

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Vakblad voor de wiskundeleraar

Euclides

816
357
492

jaargang 68 1992 | 1993 december

Redactie

Drs. H. Bakker
Drs. R. Bosch
Drs. J. H. de Geus
Drs. M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
J. Koekkoek
N. T. Lakeman (beeldredacteur)
D. Prins (secretaris)
W. Schaafsma
Ir. V. E. Schmidt (penningmeester)
Mw. Y. Schuringa-Schogt (eindredacteur)
Mw. Drs. A. Verweij
A. van der Wal
Drs. G. Zwaneveld (voorzitter)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,
8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43,
4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v.
Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f55,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f37,50; contributie zonder Euclides f30,00. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

ISSN 01.65-0394

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drielijnd ingewacht bij drs. M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
 - regelafstand van 2
 - 48 regels per kolom
 - maximaal 47 aanslagen per regel
- en liefst voorzien te zijn van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
 - aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
 - waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f60,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f39,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers f10,00 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUI' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

● Inhoud ● ● ● ● ●

Actualiteit 98

H.J.Smid *W12-16 en de Bovenbouw*

Het nieuwe W12-16-programma maakt aanpassingen in het huidige bovenbouwprogramma noodzakelijk. En krijgt de potentiële vwo-leerling niet te weinig wiskunde aangeboden in het nieuwe onderbouwprogramma?

Vreemde woorden in de wiskunde 100

Serie 'Begrijpen' 101

Piet van Wingerden *Toetsen, proefwerken en repetities*

Toetsen in verschillende vormen zijn belangrijk in het wiskundeonderwijs, maar mogen geen doel op zich worden.

Mededelingen 101, 111, 127

Bijdragen 102

K. van Berkel *E.J. Dijksterhuis en het onderwijs in de wiskunde* 102

Over een beroemd wiskundige en wetenschapshistoricus, en over zijn ideeën over wiskundeonderwijs gaat dit artikel.

J.W. van der Vaart *De Nederlandse Wiskunde Olympiade 1992 (eerste ronde)* 110

De drie eerste opgaven met oplossingen.

M.C. van Hoorn *Zuid-Afrika en Polen* 111

De opgaven op de werkbladen zijn uit verre landen afkomstig, met een omweg via Canada.

Werkbladen 112

Boekbeschuwing 114

Jan van Maanen *Vredenduin over positief en negatief*

In dit boek kunnen we een ontdekkingsreis door een periode in de geschiedenis van de wiskunde meemaken.

40 jaar geleden 117

Serie 'Ontwikkelingen in de didactiek' 118

Bram Lagerwerf *Leren en Helpen Leren (I)*

Voorbeelden van de leertheorie achter de veranderingen die het nieuwe onderbouwleerplan met zich meebrengt.

Recreatie 123

Boekbeschuwing 124

M.C. van Hoorn *De Epsilon Uitgaven*

Bespreking van een aantal boeken in de Epsilon-reeks.

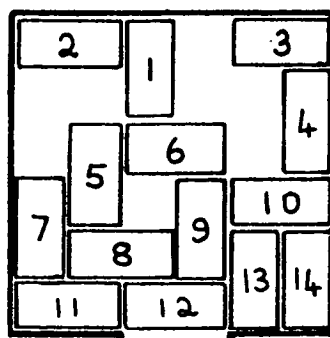
Verenigingsnieuws 126

Agneta Aukema-Schepel *Van de bestuurstafel W12-16 in het volwassenenonderwijs.*

Boekbespreking 128

Adressen van auteurs 128

Kalender 128



Puzzel met blokken.

► W12-16 en de Bovenbouw*)

H. J. Smid

De problematiek van het nieuwe W12-16-programma versus het huidige of een eventueel vernieuwd bovenbouwprogramma laat zich op een aantal manieren benaderen.

Een mogelijke manier is een nauwkeurige vergelijking van het huidige en het nieuwe onderbouwprogramma, en de huidige bovenbouwprogramma's, om op die manier na te gaan of de voorstellen beter of slechter aansluiten bij de huidige bovenbouwprogramma's, op welke terreinen dat het geval is, en na te gaan welke aanpassingen in de bovenbouwprogramma's noodzakelijk of gewenst zijn. Hoewel dat ongetwijfeld nuttig werk zou zijn, wil ik dat niet doen. Ik heb daar geen tijd voor, geen zin in, en ik vind zo iets nu niet geschikt. Ik wil het probleem meer principieel benaderen. Om dat te doen wil ik eerst nog eens duidelijk maken wat ik als principieel probleem zie in het onderwijs voor 12-16-jarigen.

Dit onderwijs zit ingeklemd tussen het basisonderwijs, dat in principe voor iedere leerling gelijk zou moeten zijn, en de bovenbouw van het secundair onderwijs, dat sterk divers is en rekening moet houden met heel verschillende vervolgopleidingen. Dat stelt de onderbouw voor een keus: richten wij ons programma in langs horizontale lijnen, waarbij we

proberen zo veel mogelijk voor ieder een gelijk programma te bieden, of werken we langs verticale lijnen, waarbij we in de onderbouw vooruitlopen op verschillende wensen uit bovenbouw en vervolgonderwijs?

In het verleden is die keus in sterke mate verticaal geweest. Dat heeft natuurlijk gevolgen gehad: heel wat leerlingen hebben enige jaren wiskundeonderwijs 'genoten' waar ze niets aan hadden en dat ze later zo gauw mogelijk vergaten.

Toch was er wel een motivatie: wiskunde was niet alleen voor sommigen nuttig, maar een paar jaar wiskundeonderwijs had voor ieder 'vormende waarde': je leerde er van denken. Deze gedachte is in de wereld van de wiskundendidactiek verdwenen, maar daarbuiten zeker niet. Ik betwijfel wel eens of wiskunde zijn prominente positie zou behouden als echt niemand meer in die vormende waarde zou geloven...

De eerste principiële breuk met het verleden is nu dat deze keuze anders is. In de termen van het Trajectenboek: 'Wij hebben gekozen voor een goed havo-vwo-programma dat de nodige samenhang vertoont met andere trajecten... Om een consistent onderbouwprogramma te kunnen maken is het niet te vermijden dat er verschuivingen optreden in de leerstof voor de bovenbouw havo en vwo.'

Over die verschuivingen worden verder – geheel consequent – geen uitspraken gedaan. Onvriendelijk gezegd: dat is hun probleem niet.

Er is in dit opzicht dus een fundamentele breuk met het verleden. In samenhang daarmee is er ook een fundamentele breuk wat betreft de inhoud van het wiskundeonderwijs. Ik wil dat toelichten aan een tweetal voorbeelden.

In 1971 verscheen de 2e druk van Wansink's 'Didactische Oriëntatie'. Voor alle duidelijkheid: Wansink was zeker geen man met extreme opvattingen over het wiskundeonderwijs, zoals bijvoorbeeld Dijksterhuis en Beth. Toch lijkt het wel, als je nog eens in dat boek leest, alsof je, vergeleken met wat nu opgeld doet, in een andere wereld binnentreedt.

Het eerste voorbeeld: Wansink besteedt uitvoerig aandacht aan het probleem van de invoering van de irrationale getallen, en hoe je de bewerkingen en rekenregels daarmee moet funderen. Bijvoorbeeld:

wat is twee tot de macht wortel twee? En waarom mag je bij vermenigvuldigen ook irrationale exponenten optellen? Dat hierbij ernstige didactische problemen optreden wordt door Wansink niet ontkend. Ook vindt hij niet dat je dit alles in zijn volle scherpte moet bewijzen. Maar niettemin: hier liggen ernstige wiskundige kwesties, en serieus wiskunde-onderwijs kan daar niet om heen. De taak van de didactiek is het om hiervoor oplossingen te vinden, niet om dit alles onder tafel te schuiven.

Van dit alles is niets meer terug te vinden. Wie het Trajectenboek napluist, vindt bij Pythagoras iets over wortelgetallen, en, uitsluitend, havo/vwo moet de vereenvoudiging $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ kunnen uitvoeren.

Een ander voorbeeld, nu uit de bovenbouw. Van Dormolen wijdt in Wansink's boek een heel hoofdstuk aan problemen uit de analyse, met name kwesties rond limieten, oneindigheid en continuïteit. Fundamentele begrippen uit de analyse, en ook moeilijke begrippen: niet voor niets is er in het verleden lang over gearzeld of analyse wel geschikt is voor het voortgezet onderwijs. Ook hier is de opvatting dat deze problematiek niet ontlopen mag worden, ook niet voor het havo. Niet alles hoeft in volle scherpte behandeld te worden, en natuurlijk liggen er problemen, maar die zijn er om opgelost te worden, niet om verzwegen te worden.

Lezen we nu de toelichting bij het nieuwe havo-B-programma (voor een meer selecte groep dan het oude havo-programma!), dan vinden we: 'theoretische (!) begrippen als limiet, continuïteit en differentieerbaarheid hoeven niet expliciet te worden behandeld.' In de praktijk betekent dat natuurlijk dat ze gewoon niet meer worden behandeld.

Om het eens ironisch te zeggen: het probleem van de exponentiële functie wordt opgelost door heer Bommel en het kroos, en het probleem van de differentieerbaarheid door een skiër op voorjaarsvakantie in de Alpen.

Wat betekent dit nu? Kort gezegd komt een en ander mijns inziens op het volgende neer. Wat gedurende zeer lange tijd gezien is als de kern van het wiskunde-onderwijs: het introduceren in problemen en methoden van een vakgebied (ik wijs ook nog even op het vrijwel verdwijnen van het 'bewijzen' en de afschuw die uit menige docenten-

handleiding spreekt over alles wat naar wiskundige vaktaal zweemt), wordt als niet relevant, onhaalbaar en eigenlijk ook als ongewenst terzijde geschoven en vervangen door wat je wiskundige wereldoriëntatie zou kunnen noemen, net als de meetkundige wereldoriëntatie van de basisschool. De oude breuk tussen lagere en middelbare school zal, als de plannen voor de basisschool en de basisvorming zo doorgaan, vrijwel verdwijnen: als het programma W12-16 ergens verwant mee is, dan is het wel met de Wiskobas-ideeën voor de basisschool. Toch vermoed ik dat die breuk ergens weer zichtbaar zal worden: wellicht tussen bovenbouw en onderbouw. Tenslotte kan het onderwijs niet permanent uit oriënteren blijven bestaan.

Ik vermoed dat mijn stelling dat een consequente invoering (je moet natuurlijk nog maar afwachten wat er nu werkelijk gaat gebeuren) van de W12-16-plannen een fundamentele koerswijziging betekent, door velen eigenlijk niet bestreden zal worden, ja zelfs als wenselijk zal worden gezien. Zijn daar dan, gezien vanuit het standpunt van de bovenbouw, eigenlijk wel bezwaren tegen? Tenslotte zie ik ook zelf heel wel de bezwaren van de tijd van voor '68, met wiskunde-onderwijs dat voor velen niet erg of helemaal niet zinvol was (voor sommigen overigens zeker wel, ik wil me bepaald verzetten tegen de tendens te suggereren dat toen bijna niemand iets begrepen heeft), en ook het huidige programma is niet erg bevredigend, eigenlijk vlees noch vis. Wat is dan eigenlijk wel mijn bezwaar?

Dat is eigenlijk het volgende. Iedere keuze, en a fortiori iedere radicale keuze, roept bepaalde problemen op. Dat is niet erg, dat is mijns inziens onvermijdelijk. Vereist mag worden dat die problemen onderkend worden, en dat serieuze pogingen worden gedaan die problemen zo klein mogelijk te maken.

Mijn grote bezwaar tegen de W12-16-plannen is dat ik hier te weinig van merk. Er is gekozen voor horizontale afstemming, en voor een aanpak, en niet zelden ook een inhoud, die spoort met de (beoogde) wiskundige oriëntatie op de basisschool. Dat betekent dat je extra aandacht zou moeten besteden aan de op basis daarvan te verwachten problemen: de aansluiting met de bovenbouw en de vervolgopleidingen, en de inhoud voor die leerlin-

gen, die wel tot een introductie in problemen en methoden van het vak wiskunde zelf in staat zijn en daar ook best interesse in zouden hebben.

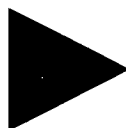
Over de aansluiting met de bovenbouw heb ik in het begin al iets gezegd: het probleem wordt gesignaleerd, maar daarna terzijde gelegd. Wellicht is men de opvatting toegedaan dat ook de bovenbouw uiteindelijk van eenzelfde karakter als het W12-16-programma moet worden. Ik denk, gezien de signalen uit de universiteiten, dat daar het laatste woord dan nog niet over is gezegd.

Dan de potentiële vwo-leerling. Mijn vermoeden is, dat die te weinig meekrijgt in dit programma. Vaak te gemakkelijk (al weet ik wel dat je bij dit programma ook heel lastige vragen kunt stellen), maar vooral te weinig een introductie in het vak, met daarbij een behoorlijk samenhangend geheel aan kennis en inzicht, waarop later voortgebouwd kan worden. Dat is natuurlijk ook lastig bij een, ook voor mij best acceptabele, keuze voor een horizontale programmering. Maar als iets lastig is, moet je er extra aandacht aan besteden. Dat nu is niet gebeurd. Er zijn nauwelijks vwo-pakketjes geproduceerd en beproefd waarbij deze zaken aan de orde kwamen. De grote stroom bestaat, zoals al jaren, uit mavo/lbo-pakketjes, waarbij ik soms een déjà-vu gevoel niet kan onderdrukken. Het is misschien ook wel veel gevraagd van leerplanontwikkelaars die jarenlang hebben gevochten om juist voor die lbo/mavo-groep een behoorlijk programma te krijgen, nu opeens over hun schaduw heen te springen. Toch zou dat moeten: door de radicale verandering liggen er nu ook problemen voor een andere groep. Het zou wel bijzonder spijtig zijn als voor die groep van (meer) begaafde leerlingen de onderbouwjaren als eigenlijk verloren, of niet optimaal benut, voor hun wiskundige vorming zouden moeten worden beschouwd. Het is maar de vraag wat later, met name aan interesse en attitude, nog kan worden gerepareerd.

Het is jammer dat nu pas de laatste tijd dat besef lijkt door te dringen, al juich ik natuurlijk de plannen om tot een werkgroepje te komen dat zich nog eens dieper over de plannen voor 3/4-vwo zal buigen, toe.

Het wachten is echter voorlopig op wat de schoolboekenschrijvers en vooral de leraren er van maken.

*) Samenvatting voordracht Kaderconferentie 19 mei 1992.



Vreemde woorden in de wiskunde

Formule (< Lat. *formula*; dem. van *forma* = vorm). Lett. Vormpje. Komt, na eerst in verschillende andere betekenissen te zijn gebruikt, bij de volgelingen van Descartes (1596-1650) voor in de betekenis van algebraïsche uitdrukking en verkrijgt die betekenis algemeen door Leibniz (1646-1716).

Goniometrie (< Gr. *γωνία* = hoek; *μετρέιν* = meten). Lett. hoekmeting. Sedert het begin der 19e eeuw ter onderscheiding van trigonometrie in gebruik voor de theorie der goniometrische functies, onafhankelijk van de meetkundige toepassing daarvan.

Goniometrisch (→ *goniometrie*). De naam goniometrische functies voor sinus enz. is sedert het begin der 19e eeuw in gebruik; de benamingen Fr. *fonctions circulaires*, D. *Kreisfunktionen* zouden zich goed tot de vertaling *cirkelfuncties* lenen.

Horizon (< Gr. *ὁρίζων* sc. *κύκλος* = begrenzend cirkel; part. praes. van *ὀρίζεσθαι* = begrenzen). Voor het astr. begrip horizon heeft Stevin (1548-1620) het woord *gezichtseinder* ingevoerd. Math. wordt horizon speciaal gebruikt in de perspectief voor de snijlijn van het horizontale vlak door het oog met het tafereel.

Interval (< Lat. *intervallum* = tussenruimte; < *inter* = tussen, *vallus* = paal). Math. spec. voor de verzameling van de getallen, die voldoen aan $a \leq x \leq b$, eventueel met weglating van een of beide gelijktokens.

Kubus (< Lat. *cubus*; < Gr. *κύβος*, bij Euclides (ca. 300 v. Chr.) in de tegenwoordige bet. voorkomend, elders ook balk). In de Gr. arithmetica beduidt *κύβος ἀριθμός* een getal (d.w.z. een positief geheel getal), dat de derde macht is van een geheel getal. Vd. kubisch voor derde-graads.

Lineair (< Fr. *lineaire*; < Lat. *linearis*; < *linea* = linnen draad, vd. richtsnoer, rechte lijn; < *linum*; < Gr. *λίνον* = vlas). De math. betekenis, «van den eersten graad», is afgeleid uit het feit, dat een rechte lijn een vergelijking van den eersten graad heeft.

Dijksterhuis en Van der Wielen, 1948.

'Begrijpen'

► Toetsen, proefwerken en repetities

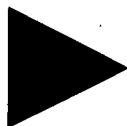
Piet van Wingerden

Wiskundeleraren willen hun leerlingen wiskunde leren. Klassiek of modern, in passende werkvormen of zo maar wat aanrommelend. De accenten kunnen verschillen. De een wil de leerlingen een heleboel kennis en vaardigheden laten verwerven, de ander zoekt naar mogelijkheden om een goede attitude te bevorderen. Maar allen moeten ze tussentijds toetsen wat er van het gegeven onderricht bij de leerlingen is aangekomen. In de eerste plaats om het programma zinvol te vervolgen of om dat aan te passen. Daarnaast hopen de docenten er zo achter te komen of hun pupillen de zaken een beetje begrepen hebben. Ook de leerlingen kunnen er door te weten komen welke onderdelen hun bijzondere aandacht moeten hebben. Het zou mooi zijn als zij hierdoor ook een beter idee krijgen van wat ze nu wel en wat ze niet begrijpen.

Dat toetsen kan natuurlijk en passant wiskundig zwakken er toe brengen zich af te wenden van de wiskunde. Het kan de leraar de gelegenheid bieden een laag cijfer te geven. En dat kan ertoe bijdragen de wiskundig zwakken te verhinderen onze samenleving te belasten met hun storende aanwezigheid op een plaats die ook voor hen zelf niet zinvol is. Mede daardoor worden die toetsen door de leerlingen vaak minstens zo belangrijk geacht als het 'genoten' onderwijs. De leerlingen gaan zich oefe-

nen voor de toetsen. Soms krijg je de indruk dat wiskunde-onderwijs grotendeels bestaat uit het voorbereiden op het maken van goede toetsen, proefwerken en repetities. En dat brengt weer met zich mee dat er steeds nieuwe toetsen ontworpen moeten worden. En die worden dan weer ijverig bestudeerd. Zo worden de toetsen een doel op zich. Het ontwerpen van toetsen is een bezigheid die veel inventiviteit vergt. Voor menig leraar is het een uitdaging om iets origineels te vinden. Je kunt er fijne contacten door krijgen met collega's. We hebben in Nederland een groot bureau dat toetsen fabriceert. Ik zou niet weten hoe in onze maatschappij wiskunde-onderwijs kan functioneren zonder toetsen, proefwerken en repetities.

Maar de leraar moet wel de gelegenheid blijven krijgen om wiskunde-onderwijs te geven. Hij moet zijn leerlingen niet alleen voorbereiden op een toets. Hij wil immers dat de leerlingen zijn doel 'begrijpen wat ze leren' niet vervangen door het enkele doel 'een voldoende halen'.



Mededeling

Computer en wiskunde voor de onderbouw

*Doelgroep
Inhoud*

Docenten wiskunde in het voortgezet onderwijs
Computergebruik bij nieuwe ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs (W12-16). Functies en grafieken, Voortgezet rekenen, Meetkunde, Algebra zijn thema's aan de hand waarvan software en evt. lesmateriaal bekeken wordt. Daarnaast is er aandacht voor vragen als:

- Welke software is 'goed' of welke is 'slecht'?
- Wat is de invloed van computergebruik op de inhoud van het wiskundeonderwijs en de didactiek ervan?
- Hoe organiseer je onderwijs met de computer?

Centrale vraag blijft: wat voegt de computer aan mijn wiskundeonderwijs toe?

Tijd en plaats

Hogeschool Holland, Wildenborch 6, Diemen
maandag: 14.45 - 17.45 uur, 5 bijeenkomsten
8 februari 1993

*Start
Kosten
Informatie
Inschrijving*

f145,- Niet-subsidiabele kosten
Dhr. J. de Boer, telefoon: 020-5601360
Hogeschool Holland, Adviesgroep Onderwijs,
tel. 020-6600170

► **E.J. Dijksterhuis en het onderwijs in de wiskunde**

K. van Berkel

1 Inleiding

Dit jaar honderd jaar geleden, op 28 oktober 1892, werd in Tilburg Eduard Jan Dijksterhuis geboren. Wij kennen Dijksterhuis tegenwoordig vooral als beoefenaar van de geschiedenis van de wiskunde en de natuurwetenschappen. Zijn opus magnum, *De mechanisering van het wereldbeeld* (1950), behoort tot de klassieke werken op dat terrein. Voordat Dijksterhuis echter in 1953 hoogleraar in de geschiedenis van de exacte wetenschappen werd, was hij vele jaren leraar wiskunde aan een kleine HBS in Tilburg. Jaar in jaar uit moest hij aan lang niet altijd gewillige leerlingen de beginselen van algebra, mechanica, geometrie en goniometrie uitleggen. Het is niet onbegrijpelijk dat men wel eens een tegenstelling heeft gezien tussen zijn roeping als wetenschapshistoricus en zijn werk als leraar wiskunde. 'Het is te gek', schreef een vriend in 1952, 'dat je zoveel uren geeft aan werk, dat natuurlijk wel belangrijk is, maar dat evengoed door anderen zou kunnen gebeuren, terwijl je zelf in staat bent werk te doen waartoe slechts een enkeling in staat is'. Deze voorstelling van zaken is echter om twee redenen nogal misleidend. Om te beginnen heeft Dijksterhuis zelf aan het onderwijs in de wiskunde

altijd een grote waarde toegekend; het onderwijs ging hem aan het hart en als schrijver van ingezonden brieven, spreker op congressen en symposia, medewerker van *Euclides* en lid van de Onderwijsraad heeft hij zich intensief bemoeid met onderwijsvraagstukken. Verder valt het te verdedigen dat Dijksterhuis zo'n groot wetenschapshistoricus is geworden niet ondanks, maar juist mede dankzij het feit dat hij jarenlang onderwijs in de wiskunde heeft gegeven. Zijn visie op de wetenschapsgeschiedenis is duidelijk gevormd door zijn opvattingen over de intellectuele en morele betekenis van het wiskunde-onderwijs. Er is dus alle reden om zijn opvattingen daarover eens nader te onderzoeken en in dit herdenkingsjaar het licht te laten vallen niet op Dijksterhuis als wetenschapshistoricus, maar op Dijksterhuis als leraar wiskunde en vakdidacticus.

2 Korte levensloop

Wat onderwijs is, wist Dijksterhuis van huis uit. Zijn vader, Berend Dijksterhuis, was leraar geschiedenis en directeur van de Rijks Hogere Burgerschool 'Koning Willem II' in Tilburg, een zogeheten 'neutrale' school in een zeer overwegend katholieke omgeving. De jonge Dijksterhuis bezocht de school van zijn vader, deed daarna staats-examen gymnasium en vertrok in 1911 als student in de wiskunde naar Groningen. Hij had nog geaarzeld tussen wiskunde en klassieke talen, maar op aanraden van zijn vader had hij ten slotte gekozen voor wiskunde.

De studie verliep vlot en werd in 1918 afgesloten met een promotie op een onderwerp uit de mechanica. Dijksterhuis gaf toen al enkele jaren les op een meisjes-HBS in Groningen en in 1919 kon hij een betrekking krijgen aan de school van zijn vader in Tilburg. Het was niet de bedoeling lang aan deze HBS te blijven, maar van een betrekking aan een gymnasium in het westen van het land is het nooit gekomen. Het verhaal gaat dat Dijksterhuis met zijn vader, die overigens al in 1921 overleed, het zo geregeld had dat hij op zaterdag geen les hoefde te geven en die dag dus vrij had voor zijn grote liefde, de geschiedenis van de wiskunde en de natuurwetenschappen.



E.J. Dijksterhuis

Op dat terrein publiceerde Dijksterhuis vanaf de jaren twintig een reeks grotere en kleinere studies. De belangrijkste zijn wel *Val en worp*, een hoogst originele studie over de geschiedenis van de mechanica van Aristoteles tot Newton uit 1920 en de tweedelige studie *De Elementen van Euclides* uit 1929-1930. Verder schreef hij vele bijdragen over uiteenlopende onderwerpen voor *Euclides*, waarvan hij vanaf het begin vaste medewerker was, en voor het algemeen-culturele tijdschrift *De Gids*, waarvan hij in 1934 redactielid en in 1940 secretaris werd. Daarnaast gaf hij nog vele lezingen over onderwerpen uit de geschiedenis van de exacte wetenschappen. Aanvankelijk waren deze lezingen uitsluitend bedoeld voor leraren, maar vanaf 1930 kon Dijksterhuis als privatdocent in de geschiedenis van de wiskunde in Amsterdam (en later in Leiden) ook proberen een academisch publiek voor zijn vak te interesseren (wat overigens maar matig lukte).

Dijksterhuis was ook actief betrokken bij allerlei discussies over de methodiek van het onderwijs in de wiskunde. Hij was bijzonder verontrust door het optreden van goedwillende pedagogen die een meer aanschouwelijke en intuïtieve benadering van de wiskunde en in het bijzonder de meetkunde voorstonden en die de strenge axiomatische methode terug wilden dringen. Hij was een veelgevraagd inleider op discussiebijeenkomsten, trad op als secretaris van commissies die zich bezighielden met de herziening van het wiskunde-onderwijs en was zoals gezegd van meet af aan sterk betrokken bij het tijdschrift *Euclides* (waarvan de naam al een programma inhield). De algemene waardering voor zijn activiteiten op dit vlak resulteerde in 1934 in een benoeming tot lid van de tweede afdeling van de Onderwijsraad, het adviesorgaan van de minister inzake onderwijskwesties.

Als wetenschapshistoricus brak Dijksterhuis pas na de oorlog definitief door. In 1950 publiceerde hij *De mechanisering van het wereldbeeld*, waarvoor hij het jaar daarop de P.C. Hooftprijs kreeg. Hij werd benoemd tot lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen en in 1953 volgde dan zijn benoeming tot buitengewoon hoogleraar

in de geschiedenis der exacte wetenschappen te Utrecht (een soortgelijke benoeming in Leiden kwam in 1955 af). Na zevenendertig jaar voor de klas te hebben gestaan kon Dijksterhuis nu zijn volle aandacht geven aan het vak waarin hij inmiddels grote naam had gemaakt. Als lid van de Onderwijsraad bleef hij echter nauw betrokken bij het wel en wee van het middelbaar onderwijs.

Erg vruchtbaar is het hoogleraarschap van Dijksterhuis niet geweest. Slechts drie promovendi begeleidde hij in Utrecht en zijn nog immer talrijke publikaties behelsden meer samenvattingen van bestaande kennis dan verdere uitbouw van de wetenschapsgeschiedenis. Erg lang heeft zijn hoogleraarschap ook niet geduurd, want begin 1959 werd hij door een hersenbloeding getroffen, waarvan hij slechts gedeeltelijk herstelde. Op 18 mei 1965 overleed hij ten slotte in zijn woonplaats Bilthoven.

3 De anti-mathematische tijdgeest

Dijksterhuis begon zijn loopbaan in een periode waarin de waardering voor de zuivere wiskunde tamelijk gering was. Hij herinnerde zich later hoe de sfeer in kringen van het wiskunde-onderwijs in de jaren 1920-1925 tamelijk gedeprimeerd was. De meeste leraren legden zich daarbij neer en draaiden hun lesje af, maar een kleine groep meest jonge leraren, onder wie Dijksterhuis, Schogt en H.J.E. Beth, was daartoe niet bereid en kwam in woord en daad op voor de waarde van een zuivere, strenge wiskunde. In de al wat oudere P. Wijdenes vonden zij een belangrijke en hulpvaardige medestander. De wiskunde werd volgens Dijksterhuis in die jaren van twee zijden belaagd: van buiten en van binnen. Van buiten vooral door die pedagogen en ambtenaren die de omvang van het wiskunde-onderwijs wilden beperken ten bate van meer praktische of concrete vakken. Dat konden pleitbezorgers van de nieuwe HBS-A zijn, die wiskunde gedeeltelijk wilden vervangen door boekhouden, of fysici, die de abstracte mechanica wilden afschuiven naar de wiskunde en de overgebleven fysica zoveel mogelijk experimenteel en vooral niet wiskundig wilden behandelen. En dan waren er de ambtenaren die de kosmografie aan de wiskunde wilden onttrekken en bij de aardrijkskunde onderbrengen, wat ten koste van de wiskundige benadering zou gaan.

Eind 1920 keerde Dijksterhuis zich in een artikel in het *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs* voor het eerst tegen een uiting van deze anti-mathematische tijdgeest. Zijn gram was opgewekt door een artikel van een zekere dr. E. Reinders, die betoogd had dat de wiskunde vooral als een dienstbaar vak moest worden gezien en vooral niet teveel als wetenschap op zichzelf moest worden beoefend; bovendien moest men er voor waken het onderwijs in de natuurkunde aan wiskundigen op te dragen, aangezien deze er al te gauw een verkeerde voorstelling van gaven, te veel waarde hechtten aan een wiskundige afleiding en te weinig oog hadden voor de waarde van een experimentele demonstratie. In ongemeen scherpe bewoordingen hekelde Dijksterhuis in een tegenartikel deze denkbeelden. Tegenover het nuttigheidsdenken van Reinders benadrukte hij juist de eigen waarde van de zuivere wiskunde. Er is, zo verklaarde Dijksterhuis, geen schoolvak dat zozeer het denkvermogen van de leerling scherpt als juist de wiskunde. Niet alleen voor de latere ingenieur of astronoom, ook voor de toekomstige jurist of theoloog is het daarom leerszaam enige tijd te hebben doorgebracht in 'de leerschool waar men er naar streeft zoo kort en duidelijk mogelijk te spreken over zoo scherp mogelijk gedefinieerde begrippen'. Wie alleen aan de praktische voordelen van de wiskundige kennis denkt, mist de essentie van de wiskunde:

'De groote waarde der zuivere wiskunde ligt niet in de bereikte resultaten op het gebied van uitgebreide kennis van eigenschappen ; het is de stijl van de mathesis en de stemming van strenge eerlijkheid, die een exact betoog wekt, waardoor de hooge moreele waarde van dit vak wordt bepaald.'

Gold dit voor alle tijden, voor de tijd van Plato niet minder dan voor de tijd van verwarring na de eerste wereldoorlog, juist in de laatste periode was het nodig op de hoge waarde van de wiskunde te wijzen:

'In een tijd van toenemende geestelijke vergroving tengevolge van materieelen voorspoed aan den eenen kant, van een vaak beangstigenden neiging tot popularisering van wetenschap tengevolge van oppervlakkige belangstelling, vaak nog gepaard gaande

met vaag mysticisme ter anderer zijde, is meer dan ooit de studie van een vak nodig dat aan den eersten, alle eischen van het praktische leven ten spijt, zijn onverschilligheid voor praktische toepasbaarheid niet zonder leedvermaak voorhoudt, dat de laatsten er op wijst, welke eischen aan strenge formuleering en exact betoog mogen worden gesteld.'

Stelde Dijksterhuis zo tegenover de utilitaire opvatting zijn eigen standpunt over de formele, vormende waarde van de wiskunde, zijn argumenten tegen degenen die de fysica zoveel mogelijk aan de invloed van de wiskundigen wilden onttrekken en in experimentele zin wilden laten beoefenen, ontleende hij aan de geschiedenis van de natuurwetenschappen. Als de zuivere, wiskundige mechanica uit de fysica geweerd zou worden, hoe zou het dan te voorkomen zijn dat dit laatste vak weer op een even oppervlakkige en onstrenge manier gegeven zou worden als ten tijde van Aristoteles?

'Physica zonder Mechanica! Maar waar moet dat heen? Moeten we terug naar de begripsverwarring van Aristoteles en een tiental eeuwen na hem? Is men dan vergeten, welk een ontzaglijken geestesarbeid het de heele middeleeuwen door gekost heeft, eer bij Galilei het eerste licht doordringt in den chaos der physische grondbegrippen, dat men meent, dat onze leerlingen die begrippen van nature hebben en geen lange en strenge scholing in het gebruik ervan behoeven?'

En wie kan in gemoede beweren dat een experimentele behandeling van de natuurkunde doeltreffender is dan een wiskundige? Met een beroep op Galilei betoogde Dijksterhuis dat van een mathematisch bewijs een grotere overtuigingskracht uitgaat dan van een experimentele demonstratie. Kortom, de opinies van een pedagoog als Reinders getuigden niet alleen van een totaal gebrek aan inzicht in de aard van de mathesis, maar ook van onkunde ten aanzien van de geschiedenis der exacte vakken. Dijksterhuis vreesde echter dat daar voorlopig wel niets aan te doen zou zijn: 'De geest van den tijd schijnt vijandig te zijn aan de mathesis. Het protest van een enkeling zal daartegen niets vermogen. Toch is het hem een vreugde geweest, zijn protest te doen hooren'.

4 De oprichting van Euclides

Aan het heroïsch pessimisme van Dijksterhuis, dat uitstekend paste in de tijd dat Oswald Spengler grote opgang maakte, werd enige jaren later opnieuw voedsel gegeven toen ook vanuit de kring van wiskundigen zelf forse kritiek werd uitgeoefend op de traditionele manier waarop het onderwijs was ingericht. In 1924 gaf mevrouw Ehrenfest-Afanasjewa een brochure uit onder de titel *Wat kan en moet het meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven?* Daarin betoogde zij dat de wiskunde door een aantal oorzaken niet slaagde in het gestelde doel, namelijk het aankweken van logisch denken ook bij diegenen die later geen direct gebruik van wiskundige kennis hoefden te maken. Volgens haar onthielden de meeste leerlingen daarom zo weinig van de wiskunde omdat deze uitsluitend werd gedoceerd als een systeem van stellingen die men door veel sommen te maken onder de knie moest zien te krijgen. In plaats daarvan, zo was haar gedachte, moest de leerling inzicht krijgen in de praktische betekenis van de wiskunde, de docent moest de leerling eerst met de praktijk van het dagelijks leven confronteren voordat er wiskundige stellingen op het bord verschenen. Ook en vooral bepleitte zij een soort propaedeutische cursus waarin door geschikte oefeningen de ruimtelijke intuïtie van de leerling zou worden geoefend.

Anders dan eerdere aanvallen op de gangbare wiskunde-didactiek leidde deze brochure niet tot een enkele geïsoleerde uiting van protest, maar tot een beweging die op den duur de hele wereld van het wiskunde-onderwijs in Nederland zou omvatten. Er ontstond een polemiek die om te beginnen leidde tot de oprichting van een apart wiskundig tijdschrift gewijd aan onderwijsbelangen. Eerst verscheen het nog als het *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, maar al na enkele jaren kon het zelfstandig verder gaan als *Euclides*. Het eerste nummer van de eerste jaargang (1924-1925) werd geopend door een uitvoerige bespreking van de brochure van mevrouw Ehrenfest door Dijksterhuis. Begin 1925 herhaalde Dijksterhuis op een lezing voor de Vereniging voor Pedagogisch Onderwijs in Groningen zijn bezwaren en ten slotte kreeg

hij op het Natuur- en Geneeskundig Congres dat in april 1925 ook in Groningen werd gehouden voor de derde maal de gelegenheid zijn standpunt naar voren te brengen. Dijksterhuis was in deze tijd uitgegroeid tot de belangrijkste verdediger van het vertrouwde euclidische, streng logisch opgezette wiskunde-onderwijs, dat zich moest verdedigen tegen iedereen die meer accenten wilde leggen op praktisch nut, aanschouwelijkheid of intuïtie.

De argumenten die Dijksterhuis in stelling bracht doen sterk denken aan de argumenten die hij al in 1920 had gelanceerd: miskenning van de formele, vormende waarde van de streng-logisch opgebouwde wiskunde, veronachtzaming van de geschiedenis van de wiskunde en de natuurwetenschappen, overschatting van de waarde van de aanschouwelijkheid en ten slotte laakbaar toegeven aan de gemakzucht van de moderne tijd. Als het hoofddoel van het wiskunde-onderwijs gelegen is in het aanleren van strenge logica, dan is het omzeilen of laten vervallen van moeilijke problemen wel het ergste dat men kan doen:

'Voor het laten vervallen van moeilijke onderwerpen is het streven zich aan het intellectuele peil der leerlingen aan te passen bij de voortdurende daling van dat peil geen voldoende motief meer. Het wetenschappelijk peil van het wiskunde-onderwijs mag niet onbegrensd dalen ter wille van de tijdgeest die vijandig staat tegenover degelijk onderwijs.'

Ook de door sommigen geroemde zelfwerkzaamheid van de leerlingen kon niet op sympathie van Dijksterhuis rekenen. Onderwijs kan niet zonder sturing, zonder dwang: 'Er is bijna niemand sterk genoeg om vrij te zijn', had hij al in 1920 geschreven. Dat alles wilde niet zeggen dat het onderwijs volgens de euclidische methode niet verbeterd kon worden, maar voor radicale wijzigingen in de trant van mevrouw Ehrenfest was geen reden.

5 De Commissie-Beth

Speciaal de lezing voor het Natuur- en Geneeskundig Congres had zozeer de aandacht op de problemen in het wiskunde-onderwijs gevestigd, dat ook de inspectie bij het middelbaar onderwijs de tijd gekomen achtte voor fundamentele bezinning. Op

verzoek van inspecteur G. Bolkestein (later minister van Onderwijs) werd een commissie ingesteld onder voorzitterschap van H.J.E. Beth uit Deventer en met Dijksterhuis als secretaris. Hoewel er ook naar inmiddels goed Nederlands gebruik vertegenwoordigers van het protestants-christelijke en het katholieke onderwijs in de commissie waren benoemd, was het voor iedereen duidelijk dat Dijksterhuis de drijvende kracht achter de commissie was. Het rapport dat de commissie-Beth in 1926 over het leerplan voor wiskunde aan de HBS uitbracht is dan ook geheel in zijn geest geschreven. Het uitgangspunt van het werk van de commissie was de vaststelling van het doel van het onderwijs in de wiskunde op de HBS. Omdat de HBS sinds 1917 officieel ook voorbereiding bood op het hoger onderwijs en niet alleen meer onmiddellijke beroepsvoorbereiding was, kon het vergaren van wiskundige kennis als zodanig geen hoofddoel zijn. Het onderwijs moest ervoor zorgen dat de leerlingen hun geest in voldoende mate vormden om ze tot verwerving van wiskundige kennis op eigen terrein in staat te stellen. Het hoofddoel was het bijdragen tot de geestelijke vorming en ontwikkeling, een neven doel het bijbrengen van direct inzetbare wiskundige kennis. (Dijksterhuis wees er graag op dat de wiskunde in dit opzicht in dezelfde positie verkeerde als de oude talen, die ook meer om hun vormende waarde dan om hun praktisch nut werden onderwezen.)

Na eenmaal het hoofddoel van de wiskunde te hebben aangewezen, volgde de visie op de manier waarop de wiskunde moest worden gegeven als vanzelf. Geen onnodig langdurig gecijfer, geen verwisting van tijd door het oplossen van met opzet listig in elkaar gezette vraagstukken, geen nadruk op het aankweken van routine, maar vooral begrip, inzicht in de theorie, oefening van de geest door scherpe redenering, vorming door zuivere en heldere formulering. We zien hierin al de contouren van het zogenaamde epistemische onderwijs dat Dijksterhuis in 1937 in een artikel in *Euclides* zou omschrijven, onderwijs waarbij de leerling voortdurend in staat is zichzelf en anderen rekenschap te geven van de termen die hij gebruikt en van de motivering van de methoden die hij toepast, onderwijs waarin voortdurend de vraag wordt gesteld: wat versta ik eronder, hoe kom ik eraan?

Op het punt van het eigenlijke leerplan stelde de

commissie-Beth zich met name voor het algebra-onderwijs anders op te zetten, aangezien vooral de algebra te lijden had van de gewoonte om fundamentele theoretische inzichten te verwaarlozen ter wille van de ontwikkeling van de technische vaardigheid. In plaats van ingewikkelde vraagstukken vroeg de commissie meer aandacht voor het functionele denken, uitmondend in de behandeling van de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening.

Met dergelijke voorstellen maakte de commissie nogal wat discussie los, zoals iedereen kan zien die de moeite neemt de jaargangen 1926-27 en 1927-28 van *Euclides* door te nemen. Maar onmiddellijk effect sorteerden de voorstellen toch niet; het zou nog geruime tijd duren voor er in de hoogste klassen van de HBS bijvoorbeeld onderwijs werd gegeven in de differentiaal- en integraalrekening. Wel leidde het werk van de commissie-Beth tot het instellen van vervolgc commissies. In het rapport was namelijk ook een opmerking gemaakt over de gebrekkige voorbereiding van de studenten in de wiskunde op een toekomstige loopbaan in het onderwijs en de specifieke moeilijkheden die daaraan verbonden waren. Twee commissies van lerarenverenigingen namen in de late jaren twintig dit probleem onder de loupe en formuleerden enige voorstellen ter verbetering van de voorbereiding van de toekomstige leraar in het middelbaar onderwijs die niet wezenlijk verschilden van de regeling die minister Rutten uiteindelijk in 1953 invoerde.

Voor Dijksterhuis had de discussie over de lerarenopleiding een speciale betekenis omdat naar zijn oordeel wetenschapshistorische colleges een onderdeel van die pedagogisch-didactische vorming hoorden uit te maken. In het middelbaar onderwijs, zo meende hij, herleefde voortdurend de geschiedenis van de wetenschap. De voorstellingen waarmee de leerlingen de school binnenkomen, bijvoorbeeld op het terrein van de bewegingsleer, waren in vele gevallen dezelfde die in de beginperiode van de wetenschap nog door de grootste onderzoekers gekoesterd waren en die pas na een lange worsteling uit de wetenschap verwijderd konden worden. Het onderwijs in de geschiedenis van de wetenschap zou de aanstaande docent daarop kunnen voorbereiden en hem behulpzaam kunnen zijn bij het bestrijden van die alleszins plausibele, maar verkeerde voorstellingen.

Dijksterhuis heeft het niet bij woorden gelaten, maar in de jaren rond 1930 ook in daden getracht het doel dichterbij te brengen. Op zijn initiatief startte in 1929 de Groningse uitgever Noordhoff een aparte reeks boeken over de geschiedenis van de wiskunde ten behoeve van leraren wiskunde. Als eerste deel verscheen in dat jaar deel I van *De Elementen van Euclides*, in een bewerking en met toelichting van Dijksterhuis zelf (deel II verscheen een jaar later). En als tweede deel van dezelfde 'Historische Bibliotheek voor de Exacte Wetenschappen' verscheen, ook in 1929, van H.J.E. Beth een *Inleiding in de niet-euclidische meetkunde op historische grondslag*. De reeks werd overigens geen commercieel succes, wat gezien de economische malaise waarin ook Nederland in de jaren dertig terechtkwam geen verwondering hoeft te wekken.

6 Wiskunde op het gymnasium-alfa

Inmiddels was de anti-mathematische geest in Nederland nog steeds niet geweken. In de jaren dertig leek deze zich zelfs met hernieuwde kracht te richten tegen de zogenaamde overdreven waarde die aan de wiskunde werd toegekend. Dit keer was het onderwijs in de wiskunde op het gymnasium-alfa een geliefd doelwit van de anti-wiskundigen. Deze traden krachtig naar voren toen de Leidse rector De Blécourt bij zijn aftreden opperde dit onderwijs, dat de alfa's na hun schooltijd toch niet te stade zou komen, maar helemaal af te schaffen. Naar aanleiding van deze uitspraken stelden enkele kamerleden vragen aan de minister en deze zegde een onderzoek toe. Dijksterhuis reageerde daarop met een artikel in *De Gids*, zoals hij ook korte tijd later in het zelfde tijdschrift opponeerde tegen een artikelenreeks over 'Wiskunde en Letterkunde' die in de *Nieuwe Rotterdamse Courant* was verschenen. Onder de titel 'Haat tegen de wiskunde' betoogde hij dat de toekomstige literator, jurist of historicus wel degelijk iets kon hebben aan wiskunde. Het moest, zo gaf hij toe, dan wel goed gegeven worden, niet als een allegaartje van het wiskunde-onderwijs op de bèta-afdeling, maar toegesneden

op het karakter van het gymnasium-alfa. Volgens Dijksterhuis was er wel degelijk zo'n voor alfa's geschikte methode voorhanden. Al in 1931 had hij een vergadering van leraren klassieke talen voorgehouden dat de wiskunde die alfa's moesten krijgen bij voorkeur antieke, klassiek-Griekse wiskunde moest zijn, en dat de ideale methode om die te onderwijzen het lezen was van de oorspronkelijke wiskundige teksten, in het Grieks dus. Door die teksten te vertalen, te interpreteren en te bespreken zouden de leerlingen zowel verdere oefening in het lezen van Griekse teksten krijgen als een kennismaking met de grondbeginselen van de wiskunde. De wiskunde werd zo niet onderwezen als een bepaald gebied van het menselijke kennen (aan specifieke wiskundige kennis zouden de alfa's later inderdaad niet veel hebben), maar als een training in scherp formuleren en logisch denken. Ook hier stond dus weer de vormende waarde van de wiskunde voorop. Daarenboven had de methode het voordeel dat de leerlingen in aanraking kwamen met een aspect van de klassieke beschaving dat zij anders misschien uit het oog zouden verliezen, terwijl het toch niet minder belangrijk was dan de tragedies en de filosofische stelsels die ze wel grondig leerden kennen.

Dijksterhuis realiseerde zich dat de invoering van zo'n methode niet goed mogelijk was als er geen geschikt leerboek voor antieke wiskunde was. In 1939 benaderde hij daarom de firma Noordhoff met de vraag of deze ervoor voelde een dergelijk boek van zijn hand op de markt te brengen. Dijksterhuis schreef een proefhoofdstuk en legde dat aan zo'n veertien leraren in den lande voor. Hoewel zij vrijwel allen zeer positief in hun oordeel waren, konden zij geen afzet garanderen en daarom zag Noordhoff van de onderneming af. Ook het inschakelen van het Klassiek Verbond en het polsen van Belgische collega's leverde niets op en het plan leek, zeker toen de oorlog uitbrak, definitief van de baan.

Merkwaardigerwijs bleek er enige jaren na de oorlog wel een mogelijkheid te bestaan het plan ten uitvoer te leggen. Langs twee verschillende wegen werd het nieuw leven ingeblazen. Dijksterhuis zelf lanceerde het plan in de Onderwijsraad en stelde een advies aan de minister op om scholen de mogelijkheid te geven onderwijs in de antieke wiskunde

aan te bieden. Tegelijkertijd was onder leiding van de Utrechtse vakdidacticus Bunt een klein groepje wiskundeleraren al met een experiment begonnen. Op zes gymnasia werd aan de hand van de antieke wiskunde gepoogd het wiskunde-onderwijs voor alfa's een nieuwe inhoud te geven en op de betrokken scholen gebeurde dat met zoveel succes (er moest tot 1953 gewacht worden voor de resultaten van de aparte indexamens bekend waren) dat het experiment in de jaren daarna ook tot andere scholen uitgebreid kon worden. Het kwam nu ook tot de uitgave van lees- en leerboeken voor dit nieuwe 'vak'. Eerst publiceerde Bruins overhaast zijn *Fontes matheseos* (1952), een boek dat zeer kritisch besproken werd door Dijksterhuis en bij de groep Bunt niet in goede aarde viel. Later, in 1954, werkte Bunt de stencils die tijdens het experiment gebruikt waren om tot het boek *Van Ahmes tot Euclides* (waarvan in 1968 nog een vijfde druk verscheen). Dit was geen leerboek zoals Dijksterhuis het zich had voorgesteld, maar toch in vele opzichten een vervulling van een jarenlang gekoesterde wens.

7 Conclusie

Daarmee is nog lang niet alles gezegd over Dijksterhuis' bemoeienis met het onderwijs in de wiskunde. Maar wel is duidelijk geworden dat zijn jarenlange leraarschap geen biografische bijkomstigheid is geweest, iets dat hem misschien alleen maar heeft gehinderd bij het opbouwen van zijn wetenschapshistorische oeuvre. Integendeel, er vallen opmerkelijke parallellen te constateren tussen zijn werk als wetenschapshistoricus en zijn bemoeienis met het onderwijs. Zijn visie op de formele, vormende waarde van de wiskunde zien we terug in zijn stelling dat ook de wetenschapsgeschiedenis in de eerste plaats een vormende waarde heeft; zijn speciale liefde voor de mechanica is herkenbaar zowel in zijn onderwijskundige pleidooien voor dit vak als in zijn wetenschapshistorische werk, bovenal natuurlijk in *De mechanisering van het wereldbeeld*; zijn stelling dat de aanschouwelijkheid in de wiskunde niet de rol speelt die sommige hervormers eraan toeschreven is op wetenschapshistorisch vlak terug te vinden in de overtuiging dat in de mechanisering van het wereld-

beeld de rol van aanschouwelijke mechanismen ook niet overdreven moet worden; zijn pleidooi voor de wetenschapsgeschiedenis als een brug tussen de literaire en de technisch-natuurwetenschappelijke cultuur keert terug in zijn ijveren voor een speciale vorm van het wiskunde-onderwijs voor het gymnasium-alfa; en ten slotte is zijn anti-materialisme zowel aanwezig in zijn bestrijding van het nuttigheidsdenken binnen de wiskunde als in zijn betoog (in de slotparagraaf van zijn beroemde boek) dat de toenemende rol van de wiskunde in de natuurwetenschappen niets te maken had met de toenemende secularisering van de samenleving of het oprukken van een materialistische geest onder de natuuronderzoekers. In de wetenschapshistoricus herkennen wij de wiskundige, in de wiskundige de wetenschapshistoricus. In beide gedaanten manifesteert zich het ene ideaal van een wiskundige cultuur.

Noten

De auteur heeft een biografie van Dijksterhuis in voorbereiding. Lezers van *Euclides* die menen dat ze hem nuttige informatie kunnen verschaffen of hem anderszins bij het voorbereiden van de biografie behulpzaam kunnen zijn wordt verzocht contact met hem op te nemen. Zij kunnen schrijven aan prof. dr. K. van Berkel, Fonteinkruid 8, 9801 LE Zuidhorn (tel. 05940-3696).

Voor een nadere kennismaking met het werk van Dijksterhuis kan men terecht (behalve in de in de tekst genoemde boeken) in: E.J. Dijksterhuis, *Clio's stiefkind* (Amsterdam, Bert Bakker, 1990). In deze bundel verspreide opstellen is ook een bibliografie opgenomen waarin men de belangrijkste wiskundige publicaties van Dijksterhuis kan vinden.



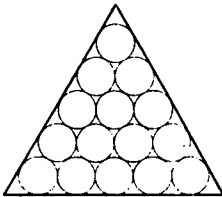
► De Nederlandse Wiskunde Olympiade 1992 (eerste ronde)

J. W. van der Vaart

Opgaven

A1 13 zwarte kippen, 14 grijze kippen en 12 witte kippen leggen samen in twee weken 58 eieren. 11 zwarte kippen, 10 grijze kippen en 9 witte kippen leggen samen in drie weken 65 eieren. Hoeveel eieren leggen 5 zwarte, 22 grijze en 15 witte kippen in één week?

A2 De 15 rode ballen van het snooker-spel passen in een frame met zijden van 30 cm (zie tekening). Hoe groot is de diameter van één bal?



A3 In precies 20 procent van alle bladzijdenummers van een boek komt het cijfer 9 voor. Hoeveel bladzijden heeft het boek? (Alle bladzijden zijn genummerd.)

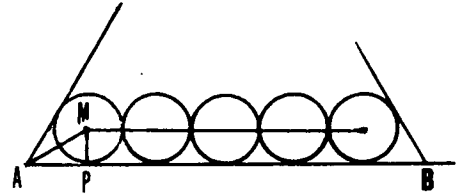
Oplossingen

Opgave A1

Uit: $13x - 11y = 5 \wedge 14x - 10y = 22 \wedge 12x - 9y = 15$ volgt $x = 8 \wedge y = 9$.

Dus 5 zwarte, 22 grijze en 15 witte kippen leggen samen $8 \cdot \frac{58}{2} - 9 \cdot \frac{65}{3} = 37$ eieren per week.

Opgave A2



figuur a

Stel straal cirkel = x .

In $\triangle APM$ geldt $\angle MAP = 30^\circ$ dus $AP = x\sqrt{3}$.

Dan is $AB = 8 \cdot x + 2 \cdot x\sqrt{3} = x \cdot (8 + 2\sqrt{3})$.

Maar $AB = 30$ cm, dus $x = \frac{30}{8 + 2\sqrt{3}}$ cm, dus dia-

meter = $\frac{30}{4 + \sqrt{3}}$ cm.

Opgave A3

In elk honderdtal getallen onder de 900 komt 19 keer het cijfer 9 in een getal voor.

Neem x getallen uit de groep vanaf 900.

De getallen 1 tot en met 899 bevatten 171 keer het cijfer 9.

Dus moet gelden $\frac{171 + x}{899 + x} = 0,20$.

Hier volgt uit $x = 11$, dus het laatste bladzijdenummer = $899 + 11 = 910$.

Noot

De overige opgaven en oplossingen komen in volgende nummers van *Euclides*.

► **Zuid-Afrika en Polen**

M.C. van Hoorn

Van 16 tot en met 23 augustus j.l. vond in Québec, Canada, de 7e ICME-conferentie plaats. Een masaal gebeuren, met 3000 deelnemers uit alle werelddelen, in principe allemaal geïnteresseerd in wiskunde-onderwijs. Euclides gaat er nog iets meer over vertellen dan dit.

Dagelijks waren er over de 100 bijeenkomsten, plenaire lezingen, werkgroepen, videopresentaties. Eén van die bijeenkomsten was bestemd voor redacteuren van tijdschriften. Uit Nederland was *Euclides* vertegenwoordigd, evenals trouwens *Willem Bartjens*.

Over de spraak- en begripsverwarring die een deel van de bijeenkomst beheerste zal ik het nu niet hebben. Feit is dat ieder een aardig stapeltje tijdschriften kon meenemen. Uit enkele van die tijdschriften zijn de bijgaande werkbladen gehaald.

Deze keer komen de werkbladen uit *Mathematical Digest* (Zuid-Afrika) en uit een speciale, Engelstalige uitgaven van *Matematyka* (Polen). In januari volgen twee werkbladen uit het Frans-Canadese *Instantanés Mathématiques*.

Aangetekend moet worden, dat in sommige landen een geheel andere cultuur bestaat dan ten onzent. De Poolse opgaven stonden onder het kopje 'Problems for Primary School Students'. Deze opgaven lijken nochtans voor onze W12-16-leerlingen beslist niet allemaal heel eenvoudig. Maar wat is in Polen een 'Primary School'?

Het Zuidafrikaanse blad is hoofdzakelijk een puzzelblad. Enkele bladzijden er uit zouden op onze recreatie-pagina niet misstaan; dit hoeft trouwens nog niet het oordeel van onze puzzelredacteur te zijn.

Met het oplossen van de opgave over het schuiven met blokken konden de Zuidafrikaanse lezers, blank of zwart, 10 Rand verdienen. En voor wie kans zag de moeilijkste variant te verzinnen (zelfde omtrek, zelfde blokken) was 20 Rand weggelegd. In Polen werkt men niet met geldprijzen. Daar strijdt men om de eer.

De kracht, of zo men wil de zwakte van de opgaven op de werkbladen is dat er geen speciale voorkennis vereist is om de vragen te begrijpen. Dat betekent, dat men ze ook in de huiskamer zou kunnen opgeven. De opgaven passen niet ergens in een leerplan. Tegelijk hebben de opgaven een volkomen tijdloos karakter. Honderd jaar geleden zouden ze ook kunnen zijn opgegeven (alleen de motorfiets zou dan misstaan, maar dat is te verhelpen). Over honderd jaar zijn de opgaven nog precies zo actueel als momenteel (aangenomen dat wijn drinken past in de dan gangbare cultuur).

In Euclides hebben al enkele jaren opgaven op de werkbladen gestaan die afkomstig waren van de leerplanontwikkelaars uit het W12-16-team, of van de makers van examens-nieuwe stijl. Sommige ervan passen in de huiskamer, en allemaal passen ze in of bij een leerplan. Het zijn typerende schoolopgaven van onze jaren negentig.



Mededeling

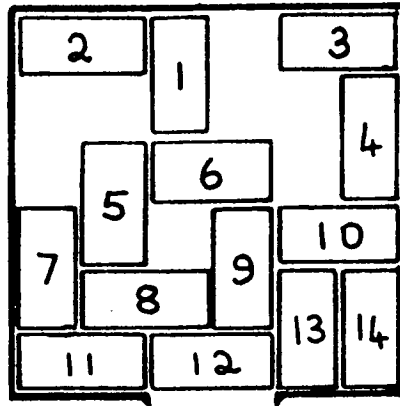
In november is Jan Koekkoek lid geworden van de redactie. Hij is leraar te Enkhuizen, en heeft ervaring in zowel onderbouw als bovenbouw havo/vwo. Computergebruik is één van zijn belangstellingsgebieden. We heten hem graag welkom!

De redactie

● Werkblad ●

Zuid-Afrika

► Schuiven met blokken



Het diagram hierboven laat veertien 2×1 -blokken zien binnen een omtrek van 6×6 , met een opening midden-beneden. De bedoeling is de blokken horizontaal of verticaal binnen de omtrek zo te verschuiven dat nummer 1 er uit kan.

a. Noteer de oplossing door afkortingen te gebruiken voor verschuivingen naar links (L), rechts (R), boven (Bo) of beneden (Be). Alle verschuivingen zijn over één eenheid. Het eerste deel van de oplossing kan er dus als volgt uit zien:

6R,1Be,1Be,3L,4Bo,6R

b. Maak vervolgens je eigen puzzel. Gebruik dezelfde omtrek met dezelfde blokken, maar probeer het zo moeilijk mogelijk te maken. Hoe meer verschuivingen er nodig zijn, des te beter. Vergeet niet de oplossing op te schrijven.

● Werkblad ●

Polen

1 André heeft een kan van 8 dl die geheel gevuld is met wijn, Bob heeft twee lege kannen, één van 5 dl en één van 3 dl.

Hoe kunnen ze de wijn eerlijk verdelen zonder andere kannen of glazen te gebruiken?

2 Bewijs dat er onder elk zestal natuurlijke getallen wel twee zijn waarvan het verschil deelbaar is door 5.

3 In de schatkamer van de koning bevinden zich 200 gouden munten die uiterlijk gelijk zijn; 199 zijn even zwaar en één is een beetje zwaarder. De schatbewaarder moet die iets zwaardere munt zien te vinden door niet vaker dan vijf keer met een balans een weging uit te voeren. Hij heeft niet de beschikking over verdere hulpmiddelen, zoals gewichten.

Help de schatbewaarder!

4 Drie soldaten moeten terug naar hun kazerne. Ze hebben 3 uren de tijd om de afstand van 60 mijl te overbruggen. Hoe krijgen ze dat voor elkaar met behulp van een motorfiets die 2 zitplaatsen heeft, als de motorfiets een snelheid heeft van 50 mijl per uur, en als een soldaat die loopt per uur 5 mijl aflegt?

5 Het gehele platte vlak wordt geschilderd in de kleuren blauw en rood.

Bewijs dat er (minstens) twee punten in het vlak zijn die op een afstand van 1 lengte-eenheid liggen en in dezelfde kleur geschilderd worden.

► Vredenduin over positief en negatief

Jan van Maanen

*De geschiedenis van positief en negatief** is geen 'gewoon' boek, en blijkbaar is dit ook geen 'gewone' bespreking, want dan zou u nu een halve kolom ergens achter in *Euclides* voor u hebben, ingeklemd tussen bestuursmededelingen, agenda en puzzelrubriek. Verder zou u dan deze woorden niet eens kunnen lezen omdat u uw leesbril nog niet op had.

De geschiedenis van positief en negatief gaat over de praktische en principiële kanten van getallen, vanaf de vroege oudheid tot en met de formele definitie van de negatieve getallen in de loop van de negentiende eeuw. Daar valt meer onder dan de hedendaagse wiskundige misschien zou zeggen. Euclides, bijvoorbeeld, behandelde de rekenkunde als onderdeel van de meetkunde. Getallen stelde hij voor door lijnstukken. Een begrip als *deler* zag er dan ook anders uit dan nu. Euclides noemt een getal deel (wij zouden zeggen deler) van een ander getal als het eerste getal, opgevat als lijnstuk, het tweede getal meet, dat wil zeggen: als het, zonder dat er iets overblijft, op het tweede getal (lees: lijnstuk) afgepast kan worden. Zo'n andere wijze van werken met getallen heeft verregaande gevolgen voor de algebra die erop voortbouwt. Dit bedoel ik met 'principiële kanten van getallen'. Ze komen bij Vredenduin uitgebreid aan bod.

Een praktische kant van het werken met getallen, die bovendien nauw met de invoering en acceptatie van de negatieve getallen samenhangt, is dat ze op allerlei manieren in vergelijkingen gebruikt werden, als potentiële oplossingen maar ook als coëfficiënten. Dit is een van de centrale thema's uit *De geschiedenis van positief en negatief*, en Vredenduin werkt het met verve uit. Om een indruk te geven van de breedte van het boek zal ik de passages die op het thema *vergelijkingen* betrekking hebben, de revue laten passeren.

In hoofdstuk 1 ('Het positieve getal in de oudheid') lezen we over een Babylonische vierkantsvergelijking ('Ik heb de zijde van mijn vierkant afgetrokken van de oppervlakte: 870') en een drietal problemen van Diophantus (ca. 250 na Chr.) waaronder de opgave 'Verdeel een gegeven getal dat de som is van twee kwadraten, in twee andere kwadraten. Het gegeven getal is $13 = 2^2 + 3^2$ '. Diophantus zocht een oplossing in rationale getallen en vond

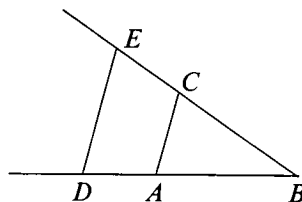
$$13 = \left(\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \quad \text{— Vredenduin laat zien hoe}$$

Diophantus te werk ging — maar hij had willekeurig veel andere oplossingen kunnen vinden. Voor de ontwikkeling van het getalbegrip is van belang dat Diophantus verder ging dan Euclides, die wel rekende met verhoudingen van gehele getallen, maar bij wie rationale getallen nog geen zelfstandige positie hadden, hetgeen bij Diophantus dus wel het geval was. Tenslotte merkt Vredenduin nog over Diophantus op dat die ergens op de vergelijking $4x + 20 = 4$ stuitte, en daarbij opmerkte dat dit een absurde vergelijking was omdat de oplossing min 4 niet bestaat.

Hoofdstuk 2 ('Het meetkundige aspect van het positieve getal') begint met de vierkantsvergelijkingen in de algebra van Al-Khwarizmi (eerste helft 9e eeuw). Al-Khwarizmi, wiens naam in het Latijn onvertaald als Algorismus werd overgenomen, leeft voort in ons woord *algoritme*, en zijn bijdrage aan de wiskunde heeft ook bestaan uit een aantal algoritmen, namelijk rekenkundige oplossingsmethoden voor vierkantsvergelijkingen, waarvan hij vervolgens meetkundig de juistheid aantoonde. Voorbeelden zijn de vergelijkingen 'Een vierkant

en 10 wortels is gelijk aan 39' [$x^2 + 10x = 39$] en 'Een vierkant en 21 is gelijk aan 10 wortels'. Omdat Al-Khwarizmi niet met negatieve coëfficiënten werkte waren dit essentieel verschillende typen vergelijkingen, met verschillende oplossingsmethoden. Vooral het tweede geval, waarvan het meetkundige bewijs voor ons niet meteen voor de hand ligt, komt bij Vredenduin mooi uit de verf. Dan volgen in hetzelfde hoofdstuk de derdegraads vergelijkingen in het werk van Omar Khayyám (ca. 1044-1123), die deze vergelijkingen niet rekenkundig kon oplossen, maar die er wel een meetkundige constructie voor gaf. Zo loste hij de vergelijking $x^3 + a^2x = b$ op door een parabool (die hij meetkundig beschreef; wij zouden hem nu omschrijven met behulp van de vergelijking $x^2 = ay$) te snijden met een cirkel (in onze notatie: $x^2 + y^2 = \frac{b}{a^2}x$).

Hierna volgen in hoofdstuk 2 nog de vergelijkingstheorie en -notatie van Viète (1540-1603) en het gelijktijdige idee van Fermat (1601-1665) en Descartes (1596-1650) dat vergelijkingen in twee onbekenden een meetkundige plaats bepalen. Ook beschrijft Vredenduin nauwkeurig de nieuwe, en nu nog steeds gebruikte, algebraïsche notatie van Descartes en diens principieel nieuwe stap om de meetkundige voorstelling van getallen zuiver tot lijnstukken te beperken. Tot de 17e eeuw had men een produkt van twee getallen door een rechthoek voorgesteld en een produkt van drie getallen door een balk. Door een willekeurig lijnstuk als eenheid te kiezen kon Descartes het produkt van twee lijnstukken weer als een lijnstuk opvatten, en daarmee was bij hem ook het produkt van willekeurig veel lijnstukken, dat in de oudheid ondenkbaar was, een lijnstuk geworden. Om het produkt van de getallen BC en BD te construeren, zette Descartes deze getallen uit als lijnstukken met een gemeenschappelijk punt (het punt B in de figuur). Verder koos hij een willekeurig lijnstuk AB als eenheid. Om nu $BC \times BD$ te construeren trok Descartes een lijn door D evenwijdig aan AC , die lijn BC snijdt in E . Uit $BA = 1$ en $BE:BC = BD:BA$ (wegens gelijkvormigheid) volgde $BE = BC \times BD$. Als karakteristiek voorbeeld van Descartes' werkwijze laat Vredenduin ook nog zien hoe Descartes het klassieke Griekse probleem van de driedeling van



Figuur 1 Het produkt van de getallen BC en BD ; AB is de eenheid. Illustratie afkomstig uit het besproken boek.

de hoek vertaalde in een algebraïsch probleem (los de vergelijking $x^2 = 3x - q$ op), waarvan vervolgens de oplossing geconstrueerd werd via doorsnijding van een cirkel en een parabool.

Over het ontstaan van het tientallig stelsel en de tegenwoordig daarvoor door ons gebruikte notatie gaat het volgende hoofdstuk ('De geschiedenis van het getal 10'). Opnieuw treffen we vergelijkingen aan. Zo lezen we over de invoering (in 1542) van het moderne gelijktteken door Recorde, over het al dan niet accepteren van nul als oplossing van vergelijkingen door Al-Khwarizmi, Omar Khayyám, Leonardo van Pisa (beter bekend als Fibonacci) en Descartes.

Dan zijn in hoofdstuk 4 de negatieve getallen aan de beurt. In korte paragrafen laat Vredenduin zien hoe Diophantus, Al-Khwarizmi, en de oude Chinezen (2e eeuw v. Chr.) al voorlopers hadden van negatieve getallen, bijvoorbeeld omdat ze speciale notaties hadden voor verminder-getallen (zoals Vredenduin ze hier noemt), en zelfs regels om met die getallen te rekenen. In het Chinese werk *Wiskunde in negen boeken* komt bijvoorbeeld al een probleem voor als:

'Bij verkoop van 2 buffels, 5 hamels en de koop van 13 varkens blijft 1000 qian over.
Bij verkoop van 3 buffels en 3 varkens kan men 9 hamels kopen.
Bij verkoop van 6 hamels en 8 varkens koopt men 5 buffels en men komt dan 600 qian te kort.
Hoeveel kost een buffel, een hamel en een varken?'

Het werd opgelost door het schoonvegen van een matrix, waarbij de verminder-getallen in zwart

werden geschreven en vermeerder-getallen in rood (rood staan was dus gunstig). Toch betekent dit niet, zegt Vredenduin, dat de Chinezen al beschikten over negatieve getallen, want ze hadden er nog geen *complete* stel rekenregels voor. Vermenigvuldigen deden ze namelijk alleen met vermeerder-getallen als eerste factor. Het oudste werk dat we nu kennen waarin positieve en negatieve getallen voorkomen met een eigen notatie en met complete rekenregels voor $+$, $-$, $\times$ en $:$ is dat van de Indiër Brahmagupta (7e eeuw na Chr.). Bij de transmissie van deze kennis via de Arabische wereld naar West-Europa waren opnieuw vergelijkingen van groot belang. In de *Liber Abaci* (1202) van Leonardo van Pisa komt een stelsel eerstegraads vergelijkingen voor dat voor een van de onbekenden (de hoeveelheid geld die een zekere persoon bezit) de waarde $4029 - 4038$ oplevert. Voor Leonardo betekende dat: het vraagstuk is onoplosbaar, maar het wordt oplosbaar als men zegt dat de persoon in kwestie een schuld van 9 heeft. Vanaf dat moment werden negatieve oplossingen van vergelijkingen langzaam aan gemeengoed. Cardano (1501-1576) worstelde er in zijn beroemde *Ars Magna* (1545) nog enigszins mee, maar in de *Géométrie* van Descartes (1637) behoorden negatieve oplossingen tot het standaard-repertoire, hoewel de terminologie nog steeds aan-geeft dat de acceptatie niet van harte ging. Een voorbeeld: voor Descartes heeft de vergelijking

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

waarvan hij het linkerlid gekregen had door het produkt $(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x + 5)$ te nemen, drie ware wortels (2, 3 en 4) en één valse, namelijk 5. Descartes, zo merkt Vredenduin hiërbij op, noteerde de negatieve wortels niet met een eigen notatie, bijvoorbeeld door middel van een minteken, maar hij gaf ze een aparte naam: 'valse wortels'. Na Descartes volgden de ontwikkelingen elkaar snel op: de invoering van de getallenlijn, waaruit Vredenduin een kostelijk stukje citaat geeft, door John Wallis (1616-1703), Newton (1642-1727) die inzag dat het voor een elegante theorie handig is om een vergelijking als een som van termen te beschouwen en de

coëfficiënten zo nodig negatief te nemen, Euler (1707-1783) die in 1770 de verschillende functies van het minteken onderscheidde, en verder een hele serie pogingen uit de 18e eeuw om te *bewijzen* dat $-a \cdot -b = a \cdot b$ (Clairaut, Saunderson, Simpson, Euler, Da Cunha, Laplace). Maar tegelijkertijd bleef het verzet, en in 1795 werd nog geschreven 'Het ware daarom te wensen, dat negatieve wortels nimmer toegelaten waren in de algebra of er weer uit verwijderd zouden worden.'

Met de jaren echter nam het verzet af, en dat was mede te danken aan 'De theoretische fundering' (zo luidt de titel van het vijfde en laatste hoofdstuk) van de negatieve getallen. In de loop van de 19e eeuw kwam namelijk het inzicht op dat wiskundige begrippen ook los van de realiteit ingevoerd en bestudeerd kunnen worden. Voor de negatieve getallen zette Peacock (1791-1858) daartoe in 1830 de eerste stap, en Hankel (1839-1873) voltooide deze ontwikkeling door in zijn boek *Vorlesungen über die complexe Zahlen und ihre Functionen* (1867) negatieve getallen in te voeren als een algemene structuur. Deze bestond uit een verzameling elementen waarop een binaire bewerking gedefinieerd is, die een inverse heeft en die aan een aantal grondregels voldoet. Vredenduin bespreekt deze grondregels en de daaruit afgeleide regels op heldere wijze. Het bewijs dat $(-a)(-c) = ac$ berustte bij Hankel niet meer op analogie of extrapolatie, het was een eenvoudig gevolg van de grondregels geworden. Met een korte algemene beschouwing over het proces waarin de wiskunde zijn impulsen aan de realiteit ontleent, om deze vervolgens los van de realiteit verder te ontwikkelen en de resultaten tenslotte weer op de realiteit los te laten, besluit Vredenduin *De geschiedenis van positief en negatief*.

Wat is dit voor een boek, en voor wie is dit boek bestemd? Ik vind het een mooi boek, zowel wat de inhoud als wat de uitvoering (mooi papier!) betreft. Het bevat een helder overzicht over een gevarieerd onderwerp en een schat aan informatie voor iedereen die geïnteresseerd is in de geschiedenis van de wiskunde en de oorsprong van de negatieve getallen in het bijzonder. En het biedt zeker houvast en stof tot nadenken aan diegenen die in hun onderwijs de negatieve getallen op het programma heb-

ben staan (en welke docent zit daar niet mee, af en toe?). Vanuit historisch perspectief heeft het boek wel enige tekortkomingen. Vredenduin heeft, zoals de uitgever in het Voorwoord opmerkt, om gezondheidsredenen een laatste bewerking van het manuscript niet tijdig kunnen afronden. Dat zou kunnen verklaren dat belangrijke literatuur (ik denk bijvoorbeeld aan Band 1 van *Geschiede der Elementarmathematik* van Tropfke, verschenen in 1980) ontbreekt, en dat recente inzichten (bijvoorbeeld van J. Sesiano over 'The Appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics', *Archive for History of Exact Sciences* 32 (1985), pp. 105-150) buiten beschouwing blijven. Kleine onnauwkeurigheden zijn blijven zitten (zo staat op p. 10 een foto van een kleitablet, maar op zijn kop afgedrukt, en zonder onderschrift of bronvermelding, en heette de Engelsman Recorde echt Robert?). Verder valt op dat veel citaten uit secundaire bronnen komen, terwijl betrouwbare primaire bronnen beschikbaar zijn. Op deze punten had de bewerker, die trouwens niet vermeldt welke werkzaamheden hij voor zijn rekening genomen heeft, wellicht nog goed werk kunnen doen. Het lijkt me echter onjuist om de maatstaven van de historicus aan het boek op te leggen, in elke geval moet dat niet de enige maatstaf zijn. En eigenlijk lees ik *De geschiedenis van positief en negatief* ook liever als een verhaal, waarin we een ontdekkingsreis kunnen meebeleven van Piet Vredenduin, die meer dan 50 jaar met zijn leerboeken het Nederlandse wiskundeonderwijs heeft gediend, en die daar nu nog een juweeltje met vele facetten aan toevoegt. Een terecht eerbetoon van de uitgever aan zijn zeer veelzijdige auteur, en in zeer positieve zin: een onge woon boek.

*) P. G. J. Vredenduin, *De geschiedenis van positief en negatief* (bewerkt door Peter van 't Riet), Groningen: Wolters-Noordhoff 1991. ISBN 90 01 91960 X

● 40 jaar geleden ● ●

► Vraagstukken

757¹⁾. Als α en β de wortels zijn van de vergelijking: $x^2 + px + q = 0$, waarbij $q \neq 0$ en $F(n) = \alpha^n + \beta^n$, waarbij n een geheel getal is, bewijs dan:

a.
$$F(-n) = \frac{F(n)}{q^n};$$

b.
$$F(-n + 2) + pF(-n + 1) + qF(-n) = 0.$$

758. In een convergente oneindig voortlopende meetkundige reeks met positieve termen, waarvan de reden r is, interpoleert men tussen elk tweetal termen één term, zó, dat er weer een meetkundige reeks ontstaat.

a. Als gegeven is, dat de som (ook wel limietsom of somlimiet genoemd) van de tweede reeks gelijk is aan p maal de som van de oorspronkelijke reeks, vraagt men welke betrekking er bestaat tussen de grootheden p en r .

b. Welke waarden van p zijn in dit vraagstuk slechts mogelijk?

759. a. Tussen welke grenzen moet x liggen, opdat ${}^{10}\log(2x - 5) < {}^{10}\log(x - 3)$?

b. Voor welke waarde van x is ${}^2\log {}^3\log x = -1$?

Teken een duidelijke grafiek van y als functie van x , als $y = {}^2\log {}^3\log x$.

(Er worden alleen reële waarden van x beschouwd).

¹⁾ De nrs. 757 t/m 759 werden opgegeven op het Eindexamen Gymnasium-B, 1952.

Vraagstukken uit *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, jaargang 40 (1952-1953).

'Ontwikkelingen in de didactiek'

► **Leren en Helpen Leren (I)**

Bram Lagerwerf)*

In 1993 komt er met de invoering van de basisvorming een nieuw leerplan voor alle leerlingen van mavo en vbo, en van de onderbouw van havo en vwo. Naast veranderingen in de leerstof gaat het daarbij ook om andere werkwijzen. Docenten en leerlingen zullen zich op een andere manier met de wiskunde gaan bezighouden. Zo'n andere werkhouding verwerft een docent niet van de ene op de andere dag, dat is een ontwikkelingsgang. Die ontwikkeling is trouwens voor veel docenten al aan de gang. Net zoals in de leerboeken al jaren elementen van het nieuwe programma te zien zijn.

Ontwikkelingen in de didactiek is een serie van 10 artikelen waarin verschillende aspecten van die nieuwe manier van werken worden beschreven. Dit vierde artikel en het vijfde gaan over de leertheorie achter de veranderingen.

Leren en Helpen Leren

Wiskundedocenten helpen leerlingen die wiskunde leren. Dat kan beter gaan wanneer de docent zo'n beetje weet hoe dat leren bij de leerlingen verloopt. Daar zijn allerlei theorieën over. In dit artikel en het volgende in de serie vindt u een beschrijving van denkbeelden die de vernieuwingen in het wiskunde-

onderwijs ondersteunen, en consequenties daarvan voor het onderwijzen van wiskunde op school. Uitgangspunt is dat we de leerlingen bruikbare wiskunde leren, dat betekent dat we moeten uitgaan van problemen in contexten die de leerlingen aanspreken.

In dit artikel staan vooral de voorbeelden, het volgende is meer theoretisch van aard.

VOORBEELDEN

Structureren

U staat voor een vbo-klas vol leerlingen die nog niet zo lang geleden van de basisschool zijn gekomen; het lijkt wel of ze elk jaar kleiner worden en hun tassen groter. Wat zijn ze in het begin nog enthousiast. U wilt beginnen. Vandaag is de recht-hoek aan de orde. Die is overvloedig in het lokaal aanwezig: de ramen, de deuren, de tafelbladen, de affiches aan de muur, de boeken en schriften op de tafels. U krijgt een andere kijk op de klas voor u. Uw aandacht is anders gericht; niet meer zozeer op de leerlingen waar u een les mee wilt beginnen, maar op al die rechthoekige dingen die er in de klas te zien zijn en die u als voorbeeld wilt gaan gebruiken. U heeft uw situatie opnieuw *gestructureerd*: u heeft verandering gebracht in wat uw aandacht heeft en wat u daarmee wilt gaan doen.

Beeldvorming

Ook de leerlingen moeten al die rechthoekige dingen onder een noemer gaan brengen. Dat kan heel snel, want natuurlijk is de rechthoek voor hen een bekende vorm. U geeft wat voorbeelden en dan begrijpen ze het al. Ze kunnen zelf nog wel meer voorbeelden aanwijzen.

Tot zover is het alleen repeteren van wat al bekend was voor de leerlingen; u wilt verder gaan.

Schematiseren

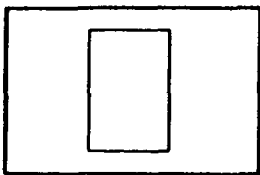
Daarvoor is nodig dat ze zelf gaan structureren: de aandacht richten met het oog op wat ze willen doen. En u geeft bijvoorbeeld deze opdracht:

De ramen, de deuren, de tafelbladen, de affiches aan de muur, de boeken en schriften op de tafels hebben allemaal dezelfde rechthoekige vorm. Probeer eens te vertellen wat een rechthoek is, zonder een voorbeeld aan te wijzen.

De leerlingen hebben dan aanleiding om anders naar hun omgeving te gaan kijken; ze richten hun aandacht op al die rechthoekige dingen om er woorden voor te vinden. Problemen vragen om actie, ze stimuleren het opnieuw structureren van de probleemsituatie.

De ramen, de deuren, de tafelbladen, de affiches aan de muur, de boeken en schriften op de tafels worden onder een noemer gebracht. Uit die concrete dingen ontstaat het abstracte beeld *rechthoek*, de rechthoekige vorm. De leerlingen proberen nu die vorm expliciet te maken.

Ze komen met verschillende beschrijvingen; er zijn mogelijkheden bij waar u zelf niet aan had gedacht. Een leerling zegt: Je tekent twee lijntjes zo: | |, en dat maak je van boven en van onderen dicht. Anderen doen het met hun handen: eerst zo: = , dan zo: | |. Dat komt op hetzelfde neer. Belangrijk is dat ze zien dat al die rechthoekige dingen dezelfde vorm hebben, en dat ze die vorm op de een of andere manier onder woorden kunnen brengen.



Figuur 1

Figuur 1 is een geschematiseerde tekening van een raam, een deur, een tafelblad, een affiche, een boek, of een schrift. Het is een 'uitgeklede' tekening: geen kleur, de afrondingen van de hoeken van de tafel zijn verdwenen, je ziet geen letters van het boek, de spiegeling van de ruiten is weg.

Het gaat alleen om de vorm. Zelfs de afmetingen doen er even niet toe.

Wanneer blijkt dat de leerlingen inderdaad met dit globale beeld vertrouwd zijn, kunt u met hen wat preciezer gaan kijken. U geeft een nieuwe opdracht:

Neem je schaar en een stuk papier; knip zo goed mogelijk een rechthoek uit dat papier.

Hoe kun je nu weten of wat je geknipt hebt wel precies een rechthoek is?

De leerlingen gaan opnieuw structureren, en er komen nieuwe beelden aan bod, nu van 'details' in het beeld:

- het moet links en rechts hetzelfde zijn, en onder en boven ook, net als bij een vlinder, dat kun je zien door te vouwen,
- je moet schuin meten van de ene hoek naar de andere; dat moet twee keer hetzelfde zijn,
- het moet goed recht zijn,
- de hoeken moeten haaks zijn.

Die opmerkingen zijn niet allemaal zonder meer bruikbaar. U laat wat er gezegd wordt illustreren aan de hand van verschillende rechthoeken in de klas en in de schriften. Verder vragen de begrippen symmetrie, diagonaal, evenwijdig en rechte hoek nog wel wat werk van de leerlingen en van u. De taal speelt daarbij een belangrijke rol. Namen voor zaken die al wel te zien waren maar nog niet goed benoemd: hoeken, hoekpunt, zijde, gelijke lijnstukken, evenwijdig. Maar ook nieuwe begrippen die een naam moeten hebben, zoals de diagonaal.

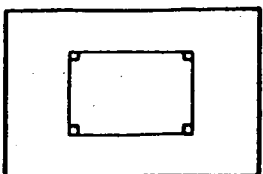
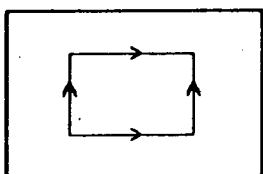
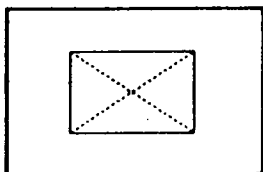
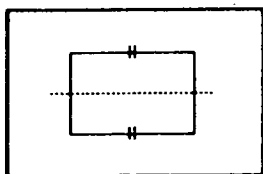
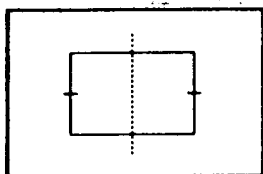
Het benoemen en beschrijven maakt het voor de leerlingen gemakkelijker te zeggen wat ze bedoelen. Het beeld wordt daardoor toegankelijker.

Dan kunnen ook de detailbeelden geschematiseerd worden weergegeven: figuur 2 t/m 6 (blz. 120).

Wiskundige structuren

Zo ontstaat voor de leerlingen langzamerhand een *wiskundige* structuur die niet meer aan een concreet probleem gebonden is; figuur 7. Zonodig kunnen ze die structuur in een concrete situatie van stal halen als dat kan helpen voor de oplossing van het

probleem. Zo'n wiskundige structuur hebben de leerlingen als het ware achter de hand; daardoor hoeven ze problemen zoals die hierboven staan niet steeds opnieuw op te lossen. Later wordt deze structuur verder uitgebreid.



Figuren 2 t/m 6

Logische bewijzen

De echte wiskundige gaat natuurlijk verder. Die ontwerpt axioma's, definities en stellingen, en die wil bijvoorbeeld *bewijzen*, dat als in een vierhoek de overstaande zijden twee aan twee evenwijdig zijn, ze logischerwijze ook gelijk zijn. En die betoogt dat een vierhoek met drie rechte hoeken al een rechthoek is; meer hoeft niet. Dat soort zaken noem ik *theorie*. De meeste leerlingen komen daar nooit aan toe.

Nog een voorbeeld

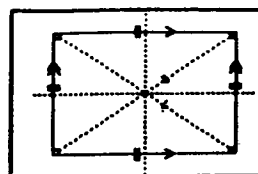
De lineaire vergelijking

Beeldvorming

Aan de leerlingen worden allerlei herkenbare problemen voorgelegd, waarin twee lineaire verbanden met elkaar worden vergeleken: welk gastarief is voordeliger?, welke huurauto is voordeliger?, waar ontmoeten twee fietsers elkaar?, enzovoort. Voor de leerlingen ontstaat daaruit dit beeld van de aanpak:

- er zijn telkens twee eenvoudige berekeningen die beginnen met het zelfde begingetal,
- je vergelijkt de uitkomsten van die twee berekeningen, meestal zijn ze verschillend,
- vaak kun je een begingetal vinden waarbij de twee berekeningen dezelfde uitkomst hebben,

Dit is niet zozeer een visueel beeld; de leerling staat echter duidelijk voor ogen wat er in al die situaties hetzelfde was. Ik beschrijf dit beeld met voor de leerling alledaagse woorden, met actietaal. Met dit soort taal is het voor de leerlingen gemakkelijker de



Figuur 7

verbinding te leggen tussen enerzijds de gebruikte formulering en anderzijds het werk dat ze gedaan hebben.

Schematiseren

De schematisering is eigenlijk al begonnen met het onder woorden brengen van het beeld. Het is hier niet zo eenvoudig als bij de rechthoek de schematisering voort te zetten. Waar we uiteindelijk naar toe willen is de schematisering van de oplossing van de vergelijking. Dan bent u misschien al wel een jaar verder. Een goed hulpmiddel is de rekenresultaten in een tabel te zetten, dat maakt ze al wat overzichtelijker. Dan de stap van de tabel naar de grafiek; die maakt het verloop duidelijker en het wordt gemakkelijker de beginwaarde met de gelijke uitkomsten te vinden. Alles nog heel concreet. Nu moet er een vergelijking komen; er is nog niet meer dan een soort recept, voor de gastarieven bijvoorbeeld:

Je doet het aantal m³ maal de prijs van het gas per m³ en daar tel je het vastrecht bij op; dat is wat je moet betalen. Dat moet je eerst doen voor de ene berekening en dan voor de andere; dan zoeken naar het aantal m³ waarbij je twee keer hetzelfde krijgt.

Dat kan korter en overzichtelijker, als daar behoefte aan is, door gebruik te maken van + en × en =, door de variabelen in één woord te vangen en door wat werkwoorden en lidwoorden weg te laten:

$m^3\text{-aantal} \times m^3\text{-prijs} + \text{vastrecht (voor de ene situatie)} = m^3\text{-aantal} \times m^3\text{-prijs} + \text{het vastrecht (voor andere situatie)}.$

Nu zoeken naar het aantal m³ waarbij het klopt.

Het is belangrijk dat de leerlingen zelf zoeken naar mogelijkheden voor verkortingen en meer overzicht, dat bevordert hun vermogen tot (her)structureren. Ze begrijpen ook wel dat korter en overzichtelijker minder werk betekent. De volgende stap is bijvoorbeeld:

Los op:

$m^3\text{-aantal} \times m^3\text{-prijs-A} + \text{vastrecht-A} =$
 $= m^3\text{-aantal} \times m^3\text{-prijs-B} + \text{vastrecht B}$

Er is dus nu een *vergelijking* met een *linker-* en een *rechterlid*, die moet worden *opgelost*. De woorden kunnen nu nog worden afgekort, maar veel verder moet u niet gaan want dan gaat het verband met de werkelijkheid verloren.

Op zeker moment ontstaat er behoefte aan meer. Er komen opgaven met moeilijke getallen waar toch een precies antwoord bij gevonden moet worden. Bijvoorbeeld:

Vergelijk de kosten van de huurauto van f0,20 per km met f560,- vaste kosten en de huurauto van f0,16 per km met f695,- vaste kosten.

De vergelijking is:

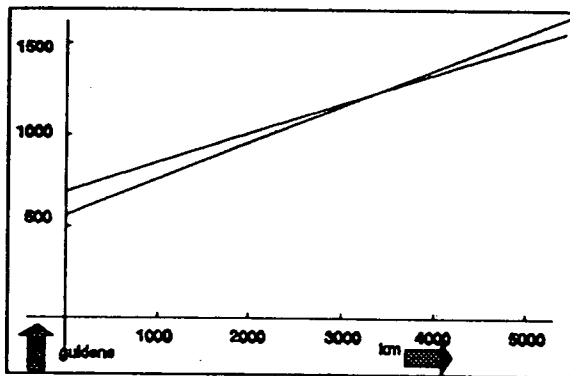
$$0,20 \times \text{km-aantal} + 560 =$$

$$= 0,16 \times \text{km-aantal} + 695$$

Het moet voor de leerling duidelijk blijven dat het links en rechts om bedragen gaat. Door goed naar het probleem te kijken, en gebruik te maken van hun kennis van de probleemsituatie en van grafieken, kunnen de leerlingen namelijk leren, wat bij het manipuleren van een vergelijking al of niet geoorloofd is.

Wanneer de garages beide f560,- minder vaste kosten zouden rekenen zou dat voor de prijsvergelijking natuurlijk niet uitmaken: links en rechts 560 aftrekken. In de grafiek komt dat neer op het naar beneden schuiven van de lijnen, daarbij blijft hun snijpunt hangen boven hetzelfde aantal kilometers. Dat wordt dan:

$$0,20 \times \text{km-aantal} = 0,16 \times \text{km-aantal} + 135$$



Figuur 8

Ook als beide auto's per kilometer 16 cent minder zouden kosten, zou dat voor de prijsvergelijking niets uitmaken, het blijft 4 cent per km verschil. In de vergelijking is dat links en rechts $0,16 \times \text{km}$ aftrekken:

$$0,04 \times \text{km-aantal} = 135$$

Dat het niet uitmaakt zie je ook als je de grafiek van $0,4 \times \text{km-aantal}$ snijdt met de lijn $g = 135$.

Dan de laatste stapjes; $25 \times 0,4 = 1$ dus:

$$\text{km-aantal} = 25 \times 135 = 3375$$

Op den duur wordt het de leerlingen duidelijk dat ze steeds hetzelfde doen in dergelijke probleemsituaties. Het oplossingsproces wordt dan een automatisme dat niet steeds met het probleem in verband wordt gebracht. Wanneer de leerling het niet goed meer weet kan die teruggrijpen naar de grafiek of naar de betekenis van de vergelijking in de probleemsituatie.

Er is nog geen sprake van een logische structuur, het is een abstracte wiskundige beschrijving van wat in concrete probleemsituaties te zien is. Op den duur gaat de nieuwe structuur een eigen leven leiden, los van de situaties.

Logische bewijzen

Het is een heel karwei om rond vergelijkingen een logisch stelsel van axioma's, definities, stellingen en bewijzen op te bouwen. Daarmee zou dan echt bewezen kunnen worden, dat een vergelijking waarin je links en rechts hetzelfde aftrekt, overgaat in een gelijkwaardige vergelijking. Daar moet u de leerlingen maar niet mee lastig vallen.

In deze voorbeelden is een aantal grote lijnen te trekken:

- bij het leren van wiskunde spelen aanvankelijk globale beelden een belangrijke rol, ze ontstaan doordat de leerlingen in diverse probleemsituaties dezelfde beeldstructuur herkennen,
- als er behoefte is om meer met die beelden te kunnen doen, worden ze steeds verder geschematiseerd; dat begint met het onder woorden brengen

van het globale beeld en daarna van allerlei details. Ook nieuwe begrippen worden beschreven; er ontstaat een begin van de vaktaal. Ook bij de schematisering is het structureren van concrete problemen uitgangspunt,

- het resultaat van de schematisering is een wiskundige structuur die de leerling zich heeft eigen gemaakt, de leerling kan die met woord en beeld beschrijven, en in nieuwe problemen toepassen,
- het vervolg van de schematisering is het ontwikkelen van een logische structuur; dat is veelal vakwerk voor wiskundigen.

In het volgende artikel worden deze lijnen uitgewerkt.

Noten

Een compleet overzicht voor het vak wiskunde in de basisvorming vindt u in de SLO-uitgave:

Op weg naar basisvorming, wiskunde; besteladres: SLO, postbus 2041, 7500 CA Enschede, telefoon: 053-840840.

In de Samenwerkingsgroep Wiskunde 12-16, SW12-16, werkt een aantal instanties samen aan de invoering van de nieuwe programma's: de lerarenopleidingen, de proefscholen, de Stichting Leerplan-Ontwikkeling SLO, het Freudenthal instituut en het Centraal Instituut voor Toets-Ontwikkeling CITO; de coördinatie berust bij het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum APS, daar is ook de informatie-telefoon 020-5481766.

**) De artikelen 4 en 5 in deze serie hadden niet geschreven kunnen worden zonder de bijdrage van Fred Korthagen in vele gesprekken die wij over dit onderwerp voerden.*

● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

► Oplossing 638

In een $5 \times 5 \times 5$ -kubus zijn er $3 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 + 4 = 109$ rijen van vijf-op-een-rij mogelijk. Nu gaan we van de 125 knikkers er zo weinig mogelijk verwijderen, zodat er nergens meer een rijtje van 5 knikkers te vinden is. Als voorbeeld gaf ik de tekening van Hans van Maanen voor $n = 3$. In de linker figuur heb ik in elk hokje met een cijfer aangegeven op welke hoogte een knikker is weggehaald. Voor $n = 3$ blijven er dus nog maximaal $3^3 - 3^2 - 2 = 16$ knikkers over.

3	2	1
2	1 2 3	2
1	2	3

1 2	3	1	1 4
4	1	3	2
3	2	4	1
1	4	2	1 3

Voor $n = 4$ is $f(4) = 45$ knikkers het maximum: 'overall' 1 knikker weg plus 3 extra weg in de hoekpunten van de onderlaag.

Toen de puzzel in 1989 in Het Parool verscheen vond *Matthijs den Otter* (5), Munstergeleen m.b.v. de computer al een oplossing voor $n = 5$ met maximaal 97 knikkers. Zie de linkerfiguur.

5	1	23	5	4	5	2	1	4	3
5	4	3	1	2	2	1	3	5	4
34	2	13	3	5	3	3	3	3	1
1	5	4	2	3	4	5	3	1	2
2	3	5	4	1	1	4	3	2	5

(In het centrum ook nog de cijfers 2, 4 en 5.)

Zelf kwam ik maar tot $f(5) = 96$ knikkers. Veel puzzelaars vonden dit zelfde aantal, dat 4 punten opleverde. Slechts 1 inzender vond (zonder computer!) een oplossing met 97 knikkers (zie de rechterfiguur): *Wobien Bronstring-Doyer* (5), Leiden. De 5 punten voor de nieuwe ladder zijn je van harte gegund! Tot en met $n = 8$ hebben de lezers de volgende maxima $f(n)$ gevonden:

n	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	1	16	45	97	177	294	446

Bij n even is er veel onduidelijkheid. Als n voldoende groot is, dan is de formule misschien $f(n) = n^3 - n^2 - 3$. (Zie $n = 4$.)

Voor n oneven is het probleem misschien opgelost. *Lourens van den Brom* (24), Krommenie heeft een uitgebreid onderzoek verricht. Hij zocht speciale 'Diagonal Latin Squares' met de volgende eigenschappen:

- 1 Elke rij is een permutatie van 1 t/m n .
 - 2 Elke kolom is een permutatie van 1 t/m n .
 - 3 Elke diagonaal is een permutatie van 1 t/m n .
 - 4 In het centrum staat het getal $(n + 1)/2$.
 - 5 Als $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n$ een rij, kolom of diagonaal is, dan moet er voor zekere i en j gelden: $a_i = i$ en $a_j = n + 1 - j$.
- Voor $n = 7$ en $n = 9$ vond hij inderdaad deze Latijnse Vierkanten:

3	1	5	2	6	4	7	3	8	5	1	4	7	2	6	9
2	5	7	1	3	6	4	9	6	2	7	1	5	4	8	3
7	4	1	6	5	3	2	5	3	1	6	2	8	7	9	4
6	7	2	4	1	5	3	4	9	7	8	3	6	1	5	2
4	6	3	7	2	1	5	2	7	4	9	5	1	6	3	8
5	2	6	3	4	7	1	8	5	9	4	7	2	3	1	6
1	3	4	5	7	2	6	6	1	3	2	8	4	9	7	5
							7	2	6	5	9	3	8	4	1
							1	4	8	3	6	9	5	2	7

Het vermoeden is dat voor n oneven en $n \geq 7$ geldt: $f(n) = n^3 - n^2$. Een bewijs kan echter nog niet geleverd worden!

De laddertop zakte naar 38 punten met als winnaar: *Jan Verbakel* (Sr.), Pisanostraat 282, 5623 CJ Eindhoven. Hartelijk gefeliciteerd met de boekenbon van $f(25,-)$.

► Opgave 641

Toen deze rubriek 5 jaar bestond heeft Piet Vredenduin een selectie gemaakt van de beste puzzels. Dit resulteerde in het boekje 'Vijfentachtig wiskundige puzzels' (1964). Verschillende puzzels waren bedacht door de toen 47-jarige niet-wiskundige, *Bob Kootstra* (14) uit Roosendaal. De laatste puzzel in 't boekje was een nieuwjaarswens van hem voor 1963. Ik vind het ontzettend leuk om u allen, precies 30 jaar later, weer een nieuwjaarspuzzel aan te bieden van deze raspuzzelaar!

Welke cijfers staan er op de stippen?

$$\sqrt{\frac{\dots}{\dots}} = 1,9931993\dots$$

Hierbij wil ik opmerken dat Bob geen computer heeft en alleen pen, papier en rekenapparaat gebruikt.

De opgave is: wat is de gevraagde breuk en welke methode gebruikte Bob?

Binnen een maand een goede oplossing inzenden levert u 5 punten voor de ladderwedstrijd op.

● Boekbeschouwing ●

► De Epsilon Uitgaven*)

M.C. van Hoorn

Inleiding

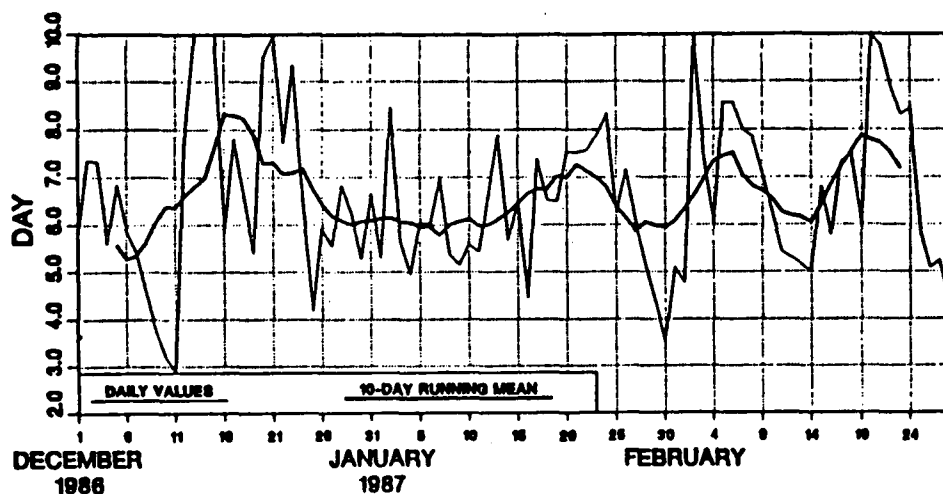
Vanaf 1985 zijn als Epsilon Uitgave inmiddels ruim 20 boeken verschenen. Enkele ervan hebben al een herdruk mogen beleven. Dit wijst op succes. Wat beogen de mensen van de Uitgeverij Epsilon

Uitgaven? Wat voor boeken willen ze uitbrengen? Waarom?

Citaat uit de catalogus: 'Epsilon Uitgaven beoogt het tot stand brengen en verspreiden van wetenschappelijke boeken in de Nederlandse taal. Hierbij ligt de nadruk op wiskunde, maar ook boeken uit andere wetenschappen vinden een plaats in de reeks. Een overweging van de redactie is, dat het vaak moeizame kennismaken met nieuwe ideeën eerder de verbeelding prikkelt en tot inzicht leidt, indien dit plaats vindt in de eigen taal. Daarnaast is het zinvol om, uitgaande van de in het Nederlands taalgebied aanwezige deskundigheid, deze wetenschappen systematisch toegankelijk te maken voor een breder publiek. Hopelijk leidt dit tot nauwere relaties tussen onderzoekers aan universiteiten en werkers in de beroepspraktijk.'

De boeken

De verschenen boeken in de serie Epsilon Uitgaven vertonen een grote verscheidenheid aan onderwerpen en in wijze van behandeling. Er zitten boeken tussen over recent ontwikkelde wiskunde, maar ook



Figuur 1 Variatie in de geldigheidsduur van numerieke weersverwachtingen, gebaseerd op het model van het Europese Centrum voor Middellange Termijn Weersverwachtingen (E.C.M.W.F.) in Reading (G.B.). Van elke verwachting is achteraf het aantal dagen bepaald dat deze een redelijke beschrijving gaf van het opgetreden weer op aarde. Gemiddeld gesproken is de geldigheidsduur zo'n 6 dagen, maar er zijn grote uitschieters te zien, zowel naar boven (meer dan 10 dagen op 14 december) als naar beneden (3 dagen op 11 december). De vette lijn geeft een 10-daags lopend gemiddelde aan, waarbij op iedere datum het gemiddelde is opgenomen van de voorgaande 10 dagen.

enkele klassieken. Tot de laatste groep behoren Bottema's *Theoretische Mechanica* en Heyting's *Projectieve Meetkunde*, alsmede twee werken van Christiaan Huygens in hedendaags Nederlands. In de catalogus wordt overigens verzuimd te vermelden dat de boeken van Bottema en Heyting heruitgaven zijn.

Drie van de boeken zijn van de hand van Lauwerier, die met de microcomputer analyse, meetkunde en modellering beoefent; hij is er befaamd om.

De afgelopen jaren zijn in Euclides recensies of karakteristieken verschenen van pakweg de helft van de verschenen boeken uit de Epsilon-reeks. In dit artikel voegen we notities toe over vier andere Epsilon Uitgaven.

Dynamische Systemen en Chaos, door H.W. Broer en F. Verhulst (redactie)

Dit is nummer 14 uit de reeks. Het is een prachtig boek.

Het gaat met name over chaotisch gedrag in deterministische dynamische systemen. Reeds bij een eenvoudig lijkend systeem als een schommel is het mogelijk dat nimmer een keurige oscillatie optreedt. Een veel voorkomend begrip is quasi-periodiciteit. Twee harmonische bewegingen met verschillende periodes lijken weliswaar samen te behoren tot één periodieke beweging, maar als de beide periodes een irrationele verhouding bezitten, zal na verloop van tijd wel blijken dat het beeld telkens weer anders is.

Fractale verzamelingen zijn evenzeer van belang. Mooie voorbeelden worden beschouwd, onder andere de beweging van een treinwagon, het weer en populaties schapevleesvliegen. Figuur 1 komt uit dit boek.

Elf auteurs werkten aan het boek mee. Zij hebben dat met kennelijk plezier gedaan, iets wat terecht in het voorwoord vermeld is. De schaarse drukfouten storen niet.

Kaleidoskoop van de wiskunde 1, door F. van der Blij, J.P. Hogendijk en F. Oort (redactie)

Nummer 17 uit de reeks is een heel ander boek. In eerste instantie vraag je je af waarom het geschreven is. Het blijkt te gaan om een bundeling van een

reeks voordrachten, wat veel verklaart. De voordrachten behelzen ondermeer Priemgetallen (F. Oort, de enige bijdrage waarin iets over cryptologie voorkomt), Het oplossen van grondwaterstromingsproblemen (E.J.M. Veling), Babylonische astronomie (J.P. Hogendijk) en Rekenen aan de Riemann-hypothese (H.J.J. te Riele).

Ik weet niet of het samenbrengen van zo geheel verschillende zaken commercieel erg gelukkig geweest is. Afzonderlijke boeken over bijvoorbeeld analytische en algebraïsche getallentheorie waren wellicht te verkiezen geweest. Dan had bovendien de cryptologie meer plaats kunnen krijgen, een onderwerp waaraan tot dusverre in de Epsilonreeks niet één uitgave is gewijd. Of laat men dat over aan concurrent Aramith?

Ook de geschiedenis van de wiskunde verdient minstens een eigen uitgave.

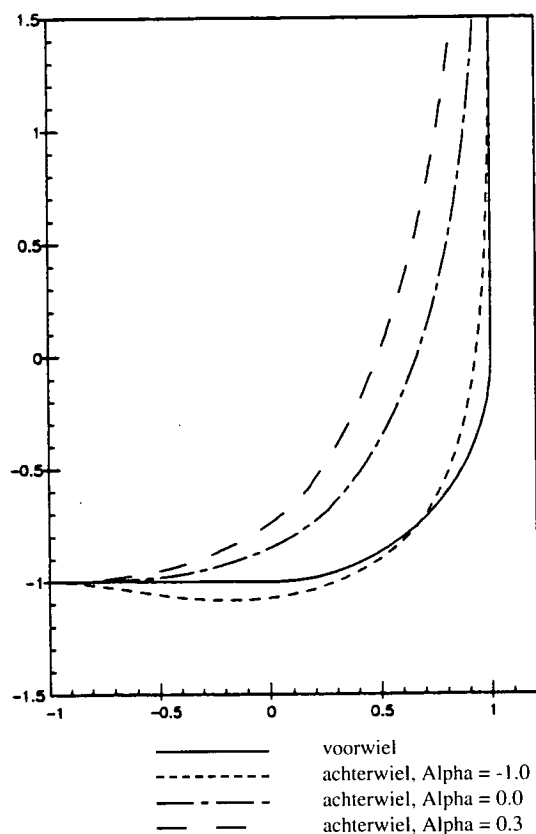
Beginwaardeproblemen in theorie en praktijk, door R.M.M. Matheij en J. Molenaar

Nummer 19 is weer een prachtig boek. De auteurs komen uit de hoek van de industriële wiskunde. Zij hebben hun onderwerp bewust beperkt tot beginwaardeproblemen. Al lezend wordt een trip gemaakt langs wiskundige basisbegrippen, zoals differentiaal- en differentievergelijkingen, uitmondend in fraaie toepassingen (diffusieprocessen, achterwielbesturing en andere). Figuur 2 (blz. 126) komt uit dit boek.

Het is een degelijk boek, dat de lezer niet spaart, en een goede indruk geeft van de huidige stand van zaken in het beschreven gebied. Ieder die zich bezig houdt met leerplannen voor het vwo moet dit boek lezen.

Wiskundige Methoden Toegepast, door J. Grasman

De ondertitel van nummer 22 uit de reeks luidt: 'de dynamica van processen in biologie, chemie, farmacie, economie, milieuwetenschappen'. Wie meent over de toepassingen van wiskundige methoden in de genoemde vakgebieden veel aan de weet te komen, komt enigszins bedrogen uit. Het onderhavige boek is hoofdzakelijk (95 %) een wiskundeboek. Men kan zich voorstellen dat de eerstejaars studenten in Wageningen - waar de auteur aan de



Figuur 2 De banen van het voorwiel (getrokken lijn) en het achterwiel (onderbroken lijnen) bij het nemen van een rechte hoek.

L.U. doceert - deze kost voorgeschoteld krijgen. Het boek is vooral uiterst praktisch. Elke paragraaf bevat voorbeelden en opgaven. Het is in zekere zin een voortzetting van de vwo B-wiskunde (volgens de auteur ook van de vwo A-wiskunde), maar dan moderner en veelzijdiger. De pleidooien voor het werken met differentiaal zijn aan de auteur niet besteed geweest.

Ieder die zich bezig houdt met leerplannen voor het vwo zou ook dit boek mogen lezen.

*) Epsilon Uitgaven, Parkstraat 11, 3581 PB Utrecht,
030-311516

► Van de bestuurstafel

Agneta Aukema-Schepel

W12-16 voor 17-87-jarigen

In januari 1992 organiseerde de NVvW een bijeenkomst voor leraren in het volwassenenonderwijs. Zij konden toen van gedachten wisselen met vertegenwoordigers van de COW en het team W12-16, over de wensen en ook over de experimenteermogelijkheden bij de invoering van de nieuwe programma's.

Hoe is de stand nu?

Sinds september 1992 wordt er aan het Eindhovens Dag- en Avondcollege, begeleid door het APS, geëxperimenteerd met een driejarige mavo-opleiding voor volwassenen. Hier wordt gewerkt volgens het nieuwe programma, waarbij door het team W12-16 ontwikkelde pakketten en eigen materialen gebruikt worden.

Doel is tot een voor volwassenen bruikbare 'indiking' te komen. Dit moet leiden tot een eigen trajectenboek voor het volwassenenonderwijs.

Vier schrijvers, werkzaam aan scholen voor volwassenen, proberen de trajecten vorm te geven in een nieuwe methode voor volwassenen. Dit gebeurt onder auspiciën van het APS, met een inhoudelijke adviseur van de SLO en in samenwerking met een uitgever.

Het streven is dit nieuwe materiaal vervolgens weer uit te proberen in Eindhoven. Het zal daarom op zijn vroegst in het voorjaar van 1995 beschikbaar komen.

Anders dan in de bovenbouw van havo en vwo waar de cursusduur voor volwassenen verlengd mag worden, is deze voor het mavo C/D-examen maximaal 3 jaar, met andere woorden korter dan in het jongerenonderwijs. Dit betekent dat alle andere scholen voor volwassenen in 1993 en in 1994 nog zullen moeten starten met de oude programma's. In 1995 volgt dan een éénjarige cursus. In 1997 moeten zij zowel het oude als het nieuwe C/D-examen kunnen afnemen.

Dit alles geldt uiteraard onder voorbehoud. De scholen krijgen hierover bericht via een SLO-bulletin.

In 1993 hopen wij weer een speciale bijeenkomst voor leraren in het volwassenenonderwijs te houden.

Mededelingen

Wintersymposium

Op zaterdag 9 januari 1993 organiseert het Wiskundig Genootschap haar Wintersymposium onder de titel '*Grafentheorie en haar toepassingen*'. De bescheiden rol die grafentheorie in het wiskunde A-onderwijs speelt, nodigt uit dit onderwerp nader te laten bespreken. Een drietal sprekers zal ingaan op zowel theoretische als toegepaste aspecten van de grafentheorie. Dat dit symposium speciaal voor docenten uit het voortgezet onderwijs is georganiseerd, neemt niet weg dat anderen ook van harte welkom zijn.

Het programma luidt als volgt:

- | | |
|-------------|--|
| 9.30-10.00 | Ontvangst met koffie |
| 10.00-11.00 | drs. R. Bosch |
| | Grafen en Matrices in het wiskunde A-onderwijs |
| 11.15-12.15 | dr. R.H. Jeurissen |
| | De Petersen-graph: een (kleur)rijke bron |
| 12.15-13.30 | pauze, waarin men kan deelnemen aan een gezamenlijke lunch |
| 13.30-14.45 | prof. dr. A. Schrijver |
| | Grafentheorie en het ontwerpen van een chip |

Het symposium wordt gehouden in het Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium, Groen van Prinstererlaan 33 in Amersfoort. Deelname aan het symposium is gratis.

Wie wil deelnemen aan de gezamenlijke lunch moet voor 31 december 1992 f15,- overmaken op gironummer 4157477 t.n.v. S. Garst te Oude Tonge.

Nascholing voor wiskundedocenten in het cursusjaar '92/'93

Cursustitel: **Werken met statistiek**

Doel/inhoud: Nadere kennismaking met een aantal theoretische en praktische aspecten van de statistiek. Met name wordt ingegaan op een viertal onderwerpen: werken met steekproeven, onderzoek van de eigenschappen van schatters met behulp van simulatietechnieken, voorspellen met behulp van tijdreeksen, en kwaliteitsverbetering van productieprocessen. De behandeling van de stof wordt afgewisseld met praktische oefeningen op de computer.

Bestemd voor: Wiskundedocenten uit het vwo.

Duur/periode: 10 woensdagmiddagen van 15.00 tot 18.00 uur, wekelijks van 13 januari 1993 tot en met 31 maart 1993, met uitzondering van 24 februari en 3 maart.

Plaats: Amsterdam.

Kosten: f125,-

Inschrijving: Stuur uw inschrijfformulier naar de Universiteit van Amsterdam, Faculteit Wiskunde en Informatica, Mevr. drs. Astrid Teunissen, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam.

Informatie: Mevr. drs. Astrid Teunissen, tel. 020-5256067; ook voor het aanvragen van een inschrijfformulier.

Methodekeuze-conferentie Wiskunde

Inhoud

Een veel gehoorde vraag tijdens de voorlichting over het nieuwe leerplan wiskunde is: 'zijn de nieuwe boeken op tijd klaar?' Het antwoord is 'Ja, de nieuwe boeken zullen er per 1 augustus 1993 zijn!' De bekende wiskundemethoden komen dan met delen voor de eerste klas, die zijn afgestemd op het nieuwe programma en er zullen ook enkele nieuwe methoden op de markt komen. De sectie kan in het voorjaar van 1993 beoordelen of een methode goed past bij het nieuwe leerplan. Een lastige zaak, waarbij wij de sectie graag ondersteunen in de vorm van regionale methodekeuze-conferenties. In samenwerking met de uitgevers hebben wij een programma gemaakt, waarbij u zich kunt oriënteren op de in augustus 1993 beschikbare methoden en waarbij u een start kunt maken met een eventueel keuzeproces van nieuwe leerboeken.

Programma

- | | |
|------------------|--|
| 10.00-10.30 uur: | Inleiding op de dag over wiskunde en basisvorming. |
| 10.30-12.00 uur: | Criteria voor schoolboekkeuze; keuzeproces in de sectie. |
| 12.00-13.00 uur: | Lunch; markt met leerboeken en leermiddelen. |
| 13.00-16.30 uur: | Drie keer een werkgroep van een uitgever. |

Boekbespreking

Materiaal

Elke deelnemer ontvangt het boek: 'Het kiezen van een wiskundemethode bij het nieuwe leerplan'. Daarin vindt u een beschrijving van alle methoden, die voor wiskunde op de markt zijn.

Kosten

De kosten zijn f45,- per deelnemer; voor dit bedrag ontvangt u ook het boek.

Deze conferenties worden georganiseerd door het APS met behulp van de Samenwerkingsgroep Wiskunde 12-16.

De mogelijke plaatsen en data zijn:

Donderdag 7 januari 1993: Utrecht

Maandag 25 januari 1993: Groningen

Dinsdag 26 januari 1993: Eindhoven

Woensdag 27 januari 1993: Amsterdam

Donderdag 28 januari 1993: Rotterdam

Vrijdag 29 januari 1993: Tilburg

Maandag 8 februari: Zwolle

Dinsdag 9 februari: Nijmegen

Donderdag 11 februari 1993: Middelburg

Vrijdag 12 februari 1993: Sittard

De bijeenkomsten beginnen om 10.00 uur en eindigen om 16.30 uur. U kunt zich schriftelijk aanmelden bij het

Algemeen Pedagogisch Studiecentrum,

t.a.v. Bertina Nieuwenhuizen,

Postbus 7888, 1008 AB Amsterdam

onder vermelding van naam, adres, woonplaats, telefoonnummer en plaats en datum van de conferentie.

Christoph Bandelow, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*, B. I. Wissenschaftsverlag, 242 blz., DM 24,80.

De 'Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie' is in pocketboekformaat de weergave van de colleges die Ch. Bandelow aan de Florida State University en aan de Ruhr-Universität Bochum voor tweedejaars (ab dem. 3. Semester) studenten Wiskunde heeft gegeven. De schrijver beweert in zijn voorwoord dat hij niet veel wiskundige achtergrond eist, zodat geïnteresseerden uit toepassingsgebieden het boek ook kunnen begrijpen. Bovendien hecht hij veel waarde aan de motivatie van de achtergrondbegrippen. Dit laatste komt wel tot uiting, maar zorgt tevens voor een flinke mathematisering zodat niet-wiskundigen, volgens mij, grote moeite met dit werk zullen hebben.

In het eerste driekwart van het boek wordt aandacht besteed aan de beginselen van de kansrekening zoals verzamelingenleer, combinatoriek, kansbegrip, maattheorie, voorwaardelijke en onafhankelijke kansen, verdelings- en kansdichtheidsfuncties en momenten. Voor de rest komen de speciale verdelingen, de centrale limietstelling en de fluctuatietheorie aan de orde.

Alle onderdelen worden afgesloten met een serie opgaven, waarvan het boek er totaal 220 bevat. Ook hiervoor geldt dat ze veel meer op de theoretische achtergrond slaan dan op praktische toepassingen. Een antwoordenlijst hiervan ontbreekt.

Het boek wordt afgesloten met een uitgebreide literatuurverwijzing, trefwoordenregister en symbolenlijst.

Drs. J. V. Jansen

Adressen van auteurs

A. Aukema-Schepel, Buitenplaats 77,
8212 AC Lelystad

K. van Berkel, Instituut voor Geschiedenis R.U.G.,
Postbus 716, 9700 AS Groningen

M.C. van Hoorn, Noordersingel 12,
9901 BP Appingedam

A. Lagerwerf, Dwarsweg 52,
3702 XC Zeist

J. van Maanen, Vakgroep Wiskunde R.U.G.,
Postbus 800, 9700 AV Groningen

H.J. Smid, T.U.D., vakgroep techn. wisk. en inf., Postbus 356,
2600 AJ Delft

J.W. van der Vaart, v.d. Mastenstraat 4,
2611 NZ Delft

P. van Wingerden, Ch. de Bourbonlaan 66,
3708 CD Zeist

Kalender

11 of 12 december 1992: voorronde Wiskunde A-lympiade op de scholen voor vwo.

16 december 1992: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

9 januari 1993: Wintersymposium Wiskundig Genootschap te Amersfoort. Zie blz. 127 van dit nummer.

20 januari 1993: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

10 februari 1993: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

26 en 27 februari 1993: Wiskunde A-lympiade te Garderen.

12 maart 1993: eerste ronde Wiskunde Olympiade op de scholen voor havo en vwo.

17 september 1993: tweede ronde Wiskunde Olympiade in de Technische Universiteit te Eindhoven.



WISKUNDE EERSTEGRAADS

Al gedacht aan een eerstegraads lerarenopleiding wiskunde?

De Hogeschool Midden Nederland verzorgt een eerstegraads opleiding voor docenten met een tweedegraads bevoegdheid.

De opleiding:

- duurt 3 jaar met een studiebelasting van 20 uur per week
 - is een wiskundige uitbreiding van de tweedegraads opleiding
 - heeft veel aandacht voor de onderwijskundig-didactische kant van wiskunde A en B in havo/vwo
 - heeft speciale aandacht voor statistiek in havo/vwo
 - verdiept zich in software-gebruik bij het wiskunde-onderwijs
- De auditorenregeling is niet meer van toepassing.

Wilt u meer informatie?

U bent welkom op onze voorlichtingsdag zaterdag 30 januari 1993 tussen 10.00 en 14.00 uur.

Bezoekadres: Archimedeslaan 16, 3584 BA Utrecht.

U kunt ook meer vakinhoudelijke informatie aanvragen bij:

HMN Faculteit Educatieve Opleidingen

Vakgroep wiskunde dr. P. Lorist, tel. 030-547224, of

Bureau Voorlichting, tel. 030-547160

Postbus 14007, 3508 SB Utrecht

HOGESCHOOL MIDDEN NEDERLAND

Inhoud

Inhoud 97

H.J. Smid: W12-16 en de Bovenbouw 98

Vreemde woorden in de wiskunde 100

Piet van Wingerden: Toetsen, proefwerken en repetities 101

Mededelingen 101, 111, 127

K. van Berkel: E.J. Dijksterhuis en het onderwijs in de wiskunde 102

J.W. van der Vaart: De Nederlandse Wiskunde Olympiade 1992 (eerste ronde) 110

M.C. van Hoorn: Zuid-Afrika en Polen 111

Werkbladen 112

Jan van Maanen: Vredenduin over positief en negatief 114

40 jaar geleden 117

Bram Lagerwerf: Leren en Helpen Leren (I) 118

Recreatie 123

M.C. van Hoorn: De Epsilon Uitgaven 124

Agneta Aukema-Schepel: Van de bestuurstafel 126

Boekbespreking 128

Adressen van auteurs 128

Kalender 128