenbun- del zou het probleem van de tijdsdruk waarschijnlijk onoplosbaar zijn.

Zorgen bestaan er om de resultaten; van de wellicht vele oorzaken is er nóg één eenvoudig aan te wijzen, namelijk de leerlingenpopulatie. In het prehewet- tijdperk was er elk jaar in klas 4 het dilemma: 'Ik wil wiskunde kiezen, maar ik ben er niet goed genoeg in, dan slaag ik wel met een 4'. Dit is een redenering die iedere docent kent, en waar eigenlijk niets tegenin te brengen was en is. En toen kwam er wiskunde A; daarover valt veel te zeggen, maar daar gaat het nu niet om. Dat vak zie ik vooral gekozen worden door leerlingen die wiskunde B niet aankunnen, én door getalenteerde leerlingen die een zonder inspanningen te halen hoog cijfer wel aantrekkelijk vinden; tegelijkertijd blijven er leerlingen die niet alleen weinig feeling voor wiskunde hebben, maar tevens problemen met grote hoeveelheden tekst met een beetje wiskunde daarin verscholen, en dus B kiezen. De enorme kloof in de A-groepen kun je proberen te versmallen door de goede leerlingen wiskunde A te ontraden (de kansrekening is later door hen snel in te halen), maar de niveauverschillen in de B-groepen zijn nauwelijks kleiner geworden. Misschien zit ik er volledig naast, maar bij het lezen van de opdracht van de commissie kan ik maar niet de angst onderdrukken dat er een voorstel uit zal komen om wiskunde B de kant van wiskunde A op te duwen, terwijl volgens mij precies het omgekeerde zou moeten gebeuren: A ontdoen van al te grote lappen tekst en de wiskunde meer centraal stellen. Waar bij onder andere Nederlands, geschiedenis en maatschappijleer al voortdurend informatie uit teksten gehaald moet worden, zullen juist de zwakkere leerlingen gebaat zijn bij een benadering waarbij eerst wat wiskunde geleerd wordt, waarna de verworven kennis toegepast kan worden. Na weer een examenklas A denk ik dat zoiets de aan-

trekkelijkheid, de status en het imago van dat vak zeer zal verbeteren, waardoor de druk op wiskunde B zal kunnen verminderen. Wat de resultaten trouwens ook positief zal beïnvloeden is het niet alsmat aan het eind van het CSE plaatsen van wiskunde B.

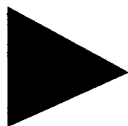
Een ander aspect dat wordt genoemd is de aansluiting met W 12-16; in 1997 is de eerste vwo-lichting aan de beurt om een keuze te maken. Het B-programma gaan aanpassen aan de thans te verwachten problemen is de zaak omdraaien; wat in mijn ogen moet gebeuren is de zwakke plekken in die plannen repareren en ervoor zorgen dat de leerlingen aan het eind van klas 4 minstens evenveel B-bagage en kansrekening hebben meegekregen als nu. Contacten met oudleerlingen leren dat het huidige wiskunde B-programma een prima vooropleiding voor vervolgstudies is (en niet alleen die in de zeer exacte richtingen). Het abstractieniveau en de aangeleerde nauwkeurigheid blijken ook een uitstraling te hebben op heel andere gebieden, en eveneens voor degenen voor wie de middelbare school wiskundig gezien eindonderwijs betekent; dat vind ik zeer waardevol, en dit moet niet gaan verdwijnen omdat niet iedereen het geleerde onmiddellijk kan gaan toepassen.

Dat meisjes in deze mondige tijden nog steeds als aparte doelgroep worden gezien komt op mij als kwetsend, beledigend en betuttelend over; elk meisje en iedere jongen krijgt een persoonlijk advies, gebaseerd op capaciteiten en de bereidheid om ervoor te werken, met als boodschap óók 'laat wiskunde alleen vallen als het echt niet anders kan'. Maar wiskunde hoeft niet gekozen te worden, en dat vind ik een goede zaak omdat er nou eenmaal mensen zijn die (vaak nóg) niet in staat zijn om het vak onder de knie te krijgen. En dat is géén schande, ook al is en wordt sommige kinderen zo ongeveer een minderwaardigheidscomplex aangepraat. 'Gij zult wiskunde kiezen, ook al moet het vak daarvoor tot op het bot uitgekleeft worden' lijkt me in ieder geval een totaal verkeerde benadering; het gaat hier om het vwo, en dat houdt dus niveau-eisen in. Van leerlingen mag worden verwacht dat er aangepakt wordt; velen doen dat, maar er zijn ook groepen bij wie school en schoolwerk een lage plaats op de prioriteitenlijst innemen (en dat ligt vaak ook aan per-

soonlijke omstandigheden). Nu de studietijd verkort is en de bijbehorende druk verhoogd, lijkt het me volkomen onjuist om aan het vwo-niveau van onder andere wiskunde B te gaan morrelen. Maar nogmaals: misschien is dat ook helemaal niet de bedoeling.

Wat er volgens mij met wiskunde B moet gebeuren is:

- het programma op de globaal aangegeven punten verlichten (een urenvermeerdering zal er wel niet in zitten),
- ervoor zorgen dat het eindniveau van klas 4 hoog genoeg is (dus minstens zo hoog als nu),
- de huidige diepgang handhaven,
- vooral *niet* de wiskunde A-kant op gaan.



Mededeling

Brochures keuzebegeleiding wiskunde A en B havo

Evenals voorgaande jaren zijn de brochures 'Keuzebegeleiding Wiskunde A en B op het HAVO' te bestellen bij het project Wiskunde & Emancipatie aan de Hogeschool Holland. De brochures zijn niet veranderd ten opzichte van vorig jaar, er is wel een overzicht met actuele informatie aan de brochure voor docenten toegevoegd. In dit overzicht staat welke vakkenpakketen de verschillende vervolgstudies in het HBO stellen.

Er zijn twee brochures, namelijk een brochure voor leerlingen en een brochure voor docenten. De brochures zijn schriftelijk te bestellen bij:

Hogeschool Holland, sector HBO-B, Wiskunde & Emancipatie, t.a.v. Inge Ottens, Postbus 261, 1110 AG Diemen, onder vermelding van:

naam school, contactpersoon, adres school, aantal leerlingenbrochures à f 1,- excl. verzendkosten, aantal docentenbrochures à f 2,- excl. verzendkosten.

Voor informatie kunt u op dinsdag en vrijdag, tijdens kantooruren, bellen met de medewerkers van het project Wiskunde & Emancipatie, Hogeschool Holland, telefoonnummer 020-5601716.



► Van de bestuurstafel

Marian Kollenveld

Enquête

Het Universitair Instituut van de Lerarenopleiding van de Katholieke Universiteit Nijmegen wil een onderzoek instellen naar de mobiliteit van wiskundigen in het onderwijs en heeft daarvoor de medewerking van de Vereniging gevraagd. Het onderzoek kwam ons sympathiek voor, maar we stellen uiteraard geen adressen van leden beschikbaar. Daarom zal aan een aselechte steekproef van docenten door de Vereniging een vragenlijst worden toegezonden.

Vademecum

De eerste uitgave van het vademecum dateert uit 1977, de tweede stamt uit 1986. Het is ondoenlijk gebleken om zoals het plan was dit vademecum met supplementen geheel bij de tijd te houden. De ontwikkelingen van de laatste jaren waren dermate ingrijpend dat de inhoud inmiddels bijna geheel verouderd was. Daarom is besloten het geheel te herschrijven en aan te passen. Het nieuwe vademecum is uitgedijld tot een boek van meer dan honderd bladzijden, met daarin hopelijk voor de leden veel nuttige informatie over examenprogramma's en regelingen. Zodra het uitkomt zal het aan de leden worden toegezonden.

Didactiekprijsvraag

In samenwerking met de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs (NVORWO) is het vorig jaar een didactiekprijsvraag uitgeschreven, met de bedoeling om docenten, studenten te stimuleren tot het bedenken, uitvoeren en opschrijven van educatieve ontwerpen. Hoewel de onderwerpen van de prijsvraag dicht bij de dagelijkse lespraktijk van het basis- en voortgezet onderwijs waren gekozen, en er ook geen bijzonder zwaarwichtige eisen waren gesteld, was het aantal inzendingen minimaal. Slechts één -aardige-inzending redde ons van de totale mislukking, zodat er op de jaarvergadering toch een prijs uitgereikt kon worden. Hoewel het idee van de prijsvraag ons nog steeds dierbaar is, rijst hiermee toch de vraag of het momenteel wel een zinvolle activiteit is.

Bestuursoverleg NVORWO

Meer dan vroeger het geval was, is er in de basisvorming en het voortgezet onderwijs aandacht voor het rekenen en de rekenvaardigheid. Voor veel docenten in het voortgezet onderwijs is de didactiek van het rekenonderwijs betrekkelijk onbekend. Het ligt daarom in de bedoeling de al jaren bestaande samenwerking met de NVORWO te intensiveren op het gemeenschappelijke punt "rekenen", de doorgaande lijn van basisschool naar voortgezet onderwijs. Zodra er concrete ontwikkelingen zijn hoort u hierover meer.

Boeken van (oud)leden

Regelmatig worden ons oude wiskundeboeken aangeboden met het verzoek daar een goede bestemming voor te vinden. Dit jaar is er voor het eerst op de studiedag een boekenuitdeling gehouden voor de leden. Deze heeft f 197,45 opgeleverd voor het Derde Wereld-fonds. Hoewel een en ander niet geheel vlekkeloos verliep was het toch wel zo'n succes dat we denken daar mee door te gaan.

► Regiobijeenkomsten NVvW 1994

● 40 jaar geleden ● ●

Evenals vorig jaar organiseert de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren regiobijeenkomsten voor wiskundedocenten. De bijeenkomsten worden gehouden op vier plaatsen in Nederland van 16.00 u - 20.00 u. op:

- | | |
|------------------|---|
| 15 februari 1994 | te Rotterdam
HS Rotterdam PABO
Bij NS Alexanderpolder
Kreeftstraat 44
3067 JV Rotterdam |
| 17 februari 1994 | te Amsterdam
Pieter Nieuwland College
Bij NS Amstel
Nobelweg 6
1097 AR Amsterdam |
| 22 februari 1994 | te Zwolle
Gereformeerde Scholengemeenschap
Campus 5
8017 CB Zwolle |
| 24 februari 1994 | te Eindhoven
HS Eindhoven
Faculteit Techniek
Rachelsmolen 1
5612 MA Eindhoven |

Voorlopig programma regionale bijeenkomsten:

- 15.45-16.00 ontvangst
16.00-16.10 opening
16.15-17.45 werkgroepen eerste ronde
17.45-18.30 maaltijd
18.30-20.00 werkgroepen tweede ronde

De werkgroepen eerste ronde:

- 1 Leren redeneren in een meetkundige omgeving met cd-I
- 2 Het nieuwe wiskunde b programma
- 3 Wiskunde en Werk, vrouwen gebruiken wiskunde in hun beroep
- 4 Ervaringen met vbo/ivbo

De werkgroepen tweede ronde:

- 1 Ervaringen in het mbo, knelpunten in het wiskundeonderwijs
- 2 Toetsen basisvorming
- 3 Leren redeneren in een meetkundige omgeving met cd-I
- 4a De geschiedenis van de meetkunde (alleen in A'dam en Eindhoven)
- 4b Bestuurswerkgroep: examenperikelen (alleen in R'dam en Zwolle)

Leden betalen alleen de maaltijd, van niet-leden wordt een toegangsprijs gevraagd.

Alle leden krijgen nog nader bericht over de wijze van aanmelding.

Voor vragen: Ledenadministratie NVvW 076-653218.

► Wat is eenvoudig?

In de 28e jaargang van Euclides, aflevering III/IV heeft de heer P. Wijdenes een artikel geschreven, getiteld: 'doe het eenvoudig'. Hierin breekt hij een lans voor het schrijven van eenvoudige, leesbare, duidelijke bewijzen in de schoolboeken, die de vlakke meetkunde behandelen. Aan het slot verzoekt hij kritiek op zijn artikel en belooft hij, dat deze kritiek ook in Euclides zal worden opgenomen.

Daar de heer Wijdenes uit ons leerboek¹ twee bewijzen heeft overgenomen, nl. de nummers III en IV van zijn artikel, zijn wij wel verplicht, op zijn artikel te antwoorden, hoewel wij niet gaarne reclame voor onze boeken maken door in een tijdschrift de kwaliteiten van onze boeken op te sommen. We willen op het volgende wijzen.

1. Als we over de duidelijkheid van een bewijs willen oordelen, moeten we ons niet afvragen, of wij - de schrijvers - dit bewijs leesbaar of niet leesbaar, eenvoudig of niet eenvoudig vinden. Het gaat er om, hoe de leerlingen, die onze 'kost' (het woord is van de heer Wijdenes) moeten verteren, over de duidelijkheid van dat bewijs denken.

We kunnen nu de heer Wijdenes verzekeren, dat het merendeel van de leerlingen, die onze boeken gebruiken, de bewijzen, die in III en VI gegeven worden, verkiest boven die van de heer Wijdenes.

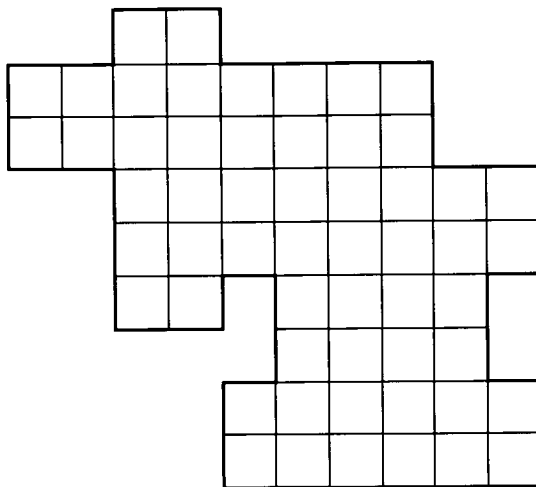
Bij het bewijs in IIb moeten de leerlingen zelf veel te veel uit fig. 11a laten volgen en bovendien moeten ze het tweede en het derde geval zelf bewijzen. Dit is voor middelmatige leerlingen helemaal niet zo eenvoudig.

A. van Dop en A. van Haselen, auteurs van wiskunde leerboeken, in Euclides 29 (1953-1954).

● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

Als opgave een figuur met 22 hoeken, met de bijzonderheid dat door zuiver redeneren de oplossing gevonden kan worden.

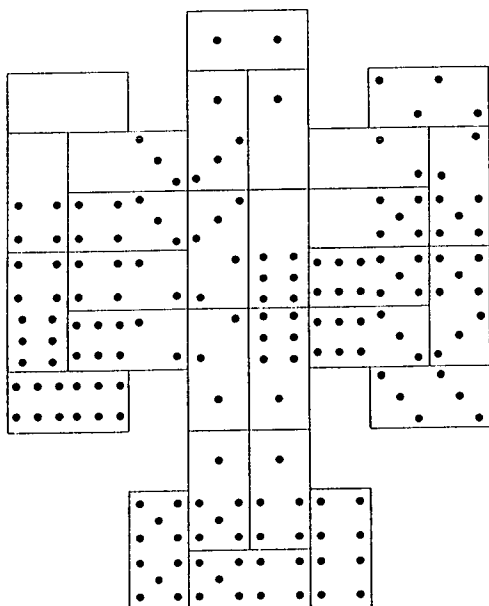


Als we de oplossing binnen 1 maand ontvangen, dan ontvangt u daarvoor 5 ladderpunten.

► Opgave 651

Precies 50 jaar geleden schreef prof. Lauwerier in de Nieuwe Rotterdamsche Courant een recensie over het toen net verschenen boek 'Wonderlijke Problemen' van Dr. Fred. Schuh.

In hoofdstuk II behandelt prof. Schuh de zogenaamde quadrilles: de 28 stenen van een dominospel moeten in een figuur worden gelegd zodat telkens 4 gelijke ogenaantallen in vierkanten bij elkaar komen te liggen. Het aantal hoeken van de figuur varieert van 10 tot en met 24. Prof. Schuh vindt slechts 1 oplossing voor 24 hoeken. Hier ziet u een 'nieuwe' oplossing.

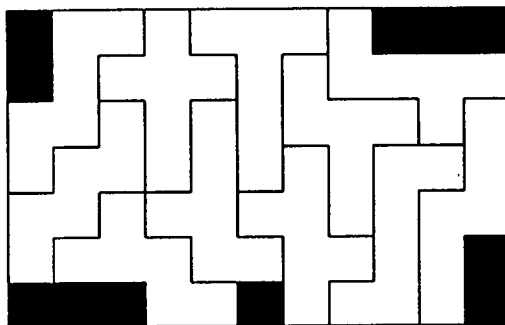


► Oplossing 648

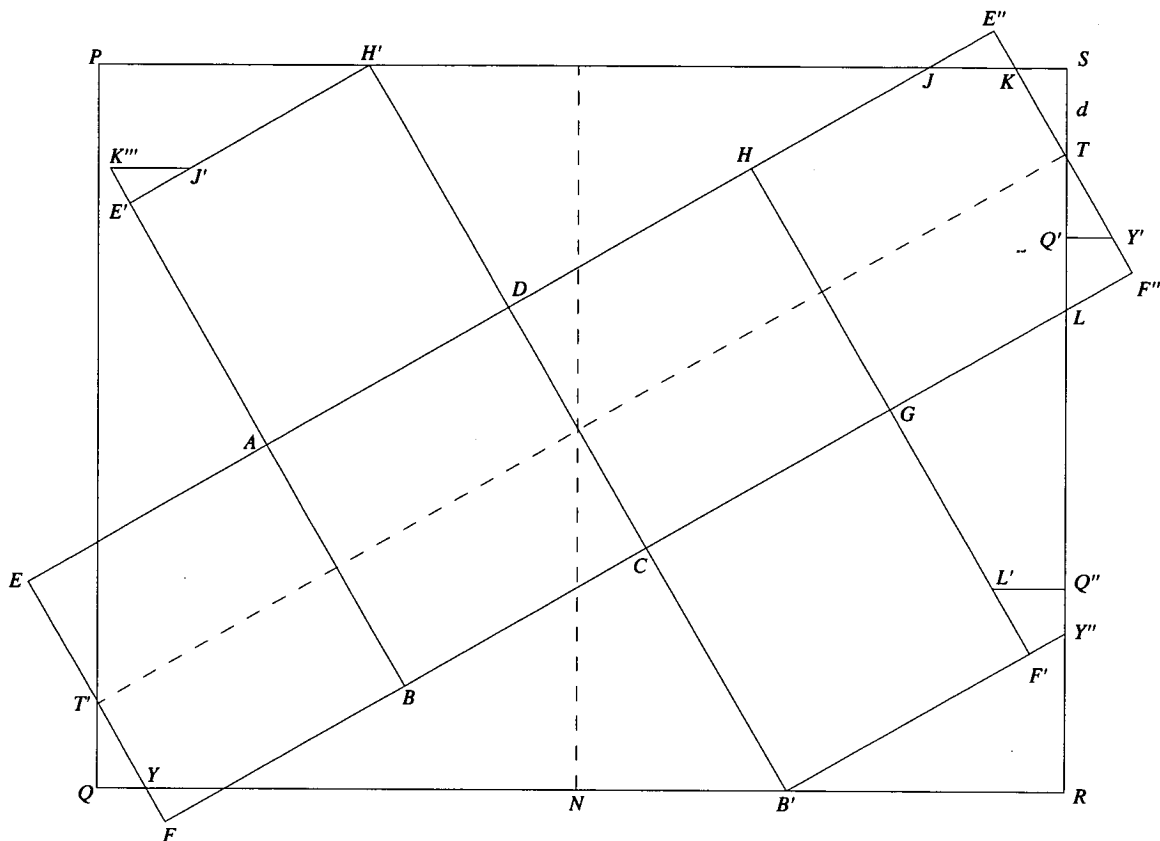
Het record is gebroken!

De grootste kubus die met een vel papier van 4 dm bij 3 dm ingepakt kan worden heeft een ribbe van 1,15 dm!

We geven de oplossing van de recordhoudster *Wobien Bronstring-Doyer* (10), Leiden: er zijn 11 mogelijke uitslagen van een kubus, die als volgt in de kleinst mogelijke rechthoek passen:



De uitslag op de volgende bladzijde voldoet het beste voor ons doel:



We gaan kubus $ABCD \cdot EFGH$ inpakken. Overeenkomstige hoekpunten krijgen dezelfde letters. ST is de variabele lengte d .

$TT' : HB' = 4 : 3$.

Driehoek $TQ'Y'$ wordt bedekt door driehoek $T'QY'$.

Vierhoek $Q'LF''Y'$ wordt bedekt door vierhoek $Q''LF'Y''$.

Driehoek JKE'' wordt bedekt door driehoek $JK'''E'$.

Op overeenkomstige wijze de andere driehoeken.

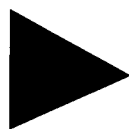
De kubus wordt zo groot mogelijk als $Y'F'' = Y''F'$.

Uit $NR = NB' + B'R$ volgt $2 = \frac{(3-2d)3}{8} + (3/2-d)$.

Zodat $d = 5/14$ en $TT' = \sqrt{4^2 + (3-2d)^2}$, waardoor de maximale ribbe van de kubus $\sqrt{\frac{65}{49}}$ wordt.

Ook namens Jan van de Craats willen we Wobien complimenteren met dit mooie resultaat. Vanaf maart gaat de TROS de derde serie 'O! zit dat zo!' uitzenden. Het worden 6 televisieuitzendingen met wiskundige puzzels en spelletjes.

Met 49 punten is deze maand de winnaar van een boekenbon van $f\ 25,-$: Dick Buijs, Lutterveldsestraat 14, 4012 DE Kerk-Avezaath. Hartelijk gefeliciteerd!



Mededeling



Koppelconferenties

Wie in augustus in de brugklas met het nieuwe wiskundeprogramma begonnen is, weet dat toetsing van de nieuwe leerstof een moeilijk punt is. Vaak zijn nog wel voldoende toetsen aanwezig maar is de keuze daaruit moeilijk en geeft de beoordeling van het leerlingenwerk problemen.

Een ander moeilijk punt is het wiskundewerkplan dat de wiskundesectie moet maken. Veel docenten hebben nog onvoldoende overzicht over de nieuwe gang van zaken om nu al een compleet plan te kunnen produceren.

Deze problemen komen naast andere aan de orde in de koppelconferenties die op verschillende plaatsen worden georganiseerd in januari, februari en maart 1994. Dit zijn twee-daagse conferenties voor wiskundedocenten van vbo, mavo, havo en vwo.

Op de eerste dag wordt in een plenaire lezing aandacht besteed aan kwaliteitseisen die je aan toetsen in de basisvorming zou moeten stellen. Op de tweede dag zullen de uitgevers van schoolboeken aanwezig zijn. Op een markt presenteren zij hun methode

en gebruikers van dezelfde methode treffen elkaar dan in een werkgroep onder leiding van een auteur of uitgever van die methode.

Op beide dagen is een aanbod van werkgroepen waarin ook andere praktische thema's belicht worden, zoals:

- Cito-toetsen als afsluiting van de basisvorming;
- contexten in proefwerken;
- computergebruik en passende software;
- leren door doen (wiskundewerklokaal);
- geïntegreerde wiskundige activiteiten opzetten en uitvoeren;
- aansluiting op havo/vwo na basisvorming;
- aandacht voor taalzwakke leerlingen;
- exacte vakken, meisjes en jongens;
- geïntegreerde keuzebegeleiding, gericht op het geven van adviezen in het tweede leerjaar basisvorming.

In alle werkgroepen komt aan de orde hoe het betreffende thema in het wiskundewerkplan kan worden opgenomen. Daarvoor wordt ook concreet materiaal uitgedeeld.

De koppelconferenties voor wiskunde worden samen met collega's van natuur- en scheikunde georganiseerd. Op de tweede dag zal er gelegenheid zijn om bij elkaar in de keuken te kijken en te profiteren van elkaars kennis en know-how.

Speciaal voor de conferentie is een klapper samengesteld met algemene informatie over basisvorming en informatie toegespitst op wiskunde. Er worden twee boeken uitgereikt waarin ervaringen van proefscholen zijn gebundeld: *Wiskundewerklokaal* en *Toetsenbundel tweede leerjaar*.

De plaatsen en data zijn:

26 januari en 16 maart 1994: Rotterdam, Nijmegen, Sittard
2 februari en 23 maart 1994: Amsterdam, Eindhoven, Groningen
9 februari en 30 maart 1994: Utrecht, Zwolle, Goes

Alleen bij voldoende aanmeldingen kan de conferentie in alle plaatsen doorgaan.

U kunt zich voor deze conferentie opgeven bij:
Algemeen Pedagogisch Studiecentrum,
Postbus 85475, 3508 AL Utrecht;
tel. 030-856721 of 856722.

Adressen van auteurs

P.A. Hoogendoorn, Adr. van Blijenburghstraat 18, 3311 LB Dordrecht
M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam
R.H. Jeurissen, Math. Instituut, Toernooiveld 1, 6525 ED Nijmegen
A.J.H.F.M. Keultjes, Aletta Jacobsstraat 290, 2614 JD Delft
E.M. Koerts, Joh. Kuhnastraat 8, 5144 GT Waalwijk
E. de Moor, Vondelkerkstraat 32, 1054 KZ Amsterdam
G. Schoemaker, Freudenthal instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht
H. Stuurman, Bereklaauwkreek 4, 2353 JK Leiderdorp
G. Zwaneveld, Bieslanderweg 18, 6213 AJ Maastricht

Mededeling

Studiebezoek aan Schotland

Het Europees Platform voor het Nederlandse onderwijs organiseert een studiebezoek voor docenten wiskunde aan Schotland. Het doel van dit studiebezoek is een beeld te krijgen van de verschillende facetten (inhoudelijk en didactisch) van het wiskunde-onderwijs in Schotland. Schotland heeft een eigen onderwijssysteem, los van het Engelse. Centraal staan de bezoeken aan verschillende scholen. De universiteit van Stirling verleent medewerking aan de vakinhoudelijke component.

Reisperiode: maandag 2 mei - zondag 8 mei 1994

Verblijfplaatsen: Stirling en Edinburgh

Het studiebezoek staat open voor docenten wiskunde aan een school voor vbo, mavo, havo en vwo.

Deelnemers ontvangen een PLATO-beurs, waardoor de eigen bijdrage beperkt kan blijven tot f 250,- voor docenten van scholen die abonnee zijn op de periodieken van het Europees Platform (Cevno). De eigen bijdrage voor docenten van andere scholen is f 300,-.

Geboden wordt:

- vliegticket Amsterdam-Edinburgh vv,
- het transport in Schotland,
- verblijf in goed middenklassehotel in Stirling en Edinburgh op basis van halfpension,
- de schoolbezoeken, lezingen, excursies en informatiemateriaal.

Opgave:

Schriftelijk bij het Europees Platform, voor 1 april 1994. Naast naam en adres dient u te vermelden: het aantal uren dat u wiskunde geeft en de naam van de school waaraan u bent verbonden. Inschrijving vindt plaats in volgorde van binnenkomst. Inschrijving heeft alleen zin als u medewerking heeft van de schoolleiding.

Europees Platform voor het Nederlandse onderwijs
afdeling PLATO

Nassauplein 8

1815 GM Alkmaar fax: 072-151221 (tel.: 072-118502)

Kalender

15 februari 1994: Rotterdam, Regiobijeenkomst; zie blz. 157.
16 februari 1994: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
17 februari 1994: Amsterdam, Regiobijeenkomst; zie blz. 157.
22 februari 1994: Zwolle, Regiobijeenkomst; zie blz. 157.
24 februari 1994: Eindhoven, Regiobijeenkomst; zie blz. 157.
11,12 maart 1994: Garderen, Wiskunde A-olympiade.
16 maart 1994: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
25 maart 1994: eerste ronde Wiskunde Olympiade op de scholen voor havo en vwo.
30 maart 1994: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
16 september 1994: Eindhoven, tweede ronde Wiskunde Olympiade in de Technische Universiteit.

DE JUISTE KEUZE. DE JUISTE FUNCTIES. HET IDEALE HULPMIDDEL VOOR UW LEERLINGEN.

De TI-30X, het ideale hulpmiddel voor leerlingen die de basis van de wiskunde hebben doorlopen, biedt de juiste functies voor algemene wiskunde, statistiek en wetenschappelijke toepassingen - en dit alles tegen een betaalbare prijs.

De TI-30X, de nieuwste verbetering van de wereldberoemde TI-30 lijn, is speciaal ontworpen in samenwerking met leerkrachten zoals u om te voorzien in de specifieke behoeften van uw leerlingen. Deze rekenmachine biedt de mogelijkheid om breuken op te tellen, af te trekken, te vermenigvuldigen en te delen op dezelfde manier als op papier; biedt statistische functies met één variabele en krachtige trigonometrische functies. Maakt het leren van wiskunde makkelijk... en dus het onderwijzen ook!

Kenmerken

- 10 cijfers
- Exponent van 2 cijfers
- 3 geheugens
- Vast geheugen
- 15 haakjes-niveau's
- $1/x$, $\sqrt{x}$, x^2
- $\ln x$, e^x , $\log$, 10^x , y^x , $\sqrt[y]{x}$, $x!$
- Breuken
- Alle trigonometrische toepassingen
- Statistische bewerkingen met één variabele
- Stevige beschermhoes
- 2 Jaar Garantie

Texas Instruments werkt al vele jaren nauw samen met onderwijsdeskundigen. Wij staan voor u klaar om u te helpen bij het wiskunde-onderricht in de klas.

Texas Instruments België
Jules Bordetlaan, 11
1140 BRUSSEL
32-2-242.30.80

of
Amsterdamseweg 204
1182 HL Amstelveen
Postbus 532
1180 AM Amstelveen
020 - 5.45.06.00

 **TEXAS
INSTRUMENTS**