

Wolters-Noordhoff

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Vakblad voor de wiskundeleraar

Euclides

816
357
492

jaargang 67 1991 | 1992 april

Redactie

Drs. H. Bakker
Drs. R. Bosch
Drs. J. H. de Geus
Drs. M. C. van Hoorn (hoofredacteur)
N. T. Lakeman (beeldredacteur)
D. Prins (secretaris)
Ir. V. E. Schmidt (penningmeester)
Mw. Y. Schuringa-Schogt (eindredacteur)
Mw. Drs. A. Verweij
A. van der Wal
Drs. G. Zwaneveld (voorzitter)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,
8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43,
4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v.
Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f55,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f37,50; contributie zonder Euclides f30,00. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drieluik ingewacht bij drs. M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- en liefst voorzien te zijn van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f60,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f39,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgende nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers f10,00 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUIP MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

● Inhoud ● ● ● ● ●

Actualiteit 193

Agneta Aukema, Huub Jansen *Twee ontwikkelaars geven weerwoord*

Een bestuurslid van de NVvW en de secretaris van de VALO Wiskunde/Informatica leggen kritische vragen voor aan de leiders van het W 12-16-team.

Bijdrage 200

Martin Kindt *Functieonderzoek begint met de grafiek (I)*

De grafische rekenmachine biedt vele nieuwe mogelijkheden en zal zeker invloed krijgen op ons wiskundeonderwijs...

40 jaar geleden 204

Bijdrage 205

P. A. Hoogendoorn *Vereenvoudigd vereenvoudigen, kan dat?*

Een gouden abonnee test onze rekenvaardigheid.

Brief 206

H. J. Smid e.a. *Open brief*

In een brief aan de voorziter van de COW tonen vakdidactici van de universitaire lerarenopleidingen zich bezorgd over het in het Trajectenboek beschreven meetkundeonderwijs.

Mededelingen 207

Werkbladen 208

Serie Wiskunde 12-16

(experimenteel) 210

Pieter van der Zwaard, Aad Goddijn *Globaal kijken naar grafieken*

In het Trajectenboek is globaal kijken naar grafieken belangrijk om verbanden te onderzoeken.

Serie 'Begrijpen' 211

Leen Bozuwa *Wat is begrijpen nu eigenlijk?*

Eerste van een serie artikelen over begrijpen, een ingewikkeld proces, waarmee de didactiekcommissie zich al enige tijd bezighoudt.

Bijdrage 212

Freek Mahieu *Een ervaring met een computerprogramma*

Over de mogelijkheden van een computerprogramma bij het leren oplossen van eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden.

Verenigingsnieuws 214

Examenbesprekingen mei 1992

Boekbespreking 216

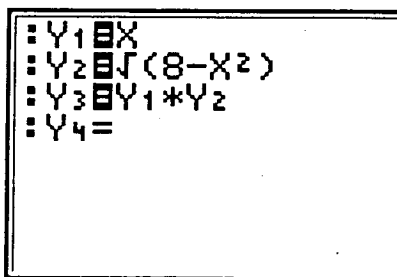
Recreatie 217

Bijdrage 218

Drs. G. Bakker *De wiskunde-examens lbo/mavo van 1991, eerste tijdvak*

Een overzicht van de resultaten, waarna het C- en D-niveau worden vergeleken en vervolgens ook de scores van meisjes en jongens.

Kalender 224



Verstandig functie-onderzoek.

► **Twee ontwikkelaars geven weerwoord**

Agneta Aukema, Huub Jansen

Het wiskunde 12-16 project, uitgevoerd onder supervisie van de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs, wordt binnenkort afgesloten. Veel wiskundeleraren hebben de afgelopen jaren, o.a. tijdens regionale hoorzittingen georganiseerd door de NVvW en VALO¹-conferenties, kunnen reageren op de voorstellen voor een nieuw wiskunde-programma in de onderbouw van ons voortgezet onderwijs en voor de nieuwe C- en D-examenprogramma's voor mavo en lbo.

Op dit moment wordt aan deze voorstellen de laatste hand gelegd voordat ze, aan het eind van dit schooljaar, aan de minister worden aangeboden.

Er is behalve waardering ook kritiek geuit op de plannen zoals die door het W12-16-team onder leiding van Marja Meeder en George Schoemaker, in samenwerking met een aantal experimenteerscholen, zijn ontwikkeld.

Een aantal kritische vragen hebben we Marja en George voorgelegd.

Hieronder een samenvatting van hun reacties.

Realistisch

Het nieuwe wiskundeonderwijs zoals door het W12-16-team ontwikkeld, wordt wel gekarakteriseerd met de term 'realistisch'. Een term die in het basison-

derwijs wordt gebruikt om het onderscheid met het voorgaande, mechanistische rekenonderwijs aan te geven. Wat verstaan jullie onder realistisch wiskundeonderwijs?

Wanneer je de schoolboeken van de afgelopen 25 jaar bekijkt, dan zie je dat daarin geprobeerd wordt om de wiskunde voor meer leerlingen toegankelijk te maken. Door het aanbieden van meer contextrijke situaties krijgen de leerlingen de gelegenheid om zich bij wiskunde iets voor te stellen. Dat hoeft niet altijd een context uit het dagelijks leven te zijn, maar kan ook een wiskundig probleem zijn, dat het denkvermogen van de leerlingen stimuleert. Realistisch wiskundeonderwijs is dus geen revolutionaire, door een groep vrijgestelde leerplanontwikkelaars bedachte, vernieuwing maar een voortzetting van een reeds lang aan de gang zijnde verandering. Twee aspecten zijn daarbij van belang: het toegankelijk maken van wiskunde voor alle leerlingen en het concreter maken van wiskunde zodat de leerlingen zich er iets bij kunnen voorstellen.

In realistisch wiskundeonderwijs gaat het niet alleen om het toewerken naar een diploma, maar ook om het leren van wiskunde waar zowel goede als zwakke leerlingen voor de rest van hun leven wat aan hebben. Realistisch wiskundeonderwijs heeft aanrakingspunten met de wereld buiten de school en niet alleen met door wiskundigen of schoolboekenauteurs bedachte leerstof. Nuttige wiskunde staat soms haaks op wat nu nog in de examens wordt gevraagd. Wij vinden dat in het bestaande wiskundeonderwijs te veel getraind moet worden op het kunnen maken van standaardexamenopgaven. In de komende jaren moeten er examens ontwikkeld worden waarin zowel wiskunde die je nodig hebt voor het vervolgonderwijs als wiskunde die je kunt gebruiken in het dagelijkse leven beide gevraagd worden.

A- en B-wiskundeprogramma's

In navolging van het huidige wiskundeonderwijs in de bovenbouw van havo en vwo hebben sommigen er voor gepleit om ook in de onderbouw van ons voortgezet onderwijs een A- en B-wiskundeprogramma in te voeren. Een A-programma met nuttige, realistische wiskunde voor leerlingen die daarna niet verder

gaan met wiskunde én een meer formeel wiskunde B-programma met traditionele onderwerpen als letterrekenen, vergelijkingen en goniometrie voor leerlingen die wel verder gaan met wiskunde in het mbo, havo of vwo. Waarom is niet voor een dergelijke indeling gekozen?

Op zich is dat een interessante gedachte die in het begin ook door ons is overwogen, want het zou een oplossing betekenen voor veel organisatorische en aansluitingsproblemen. Het is echter geen oplossing voor de leerlingen, want het zou betekenen dat een deel van de leerlingen wordt afgesneden van het vervolgonderwijs en een ander deel té vroeg geconfronteerd met meer geformaliseerd wiskundeonderwijs zonder voldoende kennis te maken met meer maatschappelijk relevante wiskunde. Op welke gronden zou je die keus voor leerlingen van 13 à 14 jaar moeten maken? Wij hebben er bewust voor gekozen om de leerlingen langer bijeen te houden om ze de gelegenheid te geven van beide aspecten van de wiskunde kennis te nemen.

Bovendien, wat zou een dergelijke scheiding betekenen voor bijvoorbeeld de mavo? Zowel op C- als op D-niveau zou je daar dan een wiskunde A- én B-programma moeten aanbieden. Organisatorisch wordt dat wel een heel zware belasting voor de school.

In de voorgestelde programma's voor wiskunde op D- of C-niveau is al iets te onderscheiden van meer of minder formele wiskunde, maar de onderwerpen zijn voor beide groepen leerlingen ongeveer gelijk. Wel vinden we het van groot belang dat de leerlingen in de derde klas havo/vwo of de vierde klas mavo zicht krijgen op het onderscheid tussen A- en B-wiskunde in verband met de keuze die ze moeten maken.

Huidig wiskundeonderwijs

Veel leraren vragen zich bij het bestuderen van jullie voorstellen met enige bezorgdheid af wat er uit het huidige wiskundeonderwijs verdwijnt en waarom dat nodig is. 'Ik geef al goed wiskundeonderwijs, waarom zou ik dat moeten veranderen', was de reactie van een van de collega's.

Wij vinden verschuiven een beter woord dan veranderen; méér van het een, minder van het ander. Het

huidige programma bestaat vooral uit algebra en meetkunde. In het nieuwe programma wordt meer aandacht besteed aan rekenen als vervolg op het rekenonderwijs in het basisonderwijs en krijgt het onderwerp informatieverwerking en statistiek een grotere plaats. Voor het kunnen onderzoeken en beschrijven in allerlei situaties van verbanden en verschijnselen wordt een grotere plaats ingeruimd, waarbij niet alleen lineaire of kwadratische, maar bijvoorbeeld ook exponentiële en periodieke verbanden aan de orde kunnen komen. Ook voor meetkunde is in de eerste twee leerjaren meer plaats ingeruimd met daarbij vooral aandacht voor ruimtemeetkunde.

Wat verdwijnt is het rekenen met vectoren, de cirkelvergelijking en de grote nadruk op kwadratische functies. Verder verdwijnt de uitgebreide aandacht voor het gebruiken van allerlei notaties.

Wij geloven niet dat de meeste leraren het nieuwe programma als een bedreiging zullen ervaren want in hun onderwijs komen al veel van deze zaken aan de orde. Het ging er ons echter om een programma te ontwikkelen waarmee het hele wiskundeonderwijs verbeterd kan worden.

Democratische leerplanontwikkeling

Er is kritiek geuit op het feit dat een groep ontwerpers samen met een kleine groep experimentenscholen te ver vooruit liep en zich te veel baseerde op een ideale schoolsituatie. Hierdoor zou een verkeerd beeld zijn ontstaan van de haalbaarheid van het nieuwe programma in gewone scholen. In dit verband wijzen sommigen er op dat het nieuwe leerplan van bovenaf wordt opgelegd en er niet democratisch te werk is gegaan.

Wij vinden dat we erg democratisch gewerkt hebben en veel mogelijkheid hebben geboden voor inspraak. In dit opzicht kunnen we de vergelijking met elke andere leerplanontwikkeling doorstaan. Al in het najaar van 1990 hebben we onze plannen op de regionale bijeenkomsten naar buiten gebracht. Er is toen heel serieus geluisterd naar de reacties van de leraren en dat heeft geleid tot aanpassing en verbetering. Ook heeft het geresulteerd in een leerstofbeschrijving waarop de leraren in het najaar van 1991 weer konden reageren. Pas nu, in



het begin van 1992, worden er knopen doorgehakt. Natuurlijk zijn er altijd mensen die vinden dat zij te weinig invloed hebben gehad, maar nog nooit tevoren hadden leraren bij de ontwikkeling van een nieuw programma zo veel inspraak.

Democratisch is ook de brede samenwerking met het APS², de lerarenopleiders, de docenten van de experimenteerscholen, de NVvW en de VALO. Een dergelijke samenwerking is alleen mogelijk op basis van een democratische werkwijze en sluit hobby-isme uit. Het ziet er naar uit dat bij het begin van de invoering, in augustus 1993, vrijwel alle wiskundeleraren geïnformeerd zijn en kunnen kiezen uit een breed cursusaanbod.

Ons probleem was wel dat we in het begin een jaar nodig hadden om ons in te werken en ideeën te ontwikkelen. Pas daarna konden we met de eerste resultaten naar buiten komen. Wat we ook jammer vinden is dat er nu nog geen enkele school is die ervaring heeft opgedaan met het nieuwe programma tot en met het nieuwe examen, want dat wordt pas in 1994 afgenomen.

Ook is het niet waar dat we met 'elite'-scholen hebben gewerkt. Natuurlijk ga je tijdens de ontwikkelingsfase aan het werk met experimenteerscholen die tegen een stootje kunnen en met leraren die zich voor dit werk willen inzetten, maar we hebben met gewone, modale scholen gewerkt.

Iedereen moet zich overigens wel realiseren dat het programma zoals dat door de COW op het eind van dit schooljaar aan de minister wordt aangeboden geen eeuwig leven heeft. Veranderingen gaan snel tegenwoordig en het is de vraag of we met dit programma de volgende eeuw zullen halen.

Als we ons werk over mochten doen dan zouden we met nog minder experimenteerscholen gaan werken en tegen de minister zeggen: 'Als u echt kwaliteit wilt, zorg dan dat na de ontwikkelfase een fase wordt ingelast voor uitbouw en verbreding'. Verder zouden we willen dat er een goede evaluatie plaats vindt van de wijze waarop het nieuwe programma in de scholen wordt gerealiseerd. Daaruit zouden dan suggesties voor aanvulling en verbetering van het programma en het examen kunnen komen.

Contexten

Een van de belangrijkste kenmerken van het nieuwe programma is het leren van wiskunde aan de hand van contexten. Het leren van wiskunde wordt daardoor zinvoller en het geleerde krijgt daardoor meer betekenis voor de leerlingen. Daartegen worden ook bezwaren aangevoerd. Door het werken met contexten zou de abstracte kant van de wiskunde te weinig aandacht krijgen. 'Context-wiskunde is helemaal geen wiskunde!', zeggen sommige leraren.

Als je werkt aan iets nieuws, krijgen bepaalde aspecten altijd te veel nadruk. We merken dat het woord 'context' als een etiket op deze vernieuwing wordt geplakt. Op zich is daar niets op tegen als er ook maar enige nuancering wordt aangebracht. We zijn weliswaar vóór het gebruiken van meer contexten in het wiskundeonderwijs, maar daarbij mag het niet blijven. Als leerlingen toe zijn aan formalisering en abstrahering, dan moet je dat niet blokkeren. Bij de ene leerling zal dat sneller gebeuren dan bij de ander. In de leerboeken wordt dit hopelijk zo uitgewerkt dat er een evenwicht ontstaat tussen het gebruik van contexten en de mogelijkheid voor leerlingen zich de wiskundige essentie van wat ze geleerd hebben eigen te maken. Het mag niet zo zijn dat door het gebruik van contexten de fundamentele zaken waarom het uiteindelijk gaat, niet naar voren komen. Ook mag het gebruik van contexten er niet toe leiden dat er geen vaardigheden worden ingeoefend.

Langzamerhand is iedereen er van overtuigd dat het nodig is om nieuwe begrippen, inzichten en vaardigheden vanuit concrete en voorstelbare situaties, contexten dus, te ontwikkelen.

Nieuw is het inzicht dat het toetsen van het geleerde zowel dient te gebeuren door het aanbieden van 'kale' opgaven als ook door het aanbieden van nieuwe situaties waarin de leerlingen de kennis die zij hebben opgedaan in andere situaties moeten gebruiken. In de experimenteerscholen hebben we gezien dat de leerlingen daar ook toe in staat zijn.

Allochtonen en meisjes

Er is kritiek geleverd op het feit dat het voorgestelde wiskundeonderwijs te veel taalvaardigheden vereist

van taalzwakke leerlingen en te weinig mogelijkheden biedt voor niet-Nederlandstalige leerlingen. Ook vinden sommigen dat het materiaal te weinig bijdraagt om tot meer meisjesvriendelijk wiskundeonderwijs te komen.

Allereerst willen we opmerken dat het onderwijs en dus ook het wiskundeonderwijs geen pasklare antwoorden heeft op alle problemen waar een samenleving als de onze mee geconfronteerd wordt. We hebben geprobeerd om nieuw wiskundeonderwijs te ontwikkelen voor deze veranderende samenleving, maar het ei van Columbus hebben ook wij nog niet gevonden.

Wij vinden niet dat je het probleem van taalzwakke leerlingen kunt oplossen door zoveel mogelijk taal te vermijden. Daar help je zowel de Nederlandstalige als de niet-Nederlandstalige leerlingen niet mee. We vinden wel dat ook wiskundeleraars alert moeten zijn als ze met taal bezig zijn en moeten meehelpen aan de taalontwikkeling van hun leerlingen. Wiskundeonderwijs kan bijdragen aan taalontwikkeling, maar dat vereist van leraren een andere aanpak, kennis en vaardigheden.

Om een bijdrage te kunnen leveren aan meer meisjesvriendelijke wiskunde hebben we er bewust naar gestreefd om een team samen te stellen met evenveel mannen als vrouwen. Dat heeft wellicht nog geen baanbrekende vernieuwingen opgeleverd, maar in ons materiaal is wel een grote gevarieerdheid van contexten en toepassingen te vinden. Er worden veel voorbeelden gegeven waarmee meer meisjesvriendelijke wiskunde mogelijk wordt en dat mogen we als winst beschouwen.

Letterrekenen

Veel docenten vinden dat in het nieuwe programma te weinig aandacht wordt besteed aan het aanleren en inoefenen van traditionele vaardigheden, zoals het letterrekenen en het oplossen van vergelijkingen. Deze docenten zijn bang dat door het werken aan allerlei praktische probleemsituaties er geen ruimte meer is voor het verwerven van de nodige routines en dat daardoor de leerlingen in het vervolgonderwijs in problemen zullen komen.

Dat was een begrijpelijke kritiek tijdens de eerste fase van ons project waarbij men echter vergat dat

we nog lang niet klaar waren. Nu, in de eindfase, zien we in de experimenteerscholen dat de leerlingen wel een groot aantal van die vaardigheden ontwikkeld hebben. Ook in de leerstofbeschrijving kun je zien dat er wel degelijk aandacht wordt besteed aan bijvoorbeeld letterrekenen. Weliswaar meer in het havo/vwo-traject dan in de mavo/lbo-trajecten, maar ook daar moeten bepaalde vaardigheden zeker ingeoefend worden. In het lbo echter moet je leerlingen niet te veel lastig vallen met letterrekenen want dat levert slechts schijnresultaten op.

Rekenen

Nieuw is de aandacht voor en de omvang van het domein rekenen. Niemand zal dit onterecht vinden, maar toch vragen sommige wiskundeleraars zich af of dit niet de taak is van het basisonderwijs. Er zijn er die vinden dat rekenen ook ondergebracht kan worden bij andere vakken in het voortgezet onderwijs die rekenen nodig hebben, zoals natuurkunde, aardrijkskunde en economie.

Leerlingen komen met verschillen in kennis en vaardigheden het voortgezet onderwijs binnen. Ze zijn afkomstig van verschillende basisscholen en als ze van eenzelfde school komen, heeft de ene leerling daar meer geleerd dan de ander. Bovendien weet iedere leraar dat verworven kennis en vaardigheden wegzakken als daaraan verder geen aandacht wordt besteed. Dat geldt voor het vak rekenen/wiskunde net zo goed als bijvoorbeeld voor een vak als Nederlands. We moeten daarbij wel bedenken dat ook het basisonderwijs veranderd is. De inhoud en de didactiek van het rekenonderwijs is veranderd en in de basisschool komen nu ook meetkundige zaken aan de orde. Leraren in het voortgezet onderwijs moeten daarvan op de hoogte zijn en daar rekening mee houden.

Vroeger hadden we in ons land toelatingsexamens tot het voortgezet onderwijs. Daar zijn we gelukkig al lang van af, maar die examinering had wel als positief effect dat er meer overleg was tussen het lager en het voortgezet onderwijs. Dat overleg zijn we jammer genoeg kwijt geraakt, maar het zou goed zijn als er weer meer overleg en samenwerking kwam tussen basis- en voortgezet onderwijs. Ge-

lukkig gebeurt dit op sommige plaatsen al.

We moeten af van de gedachte, die in het wiskunde-onderwijs lang heeft bestaan en die je soms nóg tegenkomt, dat je de leerlingen die voor wiskunde beperkte mogelijkheden hebben dit vak kunt onthouden. Dat gebeurt bij een vak als Nederlands ook niet, want iedereen vindt dat dat een verplicht vak moet zijn voor alle leerlingen tijdens hun gehele schooltijd. We moeten ons goed realiseren dat in het huidige en toekomstige onderwijs ons vak wiskunde niet meer een exclusief voorrecht is voor een kleine groep goede leerlingen, maar bedoeld is voor alle leerlingen. Wiskunde verandert van een elitair vak voor weinigen naar een dienstbaar vak voor allen. Je kunt dit vergelijken met de verandering die in het vreemde talenonderwijs heeft plaats gevonden. Eerst werd er Frans gegeven aan een kleine, bevoorrechte groep leerlingen, nu wordt er Engels gegeven aan alle leerlingen. Dat zijn veranderingen die voortkomen uit maatschappelijke ontwikkelingen.

De suggestie om de problemen die wij hebben met zwakke rekenleerlingen te laten oplossen door andere vakken, is weinig zinvol. Niet alleen omdat dit nu eenmaal onze taak als wiskundeleraar is, maar ook omdat dit zal leiden tot het aanleren van allerlei onbegrepen rekentrucjes waar we nu juist van af willen. Je kunt weer een vergelijking maken met het vak Nederlands. Ook daar worden de tekorten van leerlingen in bijvoorbeeld het correct gebruiken van werkwoordsvormen niet naar andere vakken afgeschoven.

Meetkunde

Het domein meetkunde in jullie programma bevat veel inspirerende en zinvolle activiteiten, maar er valt nog weinig structuur in te herkennen. Dreigt daardoor niet het gevaar dat het meetkundeonderwijs te fragmentarisch en oppervlakkig blijft en daardoor in de onderwijspraktijk minder aandacht krijgt dan de andere domeinen?

Dat is een groot probleem en dat mag zeker niet gebeuren.

Op dit moment heeft het voor ons dan ook hoge prioriteit om in het meetkundeprogramma meer structuur aan te brengen. We zoeken naar een andere dan de meetkundige structuur die zo'n 2000 jaar geleden begon met regels als 'Een lijn wordt door 2 punten bepaald'. Die Euclidische – en later de transformatie – meetkunde had weliswaar een duidelijke structuur, maar wij zoeken naar een samenhang die niet uit de wiskunde voortkomt, maar gebaseerd is op concrete ervaringen van leerlingen met meetkundige verschijnselen. Denk bijvoorbeeld aan vouwen en vouwlijnen. Eigenlijk is de eerste stap hiervoor destijds al gezet door Vredenduin die in de brugklas begon met tekenen, knippen en vouwen. Wij bouwen daarop voort en willen het meetkundeonderwijs baseren op empirische ervaringen van leerlingen waarbij we een drietal thema's onderscheiden: kijkmeetkunde, vormen en figuren, en plaatsbepalen. De vaardigheden die leerlingen hierbij moeten verwerven zijn rekenen, construeren en tekenen, redeneren en verklaren. Dat is de structuur waar wij op mikken en die we willen verduidelijken in een 3 bij 3 matrix met aan de ene kant de onderwerpen en aan de andere kant de vaardigheden die de leerlingen zich moeten eigen maken.

Geïntegreerde wiskundige activiteiten (GWA)

In het voorgestelde examenprogramma is geen plaats ingeruimd voor de GWA. Bovendien maken de leerplannen en het examenprogramma C/D een overladen indruk. Dreigt hierdoor niet het gevaar dat de GWA geen volwaardige plaats krijgen in het toekomstige wiskundeonderwijs?

Dat zal in de eerste plaats afhangen van de vraag of wij, en ook auteurs van nieuwe methoden, er in zullen slagen om de leraren hiervoor goede voorbeelden en bruikbare suggesties aan te reiken. In het onderwijs moet dit groeien vanaf de eerste klas, maar veel zal ook afhangen van de wijze van examinering. Duidelijk is dat de GWA niet in een gewoon, schriftelijk examen getoetst kunnen worden.

Het zal in de schoolonderzoeken moeten gebeuren, zoals dat in de experimenteerscholen al gebeurt. Van belang is dat leerlingen in een dergelijk schoolonderzoek voldoende tijd en rust krijgen om zelf aan een onderzoekje, wiskundig of thematisch, te werken. Hierin kunnen ze andere vaardigheden tonen dan in het schriftelijke examen. Als we er in slagen om dat in het schoolonderzoek te realiseren dan zullen die activiteiten ook in het onderwijs een plaats krijgen. Er is op dit moment voor de experimenteerscholen al een boekje gemaakt, de GWA-klapper, met 15 voorbeelden om in het onderwijs te gebruiken. Hopelijk zal dit leraren inspireren om eigen voorbeelden te ontwikkelen.

Zakrekenmachine en computer

In het wiskundeonderwijs zullen de zakrekenmachine en de computer een steeds belangrijker rol gaan spelen. Wordt daaraan wel voldoende aandacht besteed in jullie voorstellen?

Voor het rekenen, maar ook voor de algebra hebben we materiaal ontwikkeld waarbij de rekenmachine gebruikt kan worden. Wij vinden dat de zakrekenmachine ook op het examen gebruikt mag worden en dat je al vanaf de eerste klas de leerlingen daarmee moet leren werken. Daaraan zal in het onderwijs aandacht besteed moeten worden. Er zijn echter leraren die met overtuiging beweren dat hun leerlingen eerst goed moeten leren rekenen voordat ze aan de zakrekenmachine toe zijn. Dat is hun goed recht, maar wij zijn het daar niet mee eens.

Courseware ontwikkelen was niet onze opdracht, maar is wel gebeurd. We zijn echter niet met voorstellen gekomen, en dat zullen ook auteurs van schoolboeken vermijden, die niet bruikbaar zijn voor scholen die nog niet zo ver zijn in het gebruiken van computers.

Wij leggen minder nadruk op die rekenvaardigheden waarbij het resultaat met de zakrekenmachine of de computer sneller en beter kan worden bereikt; onze voorstellen bevatten veel mogelijkheden om deze apparatuur te gebruiken. In de toekomst zullen door het beschikbaar komen van nieuwe apparaten, denk bijvoorbeeld aan de graphic calculator, zeker aanpassingen nodig zijn.

Didactiek

Er is veel materiaal ontwikkeld dat een beeld geeft van de inhoud van het toekomstige wiskundeonderwijs: het examenprogramma C/D, leerstofpakketjes, leerstofbeschrijving, trajectenboek en examenbundels. Wordt in dit materiaal niet te veel nadruk gelegd op de inhoud en te weinig op andere didactische vaardigheden die van een leraar worden vereist, zoals het op gang brengen en begeleiden van leerprocessen, het leren samenwerken van leerlingen, e.d.?

Bij de nieuwe leerstofinhouden die wij voorstellen en de andere vaardigheden die we willen ontwikkelen hoort ook een andere didactiek. Onze opdracht was echter in de eerste plaats om de inhoud te veranderen. We hebben er voor gekozen om ruimte te laten voor diverse didactische werkvormen. In een groot, nationaal project als het W12-16-project moet je je bescheiden opstellen. Je moet iets ontwikkelen dat uitvoerbaar is voor de gewone, modale leraar die te maken krijgt met nieuwe leerboeken en andere inhouden. De meeste leraren zullen dan niet meteen ook hun werkwijze, hun didactische aanpak gaan veranderen. Dat komt later wel als zij meer vertrouwd zijn met die nieuwe inhouden.

Ook hebben we willen voorkómen dat men gaat denken dat er een revolutie plaats vindt waarbij alles overhoop gehaald moet worden, want dan schieten we ons doel voorbij. Voor een dergelijke verandering hadden we niet de mogelijkheden, maar het was ook niet onze opdracht. Natuurlijk hebben we wel ideeën over andere didactische werkwijzen en die zijn ook terug te vinden in het materiaal, maar die willen we niet aan anderen opleggen. Op dit moment wordt door het APS en de lerarenopleidingen gewerkt aan het inrichten van nascholingscursussen, gebaseerd op ervaringen in de experimenteerscholen, waarmee groepen leraren de mogelijkheid krijgen hun didactisch repertoire te verbreden. Dat is een veel betere aanpak. Je ziet daarbij dat sommige leraren hun didactiek in kleine stapjes aanpassen terwijl anderen al meteen een grote stap vooruit durven zetten. Ook dat is een mooi voorbeeld van democratische onderwijsontwikkeling, waar we het al eerder over hadden.

Noten

1. VALO = Veld Advisering Leerplan Ontwikkeling.
2. APS = Algemeen Pedagogisch Studiecentrum.

► Functieonderzoek begint met de grafiek (I)*

Martin Kindt

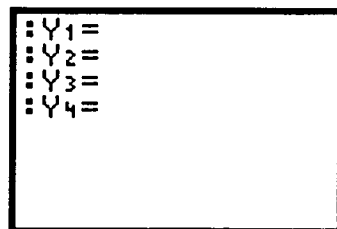
De grafische rekenmachine is in opmars. Voor de prijs van een paar goede hardloopschoenen koop je nu al een tekenaar-rekenaar met de afmetingen van een standaard rekendoos. De TI-81 is speciaal voor het wiskundeonderwijs ontwikkeld en munt uit door een helder bedieningssysteem. Overzichtelijke menu's, consequente commando's en natuurlijke notaties maken dat het apparaat een bijzonder lage drempel voor zowel leerling als leraar bezit. Op het gebied van functieonderzoek, matrixrekening en statistiek heeft deze zakcomputer van alles te bieden en het zou al gek moeten gaan als zij (of een gelijkwaardig apparaat) in de toekomst niet als steun en toeverlaat bij wiskunde A zou gaan dienen. De mogelijkheden om vraagstukken op het eindexamen met min of meer realistische gegevens toe te rusten, worden sterk vergroot als deze machines tot de toegestane hulpmiddelen gaan behoren. Uiteraard zal het gebruik ook implicaties kunnen (ja moeten) hebben voor het onderwijs. Met name de analyse-component van wiskunde A in het vwo, toch al enigszins omstreden, zou opnieuw onderzocht moeten worden.

In dit artikel wil ik het verder vooral over wiskunde B hebben. En omdat het apparaat geen ruimte-metkundige opties kent (hoewel je met wat moeite bijvoorbeeld wel een kubus op je scherm kunt maken), zal ik me beperken tot de analyse van wis-

kunde B op het vwo. Het vak dat al sinds de eerste eindexamens in 1974 in het teken staat van het functieonderzoek en het tekenen van een grafiek als afsluiting daarvan. Functieonderzoek met de grafische zakrekenmachine als hulpmiddel zal vaak juist *beginnen* met een grafiek en wat valt er dan verder nog te onderzoeken? Een andere voor de hand liggende vraag is of het apparaat op vruchtbare wijze kan worden ingeschakeld bij het leerproces.

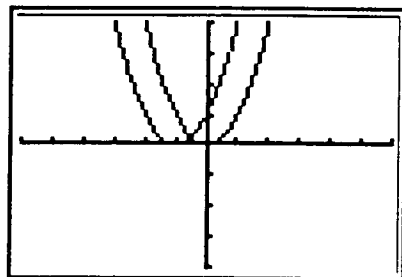
Operaties met functies

Als je een apparaat als de TI-81 voor het eerst in handen krijgt, wil je maar meteen een grafiek op het scherm toveren, tenminste zo verging het mij. De toets 'Y =' (linksboven) prikkelt de nieuwsgierigheid en roept dit lijstje op:



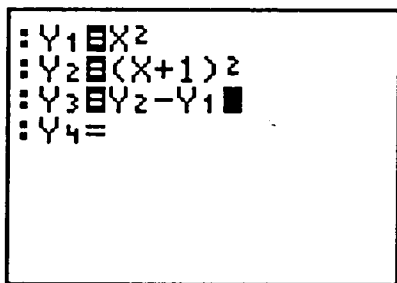
Kennelijk een bestand waarin naar believen functies kunnen worden opgeslagen. Ik beheers me even en kies voor het alledaagse ' $Y_1 = X^2$ ' (invoer via twee voor de hand liggende toetsen). Op 'GRAPH' gedrukt en er verschijnt een wat spits parabooltje op het scherm, maar via 'ZOOM' of 'RANGE' is het mogelijk het uiterlijk wat te verfraaien.

Een tweede functie erbij van dezelfde familie: ' $Y_2 = (X + 1)^2$ ' (dit is letterlijk de expressie op het scherm!) en twee grafiekjes worden zichtbaar:



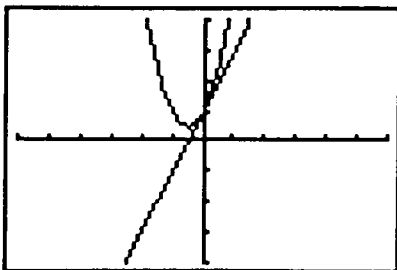
Dit brengt me op het eerste didactische idee: *bij de behandeling van operaties op functies die verschuiving of oprekking/krimping van de grafiek in horizontale/verticale richting ten gevolge hebben kan de grafische rekenmachine in de verschillende fasen van het leerproces een sterk hulpmiddel zijn.* Immers: voorspellingen omtrent de grafische gevolgen van een algebraïsche transformatie kunnen onmiddellijk op het apparaat worden geverifieerd en gecorrigeerd.

Mijn functiebestand is nog niet vol en ik ga verder: wat zou het leuk zijn als ik 'Y₃' met behulp van de eerste twee functies zou kunnen vastleggen. Voor het eerst heb ik de handleiding nodig, en ja hoor, het blijkt eenvoudig te kunnen met behulp van het menuutje 'Y-VARS' en zo komt er:



Op het scherm verschijnt de verschilfunctie als derde grafiek, keurig een rechte lijn. Tweede idee-tje: *grafieken kunnen gebruikt worden om algebraïsche identiteiten in een handomdraai te controleren.* In dit geval gaat het om: $(x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$, maar zo eenvoudig hoeft het niet te blijven.

Voeg ik nu ook nog 'Y₄ = Y₂ + Y₁' toe, dan lijkt het in de wirwar van de vier grafieken wel of 'Y₃' raaklijn is aan 'Y₄'. Wirwar? Kan ik ook selectief laten tekenen? Ja, via een simpele manipulatie kan ervoor worden gezorgd dat alleen 'Y₃' en 'Y₄' op het scherm verschijnen.



En daar ligt een onderzoeksvraag. Raken ze elkaar echt? Inzoomen rond het raakpunt sterkt je in de mening, maar de uitdaging om het met eigen verstand te verklaren blijft. Het kan hier natuurlijk heel elementair: Y₃ = Y₄ leidt tot Y₁ = 0 ofwel X² = 0, een dubbeltellend gemeenschappelijk punt dus! Functies laten zich snel veranderen en bij vervanging van de exponent 2 door 3 verschijnen er noodzakelijkerwijs weer twee elkaar rakende grafieken.

Derde idee: *grafieken op het scherm kunnen aanleiding geven tot het stellen van een hypothese die met wiskundige middelen kan worden onderzocht en eventueel kan worden gegeneraliseerd.* In dit geval zou een leuke opdracht zijn: bedenk een aantal functies voor Y₁ en Y₂ zó, dat de grafieken van Y₂ - Y₁ en Y₂ + Y₁ elkaar raken.

Dit leidt meteen tot idee nummer vier: *het zelf maken van formules om een zeker grafisch effect te bereiken, lijkt me een buitengewoon waardevolle activiteit, leuker en leerzamer dan het mechanistische en passieve gebruik van formules zoals we dat tot nu toe in het onderwijs kennen.*

Grafisch differentiëren

De mogelijkheid om soepel constanten in functies te wijzigen, brengt me ertoe de 1 in (X + 1)² nu eens te vervangen door een heel klein getal, zeg 0.01. De grafieken van Y₁ en Y₂ liggen ook na een paar keer inzoomen vrijwel over elkaar en de grafiek van de verschilfunctie Y₃ komt maar niet van de grond (de somfunctie heb ik uitgeschakeld). Aan dat laatste is wat te doen: opblazen met factor 100 in verticale richting of, wat op hetzelfde neerkomt, delen door 0.01. Zo heb ik nu: Y₄ = Y₃/0.01.

Oplettende lezers zullen hier de benaderde hellingfunctie van Y₁ in herkennen en zo is het ook. Dat de afgeleide van de kwadratische functie een eerste-graads functie is, daarover laat het machientje geen twijfel bestaan. Trouwens die 0.01 kan snel nog wat kleiner worden gemaakt.

Dit is een vorm van 'grafisch differentiëren' en dat brengt me tot gedachte nummer vijf: *bij het ontwikkelen van het concept afgeleide functie en bij het opsporen van regels voor het differentiëren is de grafische rekenmachine een behulpzame assistent die*

hier een herontdekkend leerproces mogelijk maakt. Let op het verschil met de traditionele opzet: daarbij wordt eerst via een zeker (al of niet geformaliseerd) limietproces de afgeleide in één punt bepaald en vervolgens wordt via generalisatie de afgeleide functie verkregen, terwijl nu meteen het globale beeld van de afgeleide naar voren komt. Bij de ontwikkeling van het Hawexprogramma hebben we al goede ervaring opgedaan met deze strategie, maar het is duidelijk dat de mogelijkheid om zelf in alle voorkomende gevallen grafieken van differentiequotienten te maken deze opzet sterk ondersteunt. Ik voer het voor de aardigheid nog even uit met $Y_1 = \sin X$ en ben onmiddellijk weer geïmponeerd, wat voegt een bewijs hier nog aan toe? Dat is precies de hamvraag waar we mee te maken krijgen. Bij wiskunde A is het aanvaardbaar om op deze wijze plausibel te maken dat de afgeleide van sinus gelijk is aan zijn compagnon, maar bij wiskunde B wil je toch een 'echt' bewijs zien. Of laat ik mijn wiskundig geweten nu te veel spreken? En waar ligt de nieuwe exactheidsgrens? Voorlopig blijf ik de antwoorden schuldig.

Je kunt nog verder gaan en je afvragen of differentiëren nog wel een gewenste techniek blijft: de vragen die je er bij wiskunde A mee moet beantwoorden (stijgen, dalen, optimaliseringsproblemen) zijn in de gewenste nauwkeurigheid nu grafisch op te lossen, waarbij we niet langer last hebben van hulpeloosheid van leerlingen op het gebied van algebraïsche techniek, en waarbij alle aandacht gericht kan worden op het in formulevorm gieten van de gegevens van een concreet probleem. Voor wiskunde B ben ik ook niet meer zo zeker, al lijkt me een behoorlijke vertrouwdheid met algebraïsche handelingen ook in de toekomst gewenst. Een verschuiving van beheersing van automatismen naar inzicht in wet en structuur ligt in het verschiet, dat wel.

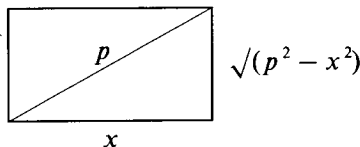
Bundels grafieken

In de eindexamenopgaven wiskunde B is het in de mode geraakt om functievoorschriften een para-

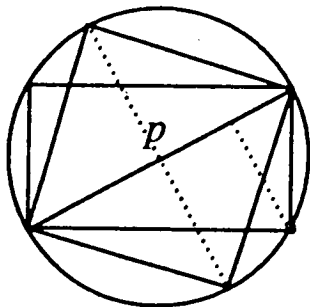
meter mee te geven, zodat er in feite sprake is van een familie functies of van een bundel grafieken. Om praktische redenen bleven de tekenopdrachten meestal beperkt tot een individueel lid van de familie (zo van: 'teken de grafiek voor $p = 4$ ' of meer in jargon: 'teken de grafiek van f_4 ' of nog kunstmatiger: 'teken F_4 ', waarbij eerst even meegedeeld is dat F_p de grafiek is van f_p) en daarmee wordt het bestaansrecht van dit type vraagstukken dubieus. Want dat er veel leerlingen zijn die door de ooghaaren heen zich een beeld vormen van de collectie grafieken waar de gegeven formule voor staat, gelooft niemand. Met de intrede van de grafische rekenmachine komen deze opgaven echter in een ander daglicht!

Ik zoek een beetje aardige som in de examens van de afgelopen twintig jaar en kom in 1979 deze functiefamilie tegen: $f(x) = x\sqrt{(2p - x^2)}$ met als opdrachten a. om de grafiek te tekenen voor $p = 4$; b. de verzameling toppen van de grafiekenbundel te representeren door een formule; en c. een oppervlakteberekening (want f vraagt er om geïntegreerd te worden, nietwaar?).

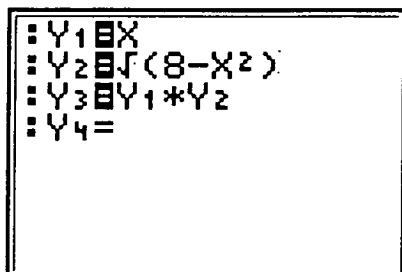
De stijl van de vragen doet wat krampachtig aan ('van welke relatie is bij variabele p de verzameling van deze punten de grafiek'), maar daar wil ik het nu niet over hebben. Wat me opviel bij het doorbladeren van de analyse-examens is dat er zo weinig gevoel voor wiskundige esthetiek uit spreekt; de erin voorkomende functies lijken wel at random gekozen. Met het principe dat eenvoud het kenmerk van het ware is wordt in elk geval geducht de spot gedreven. Wat dat betreft is de functie hierboven een vrij gunstige uitzondering, hoewel er met $f(x) = x\sqrt{(p^2 - x^2)}$ een naar mijn smaak meer natuurlijke vorm had gestaan. Die laatste vorm doet me ergens aan denken en zo kom ik op het idee dit plaatje te tekenen:



Inderdaad $f(x)$ is eenvoudig de oppervlakte van een rechthoek met diagonaal p en rechthoekszijde x . Verandering van x geeft verandering van oppervlakte, een aardig meetkundig fenomeen. Toch veel leuker om zo'n functie op deze wijze te introduceren, denk ik dan. Met meetkunde is trouwens vrij gemakkelijk in te zien dat de oppervlakte maximaal is in het geval x en $\sqrt{(p^2 - x^2)}$ aan elkaar gelijk zijn.

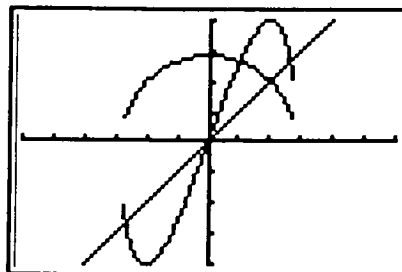


De maximale $f(x)$ wordt bereikt voor $x = 1/2 p \sqrt{2}$ en is gelijk aan het kwadraat ervan, dus $1/2 \cdot p^2$. Nu de grafiek, bijvoorbeeld van $f(x) = x\sqrt{(8 - x^2)}$, want daar was het toch om begonnen. Ik let op de componenten en vul het bestand zo:



Didactische notitie nummer zes: zo goed als uit gegeven functies nieuwe functies kunnen worden gemaakt via optelling, aftrekking, vermenigvuldiging, deling of kettenvorming, zo goed kunnen functies ook worden ontbonden in elementaire componenten en het bekijken van de grafieken van die componenten in samenhang met de grafiek van de resultaat-functie is een vorm van verstandig functie-onderzoek.

Op het scherm:



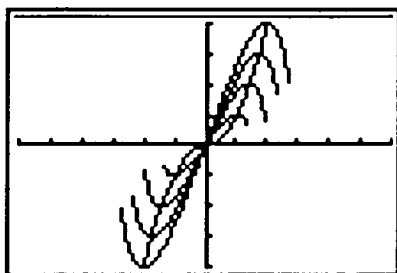
Via ZOOM-square heb ik er al voor gezorgd dat de grafiek van Y_2 er uit ziet als een halve cirkel in plaats van een ellips, maar die sprongen bij de uiteinden zijn lelijk.

Dit is een gevolg van het springerige tekenen, de laatste sprong was over de x -as heen pardoes in het errorgebied; met inzoomen kun je de grafiek wel dichter bij de x -as krijgen, maar dan ben je weer het totaalbeeld kwijt. Blindvaren op het scherm, dat gaat dus niet en ik ben zo gemeen dat eigenlijk wel goed te vinden. Wat in ieder geval wel fraai in het plaatje tot uitdrukking komt is dat het maximumpunt van de Y_3 -grafiek recht boven het snijpunt van de twee andere ligt, geheel in overeenstemming met de meetkundige gedachtengang die immers leidde tot $x = \sqrt{(p^2 - x^2)}$!

Ik zie het al helemaal voor me: het vraagstuk begint met een verwijzing naar de drie grafieken en een constatering over de ligging van het maximumpunt. Vervolgens worden èn een meetkundig bewijs èn een analytisch bewijs gevraagd van de vastgestelde bijzonderheid.

Nu de grafiekenbundel. Meetkundig is variatie van p absoluut oninteressant, maar de vraag naar de verzameling toppen van de grafiek van Y_3 bij variatie van p blijft aardig. Omdat het functiebestand slechts vier exemplaren kan bevatten, moet er wat anders gebeuren om een beetje familie op het scherm te krijgen. Het tekenmenu (DRAW) bevat een optie DrawF en daarmee kun je een massa grafieken tekenen. Een leuke opdracht zou nu kunnen zijn: welke formule moet je invoeren om de meetkundige plaats van de toppen ook op het scherm te krijgen? Uit de meetkundige context is al gebleken dat de y -coördinaat het kwadraat van de x -coördinaat moet zijn, tenminste... rechts van de

y-as. Uit symmetrie-overwegingen is duidelijk hoe het aan de overkant zit en het is nog een kwestie van twee halve parabooltjes aan elkaar lassen. De heel slimme leerling komt misschien op het idee de functie $y = x * \text{abs } x$ te kiezen, maar de machine heeft de verrassende mogelijkheid om een bij-stukjes-en-beetjes gedefinieerde functie in te voeren, zo van: $(X \geq 0)(X^2) + (X \leq 0)(-X^2)$. De expressies $X \geq 0$ en $X \leq 0$ representeren niet alleen intervallen, maar ook de karakteristieke functies ervan! Even kijken naar het scherm:



en alles past in elkaar.

Noot

*. Deel II van dit artikel volgt in nummer 8 van deze jaargang.

► De leraar

3. Ik acht in ons onderwijs de leraar van meer centrale betekenis dan het leerboek. Dit schijnt, speciaal t.a.v. de wiskunde, een aanvechtbare stelling. In de wiskunde toch kan men gemakkelijker dan in menig ander vak als autodidact vooruit komen. Psychologisch zou men kunnen verdedigen dat ieder mens autodidact is; geen leermeester kan het eigenlijke leerproces van zijn leerling voor deze verrichten; hij kan slechts helpend optreden. Laat ik 'autodidactisch studeren' nader omschrijven als 'studeren zonder leraar, met gebruikmaking van materiele hulpmiddelen zoals leerboeken.' Kan echter een leerling wel ooit de leraar (de studie-leider) totaal missen? Wat de keuze van de te gebruiken leerboeken betreft is de op zelfstudie aangewezen mens toch stellig van raad en voorlichting van anderen afhankelijk. Het opmaken van de lijst der te bestuderen boeken is nimmer het werk van de leerling zelf! Hier hebben we als benedengrens van de taak van de leraar het aanwijzen van de door te werken boeken. Onze scholen zijn echter nimmer verzamelingen van autodidacten in de door mij aangegeven zin en de taak van ieder leraar zal dan ook steeds boven het aangewezen minimum liggen. Welke is de naastliggende taak voor de leraar? Die van controle en diagnose.

Dr. Joh. H. Wansink in Euclides 27-5 (1951-1952)

► Vereenvoudigd vereenvoudigen, kan dat?

P. A. Hoogendoorn

Jantje heeft op de rekenles als opgave gekregen:

Vereenvoudig $\frac{16}{64}$

Hij doet het zo: $\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$

Meester rekent dit fout.

Bij de bespreking ontspint zich het volgende debat.

Jantje: Meester, u hebt een som die goed was fout gerekend.

Meester: Nee Jantje, je hebt wel het goede antwoord gekregen, maar de manier deugt niet.

Jantje: Maar ik heb toch het goede antwoord gevonden?

Meester: Dat is stom geluk, bij andere getallen had je waarschijnlijk het goede antwoord niet gevonden. Probeer het maar.

Jantje probeert $\frac{19}{95}$ en vindt het goede antwoord.

Jantje: Ziet u wel?

Meester: Bij $\frac{13}{39}$ vind ik $\frac{1}{3}$ en jij $\frac{1}{9}$ en mijn antwoord

is goed.

Jantje: Als u gewild had dat mijn manier niet tot het goede antwoord leidde, dan had u andere getallen in de opgave moeten zetten. Overigens staat het nog altijd 2-1 voor mij.

Besloten wordt het geschil aan een commissie voor te leggen. Hier volgt het standpunt van de experts.
A: Meester heeft zoveel jaren wiskunde gestudeerd, hij zal het vast wel beter weten dan zo'n eigenwijze snotneus.

B: Niet zeuren: antwoord goed dus som goed.

C: Als de opgave deel uitmaakte van een serie meerkeuzevragen, dan had het juiste antwoord er stellig bijgestaan en was dan zeker door de leerling gevonden. In het kader der onderwijsvernieuwing moet de oplossing van de leerling goed gerekend worden.

D: Mijn oude leermeester leerde ons:

KNOOP DIT GOED IN BEI JE OREN
DEEL UITSLUITEND DOOR FACTOREN.

Jantje heeft deze regel veronachtzaamd en heeft dus ongelijk.

U ziet, de stemmen staken. Daarom leggen wij het conflict aan onze lezers voor. Onder de inzenders van een meerderheidsstandpunt wordt een telraampje verloot.

Over de auteur

P. A. Hoogendoorn is inmiddels 50 jaar lang abonnee van Euclides. Om dit feit te gedenken zond hij de bijgaande leerzame bijdrage in. De redactie wenst hem gaarne nog vele jaren plezier met Euclides.

► **Open brief**

Aan de voorzitter van
de Commissie Ontwikkeling
Wiskundeonderwijs
Prof. dr. J. de Lange.

4 februari 1992

In de afgelopen tijd is het team W12-16 naar buiten getreden met zijn voorstellen omtrent de invulling van het wiskundeprogramma voor de basisvorming en de bijbehorende trajecten.

Deze plannen zijn momenteel voorwerp van discussie in de wiskundewereld van het voortgezet onderwijs. Ook wij, vakdidactici van de universitaire lerarenopleidingen, houden ons dit jaar in een maandelijks colloquium met deze plannen bezig. Via deze brief willen wij onze bezorgdheid uitspreken over (een aspect van) het meetkundeonderwijs, zoals dat beschreven staat in het Trajectenboek, met name voor het havo/vwo-traject.

Het ziet er in de voorstellen naar uit dat één van de volgens ons belangrijke doelen van het meetkundeonderwijs, namelijk het leren omgaan met de deductieve methode – het *leren bewijzen* – te weinig aandacht krijgt. In het Trajectenboek wordt op blz. 89 gesproken over 6 lessen alleen in 3 vwo, die zullen worden besteed aan *meetkunde en redeneren*.

Dit is een te smalle basis voor het wiskundeonderwijs in de hogere leerjaren.

Het *leren bewijzen* breng je de leerlingen niet in 6 lessen bij; dat is een proces waar voortdurend aandacht aan moet worden besteed, te beginnen op een vroeger moment dan in 3 vwo.

De formulering in het Trajectenboek biedt te weinig houvast, en naar wij vrezen, ook te weinig zekerheid. Wij zijn bang dat het aspect *meetkunde en redeneren* nauwelijks uit de verf zal komen in de leerboeken, die op grond van de leerstofbeschrijving in het trajectenboek gemaakt worden.

Wij pleiten daarom voor het volgende:

Neem het onderwerp *leren bewijzen* op als *expliciet leerdoel* in de leerstofbeschrijving van de tweede en derde klas havo/vwo. Dit leerdoel gaat verder dan 'redeneren' in het algemeen, dat bij 'elk' schoolvak in het leerplan staat. Wij bedoelen expliciet het wiskundig redeneren vanuit bepaalde premissen naar duidelijke conclusies. Ook de structuur van het noteren van de redenering is essentieel en hoort hierbij thuis.

Vanzelfsprekend heb je bij het *leren bewijzen* ook genoeg *kennis* van de meetkunde nodig, zoals definities en stellingen, waarop je kunt terugvallen. Samen met het *leren bewijzen* vormen zij een 'bouwwerk', waar je je telkens op kunt beroepen. Al doende ontstaat op die manier een samenhangend geheel.

Nagegaan moet worden of de huidige beschrijving van de meetkundestof voldoende aanknopingspunten biedt om dit leerdoel te kunnen realiseren of dat enige aanpassing noodzakelijk is.

Daarmee wordt voorkomen dat het aspect *meetkunde en redeneren* een randverschijnsel wordt waar ieder naar eigen goeddunken aandacht aan zal besteden (of niet!) en kan tevens een betere basis worden gelegd voor het onderwijs in de (ruimte) meetkunde van de bovenbouw, waar deze problematiek ook speelt.

Het ligt in onze bedoeling in de komende tijd een meer gedetailleerde bijdrage te leveren, waarin we

zullen proberen aan te geven hoe e.e.a. gestalte kan krijgen in de leerstofbeschrijving voor meetkunde. We nodigen u van harte uit hierover met ons van gedachten te wisselen en hopen u te ontmoeten op ons volgend colloquium.

Graag vernemen we van u of u onze uitnodiging accepteert.

Met vriendelijke groeten,
namens allen

H. J. Smid

drs. N. H. M. Alink (U.T.)
drs. M. Bos (R.U.G.)
drs. H. G. B. Broekman (R.U.U.)
drs. J. G. M. Donkers (T.U.E.)
W. E. Groen (V.U.)
drs. L. T. J. M. van Schalkwijk (K.U.N.)
drs. H. J. Smid (T.U.D.)
dr. A. van Streun (R.U.G.)
drs. A. Verweij (T.U.D.)

Mededeling

Nascholingscursus Toetsen van hypothesen

De Faculteit der Wiskunde en Informatica van de Vrije Universiteit Amsterdam verzorgt in samenwerking met de Universitaire lerarenopleiding de nascholingscursus *Toetsen van hypothesen* ten behoeve van docenten wiskunde in de bovenbouw van het vwo. Doel van de cursus is het inzicht in het toetsen van hypothesen te verdiepen bij docenten wiskunde die in hun opleiding weinig statistiek hebben gehad. Uitgangspunt van de cursus vormen de binomiale toetsen van het wiskunde-A programma. De cursus biedt enige theorie en vooral praktische toepassing.

Data en cursusduur: 6 bijeenkomsten op woensdagmiddag van 15.30 tot 17.30 uur; 29 april en 6, 13, 20 en 27 mei en 3 juni 1992
Plaats: Vrije Universiteit Amsterdam

Docent: prof. dr. J. Oosterhoff

Kosten: f35,- incl. syllabus

Deelnemers: max. 30

Inlichtingen: prof. dr. J. Oosterhoff, tel. 020-548 24 18 (inhoudelijk), mw. C. Korenhof, secretariaat Vakdidactische Nascholing Universitaire Lerarenopleiding, tel. 020-548 73 60 (organisatorisch).

Mededeling

Regeling toegestane hulpmiddelen bij de centrale examens van de eindexamens vwo, havo, mavo en lbo en bij de schriftelijke examens van de staatsexamens vwo, havo en mavo.

1 Elektronische rekenapparaten dienen minimaal de volgende mogelijkheden te hebben:

	vwo	havo	mavo en lbo
a de grondbewerkingen $+$, $-$, $\times$, $:$	X	X	X
b een aparte toets voor π	X	X	X
c toetsen voor x^y , x^2 en $\frac{1}{x}$	X	X	X
d toetsen voor: $\sin$, $\cos$, $\tan$ in graden toetsen voor: en hun inversen	X	X	X
e toetsen voor: $\sin$, $\cos$, $\tan$ in radialen toetsen voor: en hun inversen	X	X	
f een aparte toets voor $^{10}\log$	X	X	
g een aparte toets voor $\ln$	X	X	
h een aparte toets voor e tot de macht ²	X		

2 Niet toegestaan is het gebruik van apparaten die:

- a op het lichtnet moeten worden aangesloten;
- b tijdens het examen opgeladen moeten worden;
- c geluidsoverlast bezorgen;
- d zijn voorzien van schrijffolien, alarminstallaties dan wel zend- en/of ontvangstmogelijkheden;
- e groter van afmetingen zijn dan het zogenaamde zakformaat (ca 15 cm $\times$ 9 cm);
- f alphanumeriek zijn;
- g grafieken kunnen weergegeven in het afleesvenster.

Toelichting

- Programmeerbare rekenapparaten zijn toegestaan.
- Onder alphanumeriek moet worden verstaan apparaten die woorden, formules, letters van natuurkundige symbolen e.d. op het afleesvenster kunnen tonen.

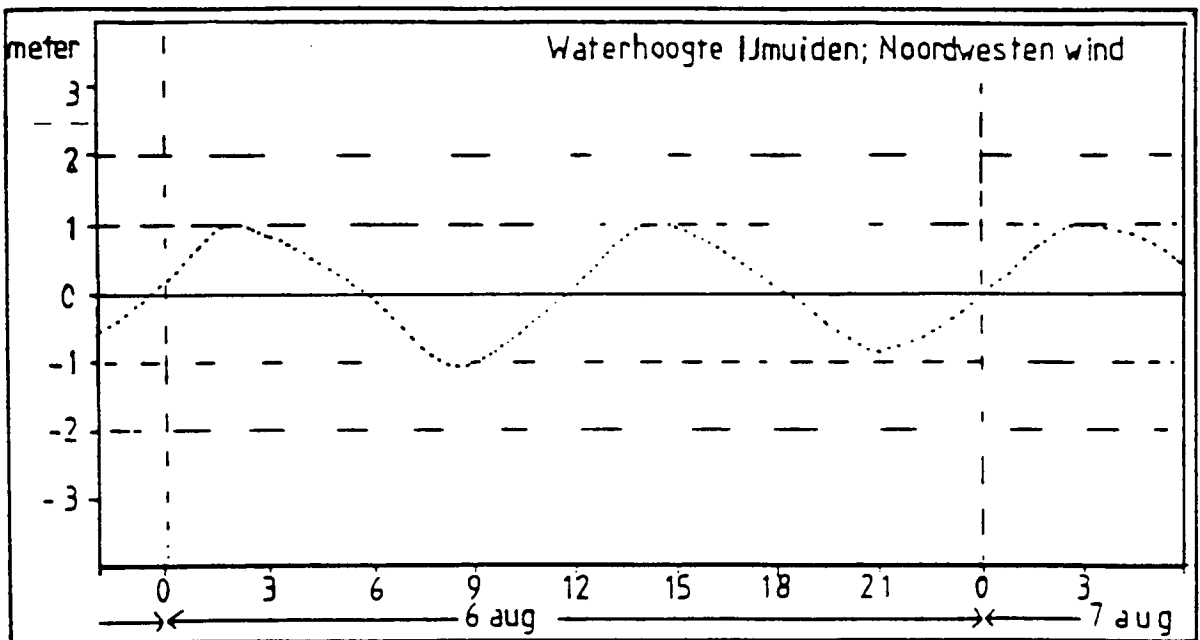
De enige letters die op dit venster zichtbaar mogen zijn, zijn dus aanduidingen voor de eigen functies van het apparaat, zoals bijvoorbeeld K, M, deg, rad.

(Overgenomen uit
Uitleg O en W-regelingen nr. 9, 20 maart 1991)

● Werkblad ●

► Een stevige noordwester

Bij stevige noordwestenwind is het water steeds ongeveer 1 meter hoger dan normaal. Schets in deze IJmuiden-grafiek wat de grafiek dan wordt. De gewone grafiek is met stippeltjes ingetekend.

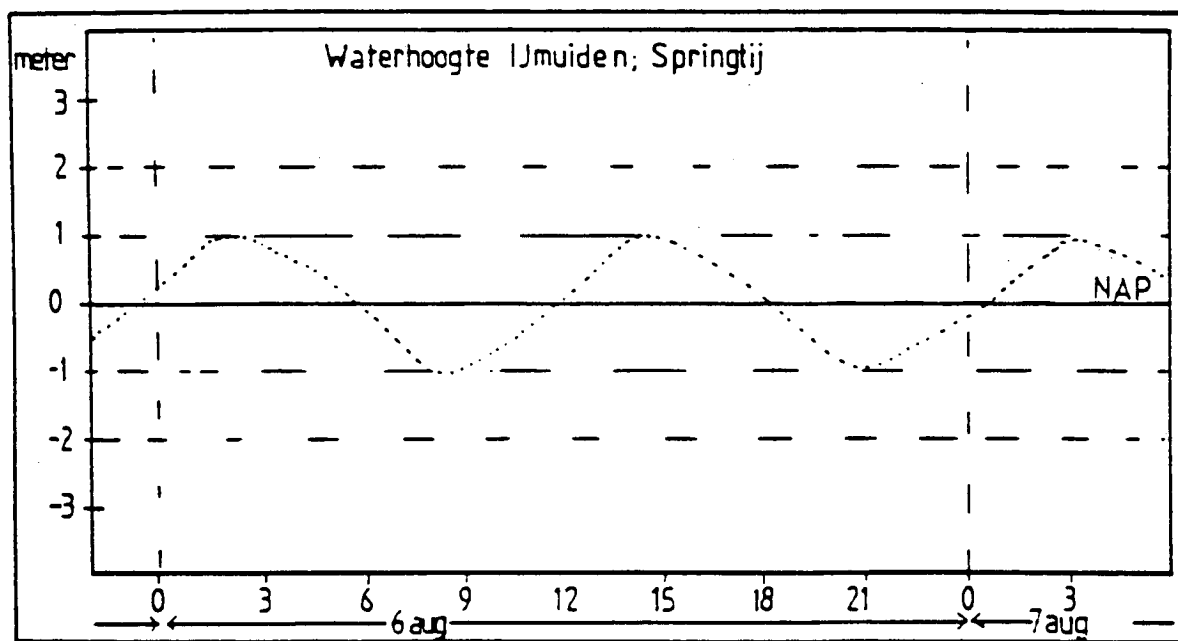


Behalve door de wind kan hoogwater nog ergens anders door hoger-dan-gewoon-hoogwater worden. Eens per veertien dagen is het hoogwater zo'n 20% hoger dan gewoon. En het laagwater ook zo'n 20% lager. Dat heet *springtij*.

● Werkblad ●

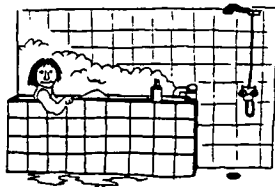
► Springtij

Teken hier de springtij-grafiek. De stippels, dat is weer de gewone grafiek. Geef eerst de nieuwe hoogte van hoog- en laagwater aan.



Als *springtij* en sterke noordwesterstorm samenvallen, dan moeten de dijken en duinen dat wel aan kunnen. Ook al komt het heel zelden voor. In februari 1953 ging het mis: het water kwam tot 4.5 meter boven N.A.P.!

Wiskunde 12-16 (experimenteel)



► Globaal kijken naar grafieken

Pieter van der Zwaart, Aad Goddijn

Lang is in het wiskundeonderwijs de grafiek geïntroduceerd als een rij punten in een assenstelsel. In een aantal wiskundemethoden is deze introductie nog steeds gangbaar: 'De punten $(-1, -2)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$ en $(3, 2)$ vormen samen de grafiek van $y = x - 1$.'

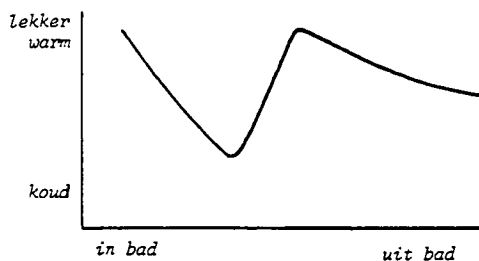
Begin jaren '80 komen er nieuwe ideeën over de introductie van grafieken op; een grafiek, zoals de leerling die in de wereld om zich heen ziet, is bijna altijd de weergave van het verloop van een proces. Het wiskundeonderwijs zal daarbij aan moeten sluiten.

Het bekijken van het verloop van het proces heet in W12-16 terminologie 'globaal kijken naar de grafiek'. Gaat het meer om de punten op de grafiek, dan bekijken we 'de grafiek in detail'.

Een eerste uitwerking van het globaal kijken is te vinden in het IOWO-pakket Lijngrafieken (1980), naast het plotten van punten wordt veel aandacht gegeven aan vragen als: 'Kleine baby's worden regelmatig gewogen. Waarom zou dat gedaan worden?' en 'Wat gebeurde er met het gewicht van Joost gedurende de eerste drie dagen?'

De uitwerking in het SLO-pakket Grafiekentaal (1983) is nog iets radicaler. Daar wordt in eerste instantie de individuele betekenis van de punten op de grafiek niet bekeken, maar alleen het proces dat

de grafiek beschrijft. Punten bekijken of plotten komt pas later.



Met de grafiek laat Hans zien hoe de temperatuur van het badwater verliep tijdens het baden. (Hoe hoog de temperatuur op een gegeven moment was komt hier nog niet ter sprake.)

Vanaf 1987 heeft het team W12-16 deze grafiekenlijnen voortgezet. In het Trajectenboek (1991, verkrijgbaar bij de SLO) wordt bij de introductie van grafieken uitgebreid aandacht besteed aan het globaal kijken. Daarbij maken wij geen expliciete keuze voor de baby of het badwater. Voor beide visies is veel te zeggen. Het globaal kijken blijft in het hele Trajectenboek een belangrijk middel om verbanden te onderzoeken.

In klas 3 komt dit weer expliciet terug in het pakket 'Grafieken vervormen I'. Daar gaat het om veranderingen aan de grafiek als geheel. Zo is er een grafiek die het peil van de zee in Vlissingen uitbeeldt. Als het springvloed is, is de schommeling zo'n 20% meer. Deze verandering kan grafisch worden weergegeven. Het komt –in formuletaal– neer op vermenigvuldigen met een getal. Als het noordwesterstorm is, zijn alle waterstanden met een vast bedrag verhoogd. In formuletaal: een constante er bij optellen. Deze transformaties komen ook voor bij lineaire grafieken; in het pakket wordt daarvan gebruik gemaakt om uiteindelijk lineaire vergelijkingen op te lossen.

In een kort stukje als dit is het helaas niet mogelijk om dieper op dit onderwerp in te gaan. Zo is er bijvoorbeeld nog geen aandacht besteed aan de verbinding tussen het globaal kijken naar grafieken en het algoritmisch oplossen van vergelijkingen; onderwerpen die niet los van elkaar moeten staan. Later zal in een achtergrondartikel nader op dit onderwerp worden ingegaan.

'Begrijpen'

► Wat is begrijpen nu eigenlijk?

Leen Bozuwa

Wat is begrijpen nu eigenlijk?

Dat is de vraag waar de didactiekcommissie zich sinds een jaar mee bezighoudt. Begrip hebben, wat is dat? Kunnen we daar achter komen? Heel praktisch met voorbeelden uit de klas?

We begonnen met onszelf de volgende vragen te stellen:

- 1 Heb je wel eens meegemaakt dat iemand onze-ker begint te worden over dingen die hij/zij een poos geleden meende goed te begrijpen? Wat deed je daar dan aan? Misschien is het jezelf wel eens overkomen. Dat ben je dan kennelijk te boven gekomen. Weet je nog hoe dat zich ontwikkelde?
- 2 Hoe kan iemand bij zichzelf inzicht constateren? Hoe kan je inzicht bij anderen constateren?
- 3 Hoe ervaart een leerling de constatering, dat hij/-zij 'het niet begrijpt' of dat hij/zij 'het niet kan'. Denk daarbij aan: arbeidsvreugde, angst, verveling, ongeduldigheid, vermoeidheid.

Aanvankelijk dachten we dat we een eenduidig antwoord zouden kunnen vinden. Als we maar goed zochten naar wat anderen daarover geschreven hadden en dat aandachtig lazen en combineer-

den met wat we zelf in de praktijk van ons lesgeven tegenkwamen, dan zouden we er wel greep op krijgen of misschien zelfs wel een algemene definitie vinden. Een soort overkoepelende theorie die je in de praktijk van alle dag mooi zou kunnen gebruiken.

Langzamerhand won de gedachte veld, dat we 'het begrijpen' waarschijnlijk nooit helemaal zouden kunnen begrijpen. Begrijpen als proces is zo enorm veelzijdig en uitgebreid. Misschien dat we alleen maar een aantal aspecten van het begrijpen kunnen bestuderen en die met elkaar in verband brengen. Dat is dan ook wat we het afgelopen jaar gedaan hebben en waar we minstens het komende jaar nog mee bezig zullen zijn. Ons uitgangspunt is steeds onze eigen praktijkervaring. Zaken die ons opgevallen zijn in de klas. Zoals: waarom halen leerlingen omtrek en oppervlakte zo vaak door elkaar? Of onze eigen slordigheid waarmee we met tekens omgaan.

We proberen die dan in verband te brengen met de theorieën die in de loop der jaren ontstaan zijn. Theorieën zoals in 'Wiskundig Denken' van Skemp of in 'Handelen om te begrijpen' van Van Dormolen e.a., of in 'Begrip en Inzicht' van Van Hiele. Zo, op deze manier, hebben we veel dingen op een rijtje gezet en daarover uitvoerig gefilosofeerd en gediscussieerd.

In een serie artikelen willen we u als lezer van Euclides deelgenoot maken van onze discussies en overpeinzingen. In de hoop dat men er in de klas wat aan heeft. In de hoop ook, dat deze artikelen aan het denken zetten en inspireren om eigen ervaringen aan de didactiekcommissie te doen toekomen.

► Een ervaring met een computerprogramma

Freek Mahieu

Ik wilde allang 'ns een computerprogramma gebruiken bij het lesgeven aan 2B, een klas van 27 actieve, vooral aardige kinderen.

Tijdens studiedagen had ik kennis gemaakt met 'VU-Los op-1', een programma dat gebruikt kan worden bij het leren oplossen van eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden.

Het programma biedt daarbij drie mogelijkheden.

Methode 1

Oplossen met behulp van stapsgewijs gebruiken van bewerkingen. Hier volgt een voorbeeld.

Er wordt ingetoetst $2x - 1 = 8x + 4$.

Het programma vraagt: 'Geef aan wat je wilt gaan doen' (lijstje met bewerkingen).

Leerling kiest *afrekken*.

'Geef op wat je wilt afrekken'. Leerling toetst in: $8x$.

Er verschijnt $-6x - 1 = 4$.

'Geef aan wat je wilt gaan doen'. Enzovoorts.

Methode 2

Hetzelfde als 1, maar nu wordt van de leerling verlangd dat hij zélf de nieuwe vergelijking opstelt en intoetst. Het programma geeft aan dat het gevondene juist is door de volgende vraag te stellen en biedt hulp bij fouten.

Methode 3

Na het verschijnen van de opgave kan alleen direct een gelijkwaardige vergelijking of ongelijkheid worden ingetoetst.

Bij het maken van een opgave kan snel van methode worden gewisseld.

Ik wilde het programma niet gebruiken als een interessant extraatje en evenmin als het middel bij uitstek om het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden te leren. Opgevoed met OASEV² ben ik gaan bedenken waar ik in het leerproces het programma het best in de strijd zou kunnen werpen. Bij E en V leek me.

Het doel van het gebruik van 'Los op' kon dus luiden:

- het kiezen van goede procedures bij het oplossen van eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden; daarbij het formuleren van de bewerkingen (-5 optellen of 5 aftrekken; delen door $1\frac{1}{2}$ of vermenigvuldigen met $\frac{2}{3}$);
- het verwerken van de gevolgen van een gemaakte keuze;
- het uiteindelijk herleiden tot $x = \dots$, $x \leq \dots$ of $x \geq \dots$;
- het stimuleren van een bewuste kijk op de oplossingsmogelijkheden die een opgave biedt; b.v. bij $3(x - 1) = 12$ kan de oplossing $x = 5$ direct worden gezien, hetgeen snel kan worden gecontroleerd met methode 3.

Alvorens het computerlokaal kon worden betreden moest er nog veel in de klas gebeuren.

1. (± 2 lessen). Na een fase van het ophalen van het variabelebegrip en het zingeven van het gebruik van vergelijkingen en ongelijkheden (aan beide onderwerpen had ik in klas 1 veel aandacht besteed) werd flink geoefend met opgaven waarvan de oplossing direct kon worden gevonden, b.v.:

$3 * \text{getal} = 12$ (getal moet 4 zijn);

$15 - 2g = 1$ ($2g$ moet 14 zijn dus $g = 7$);

$2x \leq 8$ (als $x = 4$ is krijg je gelijk aan 8 dus $x \leq 4$; eventueel controleren met 3 en 5);

$\frac{3x + 2}{8} = 1$ ($3x + 2$ moet 8 zijn dus $3x = 6$

dus $x = 2$).

2. (± 2 lessen) Bekend waren al opdrachten als: je hebt een getal; tel 4 op; deel door 3; je hebt nu 5; met welk getal begon je?

Daarbij kon worden teruggerekend.

Een opgave als: je hebt een getal; vermenigvuldig met 3; trek 7 af; je hebt nu het begingetal weer terug; welk getal is dat? stelde de leerlingen voor een probleem; ze vonden het gemeen dat je nu niet kon terugrekenen.

Naar aanleiding van het vergelijken van 'getal' met ' $3 * \text{getal} - 7$ ' werd de *balansmethode* geïntroduceerd. Er werd vooral geoefend met eenvoudige vergelijkingen en ongelijkheden die na één of twee bewerkingen alweer aanleiding gaven tot zó zien.

3. (1 les) Uitleg van het programma 'VU-Los op' met nog enkele oefeningen.

Vooral bij de ongelijkheden had ik graag gebruik willen maken van grafieken van eerstegraads functies; maar dit onderwerp komt op onze school pas later aan de orde.

Er volgden nu twee lessen in ons goed geoutilleerd computerlokaal. De leerlingen sprongen verrassend goed om met de apparatuur (in klas 1 één wekelijks uur informatiekunde gehad) en werkten praktisch foutloos met methode 1.

Na een half uur moest iedereen methode 2 gaan gebruiken. Daarbij werd óf de hulp van het programma óf mijn hulp nog al eens een keer ingeroepen. Ik kreeg het idee om bij een volgende gelegenheid leerlingen uit een hogere klas als helpers in te schakelen.

Enkele leerlingen wilden de nieuwe vergelijking eerst opschrijven alvorens die in te toetsen. Dat mocht natuurlijk.

De twee leerlingen die klas 2 voor de tweede keer doen, gaven te kennen liever op papier te werken dan met de computer. Ik verwees hen naar methode 3 waarmee na hun schriftelijke poging het antwoord kon worden gecontroleerd.

In de tweede les werd streng een rij opgaven gemaakt die, daar waar een tweetal achter de computer zat, beurtelings gemaakt moesten worden. Er mocht alleen gewerkt worden met methode 2 en 3.

Er werd tot slot nog een diagnostische toets gemaakt en een eindtoets (proefwerk). De leerlingen moesten het nu weer zonder computer kunnen stellen. Opvallend was dat er geen enkele leerling geen raad wist met een vergelijking of ongelijkheid. Er werden natuurlijk wel bewerkingsfouten gemaakt. Hoewel ik de resultaten niet kon vergelijken met die van andere jaren of parallelklassen, vond ik ze heel bevredigend. Een maand later prikte het onderwerp oplossen van eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden op de lijst van onderwerpen voor een 'centrale toets' in de het schooljaar afsluitende proefwerkweek.

Bij de voorbereidingen bleek dat een deel van de klas de opgedane vaardigheid geheel of gedeeltelijk kwijt was, zodat er even geoefend moest worden. Opmerkelijk daarbij was dat de leerlingen en ook ikzelf de 'machinetaal' gingen gebruiken, wat ik in dit geval niet zo bezwaarlijk vond. Na de nodige keren 'wat wil je hier doen? welke bewerking?' zat iedereen weer gauw op het goede spoor.

Ook in dit schooljaar staat het onderwerp vergelijkingen en ongelijkheden weer op het programma voor klas 2. Samen met een collega wil ik dit onderwerp dan benaderen vanuit eerstegraads functies; daarbij gaan we gebruik maken van grafische rekenmachines.

Van onze ervaringen schrijven we op deze plaats weer een artikel.

Noten

1. 'VU-Los op' is samengesteld door E. Kalvelagen en D. Kok; uitg.: Wolters-Noordhoff te Groningen.

2. Oriënteren, Sorteren, Abstraheren, Expliciteren, Verwerken; zie J. van Dormolen: Didactiek van de wiskunde. Later: Oriënteren, Ontwikkelen, Verwerken; zie J. van Dormolen: Aandachtspunten.



► Examenbesprekingen mei 1992

Het bestuur roept de docenten aan mavo- en lbo-scholen op om de examenbijeenkomsten te bezoeken. Naast het bespreken van de normen zal er van gedachten worden gewisseld over het nu al weer enkele jaren gebruikte 50-50-model. Bovendien zal informatie worden gegeven over de rol van de NVvW bij examens in de toekomst.

Verder worden er examenbesprekingen georganiseerd voor havo wiskunde A en havo wiskunde B, welke vakken dit jaar voor het eerst landelijk worden geëxamineerd, en voor vwo wiskunde A en vwo wiskunde B.

Examenbesprekingen wiskunde voor havo A op woensdag 20 mei 1992 van 16.00-18.00 u. te:

Plaats	Gespreksleider
AMSTERDAM P. Nieuwland College Nobelstraat 6 020-65 47 30 (NS Amstel)	S. T. Min 02290-3 77 56
AMERSFOORT Gymn. J. v. Oldenbarneveldt G. v. Prinstererln. 33 033-61 39 44	Drs. P. G. M. Kop 01726-1 40 82
ARNHEM Thorbecke S.G. Thorbeckestr. 17 085-42 30 28	Drs. G. V. J. Stroomer 08360-4 09 58

EINDHOVEN
Ped. Techn. HS
't Eeuwse TU
040-47 49 04

GOES
Buys Ballot College
Bergweg 4
01100-1 30 10

's-GRAVENHAGE
St.-Janscollege
Colijnplein 9
070-3 68 76 70

GRONINGEN
Rölingcollege
Melisseweg 2
050-42 10 00

ROTTERDAM
Citycollege Franciscus
Beukelsdijk 91
010-4 77 00 33

ZWOLLE
Gymn. Celeanum
Veerallee 30
038-22 37 22

Ir. W. J. M. Laaper
040-12 33 54

A. Ruijgt
01102-4 39 63

J. P. C. v.d. Meer
01742-9 71 38

H. H. C. Pentinga
05909-15 28

Mw. A. Fijan
03451-1 93 66

J. T. J. Mahieu
038-54 04 14

Examenbesprekingen wiskunde voor vwo A op woensdag 20 mei 1992 van 18.30-20.30 u. te:

Plaats	Gespreksleider
AMSTERDAM P. Nieuwland College Nobelstraat 6 020-65 47 30 (NS Amstel)	S. T. Min 02290-3 77 56
AMERSFOORT Gymn. J. v. Olbarneveldt G. v. Prinstererln. 33 033-61 39 44	Mw. P. C. M. Toonen- Derks 03404-6 13 55
ARNHEM Thorbecke S. G. Thorbeckestr. 17 085-42 30 28	Drs. W. H. M. Kremers 08370-1 82 06
EINDHOVEN Ped. Techn. HS 't Eeuwse Techn. Un. 040-47 49 04	Ir. W. J. M. Laaper 040-12 33 54

GOES
Buys Ballot College
Bergweg 4
01100-1 30 10

A. A. Pieters
01100-141 50

UTRECHT
K.S.G. Lunetten
Kampereiland 6
030-88 35 51

1 en 2 R. J. Roukema
03465-6 04 29

's-GRAVENHAGE
St.-Janscollege
Colijnplein 9
070-3 68 76 70

J.P.C. v.d. Meer
01742-9 71 38

ZWOLLE
Thorbecke SG
Dr. v. Heesweg 1
038-54 66 77

1 G. J. Scheppink
05209-19 58
2 S. R. Zwaan
038-65 25 30

GRONINGEN
Rölingcollege
Melisseweg 2
050-42 10 00

C. H. G. Hegeman
050-77 54 90

ROTTERDAM
Citycollege Franciscus
Beukelsdijk 91
010-4 77 00 33

C. Rijke
01807-2 17 40

ZWOLLE
Gymn. Celeanum
Veerallee 30
038-22 37 22

J. T. J. Mahieu
038-54 04 14

Examenbesprekingen wiskunde voor havo B op woensdag 27 mei 1992 van 16.00-18.00 u. te:

Plaats

Gespreksleider

AMSTERDAM
Pieter Nieuwland College
Nobelstraat 6
020-65 47 30
(NS Amstel)

Mw. Drs. G. W. Fok-
kens
020-643 84 47

AMERSFOORT
Gymn. J. v. Oldenbarnevelt
G. v. Prinstererln. 33
033-61 39 44

Drs. M. J. F. M. Voor-
hoeve
030-93 61 66

ARNHEM
Thorbecke S.G.
Thorbeckestr. 17
085-42 30 28

H. Caris
08362-2 83 31

EINDHOVEN
Ped. Techn. HS
't Eeuwse TU
040-47 49 04

C. J. M. Nienhuis
04116-7 85 01

GOËS
Buys Ballot College
Bergweg 4
01100-1 30 10

P. C. Bruijs
01640-4 11 22

's-GRAVENHAGE
St.-Janscollege
Colijnplein 9
070-3 68 76 70

Mw. Drs. M. P. Kollen-
veld
070-3 90 48 67

GRONINGEN
Rölingcollege
Melisseweg 2
050-42 10 00

Drs. M. van Steenis
05908-1 81 21

ROTTERDAM
Citycollege Franciscus
Beukelsdijk 91
010-4 77 00 33

E. J. van Dongen
010-4 67 21 30

Examenbesprekingen wiskunde voor lbo/mavo C en D op maandag 25 mei 1992 van 15.30-17.30 u. te:

Plaats

Gespreksleider
(1: C-examen
2: D-examen)

ALKMAAR
Bram Daaldermavo
Rubenslaan 14
072-11 34 38

1 T. Dunselman
075-28 40 42
2 Mw. C. Gaykema
020-12 91 85

EINDHOVEN
Ped. Techn. HS
't Eeuwse TU
040-47 49 04

1 en 2 F. J. Mahieu
04116-7 34 68

HAREN (Groningen)
Zernike College
Westerse Drift 98
050-24 40 00

1 S. Kooiman
050-25 12 89
2 J. C. Borst
05960-1 24 26

LEEWARDEN
Mavo Nylân
Prinsessenweg 4
058-88 42 02

1 en 2 J. Tuinstra
05133-26 57

ROTTERDAM
Mavo Het Lage Land
Kromhoutstr. 1-7
010-4 20 53 93

1 en 2 B. L. P. G. Hille-
brand
01807-1 52 10

Boekbespreking

ZWOLLE
Gymn. Celeanum
Veerallee 30
038-22 37 22

J. P. Scholten
053-76 87 91

Examenbesprekingen wiskunde voor vwo B op woensdag 27 mei 1992 van 18.30-20.00 u. te:

Plaats	Gespreksleider
AMSTERDAM Pieter Nieuwland College Nobelstraat 6 020-65 47 30 (NS Amstel)	A. Holleman 02518-5 49 13
AMERSFOORT Gymn. J. v. Oldenbarnevelt G. v. Prinstererln. 33 033-61 39 44	W. van Bunnik 030-51 79 46
ARNHEM Thorbecke S.G. Thorbeckestr. 17 085-42 30 28	Mw. Drs. E. v.d. Berg- de Both 080-55 14 14
EINDHOVEN Ped. Techn. HS 't Eeuwsel TU 040-47 49 04	A. L. P. van Merode 01623-1 37 46
's-GRAVENHAGE St.-Janscollege Colijnplein 9 070-3 68 76 70	Mw. drs. M. P. Kollen- veld 070-3 90 48 67
GRONINGEN Rölingcollege Melisseweg 2 050-42 10 00	Drs. M. van Steenis 05908-1 81 21
ROTTERDAM Citycollege Franciscus Beukelsdijk 91 010-4 77 00 33	B. L. G. P. Hillebrand 01807-1 52 10
ZWOLLE Gymn. Celeanum Veerallee 30 038-22 37 22	Mw. drs. A. Breeman 038-53 99 85

Jan van de Craats: *Pasjes en pincodes*, Aramith Uitgevers Bloemendaal, 112 blz, f24,90.

Dit boekje heeft als ondertitel 'Over de cryptologie van plastic geld'. Het 'plastic geld' komt vooral in de eerste hoofdstukken ter sprake. De veiligheid van geld- en betaalautomaten, speciaal met het oog op het risico van aftappen van gegevens, wordt besproken. En passant krijgt de lezer een tip om zijn/haar pincode gecijferd (door te rekenen modulo 10) te noteren. De werking van de chipkaart wordt uitgelegd met daarbij de voordelen t.o.v. de nu gebruikte magneetstripkaarten, met als belangrijk voordeel de mindere gevoeligheid voor fraude. In de epiloog wordt het nog eens samengevat: '... Zolang zo'n systeem (met chipkaarten, gemaakt met behulp van de moderne cryptologie, ZEW) nog niet operationeel is, blijft het vooralsnog het verstandigste om je geld aan het loket op te halen, en je boodschappen gewoon te blijven betalen met contanten of met betaalcheques...'

De 'cryptologie' beslaat de volgende hoofdstukken van het boekje. Als eerste wordt het DES-cryptosysteem besproken. Daarna wordt het modulair rekenen (rekenen in een restklassensysteem modulo een gegeven getal M) behandeld. De problemen, die optreden bij modulair worteltrekken en het inverteren van modulair machtsverheffen, als M groot is (± 200 cijfers), worden genoemd. Deze problemen kunnen opgelost worden, als M bestaat uit 2 bekende priemfactoren P en Q . Maar van dergelijke grote getallen is het 'onmogelijk' om de priemontbinding te achterhalen. Het bezit van de ontbinding $M = P \cdot Q$ heeft verschillende toepassingen, waarvan twee voorbeelden besproken worden: als eerste de wachtwoordprotocollen, waarin de echtheid van de eigenaar van een chipkaart bewezen kan worden, zonder dat er verder geheime kennis wordt uitgewisseld (zero knowledge proofs of identity). En als tweede het RSA-cryptosysteem, een systeem, waar de gecijfer- en ontcijfersleutel verschillend zijn, en waar een van de sleutels openbaar is (public key system).

Het laatste hoofdstuk gaat over factorisatierecords.

Het lezenswaardige boekje is geschreven voor lezers zonder wiskundige voorkennis, hoewel de wiskunde niet geheel geschuwd wordt. Maar zeker ook voor een wiskundeleraar is het een interessant boekje om een beeld van de moderne cryptologie te krijgen. Een aantal wiskundige zaken uit het boekje is met elementaire getaltheorie te doorgronden. En voor degene, die meer wil weten is een literatuurlijst, met daarbij een korte karakterisering van de daarin genoemde werken, opgenomen.

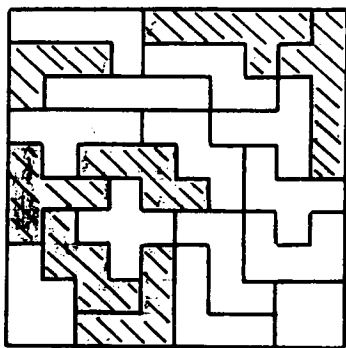
Z. E. Warmelink

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

► Opgave 635

Puzzels als relatiegeschenk hebben voor de echte verzamelaar toch een zekere bekoring: de uitvoering is vaak wat mooier en er zijn er maar een beperkt aantal van gemaakt. Ik wil er twee, die vorig jaar verschenen, noemen. PTT CONTEST gaf de Pyrix Puzzle in een luxe verpakking aan zijn relaties cadeau. PHILIPS gaf wegens het honderd-jarig bestaan een polyominopuzzel in een CD-doesje cadeau; titels op de verpakking zijn: 'Centennial 1891-1991', 'A century of solutions' en 'Pythagoras, Philips... and you!'.

In een groen 8×8 -vierkant passen de 12 (groene) pentomino's en een (groen) vierkantje. In een lila 6×6 -vierkant passen de 7 lila puzzelstukjes, die ik in de tekening gearceerd heb. De kunst is nu om *alle* 20 stukjes in een 10×10 -vierkant te passen. Het probleem is groter dan u denkt: de kunststof stukjes zijn aan de onderkant hol, zodat ze *niet* omgekeerd mogen worden!



Pieter Torbijn (15), Den Haag liet me een aardige opgave (en oplossing) zien: leg alle stukjes in het 10×10 -vierkant zodanig dat de lila stukjes volkomen geïsoleerd zijn. Ze raken elkaar dus niet, zelfs niet in een hoekpunt!

Als u binnen een maand een oplossing instuurt kunt u 5 punten in de ladderwedstrijd verdienen.

Een variant op een Schots Wiskunde Olympiade-vraagstuk was: Gegeven is de getallenverzameling V met de eigenschappen: $1 \in V$.

Als $x \in V$ en $y \in V$, dan ook $2x + 5y \in V$.

Bewijs dat $3 \cdot 10^{1991} + 13 \in V$ en dat ook $3 \cdot 10^{1992} + 13 \in V$.

Met een klein Basic programmaatje vinden we snel dat de volgende getallen tot V behoren: 1, 7, 19, 37, 43, 49, 73, 79, 91, 97, ... Vanaf 361 blijkt dat alle getallen van de vorm $30n + 1$, $30n + 7$, $30n + 13$ of $30n + 19$ met $n \geq 12$ tot V behoren. Dus zeker de gevraagde getallen. Is dit nu een correct bewijs?

Voor de twijfelaars nog een 'formeel' bewijs:

Met volledige inductie bewijzen we dat $2 \cdot 10^n - 1 \in V$ met $n \in \mathbb{N}$. Als $n = 0$ dan is $1 \in V$.

Stel $2 \cdot 10^n - 1 \in V$, dan $2 \cdot 1 + 5 \cdot (2 \cdot 10^n - 1) = 10^{n+1} - 3 \in V$ en vervolgens $2 \cdot (10^{n+1} - 3) + 5 \cdot 1 = 2 \cdot 10^{n+1} - 1 \in V$.

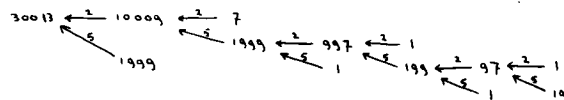
Tevens geldt er: als $x, y \in V$ dan

$2 \cdot (2x + 5y) + 5 \cdot y = 4x + 15y \in V$.

Nu gaan we de gevonden waarden gebruiken: als $n \in \mathbb{N}$, dan $4 \cdot 7 + 15 \cdot (2 \cdot 10^n - 1) = 30 \cdot 10^n + 13 \in V$.

Een bijzondere prestatie leverde J. Smits (11), Enschede, die van alle getallen $30 \cdot 10^n + 13$ de 'ontbinding' liet zien.

D.w.z. voor de eerste vier getallen (43, 313, 3013, 30013) liet hij heel duidelijk in diagrammen de structuur zien en hiermee waren de volgende getallen voorspelbaar. Voor 30013:



Op Olympiade-gebied is er trouwens nog het volgende te melden: dit jaar is voor het eerst de 'Nederlandse Universitaire Wiskunde Competitie 1991-1992' gehouden. Van 15-12-'91 tot 31-1-'92 konden studenten die aan een Nederlandse universiteit zijn ingeschreven hun oplossingen van de 12 opgaven insturen. Een voorbeeld: 'Verdeel een eenheidsvierkant zodanig in drie stukken, dat de grootste van de drie omtrekken zo klein mogelijk is'.

In onze eigen laddercompetitie staat met 34 punten bovenaan:

Lourens van den Brom,
Ruimtevaartlaan 45,
1562 BB Krommenie.

Hartelijk gefeliciteerd met de gewonnen boekenbon van f25,-. Ook veel dank voor je ingezonden nieuwe puzzels. Ongetwijfeld zal ik ze in de toekomst eens gebruiken. Mijn grootste probleem is eigenlijk steeds weer de toegestane ruimte. Zowel de opgave als de oplossing moet in één kolom passen.

► De wiskunde-examens lbo/mavo van 1991, eerste tijdvak

Drs. G. Bakker (Cito)

Dit artikel gaat over het C- en D-examen van 1991. Achtereenvolgens worden kort de scoreresultaten gepresenteerd, het C- en D-niveau vergeleken en de scores van meisjes en jongens vergeleken. Daarna wordt exemplarisch ingegaan op het D-examen en het C-examen. Om een indruk te geven van de inhoud van de examens zijn voor docenten die niet over deze examens beschikken 13 vragen uit deze examens afgedrukt. In de tekst wordt daarnaar verwezen.

Scoreresultaten

De opzet van het examen was dezelfde als in 1990: 22 meerkeuzevragen (44 punten), een tiental open vragen (46 punten) en het gebruik van een bijlage. Enkele belangrijke scoreresultaten treft u aan in tabel 1 voor mavo/lbo-D en mavo/lbo-C.

Waren het C- én D-examen in 1990 extreem gemakkelijk, in 1991 zijn de scores weer gedaald: bij C tot ongeveer het niveau van vóór 1990, bij D zelfs nog verder. Bij het D-examen vielen vooral de resultaten op de open vragen tegen.

	mavo/ lbo-D	mavo/ lbo-C
Aantal kandidaten in steekproef	2596	2232
gemid. p-waarde identieke vragen	66,1	52,5
gemid. p-waarde meerkeuzevragen	55,9	48,7
gemid. p'-waarde open vragen	38,1	48,3
gemid. p'-waarde totaal	46,8	48,5
gemiddelde score meerkeuzevragen	24,6	21,4
gemiddelde score open vragen	17,5	22,2
gemiddelde score totaal (+ 10)	52,1	53,6
gemiddelde score meisjes	50,9	51,2
gemiddelde score jongens	53,0	55,2
door CEVO vastgestelde cesuur	48/49	54/55
gemiddeld cijfer	5,8	5,4
percentage onvoldoendes	42	50
betrouwbaarheid meerkeuzevragen	0,65	0,66
betrouwbaarheid open vragen	0,70	0,75
betrouwbaarheid totaal	0,78	0,81

tabel 1

Vergelijking van C- en D-niveau

In het D-examen waren zeker 37 punten te behalen voor vragen die specifiek zijn voor het D-niveau (vorig jaar 28). Op dit specifieke deel behaalden de D-kandidaten gemiddeld 32% van de punten. Zie als voorbeeld de vragen 17, 19, 24 en 26.

In het C-examen waren 17 punten te behalen met vragen die zo op 't oog veel te simpel zijn voor D-kandidaten. De C-kandidaten behaalden voor deze elementaire vragen slechts 47% van de punten. Zie de vragen 12 en 30.

Voor C en D zijn dit jaar 6 identieke vragen in de examens opgenomen (vorig jaar 9). Zie vraag 3 en C19 = D20. Net als in 1990 is het verschil in gemiddelde p-waarde op het identieke deel ongeveer 14% (namelijk 66,1% – 52,5%). Als we dit zouden mogen generaliseren, zou een D-kandidaat bij eenzelfde cesuur op het C-examen zo'n 1,5 cijferpunt hoger scoren dan op het D-examen.

Naast deze identieke vragen, zijn voor beide examens van vijf vragen een C-versie en een D-versie opgenomen. De D-versie heeft dan een of meer stappen extra, de getallen of formules zijn wat ingewikkelder, etc. Dit is voor de adviescommissie een handige werkwijze om te zorgen voor een goed

niveaueverschil. Op dit soort vragen wordt daarom momenteel wat meer nadruk gelegd dan op identieke vragen.

Meisjes en jongens

Op het meerkeuzedeel van het D-examen behaalden de meisjes gemiddeld 2 punten minder dan de jongens. Op het open gedeelte werd geen verschil geconstateerd. De meisjes maakten bijna elke meerkeuzevraag slechter, speciaal als het om meetkunde ging. In de steekproef kreeg 46% van de meisjes en 39% van de jongens een onvoldoende cijfer. Het is moeilijk om de verschillen in scoreresultaten te verklaren.

Op het C-examen behaalden de meisjes gemiddeld 4 punten minder dan de jongens: 2,6 bij de meerkeuzevragen en 1,3 bij de open vragen. Ook hier zagen we dat de meisjes bijna alle meerkeuzevragen slechter maakten en dan weer vooral bij meetkunde. Het grootste verschil deed zich voor bij vraag 14: verschil $\frac{1}{2}$ scorepunt (zie voorbeeld). De verschillen bij de meisjes en jongens van de C-populatie kunnen mogelijk gedeeltelijk aan het schooltype worden toegeschreven: denk aan LTO waar voornamelijk jongens zijn en veel nadruk op meetkunde ligt. In de steekproef had 55% van de meisjes en 46% van de jongens een onvoldoende.

Lbo/mavo-D

In tabel 2 zijn de resultaten per vraag vermeld. Drie meerkeuzevragen bleken erg gemakkelijk ($p > 80$) en vijf erg moeilijk ($p < 40$). Zie als voorbeeld de vragen 17, 19 en 20. Deze werden door de leden van de adviescommissie als zeer goed te maken ingeschat.

Bij vraag 17 hadden de kandidaten kennelijk niet de formule $O = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 40^\circ$ paraat.

Vraag 19 had in de constructiefase een tekening waar de gevraagde hoek scherp leek, maar stomp was. Op verzoek van de vaksectie heeft de adviescommissie gezorgd dat die hoek er stomp ging uitzien, zelfs alleen maar stomp kon zijn, geaccentueerd door het rechte-hoek-teken in de balk! Maar

Toets- en itemanalyse-Cito, Arnhem

Analyse vragen wiskunde-D mavo/lbo-populatie

Vraag	sleutel	p- en a-waarden							
		A	B	C	D	E	F		
1	B	13	83*	1	2	0	1		
2	C	7	7	82*	2	1			
3	E	44	3	2	4	44*	3		
4	E	5	4	5	8	75*	2		
5	B	21	53*	11	6	4	5		
6	A	61*	10	8	8	7	6		
7	E	22	5	3	5	57*	9		
8	A	45*	7	15	8	13	12		
9	B	7	64*	12	8	7	2		
10	B	16	63*	9	11				
11	C	11	53	30*	2	4			
12	F	3	2	3	6	10	76*		
13	B	6	51*	7	30	3	3		
14	C	10	25	52*	10	2	2		
15	D	9	12	26	34*	17	3		
16	B	4	70*	3	13	9	1		
17	C	10	4	36*	10	34	5		
18	B	6	73*	5	5	7	5		
19	C	5	46	18*	14	12	4		
20	D	40	8	14	36*	2			
21	C	7	7	44*	8	21	14		
22	C	2	3	82*	4	3	6		
	p'-waarde	aantal punten							
		0	1	2	3	4	5	6	7
23	70	12	14	26	48				
24	56	25	19	19	37				
25	36	37	17	16	5	10	15		
26	18	62	13	8	4	3	3	7	
27	40	21	16	15	21	12	7	7	
28	60	19	4	13	6	37	21		
29	28	60	7	4	6	7	16		
30	56	16	7	15	14	10	15	24	
31	10	79	4	2	6	6	0	1	2

aantal kandidaten: 2596
 gemiddelde score: 52,1
 standaarddeviatie: 13,6
 gemiddeld percentage goed: 46,8

tabel 2

desondanks concludeerde bijna de helft van de kandidaten dat

$$\frac{\sin \angle L}{10} = \frac{\sin 36^\circ}{6} \Rightarrow \angle L \approx 78^\circ.$$

Uit de analyses van het Cito bleek evenwel dat deze leerlingen bepaald niet de slechtsten waren. Als dit

een open vraag was geweest, hadden zij terecht een deel van de punten gekregen.

In vraag D20 (= C19) koos 46% van de C- en 40% van de D-kandidaten het antwoord 24: er verdwijnen 2×3 vlakjes. Slechts 22% respectievelijk 36% zag in dat er tegelijk ook 2×3 vlakjes te voorschijn komen.

De adviescommissie probeert bij de constructie van meerkeuzevragen met behulp van foutenanalyses tot een verantwoorde keus van alternatieven te komen. Dat bleek in 1991 goed gelukt: slechts 5% van de alternatieven werd niet of nauwelijks gekozen; in 1990 was dit percentage veel hoger dan gebruikelijk, namelijk 17%.

Zoals al gemeld, vielen de resultaten op de open vragen erg tegen. In opgave 1 werd vraag 23 redelijk gemaakt ($p' = 70$). Vraag 24 was een zeer directe vraag naar de vergelijking van de cirkel, die eigenlijk door vrijwel iedereen goed gemaakt had moeten worden ($p' = 56$). Bij vraag 25 werd onvoldoende ingezien dat de raaklijn loodrecht moet staan op de straal naar het raakpunt ($p' = 36$).

In opgave 2 werd kennis van en inzicht in vectoren, onderdeel van het D-programma, getoetst. In het eerste tijdvak van 1987 en het tweede tijdvak van 1988 kwam ook zo'n soort vraag voor, dus nieuw was het niet. Verwacht werd dat vraag 26 een p-waarde van circa 50 zou hebben, maar er werd heel laag gescoord: 62% behaalde geen enkel punt, 13% één punt, 8% twee punten, slechts 7% loste de vraag geheel goed op en behaalde de maximumscore van 6 punten. Was het wellicht beter geweest vooraf bijvoorbeeld te vragen: 'Druk $\overrightarrow{AM}$ en $\overrightarrow{AL}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.'? Of moet je van D-kandidaten juist verwachten dat ze zelfstandig een grotere stap kunnen zetten? Ook de opgave over functies ($p' = 43$) en de opgave over de balk ($p' = 31$) werden slechter gemaakt dan verwacht werd.

Het bovenstaande maakte het voor de vaksectie wiskunde van de CEVO niet gemakkelijk om de cesuur vast te stellen. De 'geplande' cesuur 54/55 zou 58% onvoldoenden opleveren. Na een beschou-

wing van de diverse vragen achteraf, was opnieuw het oordeel dat de vragen alle goed verantwoord zijn voor de D-kandidaten. Een verklaring voor de slechte resultaten kon alleen gevonden worden in de omvang van het werk. Daarvan maakten verscheidene docenten melding. Overigens werd wiskunde als tweede examen op de vrijdag verre van ideaal gevonden.

De te grote omvang heeft ertoe geleid dat iedere kandidaat 6 scorepunten extra kreeg. Hiermee kwam het percentage onvoldoenden voor mavo/lbo-D op 42.

Om beter te kunnen vergelijken met de resultaten van vorige jaren had de vaksectie graag, net als in 1990, de beschikking gehad over resultaten van referentietoetsen. Dat zijn toetsen waarmee over een reeks van jaren verschillen in prestaties gemeten kunnen worden. Helaas konden deze door gebrek aan middelen niet afgenomen worden.

Van groot belang blijft uiteraard dat de kandidaten hun tijd goed verdelen over het meerkeuzedeel en het open deel. Wanneer ze te lang met de meerkeuzevragen bezig zijn, komt het goed uitwerken van de open vragen in het gedrang.

Lbo/mavo-C

In tabel 3 is per vraag aangegeven hoeveel procent van de kandidaten een bepaald alternatief koos of een bepaald aantal punten behaalde.

Meerkeuzevragen met $p > 80$ kwamen niet voor.

Bij zeven meerkeuzevragen was $p < 40$. Zie als voorbeeld de vragen 3, 4, 12 en C19.

Bij vraag 3 werd gevraagd het origineel van 5 te berekenen. Slechts 26% deed dat door de vergelijking $\frac{1}{2}(x - 3) = 5$ goed op te lossen. Zelfs 49% berekende echter het beeld van 5. Deze vraag stond ook in het D-examen en daar waren de resultaten weinig beter: 44% berekende het beeld en 44% het origineel. Dit is verwonderlijk omdat 'origineel' en 'beeld' basisbegrippen bij functies zijn.

Vraag 4 illustreerde met $p = 36$ hoe moeilijk kandidaten het vinden om uit de grafiek af te lezen voor welke x een ongelijkheid geldt: 25% nam de verkeerde kant en 30% las af langs de y -as.

Vraag 12 spreekt met het feit dat 22% plaatje 2 en

Toets- en itemanalyse-Cito, Arnhem
Analyse vragen wiskunde-C mavo/lbo-populatie

Vraag	sleutel	p- en a-waarden							
		A	B	C	D	E	F		
1	B	19	72*	2	3	2	3		
2	C	9	11	73*	5	2			
3	E	49	5	7	5	26*	7		
4	D	25	18	8	36*	12			
5	E	4	44	7	5	34*	5		
6	F	10	9	5	21	9	46*		
7	A	61*	11	15	13				
8	A	37*	12	15	13	14	8		
9	D	1	4	14	55*	15	10		
10	B	24	57*	10	9				
11	C	17	16	43*	24				
12	A	16*	22	51	2	4	5		
13	C	2	4	47*	13	32	2		
14	B	5	40*	16	9	16	15		
15	B	7	47*	5	24	12	5		
16	E	13	17	9	16	30*	15		
17	E	22	16	4	7	45*	5		
18	B	13	72*	6	4	1	3		
19	D	46	9	21	22*	2			
20	D	4	5	19	72*	1			
21	B	17	66*	3	9	1	4		
22	C	3	5	75*	4	5	8		
	p'-waarde	aantal punten							
		0	1	2	3	4	5	6	7
23	84	15	3	82					
24	63	18	5	6	6	7	8	12	38
25	42	38	11	8	4	7	6	26	
26	39	44	17	16	23				
27	52	25	5	8	26	2	4	31	
28	63	21	2	8	3	14	14	37	
29	19	59	9	10	5	4	4	4	4
30	48	38	15	12	35				
31	46	42	3	9	2	5	6	34	

aantal kandidaten: 2232
gemiddelde score: 53,6
standaarddeviatie: 16,5
gemiddeld percentage goed: 48,5

tabel 3

51% plaatje 3 koos voor zich. In het D-examen zat een ingewikkelder versie van deze vraag: daar koos zelfs 53% voor de middenparallel.

In vraag C19 ging het om de oppervlakte van een ruimtefiguur. Om er een snel te beantwoorden vraag van te maken was de oppervlakte van de bovenste figuur al meegedeeld. Zelfs 46% gaf het

foute antwoord $30 - 6 = 24$. Slechts 22% gaf het goede antwoord 30. Diverse leraren vonden dit een prachtige vraag om het ruimtelijk inzicht te toetsen.

Waren bij het C-niveau vorige jaren de resultaten van de open vragen beduidend slechter dan die van de meerkeuzevragen, in 1991 waren de resultaten op beide vraagvormen nagenoeg gelijk: op de meerkeuzevragen werd 49% en op de open vragen 48% van de punten behaald.

Er waren een opgave over functies ($p' = 54$), een opgave over een vermenigvuldiging van een driehoek met factor -2 ($p' = 52$) en een opgave over meetkunde in de kubus ($p' = 39$). In laatstgenoemde opgave hadden de kandidaten grote moeite met het gebruik maken van gelijkvormigheid.

Opgave 4 werd door docenten erg gewaardeerd en is in dit verslag afgedrukt, met het plaatje uit de bijlage sterk verkleind. Vraag 30 diende voor het zich oriënteren in de nieuwe situatie ($p' = 48$) en vraag 31 was bedoeld als 'inventieve' vraag voor de betere leerlingen. Het resultaat was met $p' = 46$ heel bevredigend.

De vaksectie vond alle vragen opnieuw goed van gehalte voor het C-niveau. Er werden geen fouten of tekortkomingen gesignaleerd. De beschikbare tijd werd voldoende geacht. Ook was het niveau van het C-examen duidelijk een stuk lager dan het niveau van het D-examen. De cesuur werd dan ook vastgesteld op 54/55. Het percentage onvoldoenden kwam hiermee voor mavo/lbo-C op 50.

Van de afzonderlijke schooltypen werden dit jaar geen resultaten meer berekend.

Examenvragen

Gegeven is de functie $f: x \rightarrow \frac{1}{2}(x - 3)$.

C3 ■ Bereken het origineel van 5.

D3 Het antwoord is

A 1

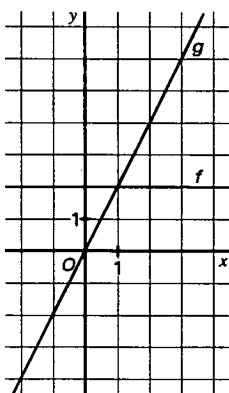
B $3\frac{1}{2}$

C $5\frac{1}{2}$

D 7

E 13

F 16



Hierboven zijn de grafieken getekend van de functies $f: x \rightarrow 2$ en $g: x \rightarrow 2x$.

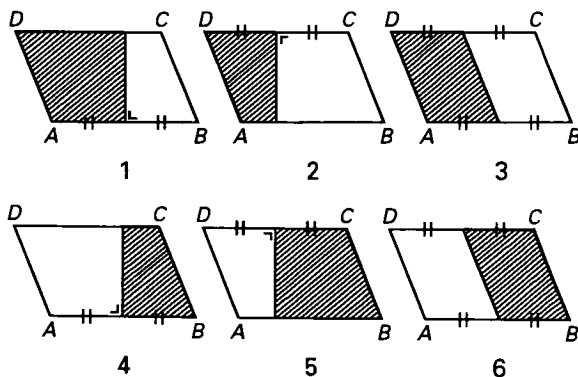
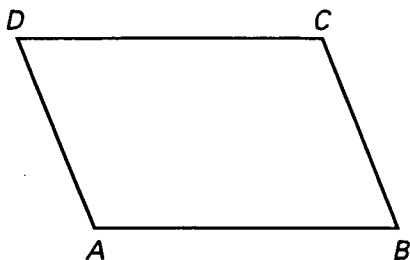
C4 ■ Lees uit de grafiek af voor welke x geldt $f(x) < g(x)$.

De oplossingsverzameling is

- A $\langle \leftarrow, 1 \rangle$
- B $\langle \leftarrow, 2 \rangle$
- C $\langle 0, 1 \rangle$
- D $\langle 1, \rightarrow \rangle$
- E $\langle 2, \rightarrow \rangle$

W is de verzameling van alle punten P binnen het parallellogram $ABCD$ waarvoor geldt $PA \leq PB$.

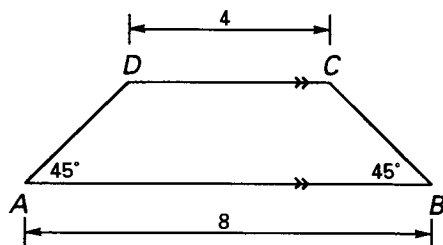
C12 ■ Arceer W .



In welke figuur is W gearceerd?

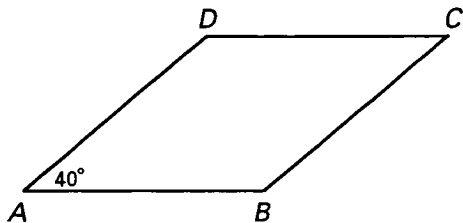
- A in figuur 1
- B in figuur 2
- C in figuur 3
- D in figuur 4
- E in figuur 5
- F in figuur 6

Gegeven is de vierhoek $ABCD$ met $AB \parallel DC$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$, $AB = 8$ en $DC = 4$.



C14 ■ Bereken de oppervlakte van vierhoek $ABCD$. Het antwoord is

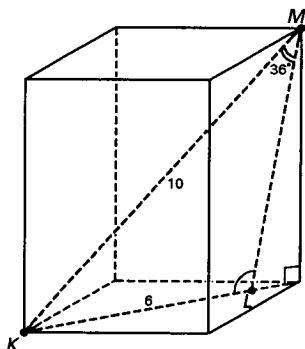
- A 8
- B 12
- C 16
- D 18
- E 24
- F 32



- D17** ■ Van de ruit $ABCD$ met zijde 4 is $\angle BAD = 40^\circ$.
Bereken de oppervlakte van deze ruit in één decimaal nauwkeurig.

Het antwoord is

- A 5,1
- B 6,7
- C 10,3
- D 12,3
- E 16,0
- F 24,9



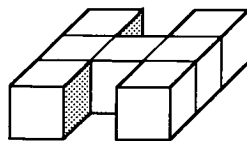
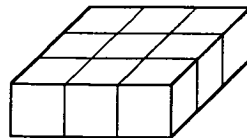
Hierboven is in een balk de driehoek KLM getekend.

Van $\triangle KLM$ is bekend dat

$KL = 6$, $KM = 10$ en $\angle KML = 36^\circ$.

- D19** ■ Bereken $\angle KLM$ in graden nauwkeurig.
Het antwoord is

- A 60°
- B 78°
- C 102°
- D 108°
- E 111°
- F 120°



Hierboven is een balk van 3 bij 3 bij 1 getekend. De oppervlakte is 30. Hij bestaat uit 9 aan elkaar gelijkde kubussen. Door er twee kubussen uit te halen, ontstaat het H-vormige lichaam dat eronder is getekend.

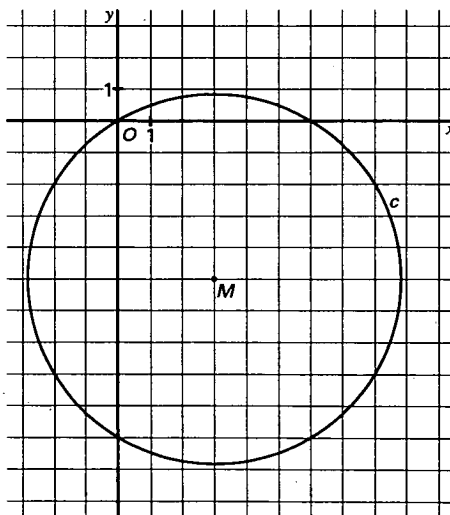
- C19** ■ Hoe groot is daarvan de oppervlakte?

- D20** ■ Hoe groot is daarvan de oppervlakte?

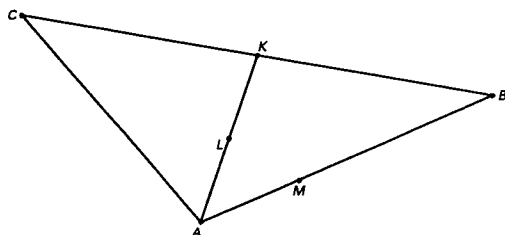
- A 24
- B 26
- C 28
- D 30
- E 32

Opgave 1 (D-niveau)

Hieronder is de cirkel c getekend met middelpunt $M(3, -5)$ die gaat door $O(0, 0)$.



- 23 ☐ Bereken in één decimaal nauwkeurig de oppervlakte van c .
- 24 ☐ Schrijf een vergelijking op van c . (Dit mag zonder toelichting).
- 25 ☐ Stel een vergelijking op van de lijn die c in het punt $(0, -10)$ raakt.



Opgave 2 (D-niveau)

Hierboven is $\triangle ABC$ getekend.

Het punt K is het midden van de zijde BC .

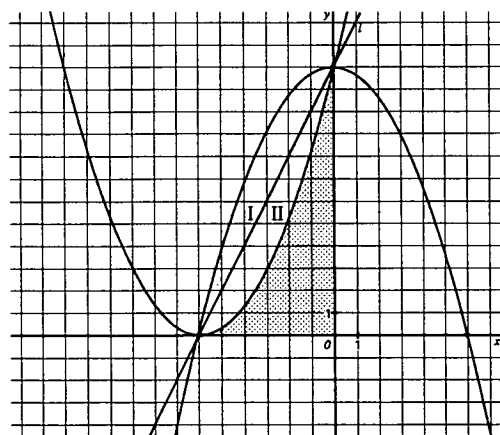
Het punt L is het midden van het lijnstuk AK .

Het punt M ligt op de zijde AB zo dat

$$AM:MB = 1:2.$$

$$\overrightarrow{AB} = 12\vec{b} \text{ en } \overrightarrow{AC} = 12\vec{c}.$$

- 26 ☐ Toon hiermee aan dat de punten C , L en M op één lijn liggen.



Opgave 4 (C-niveau)

In de voorgaande figuur zijn twee parabolen getekend die elkaar snijden in $(-6, 0)$ en $(0, 12)$.

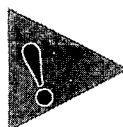
Door deze snijpunten gaat de lijn l .

Bij een rotatie wordt vlakdeel I afgebeeld op vlakdeel II.

- 30 ☐ Wat zijn de coördinaten van het rotatiecentrum en hoe groot is de rotatiehoek?

De oppervlakte van de vlakdelen I en II samen is 24.

- 31 ☐ Bereken de oppervlakte van het grijze vlakdeel.



Kalender

22 en 23 april 1992: Delft, Nederlands Mathematisch Congres.
Zie blz. 174.

13 mei 1992: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

20 mei 1992: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen havo A en vwo A. Zie blz. 214.

25 mei 1992: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen mavo/lbo C-D. Zie blz. 214 en 215.

27 mei 1992: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen havo B en vwo B. Zie blz. 216.

10 juni 1992: Utrecht Bestuursvergadering NVvW.

24 juni 1992: Utrecht Bestuursvergadering NVvW.

4 september 1992: Eindhoven, Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade.

Uitgeverij Versluys is een dochteronderneming van de Bosch en Keuning groep te Baarn. Andere dochterondernemingen zijn o.a. Walraven, Bekadidact, Dijkstra-Zeist/BKE Baarn, Combo, Cantecleer, De Fontein, Ambo, Callenbach.

Uitgever Willem Versluys begon zijn uitgeefactiviteiten in 1875 met het produceren en verspreiden van de wiskundemethode van zijn broer Jan Versluys. Het bedrijf heeft in de loop van de jaren gerenommeerde fondsen voor o.a. Economie en Biologie opgebouwd. Na ruim een eeuw wordt opnieuw een wiskundeleergang ontwikkeld. De leergang is afgestemd op nieuwe ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs: basisvorming en de plannen van de C.O.W. Sommige delen zijn in de klas uitgetest en reeds verbeterd. Andere gedeelten moeten nog worden getest of aangepast.

Door het vertrek van een auteur naar een andere onderwijssector is een vacature ontstaan in het wiskundeteam. Wij zoeken naar één of wellicht twee

WISKUNDEDOCENT(EN) M/V

die zich herkennen in het volgende profiel:

- redactioneel vaardig
- tenminste 5 jaren ervaring in de onderbouw met havo/vwo leerlingen
- goed bekend met ontwikkelingen in de didactiek
- grondige kennis van de wiskunde in de door de C.O.W. ontwikkelde leerplannen
- goed in teamverband kunnen samenwerken

Om een onafhankelijk kritisch oordeel te vernemen komen wij graag in contact met enkele scholen die het materiaal nog niet eerder hebben getest of beoordeeld. We zoeken

VAKSEKTIES VAN SCHOLENGEMEENSCHAPPEN

die willen toetreden tot de responsgroep.

Voor belangstellenden ligt een informatiemap gereed waarin wordt ingegaan op de condities waaronder de samenwerking kan plaatsvinden. Deze informatiemap is telefonisch aan te vragen bij mevr. Josephine Bakker (02154)- 82442, graag met vermelding van de aard van de belangstelling: auteur of testen van materiaal.

Schriftelijke reacties verzoeken we u te zenden aan Uitgeverij Versluys t.a.v. de heer W.L. Miner, directeur, Postbus 1, 3740 AA Baarn.

Inhoud

Inhoud 193

Agneta Aukema, Huub Jansen: Twee ontwikkelaars geven weerwoord 193

Martin Kindt: Functieonderzoek begint met de grafiek (I) 200

40 jaar geleden 204

P. A. Hoogendoorn: Vereenvoudigd vereenvoudigen, kan dat? 205

H. J. Smid e.a.: Open brief 206

Mededelingen 207

Werkbladen 208

Pieter van der Zwaard, Aad Goddijn: Globaal kijken naar grafieken 210

Leen Bozuwa: Wat is begrijpen nu eigenlijk? 211

Freek Mahieu: Een ervaring met een computerprogramma 212

Examenbesprekingen mei 1992 214

Boekbespreking 216

Recreatie 217

Drs. G. Bakker: De wiskunde-examens lbo/mavo van 1991, eerste tijdvak 218

Kalender 224