

Euclydes

816
357
492

Redactie

Drs. H. Bakker
 Drs. R. Bosch
 Drs. J. H. de Geus
 Drs. M. C. van Hoorn (hoofredacteur)
 J. Koekkoek
 N. T. Lakeman (beeldredacteur)
 D. Prins (secretaris)
 W. Schaafsma
 Ir. V. E. Schmidt (penningmeester)
 Mw. Y. Schuringa-Schogt (eindredacteur)
 Mw. drs. A. Verweij
 A. van der Wal
 Drs. G. Zwaneveld (voorzitter)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,
 8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
 2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43,
 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18; fax 076-65 32 18.
 Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f55,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f37,50; contributie zonder Euclides f30,00. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
 - regelafstand van 2
 - 48 regels per kolom
 - maximaal 47 aanslagen per regel
- en liefst voorzien te zijn van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
 - aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
 - waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f63,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f41,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers f11,00 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
 ACQUI MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
 Tel. 04951-26595. Fax. 04951-26095.

● Inhoud ● ● ● ● ●

ICME-7, Québec 162

Bert Zwaneveld, Martinus van Hoorn

Van Lyon tot Québec 162

Nederlandse deelnemers aan de 7e ICME-conferentie in Canada brengen verslag uit. Het begint met een korte inleiding.

Interview met Agneta Aukema 163

Interview met Willem van Gaans 164

Interview met Joop van Dormolen 166

Interview met Henk Schuring 167

Interview met Victor Schmidt 168

Mededelingen 169, 180

ICME-7, Québec 170

Bert Zwaneveld, Martinus van Hoorn

Wiskundige machines en instrumenten 170

Op een school voor beroepsonderwijs in Italië werden historische wiskundige instrumenten opnieuw gebouwd, zoals de pantograaf van Sylvester.

Victor Schmidt *Nolan en computers in het onderwijs* 172

Organisatiedeskundige Nolan beschrijft in zijn groeifasenmodel hoe computertechnologie zich in een organisatie ontwikkelt.

Vreemde woorden in de wiskunde 174

ICME-7, Québec 175

Martinus van Hoorn *Over de toekomst van de integraalrekening op school*

Verschenen 175

Werkbladen 176

ICME-7, Québec 178

Martinus van Hoorn. *De NCTM* 178

In Amerika geeft de National Council of Teachers of Mathematics de Mathematics Teacher uit, waaruit de opgaven van de werkbladen afkomstig zijn.

Martinus van Hoorn *Het wiskundeonderwijs in Italië* 179

De geschiedenis heeft het Italiaanse onderwijs sterk beïnvloed. In 1985 en 1988 werden nieuwe leerplannen voor wiskunde ingevoerd.

Serie 'Begrijpen' 181

Ton Vandeberg *Waarom een leerling soms iets snapt, maar het niet begrijpt*

Boekbesprekingen 182, 187

Serie 'Ontwikkelingen in de didactiek' 182

Bram Lagerwerf *Een onderzoekende houding*
Creativiteit speelt een belangrijke rol bij het aanpakken van wiskundige problemen.

Recreatie 188

Verenigingsnieuws 189

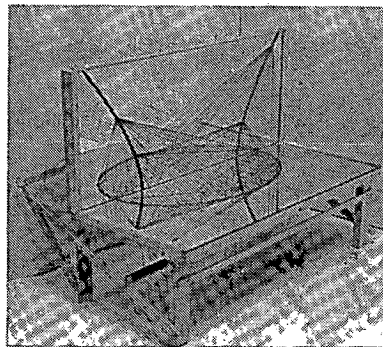
Agneta Aukema-Schepel *Van de bestuursafdeling* 189

Regionale voorjaarsbijeenkomsten 1993 192

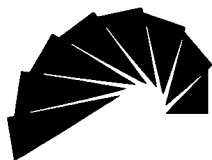
40 jaar geleden 192

Adressen van auteurs 192

Kalender 192



De stelling van Apollonius voor kegelsneden.



► Van Lyon tot Québec

Bert Zwaneveld, Martinus van Hoorn

Van 16 tot en met 23 augustus 1992 werd te Québec, Canada, de 7e ICME*-conferentie gehouden. Drieduizend deelnemers uit 90 landen waren er. Dagelijks vonden er meer dan 100 sessies plaats; vele daarvan tegelijkertijd. Het kiezen uit de diverse mogelijkheden blijft altijd iets willekeurig houden. Niettemin proberen we in dit nummer van Euclides een indruk te geven van de conferentie.

Er waren zo'n 50 Nederlandse conferentie-deelnemers. Dat lijkt veel, en dat is ook veel, want er waren maar 9 landen met meer deelnemers. Het is zelfs zo, dat drie landen al de helft van alle deelnemers voor hun rekening namen (de VS, Canada en Japan). Voegen we daarbij Australië, Nieuw-Zeeland en de Westeuropese landen van Italië tot en met Finland, dan is de herkomst van meer dan 90 % van alle deelnemers verklaard.

De eerste ICME-conferentie vond plaats te Lyon (1969). Vanaf 1972 (Exeter) werd elke vier jaar zo'n conferentie gehouden, achtereenvolgens te Karlsruhe, Berkeley, Adalaide, Boedapest, en Québec.

In de loop der jaren is het aantal deelnemers gaandeweg gestegen. In 1996 (Sevilla) zullen er wellicht minder Amerikanen en Canadezen zijn dan te Québec. De Europese landen zullen dat kunnen compenseren.

Opvallend is trouwens, dat er in Québec slechts enkele tientallen Oost-Europeanen waren, terwijl hun aantal in Boedapest verscheidene honderden bedroeg.

Een conferentie is in belangrijke mate een sociaal gebeuren. Dit aspect wordt versterkt als je niet 's avonds naar huis kunt. Je zit 24 uur per etmaal in Québec. Ook buiten de conferentietijden wordt er veel over het wiskundeonderwijs gepraat. Ja, zeker. Dit gebeurt dan wel door mensen die meestal zelf geen leraar zijn. Sommigen zijn zelfs nooit leraar geweest.

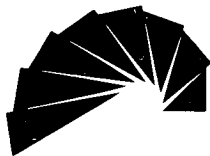
Wie als leraar een ICME-conferentie bezoekt, moet zich er op instellen dat er weinig mensen met krijgt aan de vingers rondlopen.

Een ICME-conferentie is er ook niet speciaal voor leraren, maar is er voor degenen die over het wiskundeonderwijs willen praten, discussiëren. Dat kunnen leraren zijn, maar dat hoeft niet. Er kunnen echter nog wel een paar leraren bij!

In dit nummer staat een reeks korte bijdragen over ICME-7. Dit zijn: interviews met enkele Nederlandse deelnemers, verslagen van lezingen en discussiebijeenkomsten en andere beschrijvingen. Hier en daar proberen we voorzichtig hoofdlijnen en trends te signaleren.

*) ICME = International Congress on Mathematics Education.





► Interview met Agneta Aukema

Bert Zwaneveld en Martinus van Hoorn

'Er heerst hier af en toe een ware lezingenterreur. In 15 minuten moeten er 20 transparanten doorheen gejaagd worden'.

Agneta Aukema-Schepel, docente wiskunde in het avondonderwijs en lid van het bestuur van de NVvW, begint ons gesprek met het uiten van een stukje frustratie.

'Voor je er erg in hebt is zo'n transparant al weer weg en heb je niets kunnen noteren. Dat allerlei mensen hier door hun instituut naar toe gezonden worden en daarom een verhaal moeten houden is heus wel op een andere manier op te vangen.'

'Verder houden de meeste sprekers er geen rekening mee dat Engels van lang niet iedereen de moedertaal is. Een pluim in dit verband voor degenen die zowel Engelstalige als Franstalige transparanten hebben.'

'Aan deze negatieve opmerkingen zit wel een positieve kant. Zo ervaar je als docent wat het is om in een onderwijssituatie te verkeren waarbij er over je hoofd heen gepraat wordt. Dan merk je aan den lijve wat je eigen leerlingen hopelijk niet al te vaak moeten ondervinden.'

Agneta Aukema heeft overigens genoeg goede lezingen meegemaakt. En, zoals andere deelnemers



Agneta Aukema

vindt ze dat goed te merken is dat andere landen met ongeveer dezelfde problemen te maken hebben als wij. Dit geeft een soort gevoel van: gedeelde smart is halve smart.

Haar ervaring is wel dat je vooral in kleine discussiegroepen hoort hoe het nu echt gaat met projecten waarin oplossingen worden uitgetoetst voor gesignaleerde problemen.

Wat Agneta zeer gewaardeerd heeft zijn de contacten tussendoor, bijvoorbeeld onder de lunch – je moet dan natuurlijk niet met andere Nederlanders aan tafel gaan zitten – met mensen die zij eerder in een werkgroep heeft ontmoet.

Zo weet zij nu alles af van het schoolsysteem in Québec. Omgekeerd heeft zij over Nederland verteld. Zij heeft sterk de indruk dat andere landen met bewondering kijken naar wat in Nederland gebeurt, naar de durf die wij in Nederland hebben: algebra zonder haakjes, contextproblemen ook in examens, welke problemen geen eenduidige aanpak of oplossing vragen. Dit laatste schijnt echt uniek te zijn. Vooral Amerikanen zijn zeer lovend, misschien zelfs wel tè:

'You do a perfect job'.

Het gesprek komt op vrouwen en wiskunde. Agneta heeft de bijeenkomsten van de IOWME (International Organization of Women and Mathematics Education) bijgewoond, die een onderdeel van de ICME-conferentie vormen.

In een paneldiscussie over de problemen die meisjes met wiskunde hebben werd een belangrijke relati-

vering gemaakt: de verschillen tussen meisjes en jongens zijn veel kleiner dan de verschillen tussen etnische groepen, ook binnen één land. Over de oplossing die wel gesuggereerd wordt, namelijk het stichten van aparte meisjes- en jongensscholen, merkt zij op:

'Zoiets is zeer cultuurgebonden. In landen als India, Pakistan en de Arabische landen ligt dat veel duidelijker; in onze Westerse landen is dat nauwelijks reëel. Hoogstens valt te denken aan aparte lessen in wiskunde en natuurkunde in klas 3, zoals dat op een school in Haarlem gedaan wordt.'

'Verder zijn, ook in Nederland, de ouders vaak tegen dit soort vormen van scheiding. En jongens leren in een unisexklas minder dan in een gemengde klas.'

Als Agneta Aukema de betekenis van het ICME-congres voor Nederland gaat overdenken, vat ze eerst kort de Nederlandse positie samen:

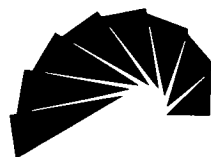
'Nederland is goed op koers, zelfs de meerkeuzevragen in het eindexamen zijn binnenkort helemaal verdwenen. Er worden en er zijn leerplannen ontwikkeld en schoolboeken geschreven zodanig dat niet elke leraar in elke les vreselijk inventief en innovierend bezig hoeft te zijn.'

Rondkijkend op het ICME-congres constateert zij dat het vwo B-programma ook duidelijk aan vernieuwing toe is, gelet op de mogelijkheden van de grafische rekenmachine, en misschien zelfs computeralgebrapakketten.

Agneta besluit het gesprek met een soort globale samenvatting:

*'Overall zie je verschuiving van **'drill and practice'** naar **'begrip en inzicht'** – met dank aan Pierre van Hiele.'*

(*'Begrip en inzicht'* van P. M. van Hiele dateert van 1973.)



► Interview met Willem van Gaans

Bert Zwaneveld

'Ik heb een ontzettend zwak voor de zwakke leerlingen in het voortgezet onderwijs. Om te zien hoe ze in het buitenland met dit soort leerlingen omgaan probeer ik op een congres als ICME-7 zoveel mogelijk te leren'.

Door de uitspraak hierboven verklaart Willem van Gaans, medewerker van het Katholiek Pedagogisch Centrum in Den Bosch, zijn aanwezigheid in Québec. We vragen Willem zich even voor te stellen aan de lezers van Euclides.

Hij is ooit begonnen als docent wiskunde in het mavo. In 1977 raakte hij betrokken bij het mavoproject. Dat project was, zoals de 'oudere' lezers zich wellicht nog herinneren, mede bedoeld om differentiatie binnen klasverband gestalte te geven; dit ten einde op twee niveaus, het C-niveau en het D-niveau, het examen mavo te kunnen afnemen. In dat kader werd door een aantal docenten bij bestaande methoden extra materiaal ontwikkeld volgens het BHV-model (Basisstof, Herhalingsstof, Verrijkingsstof). Eigenlijk dateert van die tijd Willem's passie voor de zwakke leerling.

Toen het mavoproject afgelopen was, werd hij steeds meer door het KPC ingeschakeld bij leerstofprojecten. Nu verzorgt hij voor allerlei school-

vakken de contracten met docenten en uitgeverijen over te ontwikkelen of reeds ontwikkelde leerstof. Ondanks deze vooral op management gerichte baan is zijn liefde voor de wiskunde niet verloren gegaan. Sinds de COW-plannen voor een nieuw leerplan voor de leerlingen van 12 tot 16 jaar heeft hij zich ingezet voor met name de zwakke leerlingen. Hij heeft dan ook zeker kritiek op wat er nu op tafel ligt. Voor hem is men de allerzwaksten, en dan moet gedacht worden aan ibo-leerlingen en leerlingen die nu in het voortgezet speciaal onderwijs zitten, toch nog een beetje vergeten. En dat, terwijl het volgens Willem van Gaans om zo'n 15% van de populatie gaat.



Willem van Gaans

Hij is naar Québec gegaan mede om te kijken hoe men in het buitenland omgaat met de aanstaande beroepspraktijk van deze leerlingen. Wat voor voorbeelden en toepassingen zijn er voor hen ontwikkeld, die in klas 3 en 4 te gebruiken zijn in lesmateriaal, en waarmee de rol van de wiskunde in die beroepspraktijk blijkt? Daarbij moet goed in de gaten worden gehouden dat het om leerlingen gaat die zwak begaafd zijn in de wiskunde, maar die op hun 15e, 16e jaar al heel wat levenservaring hebben opgedaan, vaak veel meer levenservaring dan hun leeftijdgenoten op het havo of vwo.

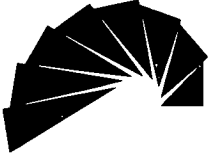
In het wiskunde-onderwijs aan deze leerlingen moet vooral gedacht worden aan het vergroten van hun zelfredzaamheid: het omgaan met geld, het lezen van een stadsplattegrond, het gebruik van de streepjescode, enz. Wat dit betreft is hij in de ICME-conferentie, net als in andere internationale meetings, niet teleurgesteld. Zo heeft hij uit Columbiaanse projecten allerlei nieuwe ideeën opgedaan over het rekenonderwijs. En uit Japanse projecten ideeën over hoe de aanstaande beroepspraktijk in het wiskunde-onderwijs tot uiting gebracht kan worden. In de Columbiaanse projecten gaat het met name over de manieren waarop kinderen rekenen in een situatie waarin ze als volleurde handelaars proberen geld te verdienen. Rekenen in de context van geld is geen probleem. Voor hem is dit een goed voorbeeld: *'Gebruik situaties die voor de leerlingen zeer vertrouwd zijn, of op zijn minst zeer herkenbaar, en hang daar een en ander aan rekenen/wiskunde aan op'*.

Wat hem als groot verschil tussen Nederland en Amerika is opgevallen is, dat het daar veel gewoner is dat leraren meewerken aan het ontwikkelen van lesmateriaal. Ook bemoeien docenten zich daar veel meer met het ontwikkelen van programma's. Dit leidt ertoe dat men in Amerika veel minder afwachtend is bij het gebruiken van rekenapparatuur in de klas. Willem is van mening dat je als trend in Québec hebt kunnen zien, dat rekenapparaten veel meer gebruikt worden als geïntegreerd hulpmiddel bij het onderwijs in de klas.

Heeft hij nu in Québec gevonden waar hij voor kwam? Hij antwoordt genuanceerd. *'In het algemeen gesproken kun je zeggen dat Nederland een voortrekkersrol vervult als het om het ontwikkelen van leerplannen gaat waarin de leerlingen kunnen zien waar de wiskunde vandaan komt, en waarvoor die wiskunde gebruikt wordt. Als het om de allerzwakste leerlingen gaat, wordt er toch nog een erg hoog doel gesteld, terwijl voor de betere leerlingen, zeg maar de havo- en vwo-leerlingen, het abstractie-aspect wel eens vergeten lijkt.'*

Wat hiervan waar is? De toekomst moet het uitwijzen. En:

'Belangrijke innovaties vinden alleen plaats via uitgekristalliseerd lesmateriaal, en niet zozeer via voorbeeldmateriaal: dat dient veel meer als informatie voor ontwikkelaars en auteurs.'



► Interview met Joop van Dormolen

Martinus van Hoorn

'Ervaring is belangrijk vóór je iets gaat leren'.

Joop van Dormolen interviewen lijkt heel gemakkelijk. Hij heeft genoeg te vertellen, ziet niet alleen wat hij meemaakt, maar weet er achteraf ook nog een beschouwing over te geven. De interviewer hoeft wat Joop vertelt alleen maar te ordenen. Dit is een poging.

'Ervaring is belangrijk vóór je iets gaat leren: als je iets vertelt over Nederland, heb je alleen contact als men er al iets van weet'.

Joop praat graag over de ontwikkelingen in Nederland. Hij heeft jarenlang mee voorop gelopen. Van 1987 tot 1992 zat hij in de COW, namens de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Hoe kijkt hij nu tegen de ontwikkelingen aan? *'Nederland loopt voorop'*, zegt hij.

Wie Joop niet kent zou nu kunnen menen dat er voor hem niets meer valt te leren. Joop, geconfronteerd met deze simpele redenering, reageert eerlijk verontwaardigd. Hij is vooral naar Québec gekomen om er iets te leren. Te leren vertellen over de Nederlandse ontwikkelingen, te leren kijken en luisteren naar anderen, te leren niet boos te worden als hij iets niet zo goed vindt.



Joop van Dormolen

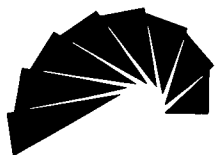
Naar aanleiding van een voordracht waarin een opgave werd opgelost met knippen en plakken zegt hij: *'Je kunt altijd weer iets nieuws bedenken, ook argumenten tegen knippen en plakken. Niet alles wat nieuw is, is goed.'*

Op de conferentie heb ik Joop enige dagen achtereen mogen meemaken in de ochtendwerkgroep over visualisering in het meetkunde-onderwijs. Hij is bij uitstek degene die anderen stimuleert tot discussie. Hij doet dat niet zonder zelf mee te doen. *'Ik ging zelf dat schema invullen, ik werd nieuwsgierig.'* Alsof hij al niet nieuwsgierig was. Joops nieuwsgierigheid is, voor iemand die met hem praat, misschien wel het grootste genoegen.

Op zo'n conferentie is de kwaliteit van het gebodene niet steeds hoog. Joop, eerlijk als hij is, stoorde zich eerst aan een deelnemer die met aplomb modellen op een viltbord presenteerde alsof ze nieuw waren. Twintig jaar geleden waren ze al niet nieuw meer – voor wie ervaring met zulke modellen had uiteraard. Voor de spreker waren ze nieuw, en dus mocht die er enthousiast over zijn.

Joop, tot besluit:

'Benader mensen vanuit hun eigen waardigheid.'



► Interview met Henk Schuring

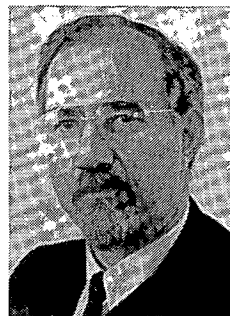
Martinus van Hoorn

'Nederland staat op een lage plaats qua werklust'.

Ik heb geluk. Degenen die ik mag interviewen willen allemaal graag vertellen. Henk Schuring bezoekt meerdere conferenties per jaar. Van de ICME-conferenties heeft hij er slechts één gemist. Vlak voor ICME-7 was hij in Toronto op een HPM-conferentie. (HPM = History and Pedagogy of Mathematics.) In Nederland is hij, behalve als Cito-medewerker, ook werkzaam ten behoeve van Olympiades.

Op ICME-7 bezocht Henk Schuring een 'topic group' over competities: '18 presentaties, met de essentie kort en goed weergegeven'. Veel landen hebben verscheidene competities, ook wel voor lagere klassen. Men werkt er bovendien met medailles voor docenten.

'In Engeland kon Rose Flower math teacher of the year worden. Zoiets hebben wij niet. Waarom niet? Er mag toch best een beloning zijn voor (bijvoorbeeld) het ontwikkelen van nieuwe didactieken? Leerlingen moeten lol krijgen in de wiskunde. In Nederland slagen leerlingen met behulp van soepele compensatieregelingen. Dan is er toch geen stimulans?'



Henk Schuring

Henk Schuring heeft bovendien deelgenomen aan een werkgroep over de implementatie (invoeringsstrategie) van nieuwe leerplannen. Er waren daar geen plenaire voordrachten, maar louter groepsdiscussies. *'De discussies verliepen daardoor eerlijker, men legde fouten op tafel'.*

Bovendien werd hij uitgenodigd een voordracht te houden tijdens de jaarlijkse conferentie van Engelse lerarenopleiders in september. Het is goed, vindt hij, dat de leraar veel meer in het middelpunt van de belangstelling staat dan vroeger.

'De leraar moet worden gesteund'.

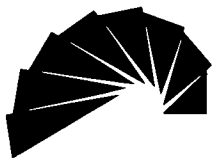
Jammer vindt hij het dat wiskundig-inhoudelijke zaken marginaal blijven. Op zo'n grote conferentie kan daar best wat meer aandacht voor zijn.

'Het gaat er natuurlijk om hoe je onderwijs geeft, maar je moet ook weten wat je doceert'.

Enige zorgen over de ten onzent zo gevierde realistische wiskunde heeft Henk Schuring zeker. Hij ziet dat het steeds meer mensen steeds meer moeite kost om er goede toetsen bij te maken.

'Dat is geen sterk punt van realistisch onderwijs', meent hij, *'men moet er in elk geval méér energie in steken'.*

En zo zijn we weer terug in de Nederlandse situatie. We blijven natuurlijk het meest benieuwd naar hoe het in eigen land gaat.



► Interview met Victor Schmidt

Bert Zwaneveld

'Onze programma's gaan veel verder, zijn veel revolutionairder'.

'Het opvallendste dat ik hier de afgelopen dagen heb gehoord, is dat overal programma's in ontwikkeling zijn die het oplossen van problemen in allerlei toepassingen incorporeren. Zo'n beetje als Hewet, Hawex en het nieuwe W 12-16-programma bij ons. Maar onze programma's gaan veel verder, zijn veel revolutionairder'.

Dit zegt Victor Schmidt, docent heao-Groningen, op het moment dat ICME-7 bijna voorbij is. Hij merkte dit niet alleen in allerlei lezingen en bijeenkomsten die hij bijwoonde, maar ook en met name in de subgroep over onderwijs in differentiaal- en integraalrekening voor studenten in niet-exacte en niet-technische vakken.

Hij waardeert zijn subgroep positief: prima discussies, soms interessante radicale standpunten, aardige mensen, wel wat ver van de dagelijkse lespraktijk afgeraakt. Een gevolg van dit laatste is dat hij maar weinig heeft gehoord dat ook echt bruikbaar is voor zijn dagelijkse lespraktijk. Daar staat tegenover dat het goed is te ervaren dat anderen met dezelfde problemen worstelen als jezelf.



Victor Schmidt

Wat de oplossingen betreft: Nederland is hierin een stuk verder dan andere landen. Zo merkte hij bij de lezing van Jan de Lange over het project van het Freudenthal instituut in de Amerikaanse staat Wisconsin, veel waardering voor waar het middelbaar onderwijs in Nederland mee bezig is en voor de wijze waarop de leerplanontwikkeling is georganiseerd: er is in feite één instituut dat dit doet, en wel door materialen te ontwikkelen en die in de klas uit te proberen.

Natuurlijk is er een belangrijke beperking: zoiets kan eigenlijk alleen in een betrekkelijk klein land zoals Nederland. Overigens verkeren docenten heao zoals hij in een heel gelukkige uitzonderingspositie, althans vergeleken met docenten wiskunde bij het middelbaar onderwijs. De heao-docenten maken per school hun eigen programma's, dus als hij iets wil veranderen, dan hoeft hij alleen maar zijn directe collega's te overtuigen.

Victor Schmidt karakteriseert ICME-7 als een congres van consolidatie: veel mensen presenteren ideeën, projecten enz. die ondertussen in Nederland vrij normaal zijn. Hij merkt in dit verband op dat je in een aantal landen een bescheiden herleving van de euclidische meetkunde ziet. Hij meent dat dit wel een echte trend zal worden, want ook in het nieuwe Nederlandse onderbouw-programma zie je meer aandacht voor dit soort zaken. *'Wat nu in Nederland gebeurt, zal over een tijdje overal gebeuren'.* Op de vraag hoe hij die consolidatie, liever stand van zaken in het wiskunde-onderwijs, verder zou

kunnen omschrijven, is zijn antwoord als volgt. Overal zie je, net als bij ons, het gebruik van de computer, of een grafische rekenmachine, en hier en daar zelfs al software-pakketten met een computeralgebra, of een handrekenmachine met zo'n mogelijkheid. Hij verwacht dat dit een steeds grotere vlucht zal nemen, maar dat het vooral zal gaan met handapparaten, want voor het continu gebruiken van de computer in een computerlokaal zijn er te veel praktische problemen. Overigens heeft hij geen principiële bezwaren tegen het gebruik van de computer met zelfs de meest geavanceerde pakketten. Ook vindt hij dat de school die computers met de bijbehorende pakketten voor de leerlingen beschikbaar moet hebben. Zij moeten het bestaan ervan kennen, en er zeker kennis mee gemaakt hebben. Victor Schmidt denkt niet dat het gebruik van dit soort mogelijkheden ertoe zal leiden dat leerlingen geen vaardigheden meer hoeven te leren: *'Je kunt bijvoorbeeld differentiëren niet vervangen door knoppen drukken'*.

Voor hem geldt bij dit soort ontwikkelingen het volgende. Studenten en leerlingen moeten op het werken met deze hulpmiddelen worden voorbereid, maar dan wel op het werken ermee zoals de ontwerpers ervan bedoeld hebben: als een handig hulpmiddel bij het bedrijven van wiskunde. Met andere woorden: bij het leren van de concepten kunnen deze hulpmiddelen eventueel ingezet worden, maar een spreadsheet of een grafische rekenmachine is dan veel bruikbaar.

Victor rondt het gesprek af met een soort opmaken van de balans.

'Er wordt op zo'n congres als dit vooral over de problemen gesproken, die overal ongeveer vergelijkbaar zijn, maar over de oplossingen hoor je niets.'

Je ziet allerlei mensen van wie je wel eens gehoord hebt, zelfs bekende Nederlanders. Wiskundeonderwijs gestuurd door echte problemen wordt gepresenteerd als het middel tegen alle kwalen. Men staat daarbij niet altijd met beide benen op de grond. Het congres is erg massaal. Het is onmogelijk van alles wat gepresenteerd wordt een goede indruk te krijgen. Zo zijn er 400 posters; hoe kom je er achter welke interessant zijn en welke niet? Dat kost je al gauw een hele dag, maar zo veel tijd ga je niet aan de posters besteden. Toch geeft ook dit onderdeel weer

een indruk van het grote belang dat de deelnemers aan het congres hechten. Deelnemen is heel wat meer dan alleen aanwezig zijn. Maar je moet wel oppassen dat je je niet ergert aan de taalproblemen, aan de matige presentaties die aldoo weer voorkomen, aan de zeer vele Amerikanen, en aan het tekort aan echte leraren.'



Mededeling

Het 29-ste Nederlands Mathematisch Congres

Het 29-ste Nederlands Mathematisch Congres wordt gehouden op donderdag 15 en vrijdag 16 april 1993 (de week na Pasen). Op het congres wordt ook dit jaar een symposium voor wiskundeleraars gehouden (op vrijdagmiddag, de tweede congresdag). Dit symposium zal gaan over de vraag

Voldoet het vwo wiskunde B programma?

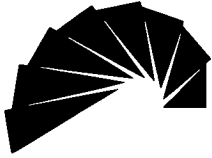
Een panel zal in een aantal korte inleidingen uiteenlopende reacties op deze vraag naar voren brengen. Daarna zullen de leden van het panel reageren op elkaars bijdragen en ingaan op korte vragen en opmerkingen van deelnemers in de zaal. Er is ook tijd ingeruimd voor langere discussiebijdragen (maximaal 5 minuten) uit de zaal. Deze dienen vooraf aangemeld te worden bij de voorzitter van het symposium (Dr. J. A. van Maanen, Rijksuniversiteit Groningen, Vakgroep Wiskunde, Postbus 800, 9700 AV Groningen; tel. 050-63 71 32 op donderdag en vrijdag).

Belangrijk programmapunt van de eerste congresdag is de Brouwerlezing door Prof. L. Lovász. Prof. Lovász ontvangt de Brouwermedaille voor zijn werk op het gebied van de discrete wiskunde.

Het congres wordt gehouden in de gebouwen van de Universiteit van Amsterdam op het Roeterseilandcomplex (congresbalie in het psychologiegebouw, Roetersstraat 15).

Voor nadere inlichtingen en toezending van een inschrijfformulier (aan de inschrijving zijn voor leraren geen kosten verbonden) kunt u zich wenden tot de secretaris van de congrescommissie:

Mevr. Ph. Zijlstra, Universiteit van Amsterdam, Faculteit Wiskunde en Informatica, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam (tel. 020-525 52 17).



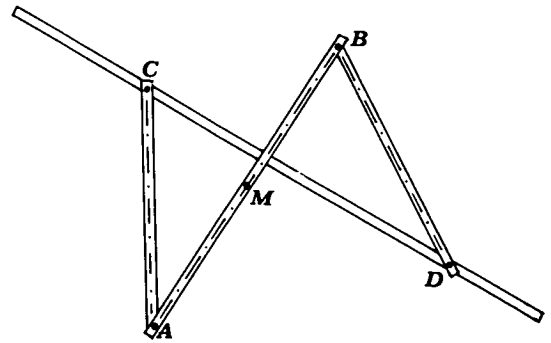
► Wiskundige machines en instrumenten

Bert Zwaneveld en Martinus van Hoorn

In een enthousiast gebrachte lezing, gehouden in een 'topic group' over bewijzen, vertelde Maria Bartolini-Bussi (Modena, Italië) hoe zij op een school voor beroepsonderwijs met de docenten allerlei wiskundige machines en instrumenten had gemaakt. Deze apparaten zijn in feite fysische hulpmiddelen, vergelijkbaar met de (wellicht bekende) tekenaar. De apparaten bestaan in hoofdzaak uit een stelsel verbindingsschakels, die geheel of gedeeltelijk draaibaar zijn. Sommige kunnen worden gebruikt om meetkundige krommen te tekenen (figuur 1), andere laten een meetkundige transformatie zien (figuur 2).

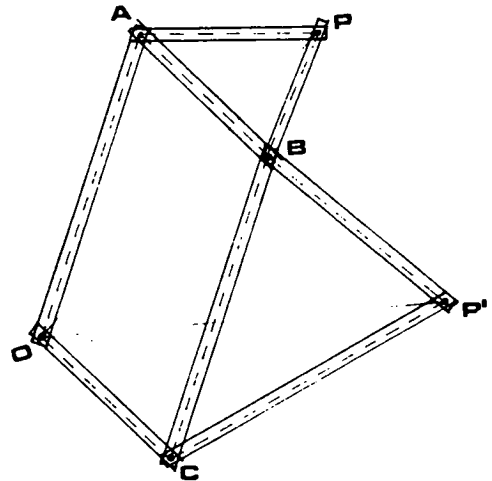
Vanaf de klassieke oudheid tot aan het begin van de 20e eeuw was het ontwerpen en bestuderen van zulke machines en instrumenten een belangrijke activiteit van wiskundigen. Een historische analyse van deze apparaten levert een groot aantal verbanden op tussen de zuivere en de toegepaste wiskunde.

Op de betreffende school zijn meer dan 100 van dergelijke apparaten gebouwd. Van 7 maart tot 4 april 1992 zijn ze met veel succes tentoongesteld in Modena. Het gebruiken van de machines en instrumenten verdiept het wiskundig inzicht, doordat de intuïtie ondersteund wordt door de realiteit. Bovendien wordt de geschiedenis van de wiskunde binnengehaald, waardoor het wiskunde-onderwijs zinvoller wordt.



Figuur 1 Het lemniscaat van Bernoulli.

Het apparaat wordt gevormd door een zgn. 'anti-parallelogram' $ABCD$. Hierin is $AC = DB$ en $AB = CD$, met AB en CD als diagonalen. Verder is $AB = \sqrt{2} \cdot AC$. De buitenste punten C en D liggen vast in het vlak. Punt A doorloopt de cirkel met middelpunt C en (uiteeraard) straal CA , punt B doorloopt de cirkel met middelpunt D en (de gelijke) straal DB . Nu beschrijft het midden M van AB een lemniscaat van Bernoulli.



Figuur 2 De pantograaf van Sylvester.

Dit apparaat bestaat uit het parallellogram $OABC$ met O vast, en twee gelijkbenige driehoeken APB en $CP'B$, welke gelijkvormig zijn:

$$AP = AB \text{ en } CB = CP'; \angle PAB = \angle BCP'$$

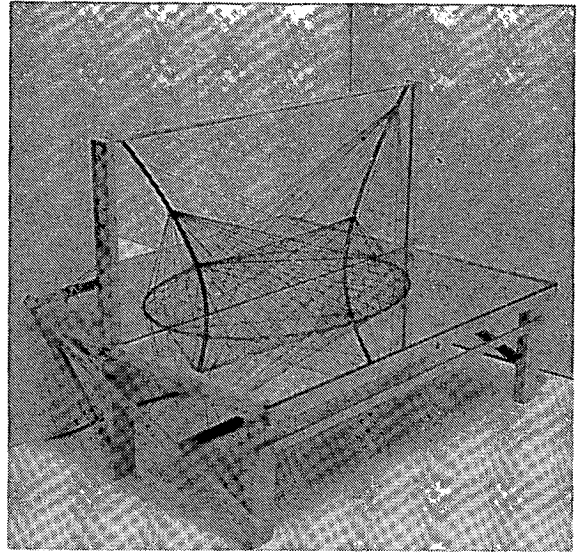
Nu zijn de punten P en P' elkaars beeld bij een rotatie om O , waarbij de rotatiehoek POP' gelijk is aan de hoeken PAB en BCP' . Dit geldt ongeacht de vorm van parallellogram $OABC$.

Met behulp van deze apparaten moeten de leerlingen eigenschappen van krommen, getekend met een machine, ontdekken en ook bewijzen. Maria Bartolini-Bussi onderscheidt hierbij twee fasen:

- de empirische fase, waarin de fysische eigenschappen van het apparaat onderzocht worden, en
- de theoretische fase, waarbij eerst één specifieke situatie wordt bekeken, waarna generalisatie moet plaats vinden. Dezelfde fasen zijn te onderscheiden bij de gerealiseerde meetkundige transformaties.

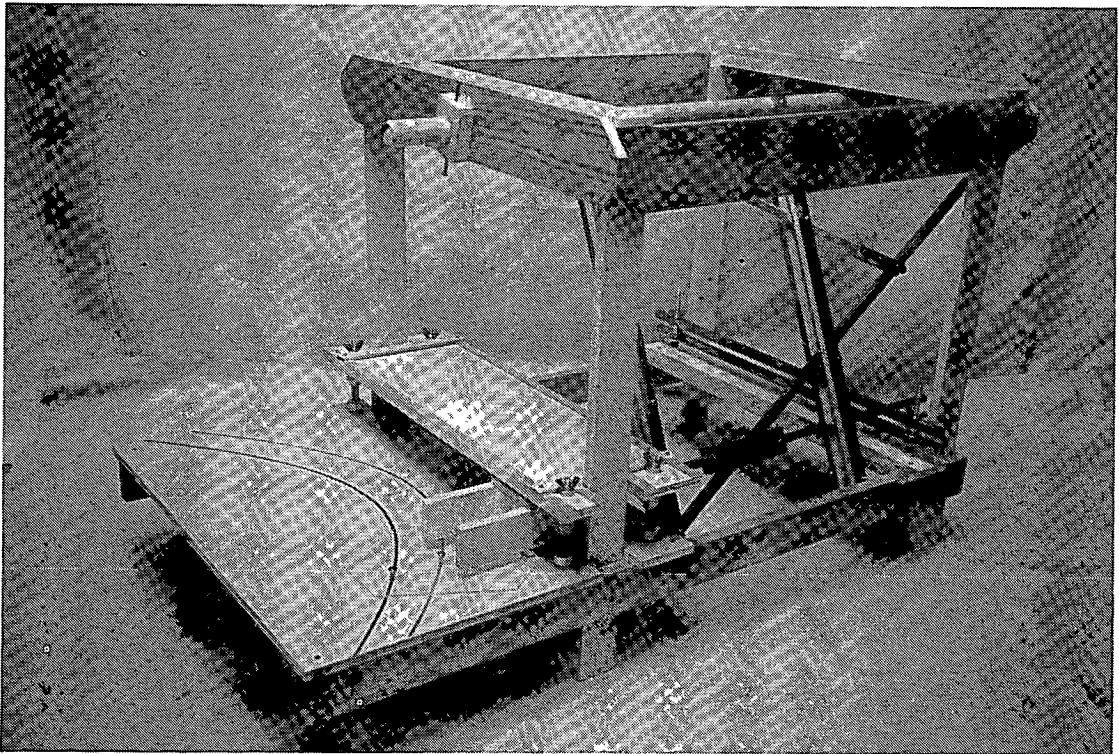
Het is overigens niet zo, dat de wiskundige begrippen precies corresponderen met de fysische eigenschappen. De docent moet heel wat werk verrichten om een en ander bij de leerlingen over te laten komen. Het belangrijkste resultaat is, dat de leerlingen heel veel redeneringen opzetten, vooral ook meetkundige redeneringen. Dit overigens zonder hun redeneringen in een deductief systeem te plaatsen.

Terugkijkend zien we overeenkomst met het werk van de Van Hiele's.

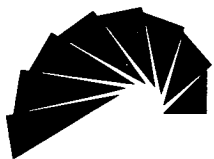


Figuur 3 De stelling van Apollonius voor kegelsneden.

Over de figuren 3 en 4:
de foto's laten drie-dimensionale apparaten zien.



Figuur 4 Descartes' machine ten behoeve van het maken van hyperbolische lenzen.



► Nolan en computers in het onderwijs

Victor Schmidt

Inleiding

Informatiekunde is een vakgebied op de grens van informatica en organisatiekunde. Het vak houdt zich onder andere bezig met de vraag hoe computertechnologie in een (bedrijfs)organisatie zich ontwikkelt. Die ontwikkeling vindt in het algemeen in een aantal fasen plaats, die door de organisatiekundige Nolan in zijn groeifasenmodel zijn beschreven.

Op weg naar enthousiasme

Eerst is er sprake van een schuchtere kennismaking met de computertechnologie, vaak door de aanschaf van een of ander computersysteem. Om dat systeem te kunnen bedienen worden er een of meer specialisten aangetrokken. Binnen de personele organisatie bestaat er een afwachtende houding ten aanzien van het systeem. Die houding slaat in de volgende fase al snel om in enthousiasme. Mensen in de organisatie ontdekken de mogelijkheden van het aangekochte computersysteem en vragen naar computertoepassingen ter ondersteuning van hun specifieke behoeften. Dergelijke computertoepassingen worden door een snel in omvang groeiende automatiseringsafdeling ontwikkeld. De onderlin-

ge samenhang in de aldus ontwikkelde software is afwezig. Bij de ontwikkeling van toepassingen wordt niet op een of meer guldens gekeken; niet zelden kost een ontwikkelingsproject een veelvoud aan tijd langer dan gepland, zo er al van een planning sprake was.

Efficiency en integratie

Op het moment dat het management het laatste constateert treedt de organisatie de volgende fase binnen. Er worden vragen gesteld over efficiency van de automatiseringsafdeling; er ontstaat de behoefte ontwikkelingsprojecten in de hand te houden, bijvoorbeeld door een meer systematische methode van werken voor te schrijven.

Daarnaast blijken de eerder ontwikkelde computertoepassingen geen onderlinge samenhang te vertonen; gegevens die door de ene toepassing worden gegenereerd, kunnen door de andere niet worden gebruikt. De integratie van alle toepassingen tot één geheel vindt veelal plaats in de vierde fase van het model van Nolan.

Computers in scholen

Bovenstaand model is met name van toepassing op de administratieve systemen van een bedrijf. Toch kan het model binnen de muren van een schoolgebouw ook zijn waarde bewijzen, want veel ontwikkelingen op schoolcomputergebied lijken zich naar dit model te voegen. Eerst is er de enthousiaste collega, die wat hobbiet met een ooit door de school aangekochte PC of huiscomputer; zijn collega's zien hem met een mengeling van meewarigheid en afstandelijkheid aan, totdat men ontdekt dat er voor veel vakken aardige software bestaat. Het enthousiasme vindt een weg door het schoolgebouw en veel docenten vragen pakket X of pakket Y aan. Er wordt een netwerk van computers geleverd in het kader van het NIVO-project. Vervolgens ziet de schoolleiding aanleiding het enthousiasme te sturen door bijvoorbeeld voorschriften voor het gebruik van software en de computerruimte uit te vaardigen en door het computergebruik tijdens lessen te reguleren. Tenslotte kan men zich voor-

stellen dat computertechnologie en -toepassingen een regulier en geaccepteerd onderdeel gaan vormen van de dagelijkse lespraktijk.

De fase waarin een school of zelfs alle scholen in een land zich bevinden, verschilt per school of land, zo kon afgelopen zomer tijdens ICME-7 geconstateerd worden. De afwachterende wiskundeleraar die computertoepassingen binnen de wiskundeles volledig afwijst, was niet meer te vinden. Kennelijk hebben velen de kennismakingsfase met goed gevolg doorlopen. Een niet onaanzienlijk deel van de congresgangers leek mij zich in de tweede fase op te houden: enthousiast en bereid tot rigoureuze wijzigingen in hun curriculum als gevolg van de mogelijkheden die de computertechnologie biedt. Ze leken in de technologie de oplossing te zien voor veel, zo niet alle problemen bij het leren van wiskunde. De vergelijking met de mensen die technische verbeteringen aan een auto zien als de enig juiste wijze om de luchtverontreiniging terug te dringen, dringt zich bij mij op.

Educatieve software

De fase van ontzuivering en bezinning blijft evenmin onbetreden. Dat blijkt onder andere uit het feit dat de rol van educatieve software meer en meer duidelijk wordt. Ruwweg kan dergelijke software onderverdeeld worden in software om handmatige manipulaties en berekeningen met vooral formules en grafieken uit te voeren en in software om het leerproces van de leerling te ondersteunen (COO).

In de eerste categorie vallen pakketten als Derive, Maple en Mathematica, speciaal ontworpen als wiskundige gereedschapskist, maar daarnaast ook bijvoorbeeld spreadsheets, die in bedrijfsorganisaties al hun diensten hebben bewezen. De fabrikanten van de drie genoemde producten waren nadrukkelijk op het congres aanwezig. Naast deze pakketten bevindt zich eveneens software in zakrekenmachines. Deze apparaten hebben zich in twintig jaar tijd ontwikkeld van onhandige en energievretende rekendoosjes tot ware zakcomputers. Op het congres presenteerde Texas Instruments de opvolger van de TI-81, die nu ook in staat is differenti-

aalvergelijkingen grafisch op te lossen. De firma Hewlett Packard brengt een grafische rekenmachine op de markt, die ook algebraïsche bewerkingen in zijn repertoire heeft. Het einde is nog niet in zicht, want personal computers worden tegenwoordig ook geleverd in handformaat.

Gebruik van bovenstaande mogelijkheden om berekeningen en formulemanipulaties elektronisch uit te voeren geeft de docent ruimte zich nadrukkelijker met begripsvorming bij de leerling bezig te houden. Een spreker op het congres leerde zijn leerlingen in eerste instantie helemaal geen algoritmische vaardigheden, maar bracht ze, naar hij zei, op een hoog conceptueel begripsniveau! Pas tegen het einde van de lessenreeks kwamen de algebraïsche bewerkingen aan de orde, die de leerlingen voordien met de computer uitvoerden. Hun resultaten op dit gebied waren, nog steeds volgens de spreker, niet slechter dan in het geval de leerling algoritmische vaardigheden op de meer traditionele wijze wordt aangeboden.

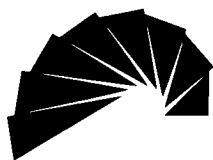
Onder de tweede categorie software valt onder andere de zogenaamde courseware: software waarmee een leerling een bepaald begrip of vaardigheid kan leren. Hoewel courseware in het hbo nogal populair is, bleek dat niet op het ICME-congres het geval te zijn. Ik heb weinig tot geen software van deze soort kunnen ontdekken. N.B. Vaak wordt tot de courseware ook het bijbehorend schriftelijk materiaal gerekend; dat is hier niet bedoeld.

Uiteraard kunnen pakketten als Derive en grafische zakrekenmachines ook ingezet worden bij het aanleren van begrippen en vaardigheden. Voorbeelden daarvan werden in ruime mate op het congres of tijdens de zogenaamde postersessies gepresenteerd. Een aardig voorbeeld is het stelselmatig inzoomen op bijvoorbeeld een deel van een parabool. Wie dit proces lang genoeg voortzet, zal kunnen constateren, dat het ingezoomde deel van de parabool nauwelijks nog van een rechte lijn valt te onderscheiden. Het idee van de lineaire benadering van een anderssoortige functie wordt zo op plastische wijze de leerling duidelijk gemaakt.

De toekomst moet uitwijzen hoe pakketten uit de eerste categorie software ook ingezet gaan worden ter ondersteuning van het leerproces.

Besluit

Het gebruik van computers en geavanceerde zakrekenmachines in de wiskunde lijkt in de toekomst de gewoonste zaak van de wereld te worden. Het enthousiaste amateurisme raakt op de achtergrond en maakt plaats voor een welomschreven positie van elektronische hulpmiddelen binnen het wiskunde-onderwijs, enerzijds ter ondersteuning van leerprocessen, anderzijds als hulp bij berekeningen en manipulaties met formules. De volgende fase, waarin leerlingen allen beschikken over geavanceerde hulpmiddelen tegen een geringe prijs en het gebruik ervan in de les onontbeerlijk en normaal is geworden, ligt in de nabije toekomst. Ongetwijfeld zal op de achtste uitgave van ICME in 1996 deze progressie een congresitem zijn.



► Over de toekomst van de integraalrekening op school

Martinus van Hoorn

Dit stukje gaat over de TOEKOMST van een onderdeel van de schoolwiskunde. Het is niettemin geschreven naar aanleiding van een voordracht in een subgroep over de GESCHIEDENIS van de wiskunde. Siu Man-Keung uit Hong Kong sprak over het werk van Liouville, Rosenlicht, en anderen. Terwijl zijn zoon-tje de sheets toonde, stak Siu Man-Keung zijn verhaal af. Hij wierp ook een blik in de toekomst. Zodoende kan dit stukje hoofdzakelijk over de toekomst gaan.

Pas na de Tweede Wereldoorlog is in Nederlandse bovenbouwprogramma's differentiaal- en integraalrekening opgenomen. Op de hbs is dat pas in het begin van de zestiger jaren gebeurd. Tegenwoordig is differentiaalrekening de ziel van de B-programma's op havo en vwo.

Integraalrekening zit alleen in het vwo B-programma en in het mts-programma. In het hbo komt integraalrekening op veel plaatsen voor.

Er zijn tekenen die erop wijzen dat er ten aanzien van de integraalrekening iets gaat veranderen.

Ten eerste is er de komst van steeds mooiere software, waarmee oppervlakten onder grakieken numeriek kunnen worden benaderd. Daardoor vervalt de noodzaak primitieve functies te bepalen.

► Vreemde woorden in de wiskunde

Negatief (< Lat. *negativus*; < *negare* = ontkennen). Oorspronkelijk in tegenstelling tot *affirmativus* = bevestigend (< Lat. *affirmare* = bevestigen) gebruikt voor termen, die afgetrokken, in tegenstelling tot andere, die opgeteld moeten worden. Daarnaast stond in gelijke betekenis het begrippenpaar *positivus* (< Lat. *ponere* = leggen) en *privativus* (< Lat. *privare* = beroven). Door verwarring van de twee paren kwam ten slotte (17e eeuw) de tegenstelling positief-negatief tot stand.

Octaëder (Fr. *octaèdre*; < Gr. *ὀκταέδρον* sc. *ὀχῆμα* = lichaam met acht vlakken; < *ὀκτώ* = acht; *ἔδρα* = zitplaats, begrenzend vlak van een veelvlak. De Fr. tussenvorm is oorzaak van het mannelijk geslacht van het Nederl. woord; het Gr. woord is onz.) *Regelmatig achthoek*, geconstrueerd bij Euclides XIII, 14.

Pyramide (< Gr. *πυραμῖς*; < Egypt. *peremus*, vocalisering van *pr-m-ws*, een zeker lijnstuk in een pyramide, waarschijnlijk de hoogte). In het Gr. werd het woord overgenomen voor het gehele lichaam pyramide, misschien onder invloed van een term *πυραμῖς* voor klein broodje (< *πυρός* = koren).

Quotient (< Fr. *quotient*; < Lat. *quotiens* = hoe vaak?). In de 13e eeuw komt vaak voor de uitdrukking *numerus notans quotiens* (het getal, dat aangeeft hoe vaak). Later alleen *quotiens*, als substantief opgevat.

Dijksterhuis en Van der Wielen, 1948.

De benaderingsmethoden gebruiken veelal benaderende machtsfuncties. Deze benaderingsmethoden zijn ook toepasbaar op functies waarvan de primitieve niet 'elementair' te bepalen is (zoals van $\frac{\sin x}{x}$). Wat er aldus overblijft van de integraalrekening is het correct kunnen bedienen van een computer.

Is dit te somber?

Hierop zijn minstens twee reacties mogelijk.

Ten eerste: waarom zouden we er somber over moeten zijn dat er leerstofonderdelen kunnen verdwijnen?

Ten tweede: zijn er gedeelten uit de integraalrekening die niet gemist kunnen worden?

Dit vraagt om bezinning.

Veel software waarmee oppervlakten onder grafieken benaderd worden is nu niet bepaald intelligente software. Zulke software houdt geen rekening met de aard van de functie waarvan de grafiek benaderd wordt. In veel gevallen zou een primitieve sneller en nauwkeuriger kunnen helpen. Om en voorbeeld te geven: ga je $\int_1^2 \ln x \, dx$ bepalen met behulp van een benadering met machtsfuncties, of met behulp van de primitieve $x \ln x - x$? Veel programma's kennen zulke primitieven ook wel en slimme programmeurs zullen ze zeker gebruiken. In computeralgebrapakketten is dat vast wel gedaan. Nodig is, dat $\ln 2$ nauwkeurig is op te roepen – maar dat is altijd, bij elke werkwijze nodig. De voordelen van het werken met primitieven hebben recentelijk geleid tot hernieuwd onderzoek naar de vraag, welke functies 'elementair' te primitiveren zijn.

Deze vraag werd al gesteld door Liouville (1809-1882), die al meer dan 150 jaar geleden van enkele functies bewees dat ze niet in gesloten vorm te primitiveren zijn. Ongeveer 20 jaar geleden wist Rosenlicht het probleem op te lossen door aan te geven welke functies (dat wil zeggen: voor de hand liggende combinaties van machtsfuncties, exponentiële functies en goniometrische functies en hun inversen) in gesloten vorm primitiveerbaar zijn. Dit laatste wil zeggen: de primitieve functie is een eindige reeks van soortgelijke combinaties.

Dit is natuurlijk gemakkelijker gezegd dan echt uitgelegd. De betekenis voor software die met symbolen kan werken is evenwel duidelijk.

Het voorgaande is geen pleidooi om de integraalrekening op school te handhaven. Een kleine groep mensen moet weten hoe programma's werken. Voor de meeste gebruikers is dit niet nodig, net zo min als het nodig is dat gebruikers van een rekenmachine weten hoe de waarde van $\ln 2$ daar ingesloten is.

Toch zijn er argumenten voor het handhaven van de integraalrekening (althans van gedeelten daaruit) in leerplannen.

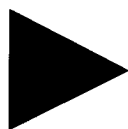
Zo zijn er functies die gegeven worden door middel van een integraal, zoals de gamma-functie

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Momenteel wordt de gamma-functie niet behandeld op vwo of mts. Er mag betwijfeld worden of dat in de toekomst wel het geval zal zijn.

Anders is het gesteld met de differentiaalvergelijkingen. Zonder kennis van enige integraalrekening kunnen differentiaalvergelijkingen niet worden opgelost; de hele betekenis van het oplossen zou onhelder zijn. Wat wel kan, is het opstellen van differentiaalvergelijkingen. Afgewogen moet dus worden of de belangen van andere vakgebieden groot genoeg zijn om een behandeling van differentiaalvergelijkingen te blijven rechtvaardigen.

Hierdoor lijkt ook de discussie over het handhaven van de integraalrekening op school te zullen worden bepaald.



Verschenen

David S. Watkins; *Fundamentals of Matrix Computations*; John Wiley & Sons; 449 blz.; ISBN 0-471-54601-1

Dit boek geeft een uitgebreide inleiding in de numerieke lineaire algebra. De lezer wordt geacht enige kennis te bezitten van matrix-algebra, inclusief inversen en determinanten.

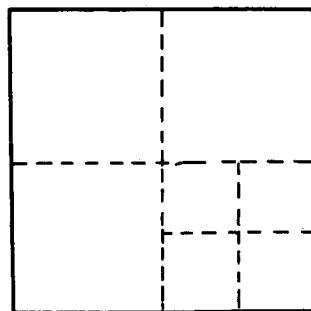
Overzicht van de hoofdstukken: Gauss-eliminatie; Sensitiviteit van lineaire systemen; Orthogonale matrices; Eigenwaarden en eigenvectoren; Singuliere waarde-decompositie.

De tekst is doorspekt met opdrachten ter oefening.

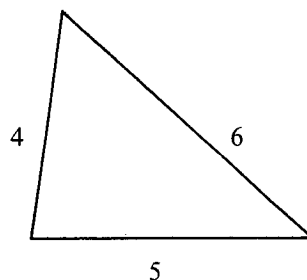
● Werkblad ●

► Opgaven uit Amerika

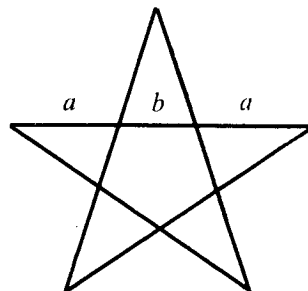
- Als een vierkant kan worden verdeeld in n vierkanten, dan noemen we n een 'goed getal'.
Het is duidelijk dat alle kwadraten (1, 4, 9, ...) goede getallen zijn. Het diagram laat zien dat ook 7 een goed getal is.
Zoek alle natuurlijke getallen die niet goed zijn.



- In welke rij komen de meeste priemgetallen voor:
1991, 1992, 1993, 2000 of
2001, 2002, 2003, 2010?
- In de driehoek met zijdelengten 4, 5 en 6 bestaat er een verband tussen de hoeken tegenover de zijden met lengten 4 en 6.
Welk verband? Bewijs de juistheid van je antwoord.



- Hoeveel natuurlijke getallen van 1 tot en met 2000 zijn niet deelbaar door 2, 3 of 5?
- Gegeven is een regelmatige, 5-puntige ster, zoals in de figuur getekend.
Bereken de verhouding $b : a$

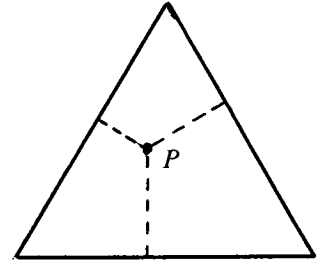


- Als Benjamin Franklin in het jaar 1776 een bedrag van \$ 10 naar de bank had gebracht tegen een jaarlijkse rente van 6%, tot welk bedrag zou dan dit kapitaal zijn aangegroeid in het 'bicentennial' jaar 1976?

► Opgaven uit Amerika

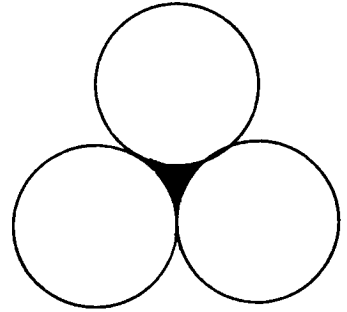
7. P is een willekeurig punt binnen een gelijkzijdige driehoek. Vanuit P zijn loodlijnen neergelaten op de drie zijden.

Bewijs dat de som van de lengten van deze drie loodlijnen gelijk is aan de hoogte van de driehoek.



8. Wat is het kleinste natuurlijke getal groter dan 1 dat tegelijk een kwadraat, een derde macht en een vierde macht is?

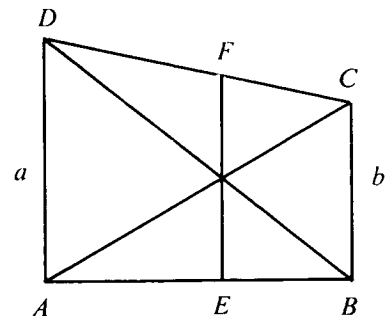
9. Als de oppervlakte van elk van de drie cirkels gelijk is aan 1, hoe groot is dan de oppervlakte van het gekleurde gebied dat ze insluiten?



10. Beginnend op de Noordpool loopt iemand één mijl in zuidelijke richting, vervolgens één mijl in oostelijke richting en tenslotte één mijl in noordelijke richting. Zo komt hij/zij terug op het uitgangspunt. Zoek nog minstens één punt op de aardbol waar men precies terug keert na zo'n zuid-oost-noord-wandeling.

11. Gegeven is trapezium $ABCD$, waarin EF (gaande door het snijpunt van de diagonalen) evenwijdig is aan AD en BC .

Druk de lengte van EF uit in a en b .



12. Ontbind in factoren met gehele, reële coëfficiënten:
 $x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 4x + 13$



► De NCTM

Martinus van Hoorn

Evenals in de nummers 4 en 5 van deze jaargang komen de opgaven op de werkbladen uit een buitenlands tijdschrift. Ditmaal komen ze uit het Amerikaanse tijdschrift *Mathematics Teacher*, om precies te zijn uit nummer 7 van jaargang 82 (oktober 1989). Enkele opgaven zijn licht bewerkt.

De *Mathematics Teacher* is een uitgave van de National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Dit is zoiets als de vereniging van wiskundeleraren van de Verenigde Staten. Deze vergelijking is evenwel aanvechtbaar, omdat de NCTM vele malen groter is dan onze NVvW. De NCTM is een bijzonder kapitaalkrachtige club, die in alle staten van de V.S. werkzaam is. Dit ondanks de grote verschillen die er tussen staten kunnen bestaan. In elk nummer van de *Mathematics Teacher* is vermeld dat er een (betaalde) staf is van tussen de 10 en 15 mensen.

In de V.S. houden heel veel mensen zich professioneel bezig met de opleiding van docenten of anderszins met didactiek. Zo kan het gebeuren dat op een ICME-conferentie een kwart van de deelnemers afkomstig is uit de V.S. Omdat de laatste ICME-conferentie in Canada plaats vond wekt dit misschien weinig verbazing, maar ook op de vorige ICME-conferentie, in 1988 gehouden te Boedapest, waren enkele honderden Amerikanen als deelnemer aanwezig. De meeste van deze deelnemers waren geen leraren. Hierin zijn de V.S. trouwens niet uniek.

Ook de meeste van de 50 Nederlandse deelnemers in Canada waren geen leraren.

Hoe dan ook, door haar bijzonder grote potentieel aan mensen die zich professioneel bezig houden met ('slechts') denken over onderwijs kan de NCTM projecten uitvoeren waaraan men in geen enkel ander land toe komt.

Waar ik het hier over wil hebben is de publikatie, in de afgelopen paar jaar, van een tweetal dikke boeken:

- *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* (normen waaraan schoolboeken en toetsen moeten voldoen);
- *Professional standards for teaching mathematics* (didactische richtlijnen).*

Op het eerste gezicht klinkt het sympathiek: de NCTM heeft, met de haar ter beschikking staande menskracht, normen en richtlijnen opgesteld ten behoeve van iedereen die zich op enigerlei wijze bezig houdt met het wiskunde-onderwijs: docenten, schoolleiders, politici, beleidsmakers. De boeken stralen beslist een soort degelijkheid uit, bovendien. Hier is nu eens vastgelegd hoe het moet! Maar het is te mooi om waar te zijn. Onderwijs kun je niet vastleggen met behulp van stapels papier. Er is slechts één plek waar onderwijs gegeven wordt, en dat is in de klas. De vaak eenzame leraar, aan het werk met een klas, is de enige die onderwijs geeft. Didactici, schoolleiders, politici, hoe belangrijk ook om de samenleving draaiende te houden, zijn niet degenen die telkens nieuwe generaties onderwijs geven. Eh, storen didactici, voor zover leraren-opleiders, zich aan deze uitspraken? Voor zover ze leraren opleiden zijn ze uiteraard óók leraar.

Toch vliegen de dikke boeken van de NCTM als warme broodjes over de toonbank; zo onder andere op de ICME-conferentie te Québec.

En in Nederland raken boekenplanken vol met geschrijf over en naar aanleiding van kerndoelen, eindtermen en andere lege hulzen. Gaan wij Amerika achterna?

* Zie voor de Amerikaanse didactische richtlijnen P. Verstappen in *Euclides* 66-8 (mei 1991).



► Het wiskunde- onderwijs in Italië

Martinus van Hoorn

Een voortreffelijke voordracht werd gehouden door Nicolina Malara uit Modena, Italië. Zij sprak over het wiskunde-onderwijs in Italië van 1861 (de vorming van Italië als staat) tot 1992.

Tegelijkertijd stelde zij een boek beschikbaar, waarin opgenomen een uitgebreide versie van haar voordracht. Dit boek bevat bovendien een bibliografie, alsmede een uitgebreid overzicht van het huidige wiskundig-didactisch onderzoek in Italië. Het boek werd samengesteld door een groep van vijf mensen, die (pas) in november 1991 besloten dit te doen. Nicolina Malara was één van die vijf mensen; de anderen waren afkomstig uit Genua, Parma, Pavia en Rome.

Een dergelijke vlot verlopen samenwerking, gevoegd bij de prima presentatie, zou de moeite van het vermelden al waard zijn geweest. Het verhaal over het Italiaanse wiskunde-onderwijs is daarenboven boeiend genoeg om er meer over te vertellen. Het verhaal maakt duidelijk, dat politieke ontwikkelingen, en ook eigen voorkeuren van diverse personen, de aard van het wiskunde-onderwijs zéér kunnen beïnvloeden. Dit gaat dan over externe invloeden.

Interne invloeden waren er uiteraard ook. Italië heeft heel wat wiskundigen van internationaal aanzien voortgebracht, van wie verscheidenen zich

moeite hebben willen getroosten voor het wiskunde-onderwijs op middelbare scholen. We noemen Betti, Volterra, Enriques en Castelnuovo.

Vanaf 1861 moest de eenheid van Italië nog groeien. Onder andere was er niet direct een geaccepteerde en door iedereen geleerde eenheidstaal. Aan het voortgezet onderwijs namen lang niet alle kinderen deel. Dit voortgezet onderwijs bestond uit gymnasia, technische lycea en een soort normaalscholen voor de opleiding van onderwijzers. (Ter wille van de duidelijkheid zijn de Italiaanse namen voor deze schooltypen niet letterlijk in het Nederlands vertaald.)

Een universitaire studie in de wiskunde of natuurwetenschappen kon slechts begonnen worden na een opleiding aan de theoretische afdeling van een technisch lyceum. Aan de gymnasia werden de bèta-vakken niet of nauwelijks onderwezen, een stand van zaken die door wiskundigen trouwens wel gesteund werd.

De wiskunde die aan de technische lycea onderwezen werd was vooral in de eerste decennia strengdeductief.

In de jaren 1905-1909 werden de contouren opgesteld voor een geheel nieuw onderwijsstelsel. Centraal in het nieuwe stelsel stonden moderne leerplannen; voor het vak wiskunde werd de belangrijkste bijdrage geleverd door Giovanni Vailati. Diens ideeën over het wiskunde-onderwijs zouden zelfs heden ten dage, zei Nicolina Malara, vooruitstrevend worden gevonden. Vailati vond dat wiskunde zó moest worden onderwezen, dat leerlingen gestimuleerd werden om hun eigen mogelijkheden zo veel als 't kon te gebruiken.

De voorgestelde vernieuwingen werden echter niet doorgevoerd. In plaats daarvan werd als nieuw schooltype het moderne lyceum gegrondvest. In de formulering van leerplannen bleef de nadruk liggen op vakinhoud; methodiek bleef een geringe rol spelen. In het moderne lyceum moest een natuurlijke afstemming tot stand komen tussen de wiskunde en de natuurkunde.

Op 28 oktober 1922 nam Mussolini de macht in Italië over. De minister van onderwijs, Gentile, was van opvatting dat wiskunde en natuurwetenschappen niet thuis hoorden in het voorbereidend weten-

schappelijk onderwijs. Zulke vakken zouden geen *vormende waarde* bezitten; hoogstens zouden ze enig *nut* kunnen hebben. In de 'burgerlijke' regering vóór de machtsovername zat al een minister van onderwijs, Croce, met soortgelijke opvattingen. Maar Gentile kon de macht van de fascistische regering aanwenden om zijn ideeën te verwezenlijken.

Bèta-vakken konden voortaan alleen nog gevolgd worden aan bèta-lycea, en men kon daarmee niet naar de universiteit. Ondanks latere verbeteringen, in het lager onderwijs ook didactische verbeteringen, bleef de zojuist geschetste situatie intact tot 1945.

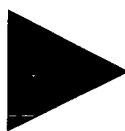
THE ITALIAN SYSTEM OF EDUCATION

Scuola elementare (Elementary school)	5 years ages: 6-11 (<i>compulsory</i>)
Scuola secondaria di primo grado (Lower secondary school)	3 years ages: 11-14 (<i>compulsory</i>)
Licei (Classical Lyceum, Scientific Lyceum, Foreign Languages Lyceum)	5 years ages: 14-19
Istituti Tecnici (Technical Institutes with various orientations: Trade, Informatics, Electrotechnics, Electronics, Mechanics, ...)	direct access to all University faculties
Istituti Professionali (Professional Institutes with diploma after 3 years)	
Liceo Artistico (Art Lyceum)	4 years
Istituto Magistrale (Institute for prospective elementary teachers)	ages: 14-18 access to all University faculties after one further school year
University	

In this figure we represent a schematized diagram of the Italian school organization. More details on the types of schools, final licences, access to university can be found in the *Annali della Pubblica Istruzione* (Annals of Ministry of Education). We divided with a double line the compulsory school levels (elementary and lower secondary) and the level of Lyceum and Institutes that constitute the Scuola Secondaria Superiore (upper secondary school).

Na de tweede wereldoorlog ontstond het schoolstelsel dat in de bijgaande figuur is geschetst. Nog steeds echter waren wiskunde en natuurkunde aan elkaar gekoppeld, wat voordelen heeft, maar eveneens nadelen. De didactische vorming van docenten liet nog steeds zeer te wensen over. Uiteindelijk werd een programmatische vernieuwing onvermijdelijk. Zo verscheen in 1985 een nieuw leerplan wiskunde voor 14- tot 16-jarigen, en in 1988 een nieuw leerplan wiskunde voor 16- tot 18-jarigen. Van 1985-1991 ontvingen 40.000 docenten nascholing. Inmiddels wordt met de nieuwe programma's geëxperimenteerd. In deze programma's zitten onderdelen als informatica, logica en statistiek.

Ogenschijnlijk is dit allemaal niet zo gek. Het verhaal over het Italiaanse wiskunde-onderwijs krijgt als het ware een happy end. Maar de totstandkoming van de nieuwe programma's is het resultaat van een inhaaloperatie die, zoals gezegd, onvermijdelijk was geworden. De nieuwe programma's zullen hun waarde nog moeten bewijzen en veel Italiaanse wiskunde-didactici, onder wie de vijf auteurs van het boek, menen dat het echt nog een stuk beter kan.



Mededeling



Cursus 'Eindige Elementen Methode'

De Stichting Postacademisch Onderwijs Natuurwetenschappen (PAON) organiseert in samenwerking met het IWDE van de TU-Eindhoven de cursus 'Eindige Elementen Methode'.

Datum: 26-29 april 1993

Plaats: Eindhoven

Organisatie: Inst. Wiskundige Dienstverlening Eindhoven, TU-Eindhoven

Inlichtingen: Mw. M. M. Nederpel, tel. 071-21 41 55.

'Begrijpen'

► **Waarom een leerling soms iets snapt, maar het niet begrijpt**

Ton Vandeberg

Inleiding

Een leerling zegt dat hij iets snapt, als hij het verhaal van de leraar kan volgen en de stappen die door de leraar genomen worden als logisch ervaart. Een leerling begrijpt iets als hij in staat is om zelfstandig met een concept te werken, waarbij hij de verschillende stappen, die hij moet maken om tot een oplossing te komen, kan motiveren.

De spanning tussen deze twee uitspraken kent iedereen wel uit zijn eigen praktijk. Wie kent niet de situatie waarin een leerling de klas binnenkomt met de opmerking: 'In de les snapte ik het, maar toen ik thuis kwam, begreep ik er niets meer van.' Hoe kan dat? Deze vraag wil ik proberen te beantwoorden door na te gaan hoe ik, in bepaalde situaties, mijn leerlingen iets uitleg.

Hoe ga ik te werk?

Als ik klassikaal iets aan mijn leerlingen wil uitlegen zorg ik er allereerst voor dat de leerlingen op het door mij gewenste niveau, de beginsituatie, komen. Dit gebeurt door een korte herhaling of door een opstapprobleem. Dan begin ik met het onderwerp dat ik wil uitleggen. Ik spaar geen enkele

le moeite, aan ieder deelprobleem schenk ik aandacht. Iedere hobbel waarvan ik ook maar denk dat de leerlingen erover zouden kunnen struikelen, wordt geslecht. Elke valkuil wordt signaleerd en ik geef aan hoe ze deze kunnen ontwijken of vermijden. Zo ontstaat een geëffend pad. Op het eind van dit pad is het voor de leerlingen duidelijk welke stappen ik heb ondernomen om het probleem op te lossen, maar...

Wie heeft het denkwerk gedaan?

Het meeste denkwerk wordt door mij gedaan en van de leerling wordt alleen maar gevraagd om mijn gedachtengang te volgen. Dat nu is niet zo moeilijk, omdat de weg gebaad en het pad volkomen geëffend is.

Voor sommige leerlingen werkt dit heel goed, zij zijn nu in staat om ook zelf dit soort problemen op te lossen, zij hebben voldoende aan deze uitleg om hetgeen ze gehoord hebben te kunnen begrijpen. Waarschijnlijk gebeurt dit begrijpen pas als ze zelf met de gestelde problemen aan het werk gaan. Een deel van deze leerlingen zou het ook zonder onze hulp hebben kunnen doen.

Waarom gaat het soms fout?

Valkuilen signaleren, aandacht besteden aan hobbels, het pad effenen. Allemaal goede zaken. Als het hier maar niet bij blijft, want dan doe ik die leerlingen, die de volgende dag op school komen en zeggen: 'Meneer ik begrijp het niet.', tekort. Deze leerlingen hebben kennelijk niet geleerd zelfstandig een moeilijkheid 'aan te pakken', een hobbel zelf te nemen.

Hiermee is de vraag uit de inleiding beantwoord. Misschien is het wel aardig om een mogelijke oplossing aan te geven.

Toegift

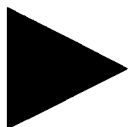
Het zal duidelijk zijn, dat de leerlingen die niet verder komen dan 'snappen' vermoedelijk meer gebaat zijn bij een uitleg waarbij ze zelf aan een hobbel moeten werken. Misschien is het nog beter



als ze een manier van werken ontwikkelen waarbij het zelf 'ontdekken' centraal staat. Ik denk daarbij aan de manier waarop ik met name mijn wiskunde A leerlingen zelfstandig laat werken uit de Hewet boekjes. Van hen hoor ik zelden of nooit: 'Ik begrijp het niet.'

Conclusie

Om iets te begrijpen moet je – al dan niet geholpen – zelf ontdekken/ervaren hoe iets werkt, zelf doen, zelf ontdekken hoe je een valkuil kunt ontwijken. Zelf leren en ervaren hoe je een hobbel neemt. Om het met de woorden van Freudenthal te zeggen: 'Learning is reinvention.'



Boekbespreking

Larry J. Goldstein/David C. Lay/David I. Schneider: Calculus and its Applications (fifth edition), Prentice-Hall International, 1990, 728 blz., \$ 39,95.

Het boek is bedoeld voor een twee-semesterkursus voor 'students of business and the social and life sciences'. Tot de stof behoren onder andere functies van meerdere veranderlijken, differentiaalvergelijkingen, Taylor-reeksen en toepassingen van de waarschijnlijkheidsrekening. De nadruk wordt gelegd op een intuïtieve aanpak. Een lijst van toepassingen (ook in de vraagstukken komen ze veelvuldig voor) vermeldt ongeveer 2000 titels, van 'Advertising' via 'Ebbinghaus model for forgetting' en 'Lotka-Volterra predator-prey model' tot 'World's need for arable land'.

Het boek bevat 525 uitgewerkte voorbeelden alsmede meer dan 3100 opgaven. Deze 'exercises' vormen volgens de schrijvers, docenten aan de universiteit van Maryland, het belangrijkste deel van de tekst. Van de opgaven met oneven nummer staan achter in het boek de antwoorden of oplossingen. Vanzelfsprekend komen numerieke methoden aan de orde, onder andere bij de berekening van bepaalde integralen, de methode van Euler voor de benadering van de oplossingen van lineaire differentiaalvergelijkingen en het algoritme van Newton-Raphson. Al met al een prettig aandoend leerboek, mijns inziens ook zeer geschikt voor zelfstudie.

G. M. Hogewei

'Ontwikkelingen in de didactiek'

► Een onderzoekende houding

Bram Lagerwerf

Een oude rolverdeling is dat de leraar de vragen stelt en de leerlingen de antwoorden geven, waarna de leraar bepaalt of het antwoord goed is. Die rolverdeling wordt steeds meer doorbroken. Leerlingen leren zelf vragen te stellen bij probleemsituaties, en ze leren zelf bepalen hoe goed hun antwoord is. Ze worden probleembewuster, en dat betreft het hele oplossingsproces, van probleemstelling tot eindcontrole. Kortom, ze krijgen een onderzoekende houding.

Waar is dat eigenlijk voor nodig dat de leerlingen een onderzoekende houding hebben, en wat is dat precies?

In de praktijk kom je meestal geen concrete vragen tegen, maar meer of minder duidelijke probleemsituaties. Wiskundeonderwijs kan alleen bruikbare wiskunde opleveren, wanneer het de leerlingen daar op voorbereidt. Het moet op den duur gewoon voor ze zijn dat ze bij het oplossen van een probleem niet meteen de eerste de beste inval volgen. De formulering van het probleem, de tussentijdse en uiteindelijke kwaliteitscontrole, en dergelijke, moeten in hun beleving ook tot hun terrein gaan behoren. Die houding kan niet zonder bijbehorende vaardigheden. Eerst een voorbeeld.

1 Problematiseren, structureren en werkdiscipline

Voorbeeld

Er is een ruit stuk bij Janssen, die moet worden vervangen. Hij meet de lengte en de breedte en haalt een nieuwe ruit bij de glasman. Thuisgekomen blijkt de ruit niet te passen. Janssen is er impliciet van uitgegaan dat de oude ruit rechthoekig was, en dat blijkt anders te zijn. Het raam is een beetje scheef gezakt.

Een onderzoekende houding had deze miskoop kunnen voorkomen. Ik noem drie aspecten van zo'n houding:

- het *problematiseren*; relevante problemen onderkennen en onder woorden brengen,
- het handig *structureren* van de probleemsituatie; dat is nodig om de relevante problemen op het spoor te komen,
- *werkdiscipline*; die is onontbeerlijk bij de oplossing van de opgespoorde problemen.

Problematiseren is niet: altijd maar overal vraagtekens bij zetten, daar schiet je geen steek mee op. Evenmin als overal maar gedachteloos aan voorbij gaan. Op het juiste moment de juiste vraag, daar gaat het om. Problematiseren is een soort intuïtie, resultaat van veel aandacht voor dit aspect van probleem oplossen.

Structureren is aandacht geven aan wat relevant is en verbanden zien. In het voorbeeld is aanvankelijk alleen de máát van de ruit belangrijk; de vorm (echt rechthoekig of niet) krijgt nog geen aandacht. Daarvoor is de wiskundige structuur van de rechthoek nodig, gelijke overstaande zijden en gelijke diagonalen. Je moet die theorie en de praktijk kunnen combineren.

Werkdiscipline is een kwestie van organiseren:

- zorgen voor de tijd en de spullen die nodig zijn,
- concentratie op het onderhavige probleem,
- schatten hoe belangrijk het probleem is,
- tussentijdse en uiteindelijke kwaliteitscontroles,
- ordelijk werken,
- effectief kunnen kiezen tussen alleen of samen werken,
- niet meteen de eerste de beste mogelijkheid die je ziet gaan uitwerken, maar de verschillende mogelijkheden overzien en daaruit kiezen.

Nu noem ik hier allerlei *vaardigheden*, maar dit artikel gaat over een onderzoekende houding; waar het dus eigenlijk om gaat is dat de leerlingen het belang van die vaardigheden ervaren en dat ze die daardoor als vanzelf toepassen.

Hoe leren leerlingen dat?

Het heeft alles te maken met de zelfstandigheid van de leerlingen. 'Mijn leerlingen zijn zo onzelfstandig', hoor ik docenten zeggen. En dat is waar, ten slotte zitten ze niet voor niets op school. Ze komen, behalve voor de gezelligheid, om te leren. Als het goed is worden ze steeds minder afhankelijk van de docenten en maken die zichzelf op den duur overbodig. De zelfstandigheid groeit gaandeweg.

Concreet moet het de leerlingen in de eerste plaats duidelijk worden dat er zoiets als zelfstandigheid in het geding is. *Welke ruimte* krijgen ze, *wat voor veiligheden* zijn daarvoor geregeld en *welke eisen* worden daarbij gesteld?

Als voorbeeld deze opgave uit Grafiekentaal (een leerstofpakketje afkomstig van de SLO):



Teken een grafiekje waarin je kunt (laten) zien hoe jouw afstand tot de grond verandert als je aan het schommelen bent. Hebben jullie in de groep allemaal precies dezelfde grafiek? Of zou dat niet zo hoeven te zijn? Praten jullie daar 's over.

De leerlingen krijgen de vrijheid deze opgave uit te werken. Dat betekent niet de vrijheid al of niet aan de slag te gaan, maar de vrijheid op een eigen manier een uitwerking te geven. De eis is dat er serieus wordt gewerkt.

Er is alle gelegenheid om te problematiseren:

- doe je het beginstuk erbij of begin je pas te tekenen als je al hoog schommelt?
- schets je wat uit de hand of doe je het precies?

- als je hoog schommelt, duurt een schommeling dan langer?
- wordt het een zig-zag-lijn of een golvende, en hoe dan?

Bij al die vragen gebruik je verschillende structuren. De eenvoudigste is: de voortdurende herhaling van hoog en laag in de tijd. Wil je meer, dan moet er beter worden gespecificeerd: hóe hoog en hóe laag, welke tijd, welk verloop tussen hoog en laag? De structuur wordt dan ingewikkelder. Dat bedenkt je niet allemaal ter plaatse. Daarvoor is nodig dat je kunt steunen op allerlei vroeger reeds verworven structuren.

Leerlingen die op zo'n manier aan de opgave werken hebben een behoorlijke werkdiscipline nodig.

De veiligheid voor de leerlingen is dat hun uitwerking serieus wordt genomen naar de mate waarin ze serieus hebben gewerkt. Als de leerlingen klaar zijn met hun individueel of groepswork wordt daar klassikaal op doorgeborduurd. Dan komt er in elk geval een oplossing van het probleem voor de leerlingen die dat niet zelf hebben kunnen vinden. De oplossingen die wel gevonden zijn worden vergeleken en becommentarieerd. Ook de manier van werken wordt onder de loep genomen. Daarbij komen problematiseren, structureren en werkdiscipline aan de orde; dat hoeft natuurlijk niet met die moeilijke woorden erbij.

2 Bespreking van het voorbeeld

Het is van belang dat er opgaven zijn waarmee de leerlingen kunnen oefenen op de drie genoemde punten van een onderzoekende houding. Vaak ontbreekt in opgaven de mogelijkheid van problematiseren omdat de maker van de opgave dat al zelf heeft gedaan.

De docent heeft de mogelijkheid de vrijheid te vergroten of te beperken, door in een klassikale introductie de vraagstelling te verruimen of al een stuk van de oplossing te geven, of door de vraagstelling te wijzigen. Al naar gelang de schatting van wat de leerlingen zelf aankunnen.

De vraag is niet of leerlingen zelfstandig zijn of niet, maar welke verantwoordelijkheid ze wel aan kunnen en welke niet. Dikwijls kunnen leerlingen meer dan de docent vermoedt, als ze maar de ruimte krijgen. De docenten moeten hen die ruimte willen geven; de leerlingen hebben experimenteerruimte nodig om steeds zelfstandiger te kunnen worden. Leerlingen kunnen al heel vroeg begrijpen dat *adeldom verplicht*: meer vrijheid en meer zelfstandigheid verplicht hen tot meer verantwoordelijkheid. Het werk moet dan wel van dien aard zijn dat ze daar verantwoordelijkheid voor willen dragen. Daarvoor is van tijd tot tijd overleg nodig met de klas.

De vrijheid die de leerlingen krijgen gaat als het ware af van de vrijheid van de docent. Dat geeft die docent allerlei onzekerheden: wat zullen ze doen, waar komen ze straks mee aan, leren ze wel genoeg, hoe moet ik straks verder met zoveel hoofden zoveel zinnen? Dat is dikwijls niet eenvoudig. Zo iets leert u als docent al doende; klein beginnen, in gemakkelijke klassen. Niet te veel tegelijk eisen, noch van de klas noch van uzelf.

Veel leerlingen hebben aanvankelijk de houding van klaar is klaar, als de ene opgave af is meteen naar de volgende. Ze zullen moeten ervaren dat u andere eisen stelt, dat het vergelijken van oplossingen voor hen wat oplevert en dat ook terugkijken op de manier van werken erbij hoort.

Zo ziet het 'werkcontract' tussen de docent en de leerlingen er ongeveer uit.

Er zijn drie punten die direct met een onderzoeken-de houding in verband staan:

- structuur-bevorderend leren,
- creativiteit, inventiviteit en intuïtie,
- reflecteren.

3 Structuur-bevorderend leren

Nog nooit heeft iemand wiskunde leren toepassen met alleen een goede werkhouding. Daarvoor moet veel geleerd worden. De leerlingen moeten zich allerlei wiskundige structuren eigen maken om in

probleemsituaties een passende structuur te kunnen kiezen. Er zijn drie categorieën: de weetjes, de standaardoplossingen en de algemene werkwijzen.

De Weetjes

Een degelijke beheersing van *begrippen en regels*. Opgebouwd vanuit de werkelijkheid door de ontwikkeling van globale beelden en de steeds verder gaande schematisering van die beelden.

De Standaardoplossingen

De leerlingen moeten allerlei *wiskundige technieken* trefzeker kunnen toepassen, van te voren kunnen overzien waar dat toe leidt.

Vaardigheden worden pas goed bruikbaar als ze niet geïsoleerd worden geleerd maar vanuit de realiteit worden opgebouwd.

Ook zaken als:

- in een probleem bepalen welke nauwkeurigheid gewenst is,
- het schatten van uitkomsten,
- tussentijdse en uiteindelijke kwaliteitscontroles, behoren standaard te zijn.

De Algemene Werkwijzen

De leerlingen moeten een behoorlijke structuur in hun werk kunnen brengen, een antwoord weten op de vraag: Wat kan ik nog doen als ik niet meer verder kan?

- Een tekening maken,
- het probleem opnieuw bekijken of formuleren,
- zoeken naar een verwant of een deel-probleem dat wel oplosbaar is,
- het probleem even laten rusten,
- overzien wat tot nu toe is gedaan,
- controleren of de gegevens in orde zijn,
- een getallenvoorbeeld bedenken, of extreme of tegenvoorbeelden,
- van achteren naar voren werken,
- enzovoort.

Dus allerlei methoden, werkwijzen, heuristieken kennen en kunnen hanteren die de voortgang van het oplossingsproces bevorderen. Op het juiste moment een handige werkwijze kiezen om verder te gaan; niet in het wilde weg maar eens wat proberen. Je realiseren dat zo'n algemene werkwijze niet gegarandeerd tot de oplossing leidt. Kunnen schatten

welke weg een redelijke kans biedt. Niet te lang doorgaan op een eenmaal gekozen weg en ook niet te gauw veranderen.

Dit is een onderdeel dat vrijwel nooit in de leerboeken wordt genoemd en dat van u dus veel aandacht vraagt.

4 Creativiteit

Creativiteit, intuïtie en inventiviteit spelen in de wiskunde een grote rol. Het is daarbij erg moeilijk die drie te onderscheiden, daarom houd ik ze maar als drietal bij elkaar en spreek ik over creativiteit.

Het gaat niet om het vermogen om *nieuwe* ideeën te krijgen op het moment dat je ze nodig hebt. Daarvoor moeten de leerlingen gebruik leren maken van hun associaties. Niet elke inval is briljant, maar veel mensen laten gekke invallen te weinig toe; wat aanvankelijk gek lijkt kan later heel goed bruikbaar blijken. Hoe kun je leerlingen leren op een handige manier met hun associaties om te gaan?

Het belangrijkste is uw houding ten opzichte van de inbreng van de leerlingen. Neem die serieus, ook al is die anders dan u had gewild of gedacht. Niet meteen vervangen door uw eigen visie of formulering, niet meteen verbeteren of afkeuren, want daarmee bereikt u dat de leerlingen al snel overschakelen van *associatief creatief leren* naar *passief risico-vermijdend leren*. De inbreng van een leerling heeft niet altijd voorrang, laat echter wel merken dat u hem niet vergeet en dat die inbreng van invloed is op het vervolg. Vragen serieus nemen betekent niet dat u altijd de antwoorden geeft; die kunnen ook wel van andere leerlingen komen, of zelfs van de vragensteller zelf.

Het is in het algemeen van belang dat leerlingen vaak 'bedenk-eens-opdrachten' krijgen:

- bedenk nog een andere manier van oplossen voor dit probleem,
- bedenk mini-verhaaltjes bij deze grafiek, bij deze rekensom,
- bedenk zelf een opgave bij deze paragraaf,
- bedenk een manier om dit antwoord te controleren,
- bedenk zoveel mogelijk wegen om van school naar huis te gaan.



Ook *metterdaad* normen doorbreken, op zijn tijd. Ik bedoel niet normloos gedrag bevorderen, maar door de uitzondering de regel bevestigen:

- een leerling voor het bord die iets uitlegt of vragen beantwoordt en u op de plaats van die leerling,
- een proefwerk samenstellen uit door leerlingen geproduceerde opgaven,
- wanneer leerlingen moeten leren in groepjes te werken kunt u ze laten 'oefenen' in slecht samenwerken; als u dat na afloop met hen bespreekt, zal blijken dat ze daar zeer inventief in zijn, en dat leert ze veel over goed samenwerken.

Het is van belang dat u het na afloop dit soort opdrachten met de leerlingen bespreekt. Het lijkt gek misschien, maar kennis nemen van voorbeelden bevordert de creativiteit. Leerlingen die dicht bij een grens zitten, zien hoe andere leerlingen over die grens gaan en doen daardoor ideeën op voor een eigen poging.

De algemene lijn is dus:

- *afkijken bij en nadoen van anderen,*
- *zelf iets nieuws proberen,*
- *die eigen poging bespreken of overdenken.*

Voor lbo-leerlingen is een en ander vaak moeilijker dan voor vwo-leerlingen. Dat heeft te maken met cultuurverschillen tussen de verschillende sociale milieus; ook intelligentie speelt een rol, het gaat vaak om fijne nuanceringen. Een lbo-leerling voelt zich bijvoorbeeld niet aangesproken door de vraag: Wat wordt de temperatuur als het bij -3°C nog -5° kouder wordt? Voor veel vwo-leerlingen is dat een aardig puzzeltje. Maar bovenal is de *schoolgeschiedenis* van de lbo-leerlingen van invloed; ze hebben al vroeg geleerd dat ze niet veel in te brengen hadden. Het is de kunst dat nu te doorbreken. Lbo-leerlingen zijn even creatief als vwo-leerlingen. Voor de ontwikkeling van die creativiteit zijn opdrachten nodig die passen bij hun stijl en niveau.

5 Reflecteren

Bij reflecteren gaat het erom dat de leerlingen aan het denken gezet worden over wat ze hebben gedaan:

- wat heb je gedaan,
- was het resultaat in orde,
- kun je dat uitleggen, tekenen, opschrijven,
- waarom denk je dat,
- hoe kwam je daar zo op?

Bij het onder woorden brengen wordt het de leerlingen duidelijker wat ze precies gedaan hebben, hoe ze gedacht hebben, en hoe ze het achteraf kunnen verantwoorden en controleren.

Reflecteren gebeurt niet alleen achteraf maar ook van te voren, bij het plannen maken:

- hoe denk je dit aan te gaan pakken,
- waarom denk je dat dat een goede aanpak zal zijn,
- hoe ben je op dat idee gekomen,
- snap jij wat zij bedoelt en kun je mij dat uitleggen,
- waar verwacht je problemen en heb je daar al een oplossing voor?

Zelfs tijdens het werk is een moment van reflectie vaak niet overbodig:

- klopt het wat je aan het doen bent,
- kan deze tussenuitkomst kloppen,
- zit je je niet teveel vast te bijten op één manier van werken,
- wat heb je tot nu toe gedaan en wat heb je daarmee bereikt,
- wat is er nog meer aan de hand?

Een docent kan natuurlijk niet alle leerlingen voortdurend met deze vragen blijven achtervolgen. De leerlingen zullen ze zich ook eigen moeten maken, en ze aan zichzelf en aan elkaar gaan stellen. Bij individuele hulp en bij klassikaal werken heeft u echter alle gelegenheid om de leerlingen op dit punt te activeren.

De voorbeeldvragen hierboven zijn allemaal direct gericht op het wiskundewerk. Sommige docenten vragen verder:

- denk je dat je het kunt,
- vond je het lastig, leuk, saai, . . . ,
- welke oplossing vind jij het prettigst,
- waar zou je hulp bij willen hebben, van wie,
- dit is een prestatie waar je trots op kunt wezen,
- had je er niet op gerekend dat het fout zou kunnen zijn?

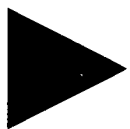
Anderen vinden dat te soft.

Als de leerlingen samenwerken loont het natuurlijk de moeite, die samenwerking onder de loep te nemen, met een groepje of klassikaal:

- hoe ging het samenwerken,
- hebben ze naar je ideeën geluisterd,
- heb jij naar de ideeën van de anderen geluisterd,
- snapte iedereen wat de bedoeling was,
- hoe vonden jullie deze oplossing,
- waren er ook andere oplossingen in jullie groep,
- kan iedereen deze oplossing uitleggen,
- hoe ging het opschrijven?

6 Slot

Een onderzoekende houding kun je niet uit een boek leren. De meeste leerlingen hebben daar de docent hard bij nodig. Hopelijk vindt u daarbij steun uit deze bijdrage.



Boekbespreking

Horst Struve: Grundlagen einer Geometriedidaktik, Mannheim; Wien; Zürich: BI Wiss-Verl. 1990, ISBN 3-411-14631-1.

Het boek is uitgegeven als band 17 in de serie van leerboeken en monografieën over de didactiek van de wiskunde.

Veel tekst voor je geld: 272 pagina's kleine letter.
De opbouw van het boek is origineel.

Hoofdstuk 1 gaat over een Duitse wiskundemethode – Gamma – en daarvan het begin van de meetkunde, voor tien- tot veertienjarigen (Sekundarstufe eins). In Gamma is gekozen voor een empirische aanpak van de meetkunde. Voor Nederlandse begrippen is het nogal vanzelfsprekend dat je niet kunt beginnen met de axioma's van Euclides. Struve heeft nogal wat tekst nodig om dat recht te breien. De auteurs van Gamma ge-

bruiken vouwlijnen en langs deze weg wordt de meetkunde toch netjes opgebouwd. Steeds terugkerend thema is het verschil tussen de rechte lijn als oneindig lange rechte of rechte lijn die je indien nodig kunt verlengen. In Gamma gaat het naar wens met de tweede opvatting.

Hoofdstuk 2 geeft een historisch overzicht van de ontwikkeling van de meetkunde, vanaf Euclides tot nu. Twintig eeuwen op 130 pagina's. Het eindigt met een commentaar op de 'schildpadmeetkunde' met LOGO. Struve maakt een inleiding in 'tastmeetkunde' en 'zienkunde'. De Grieken bedreven de eerste soort. Pas bij de projectieve meetkunde komt de zienmeetkunde in beeld. Als indeling naar meetkundige aspecten vind ik tast- en zienmeetkunde heel bruikbaar. De strakke historische indeling komt me voor als een onhoudbaar standpunt.

Heel interessant vond ik beschouwingen over discussies eind vorige eeuw over meetkunde in het onderwijs. Op school moest je al praten over het oneindig verre punt van een rechte lijn met het voordeel dat je formuleringen dan mooi sluitend kon krijgen. Vinnige discussies over spoorrails die al of niet een goed voorbeeld kunnen zijn van een oneindig ver punt. In de beschrijvingen van de ontwikkeling van de meetkunde wordt steeds de vraagstelling van hoofdstuk 1 meegenomen.

Hoofdstuk 3 is een theoretische onderbouwing van de meetkunde van Gamma. Struve noemt dat 'empirische Tast-Geometrie'. Het is een verantwoording van de meetkunde van het leerboek. Je kunt een theorie maken waarbij de empirische Tast-Geometrie steunt op een axiomastelsel. Dit kun je uitbouwen naar de analytische meetkunde en de projectieve meetkunde. Deze theoretische fundering is niet bedoeld voor de leerling. Dit soort van filosofische beschouwingen is (ook) wiskundendidactiek.

Opmerkingen:

Ik heb 'Sehgeometrie' niet vertaald met 'kijkmeetkunde'. Het woord 'kijkmeetkunde' dat in het nieuwe programma van W 12-16 voorkomt, gaat over de meetkunde van het kijken in veel ruimere zin; het kijken is daarin een domein van ervaringen dicht bij jezelf die aanleiding zijn tot wiskundig denken. De keuze van de representatie van de ruimte leidt hier niet tot typen van meetkunde, maar van de zin in een specifiek geval, soms perspectief tekenen, soms een uitslag maken, dan weer een handig gekozen doorsnede of alleen maar een sterk vereenvoudigd schetsje van een aanzicht.

Ik kan de neiging moeilijk onderdrukken om te spotten met de mijns inziens zwaarwichtige filosofische beschouwingen als verantwoording van de wiskundige opbouw van tamelijk traditioneel aanvankelijk meetkundeonderwijs.

De Nederlandse vakdidactici die doorgaans ook lerarenopleider zijn behandelen vakdidactiek veelal vanuit observaties van wat leerlingen doen bij wiskunde. De gewetensvraag die ze studenten meegeven luidt: *Doen* deze leerlingen hier wiskunde? Struve stelt hoofdzakelijk de vraag: *Is* het goede wiskunde vanuit een universitair standpunt? Een uitwisseling van opvattingen kan geen kwaad.

George Schoemaker

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

De pentomino-puzzel is in de smaak gevallen, getuige de vele oplossingen. Velen hebben de letters netjes ingekleurd: ieder stukje een eigen kleur! Onderaan vindt u één van de vele oplossingen.

Een aantal handmatige oplosers had veel moeite met de letter E. Naamgenoot *Jan de Geus* (17), Warnsveld schreef: 'Van de E kon ik geen tweede oplossing vinden. Sorry'. De reden is duidelijk als je de volgende tabel bestudeert:

Letter	Aantal oplossingen
E	1
U	34
C	15
L	442
I	254
D	6
S	4

Zoals gebruikelijk zijn draaiingen of spiegelingen van de figuur niet meegeteld.

M'n complimenten gaan naar *Marjolein van Leeuwen* en *Wendy Sonneveld* van het Sint Maartenscollege in Voorburg. Deze gymnasium-3 leerlingen sleepten voor hun wiskundeleraar de 7 ladderpunten in de wacht!

Voor de liefhebbers van deze puzzelsoort kan ik nog het boekje 'Pentominoes' van Jon Millington aanbevelen (1987, Tarquin Publications). Deze uitgave is nog steeds te koop.

Onder de 2 koplopers met 44 punten heb ik geloot. Als winnares van de boekenbon van f25,- kwam te voorschijn:

Wil Huijben-van de Berg
Wezeboom 2
3755 WT Eemnes

Hartelijk gefeliciteerd en veel succes met de nieuwe ladderbeklimming.

► Opgave 643

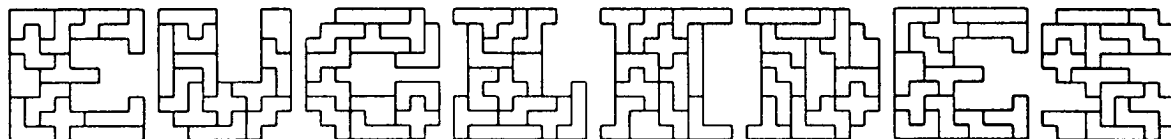
In februari 1961 verscheen het eerste nummer van het tijdschrift 'Recreational Mathematics Magazine'. Uitgever en redacteur was Joseph S. Madachy. Al vanaf het eerste nummer werden er alphametics gepubliceerd. De naam was bedacht door J. A. H. Hunter en was bedoeld voor puzzels waarbij de cijfers door letters waren vervangen en de letters zinvolle woorden vormden. In jan.-febr. 1964 verscheen het laatste exemplaar van R.M.M. Slechts 14 afleveringen waren er verschenen.

De puzzelwereld reageerde enthousiast toen hij het in januari 1968 opnieuw probeerde: 'Journal of Recreational Mathematics' was geboren. Nu, 25 jaar later, nog steeds onder de hoede van Joseph S. Madachy. Fantastisch!

Als opgave deze maand één van de laatst verschenen alphametics uit J.R.M.
Vervang dezelfde letters door hetzelfde cijfer en verschillende letters door verschillende cijfers. De 0 en de 1 mogen opnieuw gebruikt worden.
Zoals gebruikelijk is de opgave in het tientallig stelsel.

$$(\text{SINE})(\text{COSECANT}) - (\text{COSINE})(\text{SECANT}) = 10000000000$$

Een goede oplossing, binnen een maand ingestuurd, levert 5 punten voor de doorlopende ladderwedstrijd op.





► Van de bestuurstafel

Agneta Aukema-Schepel

Advies aan de Staatssecretaris

Aan dit advies is zeer veel vooraf gegaan, waarvan u op pagina 94 en 95 (nr. 3 van deze jaargang) een weerslag hebt kunnen lezen. Na uitgebreid overleg, wikken en wegen over de tekst, heeft het bestuur uiteindelijk in december 1992 de volgende brief aan de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen gezonden.

Excellentie,

Met Uw brief van 2 oktober 1992, kenmerk VO/BOB-92062502, zond U de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een concept-Examenprogramma mavo/lbo C/D wiskunde toe met het verzoek hierop te reageren.

Door middel van regionale bijeenkomsten en werkgroepen heeft het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren de afgelopen jaren aan de leden gelegenheid geboden om hun mening te geven over het nieuwe examenprogramma C/D en de nieuwe leerplannen wiskunde zoals die door de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW) zijn voorgesteld. Aan de vertegenwoordigers van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren in de COW zijn de suggesties van de leden

doorgegeven en bovendien heeft het bestuur in januari 1992 een voorlopig advies over het concept-examenprogramma aan de COW gezonden. Dit heeft geleid tot diverse bijstellingen van de voorlopige versies van het ontwikkelde examenprogramma en de bijbehorende leerplannen. Na deze bijstellingen staat het bestuur positief tegenover de voorstellen van de COW.

Het bestuur adviseert U derhalve te bevorderen dat vanaf het leerjaar 1996/1997 de examens mavo/vbo C/D volgens het door de COW voorgestelde examenprogramma worden afgenomen.

Daar de veranderingen in leerplan en examenprogramma voor veel docenten zeer ingrijpend zijn en er grote behoefte bestaat aan zekerheid over het leerplan waarmee per 1 augustus 1993 gestart moet worden, **verzoekt het bestuur U te bevorderen dat Uw beslissing ruim voor 1 augustus bekend wordt.**

Ondanks het positieve advies heeft het bestuur een aantal wensen die het van wezenlijk belang acht voor het welslagen van de COW-voorstellen. Het betreft: evaluatie van het programma, de adviezen van de COW, de nomenclatuur, het wiskundewerklokaal, de opleiding en de nascholing, meisjes en wiskunde, het voortgezet algemeen volwassenenonderwijs, doublerende leerlingen en de leerplannen wiskunde voor vbo-mavo en de onderbouw van vwo en havo.

Daarom voegt het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren aan zijn advies nog het volgende toe:

1. *Examenprogramma mavo/vbo C/D*

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft bij het Instituut voor Onderzoek van het Onderwijs SVO een aanvraag ingediend voor:

- evaluatie van de experimentele examens mavo/vbo C/D wiskunde,
- nader onderzoek aangaande de diepgang en de uitgebreidheid van deze examens en de verschillen tussen C- en D-niveau,
- nader onderzoek aangaande de doorstroming naar de bovenbouw van het havo en naar verschillende vormen van mbo door leerlingen die volgens het voorgestelde nieuwe programma examen doen.

●

Het bestuur verzoekt U deze aanvraag te ondersteunen en indien dit onderzoek aanleiding geeft tot het aanbrengen van wijzigingen in het voorgestelde examenprogramma er voor zorg te dragen dat deze wijzigingen doorgevoerd worden.

2. Aanbevelingen van de COW

Het bestuur onderschrijft de aanbevelingen van de COW, zoals die in het eindrapport en in de inleiding op het examenprogramma mavo/vbo C/D worden gedaan.

Speciaal benadrukt het bestuur dat examinering door middel van meerkeuzetoetsen afbreuk doet aan de didactische overwegingen die ten grondslag liggen aan de nieuwe programma's.

Ditzelfde geldt ook voor de toetsing van de kern-doelen wiskunde basisvorming die op hetzelfde didactische concept berusten.

3. Nomenclatuur

Evenals in 1968 bij de veranderingen in het kader van de mammoetwet heeft de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een commissie ingesteld die zich beraadt op de nomenclatuur behorende bij de nieuwe programma's. Tevens dient deze commissie te onderzoeken hoe, in aansluiting hierop, de nomenclatuur van havo en vwo wiskunde A en B aangepast moet worden. Elk voltooid deel van dit nieuwe nomenclatuurrapport zal het bestuur ter vaststelling voorleggen aan de CEVO. Het blijkt echter praktisch ondoenlijk om deze voor het wel-slagen van de nieuwe programma's zo noodzakelijke eenheid van nomenclatuur gerealiseerd te krijgen zonder faciliteiten ten aanzien van werktijd en secretariële ondersteuning.

Daarom verzoekt het bestuur U aan de vereniging faciliteiten te verlenen voor het opstellen en bijhouden van een nomenclatuurrapport.

4. Wiskundewerklokaal

Aangezien voor een goede uitvoering van het nieuwe examenprogramma en de hiermee verbonden

leerplannen veel meer materialen en gereedschappen in de klas gebruikt dienen te worden dan vroeger, **adviseert het bestuur om de schoolbesturen te verzoeken budgettaire ruimte beschikbaar te stellen voor wiskundewerklokalen, zoals dat ook gebeurt voor natuur- en scheikundepracticumlokalen.**

5. Opleiding en nascholing

De voorstellen van de COW bieden volkomen nieuwe leerplannen en C/D examenprogramma's. De docenten wiskunde voor 12-16-jarigen hebben tot nu toe gewerkt met formele wiskunde, zowel tijdens hun opleiding als in de lessen die zij geven. Nu wordt van hen gevraagd met realistische contexten om te gaan en zelf geschikte contextopgaven samen te stellen. Hiertoe zijn zij totaal niet opgeleid. Het verantwoord voorbereiden op dergelijke veranderingen kost een docent zeer veel tijd. Het geven van voorlichting over basisvorming gedurende één dag aan een geheel schoolteam, zoals nu soms blijkt te gebeuren, is voor wiskunde beslist onvoldoende.

Daarom vraagt het bestuur U er bij de schoolbesturen op aan te dringen dat alle wiskundedocenten de gelegenheid krijgen een gedegen nascholing te volgen.

6. Meisjes en wiskunde

Een belangrijke nevenopdracht bij het ontwikkelen van het nieuwe programma was nadrukkelijk rekening te houden met de meisjes binnen het wiskundeonderwijs. In het COW-rapport wordt hierover helaas niets gezegd.

In de periode augustus 1987 tot augustus 1992 waren 7 van de 20 medewerkers in het team W12-16 vrouwen. Ook bij het ontwikkelen en vaststellen door de CEVO van de experimentele examens voor de proefscholen is steeds een vrouw betrokken geweest. Het bestuur meent dat voldoende vrouwelijke inbreng, ook in de toekomst, een noodzakelijke voorwaarde is om meisjes meer kans op succes in het wiskundeonderwijs te bieden.

Het bestuur verzoekt u daarom er zorg voor te dragen dat in de toekomst voor wiskunde, zowel in de ACD als in de vaksectie van de CEVO en tevens bij het vervaardigen en screenen van toetsopgaven voor de basisvorming, ook vrouwen worden betrokken.

Uit de voorstellen van de COW alleen, wordt niet duidelijk – en kan dat ook niet worden – op welke wijze er aandacht is besteed aan de opdracht tot verbetering van de deelname en de prestaties van meisjes.

Bij deze complexe materie is niet alleen de leerstof van belang maar zeker ook de keuze van contexten en werkvormen evenals de wijze van toetsen. Kennis hierover zal onder meer via nascholing aan het veld moeten worden doorgegeven. Helaas is hierover nog heel weinig bekend. In het kader van het project ‘Wiskunde en emancipatie’ is materiaal ontwikkeld voor opleiding en nascholing, maar kennis over het effect en resultaat hiervan ontbreekt vooralsnog.

Het is voor een goede kwaliteit van het onderwijs van groot belang dat die kennis vergaard en doorgegeven wordt.

Daarom vraagt het bestuur naar

- een onderzoek naar de rol van taal in het aanbieden en leren van contextrijke wiskunde bij meisjes en bij jongens,
 - een onderzoek naar eventuele prestatieverschillen tussen meisjes en jongens afhankelijk van de aangeboden soorten contexten,
 - een longitudinaal onderzoek naar de (achtergronden van de) verschillende prestaties van meisjes en jongens bij wiskunde,
- en vervolgens naar implementatie van de resultaten van deze onderzoeken.

7. Voortgezet Algemeen Volwassenen Onderwijs

In het Voortgezet Algemeen Volwassenen Onderwijs kunnen onderdelen van het nieuwe C/D-examenprogramma gebruikt worden in zogenaamde schakelende cursussen. **Het bestuur verzoekt U na te laten gaan hoe en in hoeverre deze onderdelen afgesloten kunnen worden met landelijk erkende certificaten.** Hierbij kan bedacht worden dat de leerstoflijnen rekenen, algebra en informatieverwerking en statistiek een schakelcursus kunnen vormen naar havo wiskunde A.

8. Doublerende leerlingen

Bij de veranderingen van de examenprogramma's havo en vwo is gebleken dat het niet mogelijk is om

voor het examen gezakte leerlingen die volgens het oude programma opnieuw examen willen doen, goed op te leiden in één klas met leerlingen die volgens een nieuw programma examen doen. In dit geval, met een totaal ander programma en met vbo- en mavo-leerlingen die minder zelfstandig kunnen werken dan havo-leerlingen, zal opleiden in één klas echt ondoenlijk zijn.

Het nieuwe programma zal, zeker het eerste jaar, reeds een enorme taakverzwaring voor de docenten meebrengen. Hierdoor zal het voor hen ondoenlijk zijn om in hun vrije tijd, zoals veelal bij de havo diende te gebeuren, de doublerende leerlingen op te leiden.

Daarom adviseert het bestuur U om aan de scholen faciliteiten te geven voor het apart opleiden van de doublerende leerlingen.

9. Leerplannen wiskunde voor vbo-B en voor onderbouw havo en vwo

In Uw brief vraagt U alleen advies over het examenprogramma mavo/vbo C/D. Zowel de basisvorming als de doorstroming van leerlingen enerzijds van mavo naar havo en vwo en anderzijds van (i)vbo-B naar (i)vbo-C eisen echter ook een aanpassing zowel van de onderbouwprogramma's voor havo en vwo als van de programma's voor vbo en ivbo.

De voorstellen van de COW in het ‘Trajectenboek’ zorgen er voor dat de doorstroming gewaarborgd blijft en bieden tevens de mogelijkheid tot onderwijs dat recht doet aan de capaciteiten van de betreffende leerlingen. Slechts als deze mogelijkheden ten volle benut worden, is enerzijds de onderbouw van havo en vwo een verantwoorde voorbereiding op zodanig onderwijs in de bovenbouw dat de eindexamenniveaus vwo en havo gehandhaafd kunnen blijven en is anderzijds de profielverbetering na (i)vbo-B naar (i)vbo-C gewaarborgd.

Namens de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren,

(dr. J. van Lint)
voorzitter

(drs. J. W. Maassen)
secretaris

► Regionale voorjaars- bijeenkomsten 1993

In de tweede helft van maart organiseert de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren regionale bijeenkomsten te Amsterdam (**18 maart**), Eindhoven (**24 maart**) en Zwolle (**23 maart**) van 16.00-20.00 uur voor docenten wiskunde in het gehele voortgezet onderwijs, het middelbaar en hoger beroepsonderwijs. Voor een eenvoudige maaltijd wordt gezorgd.

Hoewel nog niet alles vast ligt, kan nu reeds gezegd worden dat er werkgroepen zullen zijn voor:

- voortgezet rekenen;
- havo schoolonderzoeken en examens (o.a. ruilmarkt);
- computeralgebra;
- grafische rekenmachines als TI 81 en TI 85;
- kiezen (g)een probleem? (over verschillen tussen meisjes en jongens bij het al dan niet kiezen van wiskunde A/B; organisatie: werkgroep Vrouwen en Wiskunde);
- de deficiëntietoets wiskunde in het hbo.

Er is gelegenheid om aan twee werkgroepen per bijeenkomst deel te nemen.

Alle scholen en instituten krijgen nog nader bericht over de plaats, tijd en wijze van aanmelding.

Leden van de vereniging kunnen vanaf nu informatie inwinnen bij de ledenadministratie tel. 076-65 32 18, fax 076-65 32 18.

● 40 jaar geleden ● ●

► Vraagstukken

3508. Gegeven is een kegelsnede k en een veranderlijke rechte l die door een vast niet op k gelegen punt O gaat.

a. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt van l met de loodlijn uit de pool van l t.o. van k op l neergelaten.

b. Toon aan, dat deze meetkundige plaats door O gaat en bepaal de raaklijn in O .

c. Toon aan, dat deze meetkundige plaats dezelfde is voor alle met k confocale kegelsneden.

3509. Van de boldriehoek ABC is elke zijde 90° . Bewijs, dat voor elke ligging van het punt P op de bol geldt:

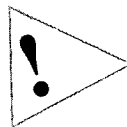
$$a. \cos PA \cos PB \cos PC + \cotg BPC \cotg CPA \cotg APB = 0;$$

$$b. \tg ABP \tg BCP \tg CAP = 1;$$

$$c. (\cos PA + \cos PB + \cos PC)^2 = 3 \cos^2 PI.$$

Hierin is I een der polen van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Vraagstukken uit Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 40 (1952-1953).



Kalender

12 maart 1993: eerste ronde Wiskunde Olympiade op de scholen voor havo en vwo.

24 maart 1993: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

14 april 1993: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

15 en 16 april 1993: Amsterdam, Nederlands Mathematisch Congres. Zie blz. 169.

24 april 1993: Utrecht, Studiedag van de werkgroepen Vrouwen en Wiskunde en Vrouwen en Natuurwetenschappen.

17 september 1993: tweede ronde Wiskunde Olympiade in de Technische Universiteit te Eindhoven.

Adressen van auteurs

A. Aukema-Schepel, Buitenplaats 77, 8212 AC Lelystad

M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam

A. Lagerwerf, Dwarsweg 52, 3702 XC Zeist

V. E. Schmidt, Verlengde Grachtstraat 43, 9717 GE Groningen

T. Vandeberg, Mr. Absilstraat 11, 6461 EX Kerkrade

G. Zwaneveld, Bieslanderweg 18, 6213 AJ Maastricht

Inhoud

Inhoud 161

Bert Zwaneveld, Martinus van Hoorn:

Van Lyon tot Québec 162

Interview met Agneta Aukema 163

Interview met Willem van Gaans 164

Interview met Joop van Dormolen 166

Interview met Henk Schuring 167

Interview met Victor Schmidt 168

Mededelingen 169, 180

Bert Zwaneveld en Martinus van Hoorn:

Wiskundige machines en instrumenten 170

Victor Schmidt: Nolan en computers in het onderwijs 172

Vreemde woorden in de wiskunde 174

Martinus van Hoorn: Over de toekomst van de integraalrekening op school 175

Verschenen 175

Werkbladen 176

Martinus van Hoorn: De NCTM 178

Martinus van Hoorn: Het wiskunde-onderwijs in Italië 179

Ton Vandeberg: Waarom een leerling soms iets snapt, maar het niet begrijpt 181

Boekbesprekingen 182, 187

Bram Lagerwerf: Een onderzoekende houding 182

Recreatie 188

Agneta Aukema-Schepel: Van de bestuurstafel 189

Regionale voorjaarsbijeenkomsten 1993 192

40 jaar geleden 192

Adressen van auteurs 192

Kalender 192