

Wolters-Noordhoff

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars

Vakblad voor de wiskundeleraar

Euclides

816
357
492

jaargang 68 1992 | 1993 oktober

Redactie

Drs. H. Bakker
Drs. R. Bosch
Drs. J. H. de Geus
Drs. M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
N. T. Lakeman (beeldredacteur)
D. Prins (secretaris)
W. Schaafsma
Ir. V. E. Schmidt (penningmeester)
Mw. Y. Schuringa-Schogt (eindredacteur)
Mw. Drs. A. Verweij
A. van der Wal
Drs. G. Zwaneveld (voorzitter)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,
8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43,
4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v.
Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f55,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f37,50; contributie zonder Euclides f30,00. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- en liefst voorzien te zijn van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f60,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f39,00.

Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie,
Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86.
Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers f10,00 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUI MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

● Inhoud ● ● ● ● ●

Bijdrage 34

Rosemary Flower *Een eigenzinnige aanpak van wiskundeonderwijs*

Samenvatting van een lezing, die op 21 maart 1992 te beluisteren was op het congres van Vrouwen en Wiskunde te Utrecht: over een verandering van lesmethode.

Verschenen 36, 59

Bijdrage 37

Martin Kindt *De bissectricestelling*
Elegante en minder elegante bewijzen van de klassieke bissectricestelling.

Mededelingen 43, 53

Vreemde woorden in de wiskunde 43

Bisectrix of bissectrice? Over de afleiding en herkomst van dit woord en andere kunt u lezen in deze bladvullende rubriek.

Serie 'Begrijpen' 44

Leen Bozuwa *Maak het niet te vlug (te) kort of: Progressieve schematisering in het VO.*

Bijdrage 45

Brief aan de voorzitter
Verontrusting over de COW-plannen voor het toekomstige wiskundeonderwijs, met een korte reactie van het Bestuur.

Werkbladen 48

Serie Wiskunde 12-16 (experimenteel) 50

M.C. van Hoorn *Bij drie experimentele examenopgaven.*

Boekbesprekingen 50, 64

Bijdrage 51

Jan Muthert *Cijferen of ontcijferen, Wiskunde A of tekstverklaring? (vervolg) 51*

'Talige' hindernissen in het eindexamen vwo wiskunde A 1992-I.

A. H. Degens *Waardering? 54*

Kanttekeningen bij het artikel van Jan de Lange in Euclides nummer 9 van jaargang 67.

Jan de Lange *De vele tongen van het MTO 55*
Reactie op het artikel 'Waardering?'

40 jaar geleden 55

Serie 'Ontwikkelingen in de didactiek' 56

Bram Lagerwerf *Het gebruik van contexten*
Over mogelijkheden en moeilijkheden.

Recreatie 60

Verenigingsnieuws 61

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1991-31 juli 1992 61

Jaarvergadering/Studiedag 1992 63

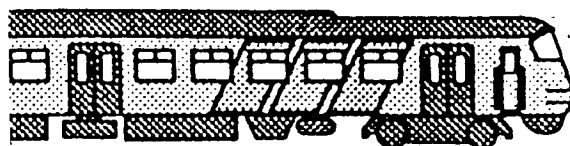
Bijdrage 64

H. G. J. M. Bouwens *Vereenvoudigd vereenvoudigen (vervolg)*

Waarom Jan ongelijk dient te krijgen.

Adressen van auteurs 64

Kalender 64



Reiskosten: jaar- of maandtrajectkaart?



► **Een eigenzinnige aanpak van wiskundeonderwijs***

Rosemary Flower

Hoe leren kinderen?

Hoe leerde u vroeger op school?

Hoe leert u nu?

Deze vragen hielden mij 6½ jaar geleden bezig. Hoe meer ik erover nadacht, des te meer ik begon te beseffen dat mijn manier van lesgeven helemaal zou moeten veranderen. Over deze verandering van lesmethode wil ik u vandaag iets vertellen.

Zestien jaar lang was ik een 'goede' lerares. Ik wist hoe ik leerlingen nieuwsgierig kon maken, hun aandacht kon vasthouden. De resultaten waren goed. In mijn hart wist ik echter dat de meeste leerlingen niet leerden omdat ze wiskunde leuk vonden, maar om mij een plezier te doen of om verder te kunnen studeren, een baan te krijgen, geld te verdienen.

Toen ik vrij plotseling hoofd werd van de wiskundesectie, werd dit het begin van een totaal nieuwe aanpak van het onderwijs. Vanuit het besef dat leren een ingewikkeld en zeer individueel proces is en met een aantal ideeën over benadering, begeleiding en aantrekkelijkheid van de wiskunde in het achterhoofd, hebben wij een methode ontwikkeld die de volgende punten centraal stelt: het wegnemen van drempelvrees, het stimuleren van leer-

lingen, zelfvertrouwen aankweken en vooral het aanmoedigen van een eigen, onafhankelijke wiskundige aanpak.

Gezien de tijd zal ik hier niet nader ingaan op het totale proces en het slagen of mislukken van onderdelen. Aan de hand van enkele voorbeelden wil ik u laten delen in de leerervaringen van onze leerlingen, in de hoop u aan het denken te zetten en te motiveren.

Een voorbeeld

Opdracht: kies uit de getallen 1 tot en met 10 twee maal drie cijfers. Doe dat zo, dat de beide driecijferige getallen bij optellen het getal 1000 geven.

Bijvoorbeeld:
$$\begin{array}{r} 438 \\ 562 \\ \hline 1000 \end{array}$$

Bij het zoeken naar de oplossing komen er vragen op. Eén vraag is: hoeveel oplossingen zijn er?

(kleine pauze om de toehoorders even te laten nadenken...)

Er zijn verschillende manieren om dit aan te pakken. Sommigen zullen beginnen willekeurige cijfers te combineren. Anderen zullen naar wetmatigheden gaan zoeken. Vast staat bijvoorbeeld dat de laatste twee cijfers altijd samen tien zijn ($8 + 2$), de middelste samen negen ($3 + 6$), de eerste samen ook negen ($4 + 5$). Het antwoord zal ik niet verklappen, in ieder geval zijn er meer dan 150 mogelijkheden.

Het begin van deze opgave is eenvoudig. Bijna iedere leerling kan een oplossing vinden. De volgende vraag is moeilijker. Voor wie die te moeilijk is kun je vereenvoudigen naar totaal 10 of 100. De opdracht kan ook aanzienlijk worden uitgebreid. Hoeveel manieren zijn er om 2000 te maken, zijn dat er meer of minder dan bij 1000? Enzovoort. Zo heb je dus de mogelijkheid vanuit één opdracht iedere leerling op zijn individuele mogelijkheden aan te spreken.

Het lokaal

Naar analogie van het weldadige effect van de zon creëren wij een vrolijke, interessante en uitdagende omgeving. Wij gebruiken gekleurd papier om mee te werken en hangen posters op.

Een poster met 1 miljoen stippen, gegroepeerd in vierkanten die weer uit vierkanten bestaan, is het uitgangspunt geweest om gevoel voor grote getallen te krijgen. Allerlei opgaven zijn hierbij te bedenken; ook met minuten, uren en jaren. Het is fascinerend te bedenken dat het ongeveer 1 miljoen dagen geleden is dat Rome werd gesticht door Romulus en Remus (753 voor Chr.)!

Wij verzamelen allerlei afvalmateriaal: dozen, bakjes, toilettrolkokers, stukjes tapijt, plastic materiaal, blikjes e.d. Maar ook kantoorartikelen en alle gebruikelijke wiskundige hulpmiddelen zijn aanwezig. Er is gereedschap en stromend water, onze klas is een echt werklokaal. Door het grote aanbod van zelf te kiezen materialen stimuleren wij het onafhankelijkheidsgevoel van de leerlingen.

Het meubilair kan gemakkelijk verplaatst worden. Leerlingen kunnen alleen of in groepjes werken, of even gaan overleggen met anderen.

Nog meer voorbeelden

Een gratis monster van zeshoekige make-up-dosjes was aanleiding de leerlingen verpakkingen- en transportmateriaal te laten ontwikkelen voor grotere hoeveelheden dosjes. Door hierbij enkele beperkingen te geven werd de opdracht moeilijker gemaakt. Is er een betere manier om over twee- en driedimensionale problemen na te denken?

Kijk eens naar een fietswiel met een rood strikje ergens aan de velg vastgemaakt, terwijl het door de klas rolt. Voor mijn leerlingen was het een grote uitdaging de baan van het rode lintje te beschrijven! Er waren leerlingen die vrij ver in de trigonometrie terecht kwamen. Ook de mogelijkheden van de rekenmachine, de grafische rekenmachine en de computer kwamen hierbij aan de orde. Ik zie deze apparaten overigens als belangrijke hulpmiddelen om het leren te vergemakkelijken. Mijn elfjarige leerlingen hebben een zekere angst voor vragen als $56:8$, wat hen erg kan belemmeren.

Waarom roept wiskunde angst op?

Ik vermoed dat het hier gaat om faalangst in de wiskunde. Een paar scherpe woorden of rode strepen zijn genoeg om het zelfvertrouwen te ondermijnen. Iets niet begrijpen kan leiden tot paniek en een minderwaardigheidscomplex. Het enthousiasme verdwijnt en al gauw zit de leerling in een neerwaartse spiraal...

Wij proberen bij de leerlingen een gevoel van zelfvertrouwen en eigenwaarde wat betreft wiskunde te ontwikkelen. Alleen dan kan de leerling zijn/haar mogelijkheden ten volle benutten. Luisteren en de leerlingen helpen hun gedachten wiskundig uit te drukken zijn belangrijke factoren. Vaak is het denken wel goed, maar ontbreekt het aan mogelijkheden dit in taal om te zetten.

Wij werken niet met competitie, want dan is er maar één winnaar en zijn er een paar meelopers en een heleboel verliezers.

Ook is het niet goed steeds te moeten werken in de schaduw van iemand die beter is. Men werkt in een groep die het prettigst is op een bepaald moment en het wisselen van groep is mogelijk. Maakt een leerling een moeilijke periode door, dan kan het werken in een makkelijker groep het zelfvertrouwen vergroten. Ons doel is dat alle leerlingen hun eigen wiskundige top bereiken.

In principe werken de verschillende groepen aan dezelfde opdracht, iedere groep op zijn eigen niveau. Wat ze moeten kunnen is: de opdracht begrijpen en er aan werken op een zinvolle manier. Kun je die verdedigen dan is je oplossing goed en verdient waardering.

Rollenspel en toneel

Een voorbeeld van een basisopdracht is: 'Cops and Blocks'. Het hoofd van de politie moet met zo min mogelijk agenten een aantal New Yorkse wijken (blokken) bewaken. Hoeveel agenten zijn er nodig bij een bepaalde ligging van de blokken ten opzichte van elkaar?

Er zijn leerlingen die dit met poppetjes en legoblokjes naspelen. Anderen tekenen het, of zoeken algebraïsche oplossingen. Een leuke manier om zo'n opdracht te introduceren is hem na te spelen. Ik houd van toneel in de klas. Het plezier heeft een stimulerende uitwerking op groepen en op leerlingen individueel.

Tenslotte

Omdat wij 'leren' zien als een individueel proces hebben wij een leerling-gerichte wiskundemethode ontwikkeld. Deze is echter niet egocentrisch. Zelfrespect en zich gewaardeerd voelen door anderen zijn essentieel voor het leerproces. Zelf werken en denken zijn even belangrijk als het uitwisselen van ideeën.



Heleen Verhage biedt Rose Flower bloemen aan.

Mijn doel is van de leerlingen onafhankelijke studenten te maken. Het blijft moeilijk dingen te onthouden en te abstraheren. Heel belangrijk is dat leerlingen niet langer bang zijn voor wiskunde. Frustratie blijft echter bestaan. In dit systeem van opdrachten misschien wel meer...

Als een leerling het even niet ziet zitten help ik het probleem duidelijk te maken en te verwoorden. Dat brengt het zelfvertrouwen terug. De taak van de docent is het leerproces te vergemakkelijken, de juiste vaardigheden aan te leren, nieuwsgierig te maken en zelfvertrouwen en zelfkennis aan te kweken.

Tot slot wil ik benadrukken dat de ontwikkeling van deze methode alleen mogelijk was dankzij de toewijding en de samenwerking van mijn collega's.

Over de auteur

Rosemary Flower – in Engeland tot Math Teacher of the Year gekozen – is hoofd van de sectie wiskunde van het Manhood Community College (600 leerlingen tussen de 10 en 16 jaar) te Selsey (Zuid Engeland).

/* Samenvatting van de lezing van Rosemary Flower, gehouden op 21 maart 1992 op het lustrumcongres van Vrouwen en Wiskunde te Utrecht.

Verschenen

Ida Stamhuis, *Cijfers en Aequaties en Kennis der Staatskrachten*, Rodopi, f 60,-; blz. 295.

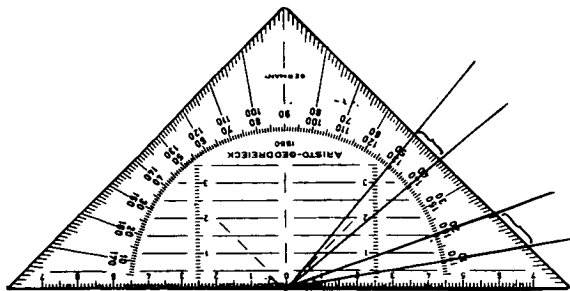
Ida Stamhuis geeft een gedegen, maar alleszins plezierig leesbare studie geschreven over hoe, enerzijds uit de kunst van het regelen van lijfrente-verzekeringen en anderzijds uit de kunst van het zodanig samenstellen van overzichtsstaatjes dat deze het trekken van conclusies toelaten, het vak Statistiek is gegroeid. Leraren die met oog op het onderwijs in de statistiek graag enige authentieke informatie willen hebben omtrent motivatie en achtergronden van dit vak wil ik dit boek van harte aanbevelen.

H. J. Buurema

► De bissectricestelling

Martin Kindt

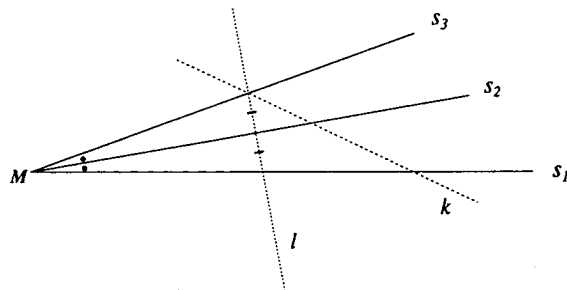
Mijn ontmoetingen met Ed de Moor gaan niet zelden gepaard met het begeesterd uitwisselen van wiskundig jeugdsentiment: het ophalen van stukjes wiskunde, soms nog wel, soms (allang) niet meer behorend tot de gewone schoolstof. Zo kwamen we onlangs, in verband met zijn artikel 'Analyse, synthese en elegance'¹ op de klassieke bissectricestelling uit de vlakke meetkunde. Er schijnen hele horden (jonge?) wiskundelaren te zijn die nooit van deze stelling hebben gehoord. Vandaar dat Ed het nodig vond een bewijs van deze stelling op te nemen in een voetnoot bij zijn opstel. Behoort dat bewijs nu tot de 'gewone', 'lelijke' of 'elegante' klasse? Daarover spraken wij en onze smaken bleken nu eens niet congruent te zijn. Al pratend rolden er een aantal andere bewijzen over tafel en ontstond mijn idee voor een artikel speciaal over deze bissectricestelling.



Figuur 1

Bij het schrijven ervan nam ik me voor nette plaatjes toe te voegen en zo viel mijn oog op de aloude geodriehoek (figuur 1).

Een opvallend verschijnsel is dat de schaalverdeling op de rechthoekszijden, geërfd van de gradenboog, ongelijkmatig is: gelijke hoeken snijden een willekeurige lijn niet volgens gelijke segmenten. Ik denk daar nog eens over na en beperk me voor het gemak tot de situatie van *twee* gelijke, aangrenzende hoeken (figuur 2).



Figuur 2

Alleen als de lijn (l) loodrecht staat op de middelste van de drie stralen (s_2), zijn de segmenten op l gelijk. Bij een scheve stand (k) duidelijk niet. Hoe schever k ten opzichte van de bissectrice s_2 , hoe ongelijker de segmenten.

In plaats van te letten op de scheefte ten opzichte van s_2 kan ik ook kijken naar de stukken vanuit M op de stralen s_1 en s_3 . Hoe ongelijker die stukken, hoe ongelijker de segmenten op k . Een mens komt dan al gauw op het idee eens naar de verhouding van die stukken te kijken. Er lijkt een verband te bestaan tussen de verhouding van de straalstukken uit M en de segmenten op k . Het eenvoudigste wat je kunt bedenken is dat die verhoudingen gelijk zijn; nameten in een paar figuren geeft allerm minst aanleiding tot verwerping van deze hypothese.

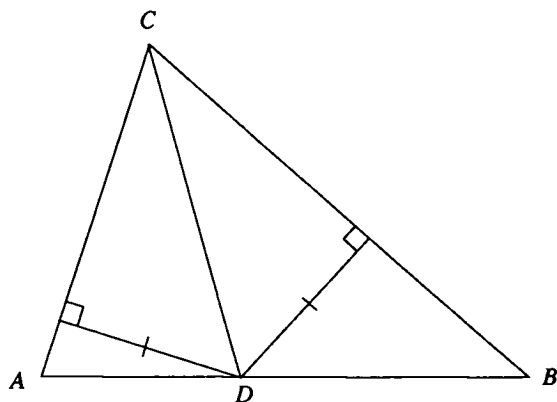
Een vermoeden is geboren en kan bijvoorbeeld zo expliciet worden gemaakt:

de bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde in stukken die zich verhouden als de aangrenzende zijden.

Kortom: de bissectricestelling. Hoe die stelling te bewijzen?

Het bewijs waarvoor ik sympathie koester en waarvan ik me de laatste jaren pleeg te bedienen als ik onwetenden van deze stelling wil overtuigen, ziet er zo uit:

Bewijs 1.



Figuur 3

Vergelijk de driehoeken ADC en BDC .

De oppervlakten ervan verhouden zich als de basis AD en BD (natuurlijk: ze hebben immers de hoogtelijn uit C gemeenschappelijk).

Daar anderzijds de oppervlakten zich ook verhouden als AC en BC (de hoogtelijnen uit D op de zijden AC en BC zijn even lang!), weten we nu: $AD : BD = AC : BC$.

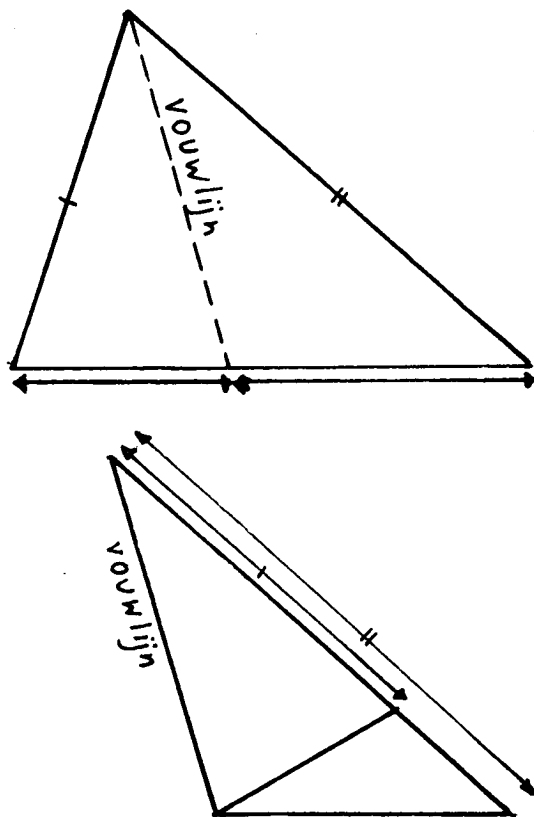
Met knippen en vouwen krijg je een meer anschouwelijke variant:

Bewijs 2.

Knip een driehoek uit een stuk papier en vouw deze zo dat twee zijden langs elkaar komen te liggen (figuur 4).

De vouwlijn (bissectrice!) verdeelt de driehoek in twee delen.

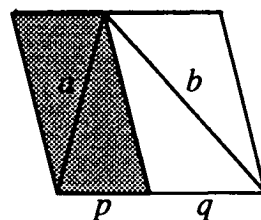
Opeengevouwen zie je dat de oppervlakten van de deeldriehoeken zich verhouden als de stukken langs de basis; dichtgevouwen vind je die verhouding terug als verhouding van de opstaande zijden van de oorspronkelijke driehoek.



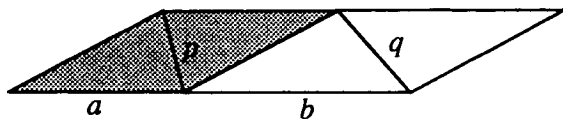
Figuur 4

Is dit bewijs wel zo anschouwelijk? Zonder de wetenschap dat de oppervlakten van driehoeken met dezelfde hoogte zich verhouden als de bases, zijn we nergens. Want direct zichtbaar is dat niet. Om dit visueel te maken, kan een beroep worden gedaan op parallelogrammen en zo ontstaat een mozaïekbewijs (figuur 5):

Bewijs 3.



$$\text{opp. } \blacksquare : \text{opp. } \square = p : q$$



$$\text{opp. } \triangle : \text{opp. } \triangle = a : b$$

Figuur 5

Pas op: de witte stukjes zijn omgeklapt!

Het voorrang geven van het ene bewijs boven het andere, hoeft niet louter een kwestie van smaak of appreciatie te zijn. Overwegingen die een rol kunnen spelen, zijn:

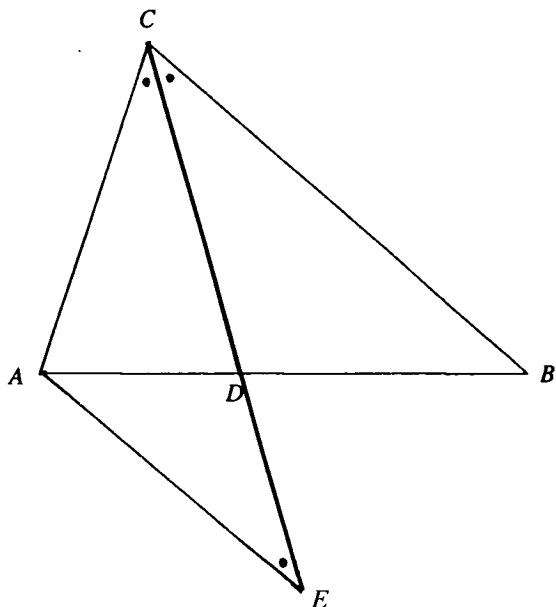
- past het bewijs goed in de (omringende) stof?
- is het leerzaam als voorbeeld van een methodiek?
- bevat het voldoende heuristische aanknopingspunten?
- is het geïsoleerd qua aanpak? (zeer elegante bewijzen hebben vaak iets solitairs)
- is het generaliseerbaar? (hier bijvoorbeeld naar een hogere dimensie)
- ...

Multatuli verbaasde zich er over dat zijn lucide bewijs van de stelling van Pythagoras niet figureerde in de meetkundige standaardwerken van zijn tijd. Blijkbaar liet de rigiditeit van het systeem een zo aanschouwelijke demonstratie niet toe.

In een meetkunde-curriculum waarbij oppervlakten van figuren veelvuldig worden gebruikt voor het trekken van conclusies over bepaalde lijnstukken (een mooi voorbeeld van blikwisseling!) past Multatuli's bewijs wél goed, evenals bovenstaande bewijzen van de bissectricestelling. In het meetkundeprogramma van weleer, geschoeid op de leest van Euclides, werd veel gemanipuleerd met eigenschappen van twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde en met evenredigheden in driehoeken voorzien van een dwarslijntje parallel aan de basis. Het bewijs bij Ed's artikel sloot prima aan bij die opzet, en gold min of meer als geijkt.

Een broertje van dit bewijs is:

Bewijs 4.



Figuur 6

Trek de lijn door $A \parallel BC$ (of door $B \parallel AC$) en snijd deze lijn met het verlengde van CD (snijpunt E). Nu geldt: $AC = AE$ (via de verwisselende binnenhoeken bij E en C) en daaruit volgt dan:

$$AD : DB = AE : BC = AC : BC.$$

Met dit voorbeeld wil ik benadrukken dat, ook al leg je jezelf een keurslijf op, er nog varianten mogelijk zijn. Het naast elkaar leggen van verschillende bewijzen, het vergelijken ervan (op helderheid, doelmatigheid, schoonheid of wat dies meer zij), is een zeer waardevolle activiteit die helaas wat in het vergeetboek is geraakt. Maar wat wil men, in een wiskunde-cultuur waar bewijzen bijna uitgeroeid zijn?

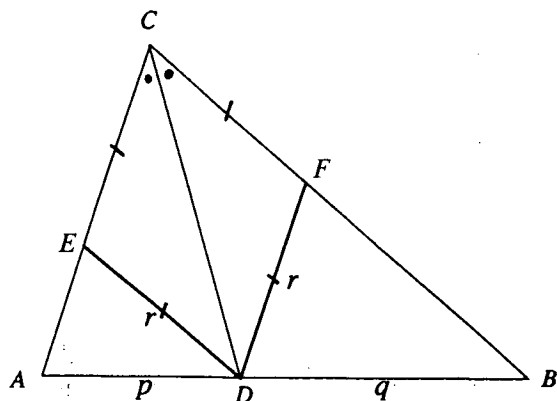
Ik trek me van die cultuur niets aan en wil nog een paar bewijzen van dezelfde stelling bekijken.

Bewijs 5 (zie figuur 7).

Vanaf hier noem ik: $AD = p$, $BD = q$, $AC = b$, $BC = a$.

Ik trek uit D de lijnen parallel met BC en AC en er ontstaat de ruit $DECF$.

Dit vanwege de diagonaal die ook bissectrice is.



Figuur 7

(Bij het vergelijken van de bewijzen is het van groot belang na te gaan hoe het bissectriceschap verwerkt is!)

Stel de zijden van de ruit gelijk aan r .

AED en DFB zijn gelijkvormig:

$p : q = AE : DF = AE : r$ (externe verhoudingen).

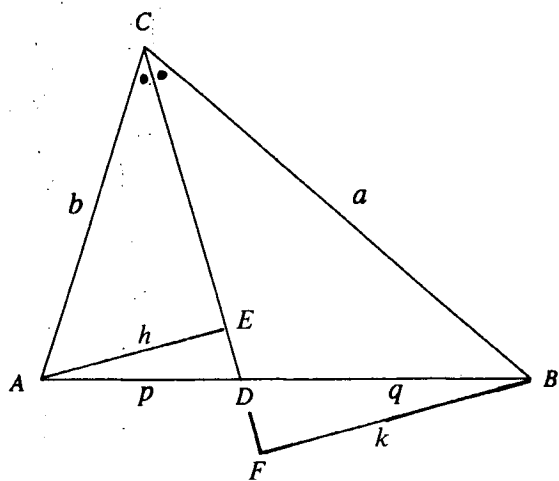
ACB en AED zijn gelijkvormig:

$b : a = AE : ED = AE : r$ (interne verhoudingen).

Hieruit volgt $p : q = b : a$.

Bewijs 6 (zie figuur 8).

Laat de loodlijnen AE en BF neer op de lijn CD .



Figuur 8

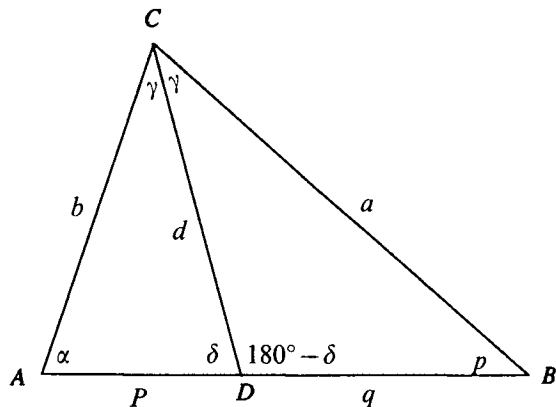
Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ACE en BCF volgt: $h : b = k : a$.

Ook ADE en BDF zijn gelijkvormig: $h : p = k : q$.

Uit beide evenredigheden volgt: $b : a = p : q$.

Bewijs 7.

De in bewijs 4 gebruikte verhoudingen hadden natuurlijk ook als sinus kunnen worden opgevoerd (uiteraard levert dat geen wezenlijk nieuw bewijs). Edoch, trigonometrie is potent genoeg. Neem het wondermiddel sinusregel en zelfs een hulplijn is niet meer nodig:



Figuur 9

Sinusregel in driehoek ACD geeft:

$p : \sin \gamma = b : \sin \delta$.

Sinusregel in driehoek BCD geeft:

$q : \sin \gamma = a : \sin (180^\circ - \delta) = a : \sin \delta$.

Conclusie: $p : q = b : a$.

Bewijs 8.

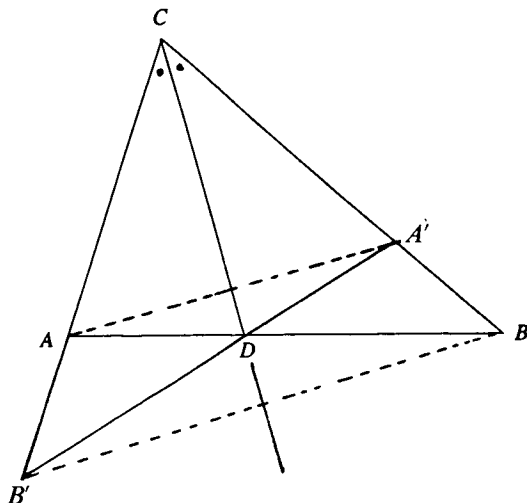
Aardig is het ook om de bissectrice als symmetrie-as te benutten.

Spiegel driehoek ABC in CD en we krijgen $A'B'C$ (figuur 10).

Nu geldt $AD : DB = AA' : BB' =$

$CA : CB' = CA : CB$.

Dit lijkt het bewijs geknipt voor een meetkunde gebaseerd op transformaties. En passant levert het ook een eenvoudige constructiemethode voor de bissectrice van een (niet-gestreekte) hoek.



Figuur 10

Bewijs 9.

Met vectormeetkunde gaat het ook, al is het niet van een leien dakje (figuur 11).

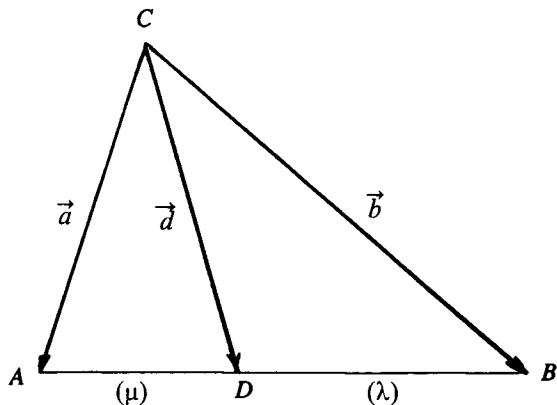
Een handig trucje om de bissectrice-vector van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te vinden, is: maak er eenheidsvectoren van en tel die op:

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

De vector $\vec{d}$ (met eindpunt D) is hier een veelvoud van: $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, waarbij:

$$\lambda : \mu = \frac{1}{|\vec{a}|} : \frac{1}{|\vec{b}|} = |\vec{b}| : |\vec{a}|$$

Omdat $\vec{d}$ een gewogen gemiddelde is van $\vec{a}$ en $\vec{b}$, volgt: $\lambda + \mu = 1$ en zijn de 'gewichten' omgekeerd evenredig met de stukken waarin AB door D wordt



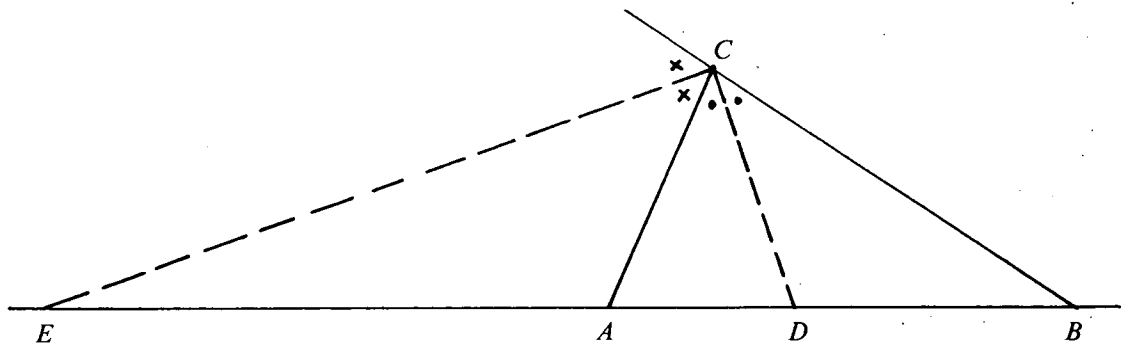
Figuur 11

verdeeld, dus: $\lambda : \mu = BD : AD$.

Gevolg: $BD : AD = |\vec{b}| : |\vec{a}|$

Klassieke analytische meetkunde is minder geschikt voor bewijsvoering van stellingen betreffende de driehoek: men verzeilt al gauw in een fikse rekenpartij die wel resultaat, maar weinig inzicht oplevert.

Aan het ordenen van de bewijzen 1 tot en met 9 naar elegance, waag ik mij niet. Als eenvoud het kenmerk van de ware schoonheid is, vallen er snel een paar kandidaten voor de schoonheidsprijs af. Alle genoemde bewijzen zijn ook van toepassing op de eigenschap van de zogenaamde buitenbissectrice. Nemen we binnen- en buitenbissectrice gelijktijdig onder de loupe, dan ontstaat een aardige situatie op de grens van Projectieve en Euclidische meetkunde.



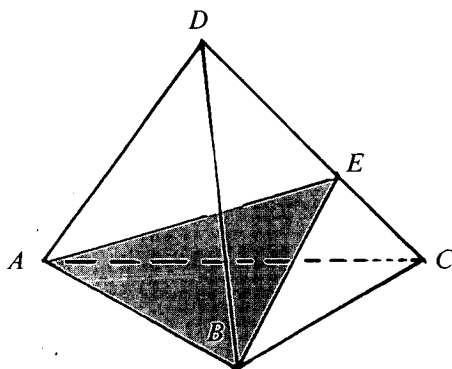
Figuur 12

D en E verdelen lijnstuk AB reps. *inwendig* en *uitwendig* in stukken met verhouding $AC:BC$ en dus (figuur 12):

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} : \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{BE}} = -1$$

Het puntenviertal $ABDE$ wordt *harmonisch* genoemd; de vierstraal CA, CB, CD, CE is dat ook, hetgeen ook rechtstreeks uit de gelijkheid van de ingesloten hoeken kan worden bewezen.

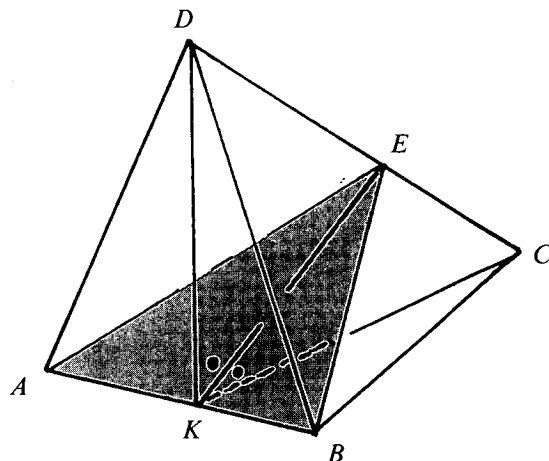
De bissectricestelling heeft een analogon in de ruimtemeetkunde:



Figuur 13

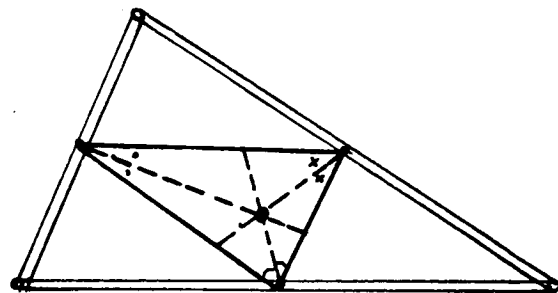
Het bissectricevlak ABE in viervlak $ABCD$ verdeelt de ribbe CD in stukken die zich verhouden als de oppervlakten van de grensvlakken ABC en ABD . Als we bewijs 1 omtoveren in een bewijs met inhouden (van $ABCE$ en $ABDE$) wordt dit snel duidelijk. Instructief is ook het bewijs met behulp van de 2-dimensionale bissectricestelling (figuur 14): DKC is een standvlak op AB . $DE:EC = DK:KC = \text{opp. } ABD : \text{opp. } ABC$

Tenslotte nog een onverwachte toepassing van de bissectricestelling die ik ooit in de (oude) Wiskrant beschreef². Zoals bekend valt het natuurkundige zwaartepunt van een uit homogeen materiaal vervaardigde driehoek samen met het meetkundige



Figuur 14

zwaartepunt. Ook is dit het geval als de driehoek wordt vervangen door een groep van drie even grote massa's geplaatst in de hoekpunten. Een voor de hand liggende vraag is nu: waar ligt het fysisch zwaartepunt van de stangendriehoek (de drie stangen zijn overal even dik en van hetzelfde homogeen materiaal). Aan de lezer laat ik het over te bewijzen dat dit het snijpunt is van de bissectrices van de driehoek gevormd door de drie middenparallelle (figuur 15).



Figuur 15

Over een doodgewone stelling uit de klassieke meetkunde valt heel wat te zeggen. Dit artikel had gemakkelijker groter gekund, variaties van bewijzen zijn er nog genoeg (in jaargang 65 nr. 4 van

Euclides is een fraai bewijs van G. R. Veldkamp te vinden), maar wat voor een boodschap hebben we er aan? Is het niet te zeer jeugdsentiment?

De microscopie van de driehoek is toch terecht afgezworen? Natuurlijk en van mij hoeft de bissectriestelling niet per se opgenomen te worden in het basisprogramma voor het voortgezet onderwijs, al is het wel een aardige stelling en al geeft de inleiding met de geodriehoek wel een mogelijkheid tot uitbouw van een gezond stukje onderwijs. Het toepassingsgebied van de stelling lijkt me echter niet bijster groot en zoiets is al gauw doorslaggevend bij het afwegen van leerstof.

Laat ik dit stukje nog even uittillen boven het gekozen voorbeeld. Het met elkaar vergelijken van bewijzen, het analyseren van bewijzen, het zelf vinden van weer andere bewijzen, ... zijn activiteiten van een hoog niveau, daar ben ik me van bewust. Goede leerlingen zou je hier toch wel eens van willen laten proeven en voor aanstaande leraren zou het misschien wel wekelijks kost moeten zijn. De revival van de (niet-analytische) meetkunde in de bovenbouw van het vwo vormt in elk geval een legitimering voor meer aandacht voor klassieke meetkunde in de lerarenopleiding. Maar minstens even zwaar weegt een idealistisch motief: de hier beschreven activiteiten raken de ziel van de wiskunde.

Noten

1. Euclides jaargang 67 nr. 5.
2. Gewichtige Meetkunde, Wiskrant 20, januari 1980.

Mededeling

Open Dag WCW Amsterdam

Op zondag 11 oktober van 12.00 tot 17.00 uur houdt het Wetenschappelijk Centrum Watergraafmeer (WCW) Open Dag. Het publiek van kennis maken met een rastertunnel-microscoop en met de nieuwe Amsterdamse Pulsstrekker. Verder is er informatie en/of zijn er lezingen over onder meer zelflerende robots, computer-algebra en zwarte gaten.

Een gedetailleerd programma is bij het WCW verkrijgbaar: tel. 020-592 30 00. Het adres is: Kruislaan 403-419, Amsterdam. Er rijdt een gratis pendelbus (66) vanaf station Muiderpoort.

Vreemde woorden in de wiskunde

Ter introductie

Onlangs kwamen wij in het bezit van een kopie van het boek 'Vreemde woorden in de wiskunde' door Dr. E. J. Dijksterhuis en Dr. W. van der Wielen (tweede verbeterde druk, P. Noordhoff N.V. Groningen, Batavia, 1948).

Wij zullen hieruit regelmatig bladvullingen samenstellen. /

In dit initiatief worden wij gesteund door de enquête die op de laatste studiedag gehouden werd, waaruit bleek dat veel invullers bijdragen over de geschiedenis van de wiskunde op prijs stellen.

De redactie

Axioma (< Gr. ἀξίωμα; < ἀξιόω = vorderen, eisen). Onbewezen als grondslag van een theorie aanvaarde stelling. Deze moderne betekenis van het woord is geheel in overeenstemming met de etymologie (datgene, waarvan aanvaarding geëist wordt), beter dan die van onbetwifelbare waarheid, die men er vroeger veelal aan hechtte. Kl. axiō'ma. Mv. axiomata; axioma's.

Bisectrix (sc. *linea*; Lat.; < *sectrix*, vrl. van *sector* = snijder; < *secare* = snijden). *Deellijn* van een hoek. De Hollandse term verdient aanbeveling, temeer omdat de Latijnse toch ook niet tot uitdrukking brengt, dat de hoek in twee *gelijke* delen verdeeld wordt.

De veel voorkomende schrijfwijze *bissectrice* is blijkbaar aan het Frans ontleend (< *ligne bissectrice*). Men hoede zich voor den onhoudbaren term *bissectrice-vlak*. Men zou dan bissectorvlak moeten zeggen; *deelvvlak* lijkt ook hier verkieslijk.

Cijfer. Het Arabische woord *al-sifr*, letterlijke vertaling van het Indische *sunya* = de lege (nl. lege kolom op het rekenbord), werd in het Latijn weergegeven door *zephirum* of *cephirum* (aldus Fibonacci (ca. 1170-1250) in het *Liber Abaci*, 1202). Dit werd via het Ital. *zevero* en *zepiro* verbasterd tot *zero* en *cifra*. Uit *cifra* ontstond door overdracht op alle Indo-Arabishe tekens ons woord *cijfer* (dat dus eigenlijk alleen de nul beduidt); het Frans behield *zéro* voor nul, het Engels *zero*.

Cirkel (< Lat. *circulus*, dem. van *circus* = kring; & Gr. κύκλος, κῑκος = ring). Het Griekse woord is κύκλος, waarvan termen als cyclisch en derg. afgeleid zijn.

Dijksterhuis en Van der Wielen, 1948.

'Begrijpen'

► Maak het niet te vlug (te) kort of: Progressieve schematisering in het VO

Leen Bozuwa

Je kent het wel. 'n Ideale les. Leerlingen zeer gemotiveerd, doen goed mee en toch... De resultaten vallen de volgende les tegen. 't Lijkt of ze er weinig van begrepen hebben. In hoeverre is het ongeduld van de leraar daaraan debet? In verschillende wiskobaspublicaties kwam ik het begrip 'progressieve schematisering' tegen.^{1,2}

Leerlingen van de basisschool leren daarmee bijvoorbeeld vermenigvuldigen door herhaald optellen en gaan zelf spontaan verkortingen aanbrenge. Uiteindelijk leiden die verkortingen tot het vermenigvuldigingsalgoritme dat we allemaal kennen. Essentieel in de methode is dat elk kind in z'n eigen tempo naar dat algoritme toewerkt. De band met het optellen blijft bestaan en kinderen blijven begrijpen wat ze aan het doen zijn. Hen snel dwingen om verkortingen aan te brengen, leidt niet tot het beoogde doel.

Deze gedachtengang zou ook in het voortgezet onderwijs aandacht moeten krijgen. Het aanleren van allerlei vaardigheden in de wiskunde gebeurt veelal op een voor de leerlingen begrijpelijke manier. Dan wordt er echter vaak te snel overgeschaeld naar het algoritme in z'n meest verkorte vorm.

Neem bijvoorbeeld het oplossen van vergelijkingen. De methode van 'handopleggen' wordt al snel ingewisseld voor 'naar de andere kant brengen'.

Bij wortelrekenen wordt er vaak te vlug van uitgegaan dat de leerlingen die nieuwe getallen kennen, en worden ze overrompeld met bewerkingen ermee.

Bij het rekenen met variabelen is het niet anders. Uitdrukkingen als $3a$ en $5pq$ zouden de eerste jaren geschreven moeten worden als $3 \cdot a$ en $5 \cdot p \cdot q$ of desnoods als $3 \cdot a$ en $5 \cdot p \cdot q$. Mijns inziens zijn veel begripsproblemen bij het rekenen met variabelen terug te voeren tot het te vlug weglaten van het vermenigvuldigingssteken.

Bij verschillende methodes wordt het vermenigvuldigen van tweetermen aangeleerd met behulp van een tabel:

Het produkt $(a + 3)(a + 5)$ wordt zó berekend:

*	a	3
a	a^2	$3 \cdot a$
5	$5 \cdot a$	15

Mijn ervaring is dat sommige leerlingen lang behoefte blijven houden aan die tabelvorm. Ze moeten blijven zien wat ze doen. Ook het verband met ontbinden in factoren blijft dan zichtbaar. Ontbinden is immers de tabel 'achterstevoren' invullen.

Behoedzaam optreden van de leraar als het gaat om het invoeren van standaardnotaties kan veel begripsproblemen later voorkomen. Geef leerlingen de ruimte om eigen oplossingsstrategieën en notaties te gebruiken. Stimuleer daarbij ook het gebruik van visuele hulpmiddelen als tabellen, schema's e.d. Wie er in de klas op let, komt veel voorbeelden tegen van onbegrip bij leerlingen door te snel opgelegde standaardnotaties en standaardalgoritmen.

Noten

1. Dekker, Ter Heege en Treffers: *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens wiskobas*.
2. L. Streefland, E. de Moor en A. Treffers: *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool*.

► **Brief aan de voorzitter**

Geachte heer Van Lint,

Eind 1990 werden wij in Lunetten tijdens een bijeenkomst met de werkgroep W12-16 voor het eerst geconfronteerd met de plannen voor het wiskunde-onderwijs tijdens de eerste jaren na de basisschool. Een collega van een lhno-school wilde zijn leerlingen tijdens het laatste verplichte jaar, dat voor vrijwel iedereen een onoverkomelijk struikelblok bleek, liever met het nieuwe soort opgaven bezighouden; *alle* andere aanwezige docenten, of zij nu lesgeven op vwo dan wel lbo, maakten zich grote zorgen over vooral het wegschuiven van de algebraïsche vaardigheden. Enigszins gerustgesteld door de duidelijke eensgezinde geluiden zijn we ons vervolgens met ons werk, dat er de laatste jaren belist niet minder arbeidsintensief op is geworden, gaan bezighouden.

Op 15-1 en 12-2-1992 bleek in Rotterdam tijdens een tweetal voorlichtingsbijeenkomsten dat er met de fundamentele kritiek uit het veld *niets* was gedaan. Wellicht zijn de opgaven over 'Bettine' en 'het schoolgebouw' (zie blz. 46) ongelukkige voorbeelden van wat de COW wil, maar het zijn wel voorbeelden van (citaat) 'hoe het worden gaat; het is echt afgelopen met letterrekenen, parabelen en de abc-formule'. Kritiek en zorgen werden afgewimpeld met 'wij brengen slechts de boodschap' en 'we zijn benieuwd wat de uitgevers gaan doen'. Op 26-2-1992 kregen we op een gebruikersbijeenkomst van 'Getal en Ruimte' te horen dat a) Educaboek ook in het duister tastte, en b) eveneens in andere plaatsen de kritiek op de plannen massaal geweest

was, en dat men overall het gevoel had dat er naar de mensen die de plannen moeten gaan uitvoeren totaal niet geluisterd werd.

Het is mogelijk dat wij niet alert genoeg geweest zijn, maar beter ten halve gekeerd dan ten hele gedwaald. Leerlingen met COW-vaardigheden zonder voldoende algebraïsche achtergrond naar vervolgopleidingen of de bovenbouw havo/vwo sturen is ons inziens volledig onverantwoord en derhalve niet aanvaardbaar. Het creëren van een situatie waarin docenten door middel van dictaten en extra opgaven gedwongen worden om juist de zwakkere leerlingen voldoende houvast te bieden lijkt uiterst ongewenst. Wij dringen er dan ook met grote kracht op aan dat de vereniging pal zal staan voor een programma dat rekening houdt met de huidige exameneisen. Programma's liggen niet voor eeuwig vast, maar waar de maatschappij steeds hogere eisen stelt lijkt het ondenkbaar dat het niveau een eind omlaag kan.

Voor alle duidelijkheid: dit is *geen* pleidooi om alles bij het oude te laten, maar wel een poging om alsnog te worden gehoord. Onze leerlingen mogen niet de dupe worden van het gebrek aan realiteitszin bij de COW.

Hoogachtend,

C. van Beelen, W. Braggaar, W. Claas, J. Sinkovics, H. Stuurman en J. van Thull.
(sectie wiskunde Stedelijk Gymnasium Leiden)

Half maart stuurden wij voorgaande brief naar de heer Van Lint. De inhoud daarvan spreekt voor zich; toch valt er wel het een en ander aan toe te voegen.

Na de bijeenkomst in Lunetten over het W12-16 programma zijn wij zo naïef geweest om te denken dat de zeer duidelijke en algemeen onderschreven kritiek voldoende was geweest om ook tot achter de tafel door te dringen. Veertien maanden later togen wij naar de voorlichtingsbijeenkomsten in Rotterdam met het idee dat we tijdens die twee dagen te weten zouden komen wat er in de onderbouw aan de orde gaat komen en wanneer. Ook verwachtten wij een evaluatie van de problemen die het veld gesignaleerd had en een begin van de oplossing

daarvan. Maar helaas, het is niet gelukt om antwoorden op simpele vragen te krijgen. Vol begrip constateerden de voorlichters dat iedereen zich zo onzeker voelde en dat dat ook heel goed te begrijpen was. 'Het wordt allemaal héél anders, en van iedereen zal een geweldige inspanning gevraagd worden om deze baanbrekende plannen tot een succes te maken. Eindelijk zullen kinderen met plezier naar het wiskundelokaal komen, waar we ze niet meer met dat formele en abstracte gedoe zullen lastigvallen', werd met kennelijk diepe voldoening vastgesteld. Desgevraagd kwam als leerdoel van de twee modelopgaven naar voren 'het leren samen-

Hieronder zie je een foto van een schoolgebouw. Ervoor staat een leerling die ongeveer 1,50 m lang is.

a Schat zo goed mogelijk de hoogte van het gebouw. Schrijf op hoe je het gedaan hebt.

b Schat ook de breedte van het gebouw.

c Maak nu een zo goed mogelijke schatting van de oppervlakte van de voorgevel van het gebouw.

d Je krijgt de opdracht om de stenen van deze gevel te reinigen. Maak een schatting van het gedeelte steen in deze gevel. Schrijf op hoe je dat gedaan hebt.



Opgave 'Het schoolgebouw'

(Bij deze opgave hoorde oorspronkelijk een andere foto: zie blz. 9 van de Leerstofbeschrijving wiskunde 12-16.

De redactie.)

werken, het leren inzien dat er niet zoiets als één oplossing is, en het ontdekken dat wiskunde overall is'. Het is niet gelukt om de voorlichters een visie te ontlokken over hoe de aansluiting met de bovenbouw havo/vwo, mbo en vervolgoopleidingen moet verlopen; de vraag over de toetsproblematiek leverde 'dat wordt inderdaad een probleem, maar we staan daar met z'n allen voor' op, en een verantwoording van het 'waarom, wie wil dit' was niet los te krijgen.

Als huiswerk kregen we na de eerste bijeenkomst mee het uitproberen van 'Bettine' en 'het schoolgebouw' in minstens één klas van onze school; de interessantste oplossingen en commentaren wilde men graag ontvangen. Natuurlijk voldeden we braaf aan deze opdracht. Toen op de tweede bijeen-

Bettine speelt sinds kort tafeltennis. Ze doet ook mee aan de competitie. Ze moet daarvoor elke week één wedstrijd spelen.

Na vijf speelweken verschijnt in het clubblad het volgende overzicht.

PERSOONLIJKE RESULTATEN JEUGDSPELEN

	aantal gewonnen partijen	aantal gespeelde partijen
1. Erik	14	15
2. Tung	12	15
3. Marijke	11	12
4. Renee	10	15
5. Carla	9	15
6. Henk	8	18
7. Stef	7	15
8. Bettine	7	12
9. Herko	6	12

Bettine is niet blij met dit overzicht; ze staat bijna onderaan! Voor haar gevoel klopt er iets niet, maar ze kan dat niet goed uitleggen.

Help haar. Bedenk een eerlijke manier om de resultaten te vergelijken.

Schrijf namens Bettine een brief aan de redactie van het clubblad. Stel hierin een andere volgorde van de spelers voor. Leg ook uit waarom je voor die volgorde kiest.

Opgave 'Bettine'

komst duidelijk werd dat de opgaven beslist niet met gejuich waren onthaald, maar veeleer waren weggehoond ('wat een onzin', 'in vijf weken met één partij per week minstens twaalf partijen????', 'je meet je suf en leert helemaal niks') kostte het grote moeite om de meegebrachte uitwerkingen kwijt te raken. Tien nascholingsuren rijker, nauwelijks wijzer en flink nijdig reisden we huiswaarts.

Toen we op de gebruikersbijeenkomst van 'Getal en Ruimte' hoorden dat het beeld verspreid wordt van een 'onderwijsveld dat blijkens een enquête in meerderheid achter deze frisse wind staat' werden wij, gezien onze ervaringen, zeer benieuwd naar de vraagstelling van deze enquête en de populatie; tevens vonden wij het nodig om aan de bel te trekken. Wij stuurden de heer Van Lint een brief met het verzoek stelling te nemen tegen het om zeep helpen van een vak waarvan iedereen (tot nu toe tenminste) de waarde inziet. In die brief spreken wij ons niet uit tegen doordachte veranderingen, maar herhaalden wij wat we al diverse keren geuit hadden zonder een poot aan de grond te krijgen: 'dit is allemaal zó vaag, zó soft en zó onverantwoord dat we ons hart vasthouden'. Het leek er haast op dat het beleid was om op geen enkel bezwaar in te gaan, maar gewoon door te praten over de paradijselijke toestanden die ons te wachten staan.

Elke docent met enige ervaring weet dat juist de minder getalenteerde leerlingen een enorme behoefte hebben aan volstrekte duidelijkheid over wát er geleerd moet worden en hoe bepaalde problemen aan te pakken. Ook leken weten dat leerlingen lang niet altijd zin hebben om (al dan niet samenwerkend en elkaar stimulerend) lekker fijn wiskunde te 'doen'. Nieuwe onderwerpen introduceren door middel van 'instap'-problemen: niemand zal dat geen verbetering vinden ten opzichte van lange rijen identieke opgaven. Meer toepassing: prima. Maar geforceerd alles vanuit het dagelijks leven en vanuit de beleevingswereld van onze leerlingen willen brengen, daar niet bovenuit willen stijgen, en het abstraheren als iets heel smerigs en achterhaalds behandelen, dat is een heilloze weg waar sommigen blijkbaar koste wat het kost het wiskundeveld op willen duwen. Onbewezen en uiterst twijfelachtig vinden wij de aanname dat leerlingen en docenten dit allemaal plezieriger zullen vinden.

Buitengewoon vreemd vinden wij de verantwoordelijkheid die de uitgevers toegeschoven krijgen (zie de brief aan de heer Van Lint).

Wiskunde is een denkwijze, gekoppeld aan technische vaardigheden, waarbij rekenmachines en computers *hulpmiddelen* zijn; jammer genoeg is het voor veel kinderen moeilijk om hierin thuis te raken. Vaker dan we zouden willen komt begrip pas na en door heel veel oefenen. Niet alle kinderen hebben dezelfde capaciteiten, en evenmin hebben ze allemaal dezelfde kansen; dat was zo, dat is zo, en dat zal helaas zo blijven. De gedachte dat wiskunde nu eindelijk voor iedereen begrijpelijk wordt vinden wij misleidend en gevaarlijk; eisen zóver laten zakken dat iedereen alles aankan vinden wij het verkopen van knollen voor citroenen. Om nog maar te zwijgen over de oneigenlijke problemen die een te ver doorgevoerde taligheid met zich meebrengt.

Zolang het eindrapport niet is verschenen is het niet mogelijk om een afgewogen oordeel te geven; wat er tot nu toe aan voorlichting en informatie is ontvangen doet het ergste vrezen, omdat werkelijk nergens doorklinkt dat óók moeilijke dingen geleerd moeten worden. Reacties van collega's van zeer verschillende scholen in diverse plaatsen leren ons dat wij met onze zorgen (héél zacht gezegd) niet alleen staan, dat zeer veel docenten schouderophalend hun eigen weg zullen gaan, en zullen proberen om de uitgevers van al te dolle dingen te weerhouden.

Lang geleden is ooit het talenpraktikum als grote revolutionaire ontwikkeling de scholen binnengetrokken. Erg veel geld en energie bleken achteraf (soms al na enkele jaren) totaal verspild; bij wat er tot op heden duidelijk is geworden van de COW-plannen is al vóóraf te zien wat er mis zal gaan.

De sectie wiskunde van het Stedelijk Gymnasium Leiden.

Reactie van het Bestuur

Op 15-1 en 12-2-1992 werd alleen informatie gegeven over de basisvorming. De definitieve voorstellen van de COW geven echter 5 aparte leerplannen op verschillende niveaus. Juist de havo- en vwo-trajecten zijn op veler verzoek aangepast.

Opgave 1 Auto huren

Karel huurt de auto van zijn vriend Jos om op vakantie te gaan. Jos wil dat Karel $f0,50$ per km betaalt voor de eerste 500 km die hij rijdt; voor elke kilometer die Karel méér rijdt, hoeft hij nog maar $f0,25$ te betalen.

3p ① ☐ Vul de tabel op de bijlage in.

4p ② ☐ Teken op de bijlage de grafiek van de kosten van het huren.

Na één week heeft Karel 560 km gereden.

3p 3 ☐ Bereken hoeveel hij Jos dan schuldig is.

Karel wil dat hij na zijn vakantie niet meer dan $f1200,-$ aan Jos hoeft te betalen.

4p 4 ☐ Bereken hoeveel km Karel die vakantie maximaal mag rijden.

Jos besluit om bij de volgende vakantie voor Karel een ander tarief te rekenen: hij vraagt $f125,-$ ineens en bovendien een kwartje voor elke kilometer.

5p 5 ☐ Vind je dat voordeliger voor Karel? Verklaar je antwoord.

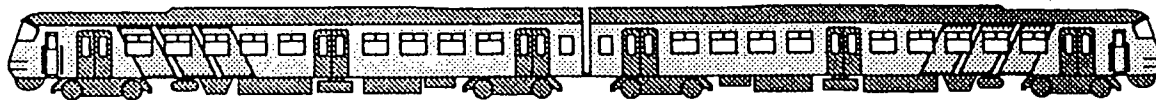
Opgave 2 Een functie

Deze opgave gaat over de functie $f: x \rightarrow (x + 3)^2 - 1$.

4p 6 ☐ Teken in het assenstelsel op de bijlage de grafiek van de functie. Schrijf op wat je daarvoor berekend hebt.

4p 7 ☐ Welk(e) getal(len) moet je voor x kiezen om als uitkomst het getal 15 te krijgen? Leg je antwoord uit.

Opgave 4 Reiskosten



Janet heeft een tijdelijke baan gekregen. Ze wil met de trein naar haar werk. Daarom heeft ze informatie gevraagd over de kosten.

Ze heeft vier mogelijkheden:

- één keer een jaartrajectkaart kopen voor $f1820,-$.
- elke maand een maandtrajectkaart kopen voor $f183,-$.
- steeds een zogenaamde '5-retourkaart' kopen, waarmee ze vijf keer naar haar werk en weer terug kan: deze kost $f54,50$.
- een kortingkaart van $f640,-$ kopen. Zo'n kortingkaart is een jaar lang geldig en geeft 40% korting op elk dagretour. Een dagretour kost zonder korting $f11,50$.

Janet gaat werken van 1 juli 1992 tot en met 31 maart 1993. Ze gaat 20 dagen per maand werken.

4p 11 ☐ Wat is voor Janet voordeliger: reizen met een jaartrajectkaart of reizen met maandtrajectkaarten?
Bereken het verschil.

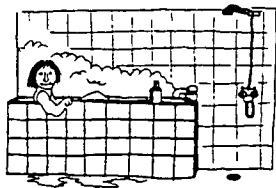
4p 12 ☐ Bereken haar reiskosten als ze met '5-retourkaarten' reist.

5p 13 ☐ Bereken hoeveel het reizen kost als ze een kortingkaart aanschafft.

Vergelijk de antwoorden van de vragen 11, 12 en 13 met elkaar.

1p 14 ☐ Welke mogelijkheid is het voordeligst voor Janet?

Wiskunde 12-16 (experimenteel)



► Bij drie experimentele examenopgaven

M. C. van Hoorn

Voor de derde keer werden dit jaar experimentele C- en D-examens afgenomen. Te verwachten is dus dat zulke examens duidelijk maken welke kant het op gaat. Gedurende de experimentele periode gold nog niet een nieuw programma, waardoor het traditionele element niet ontbrak.

Op de werkbladen staan drie algebra-opgaven uit het experimentele C-examen.

Opgave 1 (Auto huren) is al bijna een klassieker. Het realiteitsgehalte lijkt me niet bijzonder hoog. Het gaat er hier vooral om vragen te kunnen stellen. Niemand doet het zo in de praktijk. Dat begrijpen de leerlingen ook wel, en met deze opgave zullen velen uit de voeten kunnen. 't Zal mij benieuwen of we onze leerlingen aldoor bezig willen laten blijven met het invullen van tabellen. Gaat de rekenmachine nog eens een prominere rol spelen?

Opgave 2 (Een functie). Wat moet die opgave hier? Elke zingeving ontbreekt. 't Is ook niet het oude programma. In het oude programma werden de zinvolle aspecten expliciet gevraagd – alleen was dat een ritueel geworden. Wat moet dat getal 15? Leg dat eens uit! Op deze manier ontstaat een karikatuur van het oude programma. Geen wonder dat we gaan vinden dat er een nieuw programma moet

komen. Trouwens: ook hier zal de –grafische– rekenmachine in de nabije toekomst wel iets kunnen veranderen.

Opgave 4 (Reiskosten) lijkt me zeer geslaagd. Met een leerling die 200 dagen per jaar naar school reist was even goed iets te doen geweest. De probleemstelling is (zoals in 't echt) complex.

Er ontbreken voor mij nog wel gegevens: zo'n jaarkaart, kan die op elk moment ingaan? Weet elke leerling daarvan? Bij een periode van 10 maanden, in plaats van 9, was de probleemstelling wellicht iets aansprekender geweest, bij de gegeven bedragen.

Al met al: een drietal opgaven uit een C-examen waarover ik beslist niet een eenduidig oordeel kan geven, en op grond waarvan ik beslist niet kan vermoeden welke kant het op gaat.



Boekbespreking

Marja Meeder, Francis Meester, Joop van Dormolen, Gery Gorter, Bram Lagerwerf: *Emancipatie abc voor de wiskundeles*; Project Wiskunde & Emancipatie aan de Hogeschool Holland: f27,50 excl. verzendkosten; 198 blz.

Het doel van het boek is ertoe bij te dragen dat een zo groot mogelijk groep leerlingen geniet van goed wiskundeonderwijs. Dit wordt gedaan door een aantal opdrachten aan te reiken die men kan gebruiken bij de reguliere nascholingscursussen. Een individuele docent (of wiskundesectie) kan al lezend geïnspireerd worden door de onderwerpen en nagaan hoe emancipatorisch zij/hij les geeft.

Het boek is ingedeeld via 40 trefwoorden; al lezend heb ik een paar woorden gemist, onder andere weerbaarheid en zelfstandigheid. Ik was al bezig hier zelf opdrachten voor te verzinnen. Jammer vond ik dat het boek zich beperkte tot het eerstgenoemde doel. In mijn huidige werk ben ik onder meer verantwoordelijk voor het werven van meisjes voor de sector techniek in het hbo. Meisjes hebben als ze voor deze opleidingen willen kiezen veel twijfels, of ze komen gewoon niet op de gedachte van een dergelijk beroepsperspectief.

De stimulans om later een beroep in deze richting te kiezen kan zeker ook van de docent wiskunde uitgaan.

Het boek kan uitsluitend schriftelijk worden besteld bij Hogeschool Holland, secretariaat Bèta, Postbus 1110, Diemen.

Mariëlle Heule

► **Cijferen of ontcijferen, Wiskunde A of tekstverklaring? (vervolg)**

Jan Muthert

Samenvatting

In een bijdrage in Euclides is vorig jaar (juni 1991, 66e jaargang, nr. 9) aandacht besteed aan de 'talige' hindernissen in wiskunde A-examens. Onder de titel 'Cijferen of ontcijferen, Wiskunde A of tekstverklaring' (Jeanette Lubbers en Jan Muthert), werd gesteld dat contextrijke opgaven niet moeilijk leesbaar hoeven te zijn.

Aan de hand van een serie voorbeelden uit recente wiskunde A-examens, werden de volgende struikelblokken gesignaleerd:

- laagfrequente woorden
- synoniemen
- verwijswwoorden
- zinsbouw
- verborgen informatie
- informatie die de aandacht afleidt.

Tussen de vele reacties die het artikel losmaakte in wiskundeland, ontbreekt nog steeds een reactie van de zijde van Inspectie en/of CEVO. En dat terwijl de problematiek van de talige hindernissen in examens nog niets aan actualiteit heeft ingeboet, getuige (bij voorbeeld) het examen wiskunde A vwo 1992 (eerste tijdvak). De redactie van Euclides verzocht mij om een commentaar te schrijven op de

'taligheid' van laatstgenoemd examen. In mijn commentaar beperk ik mij tot het vertalen van passages die talige struikelblokken bevatten.

Examen vwo wiskunde A 1992-I

Passage I:

Opgave 1 (tekst voor vraag 1)

'Bij een uitgebreid onderzoek naar de groei van vogelpopulaties stelden Amerikaanse biologen vast dat onder bepaalde omstandigheden de groei van een populatie roodborstjes beschreven kan worden met een model dat in de graaf van figuur 1 is weergegeven'.

Vertaling Passage I:

Amerikaanse biologen hebben uitgebreid onderzoek gedaan naar de groei van vogelpopulaties.

Voor een populatie roodborstjes ontwikkelden zij een groeimodel. In de graaf van figuur 1 is dit groeimodel weergegeven.

Passage II:

Opgave 1 (tekst voor vraag 4)

'Op grond van hun tellingen veronderstelden de onderzoekers dat het model als volgt bijgesteld moest worden:

voor de overgang van tijdstip t naar tijdstip $t + 1$ moeten alle vruchtbaarheidscijfers uit de graaf vermenigvuldigd worden met een factor k , die op de volgende wijze afhangt van de populatieomvang N_t op tijdstip t :

$$k = 2 - \frac{N_t}{2000}$$

Vertaling Passage II:

De onderzoekers ontdekten: De vruchtbaarheidscijfers zijn afhankelijk van de populatieomvang: bij een populatieomvang N_t op tijdstip t moeten de vruchtbaarheidscijfers uit de graaf (voor de overgang van tijdstip t naar tijdstip $t + 1$) met een factor k worden vermenigvuldigd, waarbij:

$k = \dots$

Passage III:

Opgave 1 (vraag 4)

'Bereken voor welke populatieomvang deze bijstelling leidt tot een halvering van de vruchtbaarheidscijfers in vergelijking met die van het oorspronkelijke model'.

Vertaling Passage III:

Bij een bepaalde populatieomvang betekent dit een halvering van de vruchtbaarheidscijfers uit de graaf. Bij welke populatieomvang is dit het geval?

Passage IV:

Opgave 1 (tekst voor vraag 5)

'Tabel 2 is verkregen door een computer volgens het bijgestelde model de aantallen op de tijdstippen $t = 1, 2, \dots, 10$ te laten berekenen. Hierbij is uitgegaan van een populatie die op tijdstip 0 bestond uit: 1400 nuljarigen, 600 eenjarigen, 350 tweejarigen, 150 driejarigen, 80 vierjarigen, 40 vijfjarigen en 10 zesjarigen.'

Vertaling Passage IV:

Ga nu uit van het verbeterde model. Neem aan dat op $t = 0$ de populatie roodborstjes bestaat uit: 1400 nuljarigen, 600 eenjarigen, 350 tweejarigen, 150 driejarigen, 80 vierjarigen, 40 vijfjarigen en 10 zesjarigen.

Met een computer is uitgerekend hoeveel roodborstjes van elke leeftijd er zullen zijn op $t = 1, 2, \dots, 10$.

De uitkomsten staan in tabel 2.

Passage V:

Opgave 1 (vraag 5)

'Bereken hoeveel jongen de groep van 1400 nuljarigen van tijdstip $t = 0$ volgens het bijgestelde model in hun derde levensjaar zal voortbrengen.'

Vertaling Passage V:

Een gedeelte van de 1400 nuljarige roodborstjes van $t = 0$ bereikt het derde levensjaar (en heten dan: 2 jaar oud). Hoeveel jongen zullen zij in hun derde levensjaar krijgen?

Opmerking:

het door elkaar gebruiken van 'derde levensjaar' en 'tweejarigen' in examenopgaven, leidt telkens weer tot misverstanden. Dit geeft men al toe door in het correctievoorschrift aan te geven hoe deze fout moet worden afgestraft. Wat is er tegen om door een duidelijker formulering te voorkomen dat deze fout gemaakt wordt?

Bijvoorbeeld door een toevoeging zoals in de 'vertaling' van vraag 5.

Passage VI:

Opgave 2 (vraag 10)

'Toon aan dat de formule voor t die hieruit volgt, redelijk in overeenstemming is met het vermoeden dat het verband tussen G en t van de vorm

$$t = a \cdot G^{2/3}$$

is en bereken a in gehelen nauwkeurig.'

Vertaling Passage VI:

Vul de gegeven waarde van p en de (in vraag 9) berekende waarde van q in in de formule

$$\ln t = p \cdot \ln G + q.$$

Geef nu ook de formule die t uitdrukt in G .

Laat zien dat deze formule behoorlijk goed klopt met de natuurkundige formule

$$t = a \cdot G^{2/3}$$

en bereken a (a afronden op een geheel getal).

Opmerking:

handiger nog zou zijn om het invullen van p en q in de formule $\ln t = \dots$ en het herleiden tot $t = \dots$ al bij vraag 9 te vragen).

Passage VII:

Opgave 3 (vraag 15)

'Bereken in gehelen nauwkeurig met hoeveel procent de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's door deze tariefsverhoging zal toenemen.'

Vertaling Passage VII:

De totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's zal door deze tariefsverhoging toenemen.

Bereken met hoeveel procent de dagopbrengst toeneemt; (afronden op hele procenten).

Passage VIII:

Opgave 4 (tekst voor vraag 16)

'Door KASIM herhaald aan te roepen, kun je het proces simuleren van telkens een kaart uit het spel trekken, de kaart weer in het spel steken, schudden, opnieuw trekken, enzovoort.'

Vertaling Passage VIII:

Met KASIM kun je eenvoudig een trekking met teruglegging simuleren.

Passage IX:

Opgave 4 (vraag 16)

'Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans op twee keer schoppenaas bij tien trekkingen als elke kaart dezelfde kans heeft om getrokken te worden.'

Vertaling Passage IX:

Bereken de kans dat bij 10 trekkingen uit een volledig kaartspel precies twee keer schoppenaas wordt getrokken.

Opmerking:

Vraag 9 zou beter gesteld kunnen worden na de eerste twee regels tekst van opgave 4. Daarna kan dan de tekst over KASIM volgen. En dan de rest van de opgave.

Passage X:

Opgave 4 (tekst voor vraag 17)

'Anja denkt dat de kans op schoppenaas groter is dan $1/52$. Zij laat KASIM achter elkaar 10400 trekkingen uitvoeren. Daarbij wordt 240 keer schoppenaas getrokken.'

Vertaling Passage X:

Anja vermoedt dat de kans om met KASIM schoppenaas te trekken groter is dan $1/52$. Om meer 'zekerheid' te krijgen, voert zij met KASIM 10400 trekkingen uit. Daarbij treedt schoppenaas 240 keer op.

Passage XI:

Opgave 4 (vraag 17)

'Onderzoek of bij een significantieniveau van 1% de conclusie gerechtvaardigd is dat bij KASIM het trekken van een schoppenaas een grotere kans heeft dan $1/52$.

Vertaling Passage XI:

Wordt Anja door het trekkingsresultaat (240 keer schoppenaas bij 10400 trekkingen) in het gelijk gesteld, als je uitgaat van een significantieniveau van 1%?

Passage XII:

Opgave 4 (vraag 18)

'Bereken bij welke keuze van k Carla een nagenoeg even groot risico loopt als Bernd om KASIM ten onrechte een schoppenvoorkeur toe te kennen.'

Vertaling Passage XII:

De kans dat Carla ten onrechte de conclusie trekt dat KASIM een 'schoppenvoorkeur' heeft, hangt af van de keuze van k .

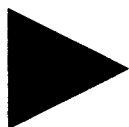
Bereken hoe groot Carla k moet nemen opdat de kans dat zij de verkeerde conclusie trekt ongeveer even groot is als bij Bernd.

Tenslotte

De aandachtige lezer zal zelf in staat zijn de verschillende categorieën struikelblokken in de citaten te herkennen. Soortgelijke talige barrières, zij het wat minder talrijk, doen zich voor in het vwo-examen wiskunde A (2e tijdvak), in het havo-examen wiskunde A (eerste en tweede tijdvak) en (jawel!) in het havo-examen wiskunde B. Enkele cryptische teksten in het vwo-examen wiskunde B doen vermoeden dat ook hier méér dan alleen wiskunde getoetst wordt.

Een treurige constatering die een nieuwe oproep aan Inspectie/CEVO rechtvaardigt: door verbetering van examenteksten kunt u daadwerkelijk bijdragen aan *gelijke kansen voor anderstalige leerlingen*.

Het woord is nu aan de inspectie.



Mededeling

Wiskunde A-lympiade

Afgelopen schooljaar is voor de tweede keer een landelijke Wiskunde A-lympiade georganiseerd. Aan de voorronde namen 50 scholen met ongeveer 125 teams deel. Zij werkten één dag aan een open opdracht, waarna per school één of twee werksommen mochten worden ingezonden. Twaalf teams gingen door naar de anderhalve dag durende finale die werd gehouden in een bungapark in Garderen.

Ook het komende cursusjaar (1992/1993) zal er weer een A-lympiade gehouden worden. Er zullen twee rondes zijn. De voorronde zal plaatsvinden op 11 of 12 december 1992 (dit naar keuze van de school), en de finale op 26 en 27 februari 1993. De enige voorwaarde voor deelname is dat er door een school één of meer teams van 4 leerlingen uit 5 of 6 vwo, die wiskunde A in hun pakket hebben, geformeerd worden, en dat er een docent beschikbaar is, die als contactpersoon optreedt. (Eventueel mogen er ook havo-leerlingen met Wiskunde A in hun pakket meedoen, maar de opgave zal uitgaan van vwo-niveau.) De docent zal ook ingeschakeld worden bij de selectie van de teams die naar de finale doorgaan. Er zijn voor de deelnemende teams geen kosten verbonden aan het meedoen.

Begin oktober hebben alle (vwo) scholen bericht ontvangen, waarna zij zich konden aanmelden.

Voor meer informatie kunt u zich wenden tot het Freudenthal instituut, 030-61 16 11 (Heleen Verhage of Jan de Lange).

Op verzoek van het team W12-16 is hierop door de VMTS middels onderstaande brief aan de secretaris van de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs gereageerd:

Geachte heer Ter Pelle,

Van de VMTS leerplancommissie heb ik vernomen dat er nieuwe ontwikkelingen zijn binnen het wiskunde-onderwijs voor 12- tot 16-jarigen en met betrekking tot de inhoud van het programma voor deze leeftijdscategorie.

Het is u bekend dat deze leeftijdscategorie voor het MTO de instroom vormt en dat de aansluiting van beide wiskundeprogramma's van groot belang is voor het met succes deelnemen van deze leerlingen aan een MTS-opleiding.

Het is om deze reden dat de leerplancommissie met zorg het nieuwe wiskundeprogramma heeft bestudeerd en enkele kanttekeningen aan u kenbaar heeft gemaakt, te weten te weinig of geen aandacht voor een aantal algoritmen zoals vergelijkingen oplossen en werken met letterbreuken. De VMTS adviseert u met deze kanttekeningen rekening te houden door het programma wiskunde 12-16-jarigen bij te stellen. Wij zijn bereid met u contact te onderhouden en mee te werken aan de ontwikkeling van een programma wiskunde dat waarborgen biedt voor een goede doorstroming naar het MTO. Tevens verzoeken wij u bij uw werkzaamheden ook aandacht te besteden aan een nascholingsprogramma voor de MTO-docenten vanwege de nieuwe aanpak van het wiskunde-onderwijs.

Hoogachtend,
w.g. Drs. J. W. N. Jansen,
adj. directeur VMTS

► **Waardering?**

A. H. Degens

In Euclides nummer 9 van jaargang 67 stond op de bladzijden 259, 260, 261 en 262 een artikel van professor Jan de Lange. Op bladzijde 262 schrijft de professor in de rechter kolom (tweede alinea) 'Vanuit de VMTS is waardering voor het programma geuit'.

Elders trof ik de reactie van de VMTS aan; het woord 'waardering' ben ik in die reactie niet tegengekomen; wel kwam ik de zinsneden 'met zorg... bestudeerd' en 'adviseert... het programma... bij te stellen' tegen.

Geen redelijk denkend mens kan na lezing van de (bijgevoegde) reactie van de VMTS tot dezelfde conclusie komen als professor De Lange. Hoe betrokkene aan zijn conclusie kon komen is niet zo duidelijk. Omdat ik veronderstel dat *Euclides* onder andere beoogt lezers zoals schrijver dezes adequaat te informeren, verzoek ik de redactie de bijgevoegde brief van de VMTS af te drukken.

W12-16 en de VMTS

De leerplancommissie wiskunde van de VMTS heeft enige keren contact gehad met het team W12-16. Daarbij is zij uitvoerig geïnformeerd over de nieuwe ontwikkelingen in het wiskunde-onderwijs.

Noot van de redactie: de VMTS is inmiddels opgegaan in de VBVE, de Vereniging voor Beroepsonderwijs en Volwassenen Educatie.

Toen de voorvermelde brief van de leerplancommissie (van 29 april) de COW bereikte heeft dit onmiddellijk geleid tot een nuancering zoals u kunt zien in de inleiding van het Trajectenboek, waarbij ik naast de positieve geluiden ook de vraagtekens heb gemeld.

► **De vele tongen van het MTO**

Jan de Lange

De heer Degens en zijn (?) VMTS maken het mij niet eenvoudig te reageren. Hij verwijst naar een brief van de leerplancommissie VMTS (datum onbekend) waarin zorg overheerst en waar mijn kwalificatie 'waardering' vanuit de VMTS met geen mogelijkheid aan ontleend kan zijn. Dat heeft hij juist ingeschat.

De COW heeft echter van de leerplancommissie wiskunde van de VMTS ook een andere brief gekregen, gedateerd 29 april 1992, waarin gezegd wordt dat de opzet de commissie aanspreekt.

Beide brieven zijn door verschillende mensen ondertekend.

Beide brieven waren de voorzitter van de COW echter onbekend bij het schrijven van het Euclides-artikel.

Waarop is de positieve inschatting mijnerzijds dan wel gebaseerd?

Vanaf medio 1991 is er enkele keren contact geweest tussen het COW-team 12-16 en de Leerplancommissie van de VMTS. De rapportage daarvan naar de COW was redelijk positief: waardering voor het programma in globale zin.

Daarnaast was er een docent uit MTS-kringen lid van de COW die nog positievere geluiden liet horen. Deze twee informatiebronnen gecombineerd deden bij mij het woord 'waardering' uit de pen vloeien.

● **40 jaar geleden** ● ●

► **Vraagstukken**

747. Van een afdalende M.R. met positieve termen is het aantal termen oneven. Het product der middelste drie termen is 216. De som van de tweede en de voorlaatste term is $25\frac{1}{2}$. Wordt de reeks oneindig voortgezet, dan is de limiet van de som der termen 96.

Bepaal die reeks.

748. In een regelmatige 7-hoek is de zijde a , de kleinste diagonaal b en de grootste c .

Bewijs:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ en } a(a + b + c) = c^2.$$

749. Van $\triangle ABC$ zijn gegeven: $\angle C$, de zwaartelijijn m_c en de bissectrice d_c . Construeer deze driehoek.

Vraagstukken uit Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 40 (1952-1953).

'Ontwikkelingen in de didactiek'

► Het gebruik van contexten

Bram Lagerwerf

Veel opgaven in wiskundeschoolboeken zijn tegenwoordig problemen in een context. Voor de leerlingen is dat meestal leuker. Zo'n probleem geeft de leerlingen enige speelruimte: de manier van oplossen ligt niet bij voorbaat vast, en ook in het antwoord is variatie mogelijk. In dit artikel geef ik een indruk van de mogelijkheden en de moeilijkheden van het gebruik van contexten.

Eerst een voorbeeld: aftreksommen die 'niet kunnen' zoals $5 - 7 = \dots$. Dat is een eenvoudig en beperkt stukje leerstof. Daardoor biedt het de mogelijkheid in een paar bladzijden allerlei aspecten van het werken met contexten te illustreren. Het is niet voor elke klas nodig er zoveel aandacht aan te besteden als in dit voorbeeld gebeurt.

Voorbeeld

In de tweede klas komt het hoofdstuk negatieve getallen aan de beurt.

De lerares heeft een rekening bij de postbank en laat een paar afrekeningen zien. Ze vraagt wie van de leerlingen die papiertjes herkent. Louise heeft zoiets nog nooit gezien. Maarten wel, desgevraagd legt hij uit waar zo'n afrekening voor dient. Wim wil vertellen wat een ruzie het gaf thuis toen er pas zo'n afrekening zoek was. De lerares houdt in de

gaten dat dit verhaal niet te lang duurt. Er komen meer verhalen, en vragen. Leerlingen reageren op elkaar en op de lerares. Soms moet een leerling tot de orde geroepen worden die voor zijn beurt gaat. Een enkele leerling krijgt een aanmoediging. Met name komt de vraag ter sprake hoe het tegoed van zo'n rekening groter en kleiner kan worden. Als iedereen dat begrijpt, zet de lerares het schema uit de kop van de afrekeningen op het bord en de leerlingen nemen dat een paar keer over in hun schrift. Daar bedenken ze zelf getallen bij als voorbeeld.

Dan komt deze opgave (overgenomen uit *Moderne Wiskunde 2 lm*) aan de orde:

postbank		
aantal bij	totaal bijgeboekt bedrag:	vorig tegoed 285,00
aantal af 1	totaal afgeboekt 340,00	nieuw tegoed ...

Figuur 1

8 Meneer Huisman krijgt deze afrekening van de postbank.

- Hoe zie je of er geld bijkomt of eraf gaat?
- Welk bedrag komt in het vakje 'nieuw tegoed' te staan?

Tot nu toe was er klassikaal nog geen voorbeeld geweest dat op een negatief saldo uitkwam. Toch krijgen alle leerlingen het goede antwoord op de stippeltjes, ziet de lerares bij het rondkijken. Sommigen zetten er een min-teken voor, anderen schrijven het met een rode pen of zetten het woordje *rood* erbij, een enkeling kent het deftige woord *debet*.

Dan wordt er klassikaal gesproken over hoe je zo'n antwoord kan vinden. Het heeft enige voeten in de aarde voordat daar aandacht voor is maar dan kan een aantal leerlingen zijn verhaal doen.

Jan heeft op zijn rekenmachine $285 - 340 = -55$ uitgerekend *want het saldo was f285,- en nu moet er f340,- van af*. Dat klinkt heel plausibel.

Margje heeft het zo gedaan:

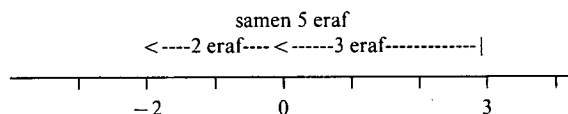
Om f340,- van f285 af te trekken moet er eerst 285 af, dan is het tegoed nul. Maar dan moet er nog 55 af; 55 minder dan nul is -55. Dit is voor de meeste leerlingen geen eenvoudig verhaal. De lerares kijkt eens rond en ziet veel vraagtekens op de gezichten.

Ze vraagt wie het wel snapt en het nog eens in eigen woorden kan uitleggen. Omar waagt een poging: *Als je bijvoorbeeld een tegoed hebt van 300 gulden en je haalt 500 gulden uit de muur. Eerst 300 afgetrokken en dan nog 200, dan heb je 500 afgetrokken.* Dat helpt een paar leerlingen over de streep.

Kees heeft gewoon $340 - 285 = 55$ uitgerekend, *en dan is het - 55.* Maar dat kan hij niet uitleggen. De lerares laat dat maar even voor wat het is.

Andere leerlingen hebben oplossingen die op een van deze drie lijken.

Dan komen er meer van dit soort probleempjes, met temperaturen, met waterpeil, met bergen en dalen, met heen en weer lopen, met voorraden die opraken waarna de handelaar bij zijn collega gaat lenen, en dergelijke. In de klas wordt duidelijk om wat voor probleempjes het gaat: situaties waar een aftreksom in zit die onder nul uitkomt. De leerlingen ontwikkelen een handige strategie die gebaseerd is op het verhaal van Margje of Omar en op de werkwijze van Jan of Kees. Daar komt in een klassegerek dit plaatje bij te pas:



Figuur 2

De leerlingen kunnen hiermee overzichtelijk aangeven wat er aan de hand is. Ze kunnen nu ook zelf wel van die probleemsituaties bedenken. En ze kunnen bij elkaar of met elkaar controleren of hun antwoord goed is. Aan het eind heeft de juf nog een serie sommen met en zonder verhaal, om te oefenen.

Tot zover dit voorbeeld.

Ik kijk nu eerst naar de rol van de leerlingen en dan naar die van de docente.

De leerlingen krijgen een probleemsituatie voorgeschoteld waar ze niet allemaal even vertrouwd mee zijn. Dat is hier niet zo'n probleem, er is genoeg know how in de klas om gezamenlijk op een aanvaardbaar beginniveau te komen: de leerlingen kennen de situatie en kunnen zich het probleem voorstellen. Er zitten natuurlijk ook allerlei niet-

wiskundige kanten aan. De ruzie bij Wim thuis bijvoorbeeld; zo iets kan zo hoog zitten dat het er wel uit moet. Maar uiteindelijk is de aandacht gericht op de vraag hoe de getallen op de afrekening samenhangen.

Doordat de leerlingen de situatie kennen, kunnen ze zelf eerst 'gewone' getalvoorbeelden bedenken en kunnen ze later zelfs het negatieve saldo de baas. Ze willen dat ook wel uitleggen. Doordat ze zich het probleem kunnen voorstellen, maken ze het zich gemakkelijker tot een eigen probleem. Daardoor is er minder gezeur van: 'Ga nou eens aan je werk', of iets dergelijks. Ze voelen zich meer medeverantwoordelijk voor het werk, ze willen zelf een oplossing voor het probleem hebben en zijn er gemakkelijker toe te porren zelf na te gaan of het een goede oplossing is.

Tot zover gaat de les in de beleving van de meeste leerlingen nog niet over negatieve getallen maar over bankafrekeningen. Daar komt verandering in als er vergelijkbare situaties ter tafel komen. Al snel zien ze dat het eigenlijk steeds 'hetzelfde' probleem is en dat de oplossing steeds op dezelfde manier kan worden uitgevoerd en verantwoord.

Niet iedereen is gelukkig met de oefenopgaven. Sommigen vinden het nu wel genoeg, anderen willen nog wel wat sommen maken waar gemakkelijk een goed antwoord uit te krijgen is.

Het werk van de lerares begon natuurlijk al bij de lesvoorbereiding. Ze denkt dat in deze klas deze context geen gemeengoed is, daarom besluit ze tot een klassikale inleiding. Zo kan ze de klas bij elkaar houden en tegelijkertijd zien wat er leeft in de klas. Ze moet in elk geval zorgen dat alle leerlingen begrijpen hoe de saldi op en neer kunnen gaan.

Dan komt er een periode van 'liefdevol verwaarlozen'. Ze moet zich er niet teveel mee bemoeien, maar wel de boel in de gaten houden. Stimuleren dat leerlingen problemen die ze niet allen aankunnen met elkaar oplossen.

Na een tijdje klassikaal het resultaat bezien. Niet alleen het antwoord, maar vooral ook de manier



van doen en de verantwoording van de werkwijze, want daar gaat het uiteindelijk om. Zo kunnen de leerlingen beginnen met wat ze zelf kunnen (dat is vaak meer dan de docent denkt) en dan uitbouwen door wat er in de nabespreking gebeurt. Zulke 'onderwijsleergesprekken' zijn dikwijls niet gemakkelijk. Soms wil iedereen wat zeggen en dan weer doet niemand een mond open. De ene keer is er een rijke oogst, de andere keer wil niets lukken. De leerlingen zullen moeten leren aandacht te hebben voor elkaar, dat gaat niet vanzelf, daar is de docent bij nodig. Het is ook belangrijk dat de leerlingen vaak genoeg ervaren dat zo'n klassikaal gesprek hen wat oplevert. Liever niet langer doorgaan dan zo'n minuut of tien.

Dan komt er een belangrijke periode. Enerzijds moeten de leerlingen de gelegenheid krijgen zich in te leven in de verschillende andere probleemsituaties en anderzijds moet langzamerhand tot hen doordringen dat het steeds 'hetzelfde' is. Aanvankelijk hebben leerlingen vaak de neiging vooral de verschillen te zien. Dan hebben ze hulp nodig om ook op de overeenkomsten te kunnen letten. Ook weer niet te haastig zijn daarmee, als docent. Wanneer duidelijk is dat het probleem steeds hetzelfde is, wordt het tijd de oplossing te standaardiseren. Niet standaard voor de hele klas. Elke leerling moet gelegenheid krijgen een werkwijze te ontwikkelen waar hij/zij vertrouwen in heeft, zo'n werkwijze gaat langer mee. De docent zorgt dat de leerling niet onnodig omslachtig of ingewikkeld werkt.

In dit stadium is het gemakkelijk een standaardprobleempje bij de hand te houden waaraan duidelijk te zien is hoe het zit. Of een voorstelling van zaken die de leerlingen aanspreekt. Dat wordt vaak een *model* genoemd. Hier dus het eenvoudige voorbeeld op de getallenlijn.

Aan het eind ziet de leraar er op toe dat er genoeg gevarieerde oefeningen zijn en dat de leerlingen die ook serieus nemen.

Samenvattend: het werken met contexten valt in een aantal stappen uiteen:

- in het boek staat een probleem in een context,
- de docent zorgt dat de context voor de leerlingen herkenbaar is en inleefbaar,
- de leerlingen kunnen dat probleem met hun kennis van de situatie wel oplossen,
- de docent laat de leerlingen van elkaars oplossingen kennis nemen, en probeert daar wat lijn in te brengen,
- er komen meer van zulke problemen, de leerlingen leren de soort herkennen,
- zij ontwikkelen een handige aanpak voor dit soort problemen,
- er ontstaat langzamerhand een model met een algoritme,
- dat algoritme moet worden geoefend.

Een aantal opmerkingen hierbij.

Het komt zelden voor dat er echt een probleem in de klas is waarmee wiskunde kan worden geleerd, het blijft school. Het vraagt altijd van de leerlingen dat ze het spelletje meespelen van 'Stel je voor dat...'. Dat gaat op het vwo vaak gemakkelijker dan op het lbo. In de echte praktijk geven trouwens vaak niet-wiskundige argumenten de doorslag.

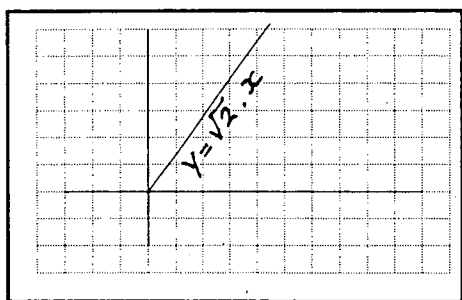
Werken met contexten vraagt van de leerlingen enig probleemoplossend vermogen. Het doet een beroep op hun creativiteit en intuïtie. Alle leerlingen hebben die. Het gebruik van de creativiteit en de intuïtie wordt bevorderd door goede voorbeelden en door eigen oefening. In het algemeen ligt dit in het lbo moeilijker dan in het vwo, maar hoe beter een probleem tot de verbeelding van de leerlingen spreekt, hoe beter het gaat.

Soms wil het de leerling maar niet duidelijk worden. Het is dan voor de leraar erg verleidelijk even de truc te demonstreren, dan kan de leerling weer even verder. Maar een truc die niet op inzicht is gebaseerd heeft weinig draagkracht, en een kort leven. De docent kan echter de leerling niet dwingen te begrijpen. Het beste is in veel gevallen de zaak even te laten rusten en een volgende keer met nieuwe voorbeelden nog een poging te wagen. Het

kan niet genoeg benadrukt worden hoe belangrijk het is dat de leerling een oplossingsmethode als 'eigen' ervaart.

Contexten helpen de leerlingen bij het opbouwen van een wereldbeeld, de contexten moeten daarvoor echt zijn, geen quasi-flauwekul. Wat echter wel kan is een duidelijke fantasiewereld, zoals de heks met warmteblokjes en koudeblokjes, en Heer Bommel met zijn vijver met ponenten.

Een context kan ook wiskundig zijn. Irrationale getallen bijvoorbeeld zijn richtingscoëfficiënten van lijnen door de oorsprong die verder door geen enkel ander roosterpunt gaan.

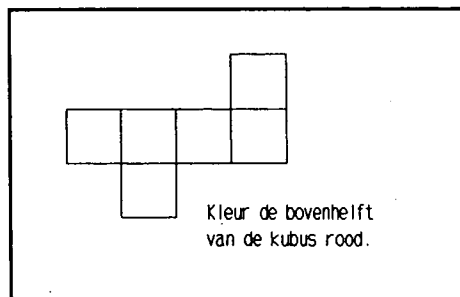


Figuur 3

Niet alle problemen zijn even geslaagd. Een vraag als: 'Hoe groot is de wereld?' kan met een goede begeleiding veel creativiteit losmaken, maar in het algemeen hebben de leerlingen te weinig houvast aan zo'n vraag. Naast voldoende houvast moet een probleem ook voldoende uitdaging bevatten, anders wordt het weer te flauw. Daarbij speelt ook een rol in hoeverre de leerlingen zich veilig voelen in de klas. Durven ze iets te proberen wat wellicht niets oplevert? Hebben ze de vrijheid fouten te maken, om zo te ontdekken hoe het niet kan? Kunnen ze erop vertrouwen dat de leraar er uiteindelijk mede voor zorgt dat alles goed komt? De docent zal moeten zorgen voor een evenwichtige combinatie van deze drie factoren: houvast, uitdaging en veiligheid.

Bij problemen in een context komt het gebruik van concrete materialen soms uitstekend van pas. Het

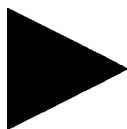
kubus-probleem hieronder is voor veel leerlingen pas oplosbaar als ze de kubus echt in elkaar zetten.



Figuur 4

Wiskunde doen kan minder dan vroeger zwijgend gebeuren. Leraren vragen de leerlingen, maar leerlingen vragen ook elkaar, te vertellen hoe ze het doen en waarom dat goed is. Leerlingen kunnen dit als ballast ervaren, die het echte werk vertraagt. De docent zal in woord en daad duidelijk moeten maken dat dit 'praten over' er echt bijhoort en dat het helpt bij het leren.

Tenslotte: dit artikel is een oriëntatie. Het doet een beroep op uw creativiteit en intuïtie. Dat gaat steeds beter als u meer voorbeelden ziet en zelf ook eens voorzichtig aan het experimenteren slaat.



Verschenen

Jiri Adamek; *Foundation of Coding*; Wiley-Interscience Series; £ 39.80; 336 blz.; ISBN 0-471-62187-0

In dit boek ligt de nadruk op fout detecterende- en foutcorrigerende codes en bijbehorende decodeermethoden.

De wiskunde die nodig is om deze codes te construeren en te begrijpen wordt zorgvuldig opgebouwd. Ook de praktische implicaties krijgen ruime aandacht.

Naast het hoofdonderwerp zijn enkele hoofdstukken gewijd aan cryptografie en informatietheorie (datacompressie; entropie).

Harm Bakker

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

► Opgave 639

In de Recreative Wiskunde komen we regelmatig de harmonische reeks tegen: $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$.

Hoewel de termen steeds kleiner worden, wordt de som S_n steeds groter: de reeks is divergent. Als $n = 83$, dan is $S_n > 5$. Als $n = 12367$, dan is $S_n > 10$.

Verder geldt de eigenschap dat alleen S_1 een geheel getal is. Als $n > 1$, dan is S_n nooit meer een geheel getal.

Je kunt je afvragen wat we met de termen van een harmonische reeks moeten doen om de reeks convergent te krijgen.

Ik geef u een aantal voorbeelden:

– Kwadrateer elke term. Deze convergente reeks is algemeen bekend: $1^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{4})^2 + \dots = \frac{1}{6} \pi^2$.

– Ook is bekend dat de alternerende reeks convergeert:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2.$$

– Minder bekend is: Schrap alle termen met het cijfer 0 in de noemer. De overblijvende termen vormen een convergente reeks met als som 23,10345...

In plaats van het cijfer 0 kunnen we ook een ander cijfer nemen, de som verandert daardoor wel! (Ross Honsberger: Mathematical Plums, hoofdstuk 3.)

Als opgave ditmaal nog een methode om de harmonische reeks 'klein te krijgen'.

In plaats van om en om van teken te wisselen, kunnen we ook PER DRIETAL van teken wisselen. We krijgen dan de reeks:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots + + + \dots$$

Bewijs dat deze reeks convergeert en bereken de exacte waarde van de som.

Als u nog andere methodes weet om 'de harmonische reeks te laten convergeren', dan houd ik me aanbevolen voor informatie. Indien bekend graag met literatuurverwijzing.

Voor het goed oplossen van deze puzzel plus het vroegtijdig inzenden (binnen een maand na verschijnen) ontvangt u 5 punten voor de ladderwedstrijd.

Hartelijk dank voor de berg informatie over de Romeinse cijfers: 'Moet 1991 geschreven worden als MXMI of als MCMXCI?'.

Volgens de vele literatuurbronnen was er oorspronkelijk het 'optelsysteem'. Vandaar dat op veel klokken de 4 genoteerd staat als IIII. Omdat dit op den duur lange reeksen werden heeft men er pas later het 'aftreksysteem' aan toegevoegd. De 4 schrijft men nu als IV, dat is korter!

Toch blijft het onduidelijk: heeft u op klokken wel eens VIII gelezen?

In principe kunnen we zeggen: 'alles' is goed. Als we 1991 willen schrijven als 1991 I's achter elkaar, dan is dat correct. Er staan nergens afspraken vermeld. *Hessel Pot* (14), Woerden liet dat mij nog eens duidelijk zien aan de hand van zijn postzegelverzameling met wiskundige onderwerpen. In 1964 staat er op een postzegel van Zuid-Korea XXXXV en in 1967 XLV.

Je kunt er ook puzzels mee maken: Hoe wordt 999 geschreven? IM DID!

De ladderpuzzel kwam uit Maarten Pennings' boekje *Mathemagie*. Als $N \in \mathbb{N}$, dan geldt $N^2 = N + N + \dots + N$ (N termen).

Daarna werd er gedifferentieerd. Helaas is de differentiaalrekening niet gedefinieerd met natuurlijke getallen. Dus op dit moment kunnen we eigenlijk al stoppen.

Gaan we toch verder, dan is de 'afgeleide': $2N = 1 + 1 + \dots + 1$. Ook dit is niet correct, want N is een variabele, zodat we op een of andere manier ook nog de kettingregel moeten gebruiken. (Het aantal elementen rechts van het = teken is variabel!)

Een voorzichtige poging zou kunnen zijn:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dN} (N + N + \dots + N) &= \lim_{\Delta N \rightarrow 0} \left[\frac{f(N + \Delta N) - f(N)}{\Delta N} \right] = \\ &\quad \langle N \text{ termen} \rangle \\ &= \lim_{\Delta N \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta N} [(N + \Delta N) + \dots + (N + \Delta N) - (N + \dots + N)] = \\ &\quad \langle N + \Delta N \text{ termen} \rangle \quad \langle N \text{ termen} \rangle \\ &= \lim_{\Delta N \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta N} [(N + \Delta N) + \dots + (N + \Delta N) + \\ &\quad \langle N \text{ termen} \rangle \\ &\quad + (N + \Delta N) + \dots + (N + \Delta N) - (N + \dots + N)] = \\ &\quad \langle \cong N \text{ termen} \rangle \quad \langle N \text{ termen} \rangle \\ &= \lim_{\Delta N \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta N} [N \cdot N + N \cdot \Delta N + \Delta N \cdot N + \Delta N \cdot \Delta N - N \cdot N] = \\ &= \lim_{\Delta N \rightarrow 0} [N + N + \Delta N] = N + N. \end{aligned}$$

Maar nogmaals: in de verzameling van de natuurlijke getallen ken ik geen definitie van de differentiaalrekening.

Onder de toppers met 35 punten werd na loting winnaar: *Ton Kool*, 'Bakara', Hoofdstraat 53, 2171 AR Sassenheim. Gefeliciteerd met de boekenbon van f25,-.



► Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1991 – 31 juli 1992

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. J. van Lint, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester F. F. J. Gaillard (tot 26 oktober), C. Th. J. Hoogsteder (vanaf 26 oktober), overige leden mevr. A. F. S. Aukema-Schepel, J. J. Breeman, drs. S. H. P. Garst (vanaf 26 oktober), mevr. H. Goemans-Wallis, C. Th. J. Hoogsteder, mevr. drs. M. P. Kollenveld (vanaf 26 oktober), F. J. Mahieu, mevr. M. Meeder (tot 26 oktober).

Op zaterdag 26 oktober werd de jaarvergadering gehouden te Bilthoven. Deze jaarvergadering werd gecombineerd met een studiedag. Het thema van de studiedag was 'Ander onderwijs, andere toets (vorm)en'. De aanwezigen op de studiedag konden deelnemen aan één of meer van de volgende werkgroepen: Een examen na (der be)kijken; Experimenteel examen toetsen; Mondeling SO op de mavo, hoe gaat dat?; Toetssteen of dobbelsteen?; Proefwerken en het nieuwe leerplan; De B-praktijk te kijk; Afsluiting van de basisvorming; Wiskunde voor zwakpresterende leerlingen in het individueel en voorbereidend beroeps-onderwijs; Andere IBO-stof, andere toetsen: hoe maak je die?; Toetsen havo A. Wat maak je er van als docent en wat maken de leerlingen er van?; De ruimte genomen; Examens en wiskunde A: onmogelijke combinatie of goede afsluiting?; Pfff... mondeling SO wiskunde voor havo-B; Functie-onderzoek in het jaar 2000; De Wiskunde-Alympiade.

Centrale lezingen werden gehouden door prof. dr. J. de Lange Jzn met als titel 'Geen toets zonder problemen' en mevr. G. H. Dekker met als titel 'Toetsen bij een ander programma'.

Dit verenigingsjaar werden voor het eerst landelijk de nieuwe eindexamens wiskunde A en wiskunde B havo afgenomen. Nadat reeds in het vorige verenigingsjaar in Rotterdam een proefbijeenkomst gehouden werd, waarop docenten gezamenlijk over de problematiek konden praten en proefwerken kon-

den uitwisselen, werden in de eerste helft van november soortgelijke bijeenkomsten gehouden in Amsterdam, Arnhem, Eindhoven, Groningen en Zwolle. In Rotterdam werd op 10 maart een vervolgbijsamenkomst gehouden.

Op 17 september werd in Breda een regionale bijeenkomst gehouden waarop drs. R. Bosch een voordracht hield over grafen en matrices in het wiskunde-A onderwijs en op 26 maart werd in samenwerking met het Freudenthal instituut te Eindhoven een regionale proefbijeenkomst gehouden over de grafische zakrekenmachine in het wiskundeonderwijs.

De eindexamenbesprekingen waren dit jaar op 20 mei voor wiskunde A vwo en voor wiskunde A havo in 9 plaatsen, op 25 mei voor mavo/lbo C en D in 7 plaatsen en op 27 mei voor wiskunde B vwo in 8 plaatsen en voor wiskunde B havo in 9 plaatsen.

Met de meningen van de docenten, zoals die uit de verslagen blijken, is bij de cesuurbepaling terdege rekening gehouden.

In Euclides, in nr. 2 van jaargang 67, verscheen een samenvatting van de examenbesprekingen vwo en havo 1991 en in nr. 7 van jaargang 67 van mavo/lbo C en D 1991.

Daar dit verenigingsjaar het laatste jaar was waarin het team W12-16 van de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (de COW) aan het nieuwe leerplan wiskunde 12-16 en de nieuwe examenprogramma's voor vbo/mavo C/D kon werken, nam wiskunde 12-16 ook dit jaar een belangrijke plaats in.

In september/oktober en november hebben – evenals in het vorige verenigingsjaar – in elf plaatsen tweetallen bijeenkomsten, georganiseerd door de NVvW en de COW, plaats gevonden waarin de aanwezigen geïnformeerd werden over de bijgestelde plannen van de COW en in de gelegenheid werden gesteld hierover hun mening te geven. Ter voorbereiding van deze bijeenkomsten werden tevoren twee proefbijeenkomsten te Amersfoort gehouden.

Op 18 januari werd in Utrecht een bijeenkomst voor wiskunde-docenten in het volwassenenonderwijs gehouden ter bespreking van hun speciale wensen en mogelijkheden ten aanzien van invoeringstijdstip, leerboeken en eventuele modellering van de nieuwe COW-programma's.

Het bestuur heeft regelmatig gesprekken gehad met de vertegenwoordigers van de vereniging in de COW waarbij alle voorstellen van werkgroepen en alle brieven van wiskundesecties en individuele leden aan de orde kwamen. In december had een afvaardiging van het bestuur een gesprek met het dagelijks bestuur van COW en het team W 12-16, waarna in januari een voorlopig advies over de voorstellen van de COW werd opgesteld.

Bij de werkzaamheden van de vereniging met betrekking tot deze nieuwe plannen werd nauw met de VALO (Veldadvisering Leerplan Ontwikkeling) – wiskunde samengewerkt, onder andere tijdens een VALO-conferentie in november.

Toen in december bleek dat de Commissie Herziening Eindtermen – bij haar nader advies inzake de kerndoelen voor de basisvorming in basisonderwijs en voortgezet onderwijs – voorstelde een nieuw kerndoel goniometrie aan de kerndoelen wiskunde toe te voegen, heeft het bestuur er op 4 december bij de

staatssecretaris met klem op aangedrongen dit voorstel niet over te nemen. Het ziet er naar uit dat dit kerndoel inderdaad niet aan de kerndoelen zal worden toegevoegd.

Met de SLO heeft het bestuur gesproken over de invulling van een verdere leerplanontwikkeling voor de eerste jaren van het voortgezet onderwijs met accenten op de ontwikkeling van de algebra en ontwikkeling ten behoeve van het gehele lbo.

In december heeft het bestuur brieven gezonden aan de besturen van lerarenvakorganisaties, besturenbonden en schoolleidersorganisaties om hen te wijzen op de nieuwe leerplannen en het nieuwe examenprogramma wiskunde. In deze brief wordt hun medewerking gevraagd om te bereiken dat zoveel mogelijk docenten aan de nascholing kunnen deelnemen. Ook is een brief gezonden aan de besturen van de vakinhoudelijke verenigingen om ook hen te wijzen op de nieuwe leerplannen en het nieuwe examenprogramma. Aan deze besturen is gevraagd om ook hun leden op de hoogte te stellen van deze veranderingen en hen aan te sporen tot samenwerking met de docenten wiskunde.

In Euclides is regelmatig aandacht gegeven aan de plannen van de COW, terwijl het juni-nummer, als special, geheel aan deze plannen is gewijd.

Op 6 april is een nieuwe nomenclatuurcommissie, onder leiding van F. J. Mahieu, gestart. De commissie zal zich allereerst richten op wiskunde 12-16, waarna de werkzaamheden zich zullen uitbreiden tot het gehele voortgezet onderwijs.

De Werkgroep Interpretatie Eindexamen wiskunde A vwo (de WIEWA) heeft dit verenigingsjaar – onder leiding van J. J. Breman – het tweede deelrapport, handelend over analyse, algebra en automatische gegevensverwerking, uitgebracht. Ook dit rapport is aan de CEVO aangeboden met het verzoek de examens volgens dit rapport op te stellen. Hiermee heeft de werkgroep haar werk beëindigd.

Gedurende het gehele verenigingsjaar is veel aandacht besteed aan een goede samenwerking tussen het bestuur van de vereniging, de redactie van Euclides en de uitgever.

De gesprekken met de redactie hebben onder andere geleid tot een voorstel voor een nieuw redactiestatuut, terwijl in gesprekken met Wolters-Noordhoff gestreefd wordt naar meer duidelijkheid over een afbakening van verantwoordelijkheden.

De NVORWO (de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken- en Wiskunde Onderwijs) en de NVvW hebben een nieuwe didactiekprijsvraag 1992 uitgeschreven, waarvoor de inzendingen voor 15 januari 1993 moeten worden opgestuurd (zie Euclides van mei 1992, pag. 253).

Met de Vereniging voor Statistiek zijn besprekingen gevoerd om te komen tot cursussen statistiek voor docenten wiskunde.

Op 20 augustus 1991 en 16 juni 1992 zijn gesprekken op het Ministerie van O & W gevoerd. Het eerste onderhoud had als resultaat dat het eerste deel van het WIEWA-rapport in het gele-

katern van Uitleg is gepubliceerd, terwijl de tweede keer is gesproken over de instelling van een commissie ter herziening van het examenprogramma wiskunde B vwo.

In juni ontving het bestuur van het Ministerie ook een concept voor een nieuw eindexamenprogramma voor wiskunde A vwo met het verzoek hierop eventueel commentaar te leveren. Het concept bestaat uit het oude programma voor Toegepaste analyse, Toegepaste algebra en Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek met daaraan toegevoegd de voorstellen van PRINT (Project Invoering Nieuwe Technologieën). In het geleverde commentaar heeft het bestuur verwezen naar het reeds eerder opgestelde advies, zoals dat ook in Euclides 67,4 van december 1991 is opgenomen.

De werkgroep Vrouwen en Wiskunde bestond in maart tien jaar.

Dit tweede lustrum werd gevierd met een congres op zaterdag 21 maart te Utrecht. Het thema van het congres was: 'Vrouwen gebruiken wiskunde in hun werk'. Een groot gedeelte van de dag was gevuld met workshops, waarin men onder leiding van diverse vakvrouwen kennis kon maken met de wiskunde in hun beroep. Hiernaast waren er centrale lezingen door mevr. drs. Jeanne Breman en de tot 'Maths Teacher of the Year' gekozen Rose Flower uit Engeland. Het congres werd met een cabaret besloten. Ter voorbereiding van dit congres hield de werkgroep een landelijke dag in Utrecht op 16 november.

Samen met de Werkgroep Vrouwen en Natuurwetenschappen wil de Werkgroep met een 'Centrum Vrouwen en Exacte Vakken' starten. Subsidie hiervoor is bij het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen aangevraagd. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars heeft deze aanvraag ondersteund.

De Didactiekcommissie heeft zich dit jaar bezig gehouden met het onderwerp 'Begrijpen'. Leerlingen zeggen vaak dat ze iets begrijpen, terwijl toch blijkt dat ze het niet begrijpen. Men probeert hier meer inzicht in te krijgen.

Vertegenwoordigers van de Bêta Federatie – de federatie van Nederlandse Natuurwetenschappelijke Beroepsverenigingen – waarbij ook de NVvW is aangesloten, hebben op 26 februari een onderhoud gehad met minister Ritzen. Namens de NVvW heeft de secretaris hieraan deelgenomen. In dit gesprek is onder andere ingegaan op de zorgelijke situatie van leraren in het basis- en voortgezet onderwijs en het feit dat steeds minder jongeren kiezen voor bèta-vakken.

Het initiatief van OMEGA (Overleg Maatschappijleer, Economie, Geschiedenis, Aardrijkskunde) en de NVON (Nederlandse Vereniging van Onderwijsgeven in de Natuurwetenschappen) om te komen tot een platform, teneinde regelmatig met de minister te kunnen overleggen, heeft geleid tot de oprichting van de VVVO, het Platform van Vakinhoudelijke Verenigingen in het Voortgezet Onderwijs. De voorzitter nam namens de NVvW aan de bijeenkomsten van de VVVO deel.

Door contacten met de importeur van de TI-81, een grafische zakrekenmachine, heeft het bestuur het mogelijk gemaakt dat leden van de vereniging voor tijdelijk f120,- in het bezit konden komen van deze TI-81.

Het bestuur vergaderde dit jaar twaalf maal, waarvan éénmaal met de inspecteurs drs. W. Kleijne en dr. J. Nijenhuis. Naast deze vergaderingen waren er diverse bijeenkomsten van subgroepen uit het bestuur en van bestuursleden met onder andere de redactie van Euclides, Wolters-Noordhoff, de COW, de afgevaardigden van de vereniging in de COW en de VALO-wiskunde.

► Jaarvergadering/ Studiedag 1992

Op zaterdag 7 november 1992 wordt de jaarvergadering/studiedag van de NVvW gehouden in Het Nieuwe Lyceum, Jan Steenlaan 38, Bilthoven.

Het thema van de studiedag is:

Taal bij het wiskundeonderwijs.

Programma Studiedag

10.30 h-10.40 h: Inleiding op de studiedag

10.40 h-10.45 h: Pauze koffie/thee

10.45 h-11.30 h: Plenaire lezing 1 *Taalontwikkeling en Taalbeheersing*

Fred Weerman

11.30 h-12.45 h: Werkgroepen

12.45 h-13.45 h: Lunch,

boeken-, leermiddelenmarkt

13.45 h-14.30 h: Plenaire lezing 2

Overdrachtelijke Taal

Joop van Dormolen

14.30 h-14.45 h: Pauze, koffie/thee

14.45 h-16.00 h: Werkgroepen

De werkgroepen zijn:

1. Contexten in de onderbouw mavo/vbo.
2. Taal en context in realistisch reken-wiskunde-onderwijs op de basisschool.
3. Contexten in de bovenbouw havo en vwo: conflict tussen wiskundetaal en informele taal?
4. Grafiekentaal.
5. Taal bij ruimtemeetkunde.

6. Praten over kijken.
7. Taal en teken.
8. Nomenclatuur in het nieuwe leerplan.
9. 'Allochtoon rekenen': in het Nederlands, op z'n Nederlands.
10. Dyslexie.
11. Situatietaal en formele taal.
12. Het is maar hoe je het zegt.
13. Optimaliseren met de graphic calculator.
14. Ruimtemeetkunde met behulp van CD-I.
15. Taal bij de zak-reken-machine.

Meer uitgebreide informatie over deze dag en de wijze van aanmelden vindt u in Euclides nummer 1 van jaargang 68 op de bladzijden 29 t/m 32. Telefonische informatie: 076-653218.

► Boekbespreking

H. Anton, C. Rorres: *Elementary Linear Algebra* (Applications Version); John Wiley & Sons; ISBN 0-471-54438-8; \$ 18,95; 789 blz.

Het betreft hier de grondig herziene zesde editie van een veelgebruikt leerboek Lineaire Algebra. Het behandelt de gebruikelijke onderwerpen: lineaire vergelijkingen; matrices; vectoren en vectorruimten; inprodukruimten; eigenwaarden en eigenruimten; lineaire transformaties. De laatste twee hoofdstukken geven een inleiding in numerieke lineaire algebra en complexe vectorruimten.

Bij de presentatie van de leerstof hebben de auteurs didactische overwegingen een hogere prioriteit gegeven dan wiskundig formalisme. Een deel van de stellingen wordt m.b.v. voorbeelden plausibel gemaakt i.p.v. bewezen. Waar mogelijk zijn meetkundige interpretaties van begrippen en eigenschappen beschreven. In de hier besproken Applications Version is verder een 212 bladzijden tellend hoofdstuk toegevoegd waarin een twintigtal toepassingen min of meer uitvoerig worden besproken. We noemen er enkele: grafen; speltheorie; Markovketens; computergraphics; kleinste kwadraten methode; cryptografie; tomografie; fractals. Bij elk van de onderwerpen is aangegeven welke van de voorgaande hoofdstukken als voorkennis nodig zijn. Vooral door deze collectie toepassingen is dit een uitgave die opvalt in de grote rij van leerboeken lineaire algebra.

Harm Bakker

Jan probeert: $6(8 + 4)$ en $(5 + 1)3$ en vindt beide keren het goede antwoord.

Jan: Ziet u wel?

Docent: Bij $6(8 + 5)$ vind ik 78 en jij 73 en mijn antwoord is goed.

Jan probeert nog een paar opgaven: $3(81 + 69)$, $11(83 + 27)$ en $21(73 + 32)$ en vindt weer telkens het goede antwoord.

Jan: Alweer goed. Ik vind dat u mij de punten wel moeten geven.

Om deze discussie te voorkomen dient Jan in het geval van het vereenvoudigd vereenvoudigen volgens mij ongelijk te krijgen.

* Zie *Euclides* 67, nr. 7.

► Vereenvoudigd vereenvoudigen (vervolg*)

H. G. J. M. Bouwens

De klas krijgt een wiskundeproefwerk terug. Bij de opgaven 'Verdrijf de haakjes en bereken het antwoord' kwam het volgende rijtje voor:

$$6(3 + 9) =$$

$$2(5 + 15) =$$

$$3(7 + 8) =$$

$$(10 + 1)2 =$$

$$(2 + 7)9 =$$

Jan heeft daarvan gemaakt:

$$6(3 + 9) = 63 + 9 = 72$$

$$2(5 + 15) = 25 + 15 = 40$$

$$3(7 + 8) = 37 + 8 = 45$$

$$(10 + 1)2 = 10 + 12 = 22$$

$$(2 + 7)9 = 2 + 79 = 81$$

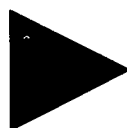
De docent heeft hiervoor geen punten toegekend. Bij de bespreking ontspint zich dan de volgende discussie:

Jan: Meneer, U hebt bij mij een heel rijtje dat goed was toch fout gerekend.

Docent: Nee Jan, je hebt wel de goede antwoorden gekregen, maar de manier deugt niet.

Jan: Maar ik heb toch de goede antwoorden gevonden?

Docent: Dat is stom geluk, bij andere getallen had je waarschijnlijk de goede antwoorden niet gevonden. Probeer het maar.



Adressen van auteurs

H. G. J. M. Bouwens, Hofstedeweg 178,

7535 CZ Enschede

L. Bozuwa, Merwekade 90,

3311 TH Dordrecht

A. H. Degens, Rapenburg 58B,

3211 EZ Leiden

M. C. van Hoorn, Noordersingel 12,

9901 BP Appingedam

M. Kindt, Freudenthal instituut, Tiberdreef 4,

3561 GG Utrecht

A. Lagerwerf, Dwarsweg 52,

3702 XC Zeist

J. de Lange, Freudenthal instituut, Tiberdreef 4,

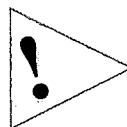
3561 GG Utrecht

J. P. Muthert, C. Roelestraat 6,

1151 CB Broek in Waterland

Sectie Wiskunde Stedelijk Gymnasium Leiden, Fruinlaan 15,

2313 EP Leiden



Kalender

4 november 1992: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

7 november 1992: Bilthoven, Jaarvergadering/Studiedag NVvW; zie blz. 28 t/m 32 van *Euclides* nr. 1, jg. 68.

16 december 1992: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

Inhoud

Inhoud 33

Rosemary Flower: Een eigenzinnige aanpak van wiskundeonderwijs 34

Verschenen 36, 59

Martin Kindt: De bissectricestelling 37

Mededelingen 43, 53

Vreemde woorden in de wiskunde 43

Leen Bozuwa: Maak het niet te vlug (te) kort of: Progressieve schematisering in het VO 44

Brief aan de voorzitter 45

Werkbladen 48

M.C. van Hoorn: Bij drie experimentele examenopgaven 50

Boekbesprekingen 50, 64

Jan Muthert: Cijferen of ontcijferen, Wiskunde A of tekstverklaring? (vervolg) 51

A.H. Degens: Waardering? 54

Jan de Lange: De vele tongen van het MTO 55

40 jaar geleden 55

Bram Lagerwerf: Het gebruik van contexten 56

Recreatie 60

Verslag van het verenigingsjaar
1 augustus 1991 - 31 juli 1992 61

Jaarvergadering/Studiedag 1992 63

H.G.J.M. Bouwens: Vereenvoudigd vereenvoudigen (vervolg) 64

Adressen van auteurs 64

Kalender 64