

**Wolters-Noordhoff**

**Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren**

**Vakblad voor de wiskundeleraar**

# **Euclides**

816  
357  
492

**jaargang 67 1991 | 1992 januari**

## Redactie

Drs H. Bakker  
 Drs R. Bosch  
 Drs J. H. de Geus  
 Drs M. C. van Hoorn (hoofredacteur)  
 N. T. Lakeman (beeldredacteur)  
 D. Prins (secretaris)  
 Ir. V. E. Schmidt (penningmeester)  
 Mw. Y. Schuringa-Schogt (eindredacteur)  
 Mw. Drs A. Verweij  
 A. van der Wal  
 Drs G. Zwaneveld (voorzitter)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

## Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

*Voorzitter* Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,  
 8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.  
*Secretaris* Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,  
 2555 VJ Den Haag.  
*Ledenadministratie* F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43,  
 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v.  
 Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f55,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f37,50; contributie zonder Euclides f30,00. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

## Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

## Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f60,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f39,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers f10,00 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

## Advertenties

Advertenties zenden aan:  
 ACQUI' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.  
 Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

# ● Inhoud ● ● ● ● ●

## Actualiteit 130

### *Correlatie en Regressie*

Wat in 1992 als keuze-onderwerp statistiek bij het eindexamen vwo wiskunde A getoetst zal kunnen worden (WIEWA-rapport).

## Mededelingen 131, 135, 143, 160

## Bijdrage 132

J. H. van Lint *Recycling van ponskaarten?* 132

Het Fano-vlak uit de discrete wiskunde kan toegepast worden om een probleem uit de computerwereld op te lossen.

J. A. C. Kolk *Het vwo-programma wiskunde B: een oproep tot verandering* 136

Kritiek op het eindexamen en het programma.

## 40 jaar geleden 141

### *Plaats van de wiskunde*

## Bijdrage 142

Rob Bosch *Drietallen van Pythagoras en de dubbele-hoekformules*

Om drietallen van Pythagoras te vinden kunnen de dubbele-hoekformules voor sinus en cosinus gebruikt worden.

## Werkbladen 144

## Serie Wiskunde 12-16

### (experimenteel) 146

Wim Schaafsma *Oude regels met de rekenmachine*

Door de rekenmachine wordt het voor de leer-

ling gemakkelijker, maar voor de leraar moeilijker.....

## Bijdrage 147

Ed de Moor *Analyse, synthese en elegance*

Na analyse van een wiskundig probleem kan een synthetische oplossing volgen, die soms elegant genoemd mag worden!

## Recreatie 152

## Bijdrage 153

Joost Meijer, Jacob Perrenet en Wim Groen

*Leerbooeffecten: verkeerd weergegeven feiten en onjuiste interpretaties van Van Streun* 153

Kritiek op het artikel 'Leerboeken: feiten en interpretaties' van A. van Streun in Euclides 66/2.

A. van Streun *De rijke context van het onderwijs* 155

Reactie van Van Streun op de kritiek van J. Meijer, J. Perrenet en W. Groen.

R. Leentfaar *Hoe verdeel je een kromme in k gelijke delen?* 156

Met een elementaire methode en met behulp van de computer kunnen nauwkeurige antwoorden gevonden worden voor de lengte van een kromme.

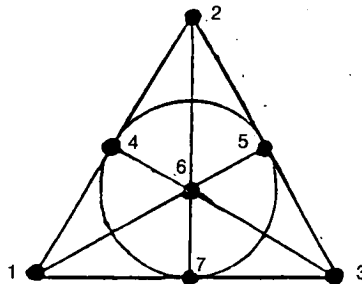
## Boekbespreking 159

## Verenigingsnieuws 160

*Voorlichtingsbijeenkomst Volwassenenonderwijs*

*Aanbieding grafische rekenmachine*

## Kalender 160



Het Fano-vlak.

## ► Correlatie en Regressie

De werkgroep Interpretatie Eindexamenprogramma Wiskunde A (vwo), afgekort WIEWA, bespreekt in haar deelrapport Statistiek en Waarschijnlijkheidsrekening ook het keuze-onderwerp Statistiek. Dit keuze-onderwerp is Correlatie en Regressie.

In de circulaire van het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen d.d. 29 maart 1988, kenmerk DGVO/BB-88-033, wordt medegedeeld, dat het onderwerp Correlatie en Regressie, dat tot het eindexamenprogramma behoort, niet getoetst zal worden in het centraal schriftelijk examen gedurende de jaren 1989, 1990 en 1991. Het onderwerp dient dan wel deel uit te maken van het schoolonderzoek. Vanaf 1992 kan het centraal schriftelijk examen zich ook over het keuze-onderwerp Statistiek uitstrekken. Een publicatie in Uitleg moet hieromtrent definitief duidelijkheid geven. Vanwege de late verschijning van zulk een publicatie wordt bij dezen in Euclides de tekst opgenomen die de WIEWA heeft aangeboden aan de CEVO, en waarvan de CEVO inmiddels heeft laten weten dat deze tekst weergeeft wat in 1992 als keuze-onderwerp Statistiek door middel van het centraal schriftelijk examen zal kunnen worden getoetst.

Geïnteresseerden wijzen wij nog gaarne op de publicatie 'Het rekenwerk bij Correlatie en Regressie', door Jan Breeman (voorzitter van de WIEWA), in Euclides 66-3 (november 1990).

De redactie

### Keuze-onderwerp Statistiek

Het keuze-onderwerp Statistiek staat als volgt in het eindexamenprogramma omschreven:

Regressie:

puntenwolk, regressielijn.

Regressie en correlatie.

Kwalitatieve aspecten van correlatie:

Intuïtief begrip van correlatie, interpretatie van getallen (in hoeverre zijn plausibele conclusies verantwoord?), positieve en negatieve correlatie (afhankelijkheid van schaalindeling), correlatiesterkte (van 'geen' tot 'volledig').

Kwantitatieve aspecten van correlatie:

afhankelijkheid van maat en schaal, correlatiemaat in verband met regressielijn; produktmoment-correlatiecoëfficiënt.

Computerprogramma's voor gebruik van regressiemethoden.

### Rapportage WIEWA

Het keuze-onderwerp Statistiek is onderverdeeld in twee onderdelen:

1. Samenhang van twee kwantificeerbare grootheden
2. Berekeningen.

Per onderdeel geldt het volgende.

#### 1. Samenhang van twee kwantificeerbare grootheden

Het tekenen van een spreidingsdiagram (puntenwolk) als grafische weergave van de resultaten van een steekproef waarbij bij elk element gelet is op twee kwantificeerbare grootheden.

Het onderkennen of er mogelijk sprake is van een lineaire samenhang tussen deze grootheden.

Kennis hebben van de begrippen positieve/negatieve correlatie. In voorkomende gevallen deze glo-

baal kunnen plaatsen in de categorieën: geen, zwak, sterk en volkomen, waarbij rekening gehouden wordt met de gebruikte schaalindelingen.

Het interpreteren van een samenhang in relatie tot de context. Hierbij verdient de problematiek rond correlatie en causaliteit de aandacht, waarbij men open moet staan voor het feit dat andere bekende of onbekende variabelen een rol kunnen spelen.

Kennis hebben van het begrip regressie-effect.

## 2. Berekeningen

Het berekenen van correlatiecoëfficiënt en regressiecoëfficiënten in het geval de lineaire samenhang van twee kwantificeerbare grootheden wordt onderzocht.

Kennis hebben van het verband tussen deze getallen.

Het opstellen van vergelijkingen voor regressielijnen.

Het gebruiken van een regressielijn voor het doen van voorspellingen.

**Niet:**

- rangcorrelatiecoëfficiënt (Spearman)
- betrouwbaarheid en nauwkeurigheid van regressievoorspellingen
- associatiemaat.

### Toelichting

Bij het berekenen van een correlatiecoëfficiënt wordt veelal gebruik gemaakt van de covariantie. Hiervoor geldt:

$$\text{cov}(x, y) = m((x - m(x)) \cdot (y - m(y)))^*$$

Bij berekeningen kan gebruik gemaakt worden van:\*

$$1. \text{cov}(x, y) = m(xy) - m(x) \cdot m(y)$$

(of bovenstaande formule)

$$2. \text{cor}(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{s(x) \cdot s(y)}$$

$$3. \text{regr.coëf.}_{y \text{ op } x} = \frac{\text{cov}(x, y)}{(s(x))^2}$$

$$\text{regr.coëf.}_{x \text{ op } y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{(s(y))^2}$$

$$4. \text{vergelijking van de regressielijn van } y \text{ op } x: \\ y - m(y) = \text{regr.coëf.}_{y \text{ op } x} \cdot (x - m(x))$$

$$\text{vergelijking van de regressielijn van } x \text{ op } y: \\ x - m(x) = \text{regr.coëf.}_{x \text{ op } y} \cdot (y - m(y))$$

\* m staat voor gemiddelde en  
s voor standaarddeviatie ( $= \sigma_n$ ).



## Mededeling

De Commissie Herziening Eindtermen (CHE) laat het volgende weten betreffende het vak wiskunde.

'De Onderwijsraad acht het in verband met de doorstroming van mavo-leerlingen naar havo-4 een gemis, dat onder meer kerndoelen goniometrie ontbreken.

De CHE is van mening dat voor de basisvorming goniometrie niet per se nodig is. Zij wijst er in dit verband op, wellicht ten overvloede, dat ook de Ontwikkelingsgroep-Wiskunde 'hantieren van goniometrische verhoudingen in rechthoekige driehoeken' tot het 'hoge' niveau van de basisvorming heeft gerekend. Gezien echter het nieuwe examenprogramma-voorstel stelt de CHE voor om een kerndoel toe te voegen (aan domein Meetkunde, na kerndoel 23):

**24. De leerlingen kennen de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens en kunnen die in rechthoekige driehoeken in eenvoudige situaties toepassen.**

*Opmerking.* De CHE is in 1990 door de Staatssecretaris van O & W ingesteld. Zij is gevraagd om de in de zomer van 1989 ingediende ontwerpen van eindtermen voor de basisvorming nader te bezien en op basis van in maart 1990 door de Staatssecretaris onderschreven criteria te herzien.

De CHE herformuleerde onder meer de ingediende eindtermen wiskunde van de COW tot 27 zgn. kerndoelen op één niveau. Thans zijn er dus 28 kerndoelen.

## ► Recycling van ponskaarten?

*J. H. van Lint*

### 1 Inleiding

In deze bijdrage bespreken we een toepassing van één van de beroemdste configuraties uit de discrete wiskunde – te weten het *Fano-vlak* – op een recent probleem uit de wereld van de computers. Het probleem betreft zogenaamde *binaire geheugens*, en hoewel het (nog?) niet realistisch is, zijn in de nabije toekomst praktische situaties mogelijk die vergelijkbaar zijn met de door ons behandelde situaties. Een binair geheugen is te vergelijken met een ponskaart; er zijn dus slechts 0'en en 1'en in opgeslagen. Op een ponskaart komt een 1 overeen met een – er in geponst – gat.

We stellen ons voor, dat ponskaarten voor computers zo duur geworden zijn, dat de gebruiker, ondanks de gaatjes die er van een vorig gebruik in zitten, meerdere malen dezelfde kaart zou willen gebruiken.

Eén aspect van het behandelde probleem is een *be-wijs*. Men mag het echter ook 'puzzelen' of 'gezond verstand' noemen. Hoe dan ook, het is naast de presentatie van het probleem zelf een tweede doel van dit artikel. Schrijver dezes maakt zich al lang ernstig zorgen over het feit dat het 'bewijzen' (vroeger vooral bij de meetkunde het centrale element) nauwelijks meer een rol speelt in ons vwo. Het is

denkbaar dat dit soort bewijzen door een leraar, die eens iets anders wil behandelen dan de standaardstof, gebruikt zou kunnen worden om een redeneertrant te illustreren, óók voor jonge scholieren!

### 2 Write-once memories

Een binair geheugen (in ons model een ponskaart) bestaat uit een rij plaatsen waar men een 0 of een 1 kan schrijven (men spreekt van *bits* = binary digits). De éénmalig te gebruiken geheugens (write-once memories) hebben aanvankelijk alleen 0'en in het geheugen. De gebruiker kan op bepaalde plaatsen 0'en in 1'en veranderen – door gaten te ponsen in een ponskaart – maar dit nooit meer ongedaan maken.

Laten we met een zeer eenvoudig voorbeeld beginnen. Het geheugen bestaat uit *drie* plaatsen. De informatie die moet worden opgeslagen komt uit een collectie van 8 boodschappen:  $m_0, m_1, \dots, m_7$ . We slaan in het geheugen alleen het nummer van de boodschap op. Dat wil zeggen dat het lees-apparaat (dus de computer) een ponskaart met 110 interpreteert als boodschap  $m_6$  (want  $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6$ ).

Als volgende geval willen we een aantal malen (zeg vier maal) één boodschap uit de collectie van 8 boodschappen ( $m_0, m_1, \dots, m_7$ ) opslaan. Het gemakkelijkste is om een geheugen met *twaalf* plaatsen ter beschikking te hebben. Deze plaatsen verdelen we in vier drietallen, één drietal voor elke boodschap die moet worden opgeslagen. (Voorbeeld: de serie van vier boodschappen  $m_6, m_1, m_3, m_7$  komt overeen met een eindtoestand van het geheugen: 110; 001; 011; 111, waarbij na het eerste gebruik de eerste drie plaatsen  $m_6$  representeren, dus 110, waarna op de volgende drie plaatsen 001 wordt geschreven, d.w.z. de representatie van  $m_1$ , enzovoort.)

Nu dan het eigenlijke probleem: de geheugens worden te duur! Het wiskundig probleem waar dit artikel over gaat is de vraag of men de boodschappen met minder geheugenruimte kan opslaan dan bij de boven beschreven methode nodig is. In het voor-

beeld werd plaats 3 niet gebruikt (geen gat geponst, omdat daar de eerste keer een 0 stond. Het was echter in principe mogelijk geweest daar alsnog een gat te ponsen en aldus plaats 3 te gebruiken).

We geven nu de volgende definitie:

$w(<v>^t)$ : = de minimale lengte van een binair geheugen waarin men  $t$  keer, na elkaar, één boodschap uit een collectie van  $v$  boodschappen kan opslaan.

Merk op dat onze inleiding de mededeling  $w(<8>^4) \leq 12$  illustreert: om 4 maal achtereen één boodschap, uit een collectie van 8 boodschappen, op te slaan, zijn 12 geheugenplaatsen in elk geval voldoende.

De rest van ons verhaal gaat over  $w(<7>^4)$ : hoeveel geheugenplaatsen zijn er minimaal nodig om 4 maal achtereen één boodschap uit een collectie van 7 boodschappen op te slaan? Uiteraard is bij een collectie van 7 boodschappen en 'klassiek' gebruik ook een geheugen van 4 keer 3 bits nodig (ieder van de blokken van 3 plaatsen biedt 8 mogelijkheden, waarvan er telkens maar 7 worden gebruikt).

### 3 Een bewijs dat $w(<7>^4) > 6$

Stel dat ons 6 geheugenplaatsen ter beschikking staan, en dat wij vier keer (na elkaar) één van de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 willen opslaan. Men moet zich goed realiseren dat de computer regels krijgt die vertellen hoe bepaalde configuraties op de ponskaart moeten worden geïnterpreteerd en dat de computer *niet* weet wat er eerder op de kaart heeft gestaan en ook *niet* hoe vaak de kaart al is gebruikt.

De regels moeten verder zó zijn, dat bij een gegeven kaart met gaatjes erin van een vorig gebruik, en bij elke nieuwe boodschap, het mogelijk is de configuraties op de kaart zo te veranderen dat de gewijzigde kaart door de computer inderdaad zal worden gelezen als die nieuwe boodschap. De kaart moet (ten minste) vier keer kunnen worden gebruikt. Men moet dus telkens nagaan, dat dit allemaal kan! (Dit geldt te meer voor paragraaf 4, waar een constructie wordt besproken).

We gaan nu na wat er bij de opeenvolgende schrijfoperaties kan gebeuren:

**Gebruik 1:** We kunnen niets doen, of (bijvoorbeeld) één gat ponsen. Dit geeft ons 7 verschillende alternatieven. Als we zuinig zijn gebruiken we die ook. In ieder geval moeten we rekening houden met de mogelijkheid dat na het eerste gebruik het geheugen tenminste één 1 bevat (en volgens ons voorstel ook niet meer dan die ene 1).

**Gebruik 2:** Laten we verstandig zijn en als algemene regel afspreken dat een geheugen dat uit een vorig gebruik de boodschap  $m_i$  bevat, in het geval dat wij weer  $m_i$  willen schrijven, niet wordt veranderd; (een andere afspraak maakt het gebruik stellig minder zuinig: er komt een mogelijkheid bij). We moeten er echter rekening mee houden dat de tweede boodschap van de eerste verschilt. Dit geeft 6 mogelijkheden. Daar er maar 5 plaatsen ter beschikking staan zal zeker één van die 6 mogelijkheden resulteren in tenminste twee nieuwe 1'en (= gaten) in het geheugen. De pechvogel treft dus na het tweede gebruik een geheugen aan met drie van de zes plaatsen al bezet door een 1.

**Gebruik 3:** We rekenen er maar op dat de derde maal weer iets anders (dan er na het tweede gebruik in stond) in het geheugen moet worden geschreven. Er zijn dus weer 6 mogelijke boodschappen die nu moeten kunnen worden opgeslagen. Dit toont aan, dat het gebeuren kan, dat na het derde gebruik al 5 van de 6 plaatsen een 1 hebben. Een vierde gebruik is nu uitgesloten, daar we nog slechts twee alternatieven hebben (namelijk: niets doen of het laatste gat ponsen). Dit is een bewijs dat  $w(<7>^4) \geq 7$ .

**Opgave** (voor de lezer en voor de leerling):

Als we proberen om via dezelfde redenering aan te tonen dat  $w(<7>^4) > 7$ , dan lukt dat niet. Ga dit na.

Merk op dat het voor veel leerlingen absoluut niet duidelijk is dat via de opgave *niet* bewezen is dat  $w(<7>^4) = 7$ . Er is slechts aangetoond dat het wellicht kan (of beter gezegd dat wij nog niet zien hoe we het tegendeel zouden moeten bewijzen). Het is zelfs bij onderwijs aan studenten in de wiskunde

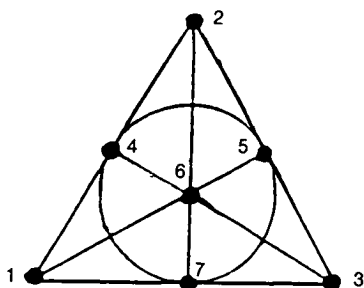
een groot didactisch probleem om ze duidelijk te maken dat als men aantoonst niet in staat te zijn de uitspraak  $A$  (in ons geval de uitspraak dat meer dan 7 plaatsen nodig zijn) te bewijzen, daarmee nog niet de uitspraak  $\neg A$  (in ons geval: het kan met 7 plaatsen) is bewezen!

#### 4 Het Fano-vlak

Het beroemdste voorbeeld van een 'eindige meetkunde' is de configuratie van punten en lijnen bekend als het *Fano-vlak* (G. Fano (1871-1952) was één van de belangrijkste wiskundigen uit de Italiaanse school van de projectieve meetkunde). Deze meetkunde bestaat uit 7 punten en ook 7 lijnen met de eigenschappen:

1. *ieder tweetal punten bepaalt één lijn,*
2. *ieder tweetal lijnen bepaalt één punt en*
3. *er zijn vier punten waarvan er geen drie op één lijn liggen.*

Figuur 1 is een plaatje van de meetkunde. Hierbij moet de 'cirkel' ook als lijn meetellen en alleen de dikke zwarte stippen tellen als punten.



Figuur 1

Bij een eerste kennismaking met discrete meetkunde kost het sommigen enige moeite om te beseffen dat een 'lijn' niets anders is dan een deelverzameling van de *eindige* puntverzameling. Mogelijk is daardoor de volgende representatie van het Fano-

vlak voor beginners soms lastig. Laat de getallen 1 tot en met 7 de punten voorstellen. De verzamelingen  $\{1 + i, 2 + i, 4 + i\}$ , waarbij de elementen modulo 7 moeten worden geïnterpreteerd, worden de lijnen. Dat aan de eisen is voldaan is eenvoudig te controleren door alle mogelijke punten-paren en lijnen-paren te controleren (eindig veel) en vier punten te vinden die aan de derde eis voldoen.

Merk op dat de nummering in figuur 1 overeen komt met deze tweede representatie. Natuurlijk is een korte redenering veel bevredigender dan alles proberen! Een korte redenering gaat als volgt.

Laat  $V$  de verzameling  $\{1, 2, 4\}$  zijn. We bekijken de verschillen, ook weer modulo 7, van paren elementen van  $V$ . Deze verschillen zijn  $\pm(2-1) = \pm 1$ ,  $\pm(4-2) = \pm 2$  en  $\pm(4-1) = \pm 3$ . Dit zijn *alle* getallen  $\neq 0$  (modulo 7). Bij elk paar  $x, y$  uit de verzameling  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  is er precies één geordend paar uit  $V$  zo dat  $x - y$  gelijk is aan het verschil van dat paar. Laat bijvoorbeeld  $x - y = 3 = 4 - 1$ . Er is dan precies één waarde van  $i$  zo dat  $x$  en  $y$  behoren tot de verzameling  $\{1 + i, 2 + i, 4 + i\}$ , namelijk  $i = x - 4 = y - 1$ . Dat wil zeggen, dat er inderdaad precies één lijn is die  $x$  en  $y$  bevat.

**Opgave:** Ga na dat ook aan de andere eisen uit de definitie van het Fano-vlak is voldaan.

#### 5 $w(<7>^4) = 7$ via eindige meetkunde

Stel dat we een geheugen met 7 plaatsen hebben. We identificeren deze plaatsen met de 7 punten van het Fano-vlak. Er zijn 7 boodschappen  $(m_1, \dots, m_7)$ , die weer moeten worden opgeslagen met behulp van hun nummer.

Het gaat nu vooral om de lees-regels voor de computer. Net als in de vorige paragraaf geldt: als het geheugen  $m_i$  bevat, en we willen bij een volgend gebruik weer  $m_i$  schrijven, dan veranderen we niets in het geheugen. Het geheugen – de ponskaart – moet weer 4 keer achtereenvolgend worden gebruikt. Men moet zich er telkens van vergewissen dat het inderdaad allemaal zó kan.



**Gebruik 1:** Een gat op plaats  $i$  betekent dat boodschap  $m_i$  in het geheugen staat. Dit door de computer zó laten interpreteren is triviaal.

**Gebruik 2:** Zijn er gaten aangebracht op de plaatsen  $i$  en  $j$ , en is  $k$  het derde punt op de lijn die door de punten  $i$  en  $j$  gaat, dan leest de computer  $m_k$ . (Degene die  $m_k$  in het geheugen wil zetten en een geheugen aantreft met een gat op plaats  $i$  (met  $i \neq k$ ) zoekt de lijn door  $i$  en  $k$  en maakt dan een gat op de plaats van het derde punt van deze lijn – zeg:  $j$ .)

**Gebruik 3:** We gaan er nu van uit, dat er inmiddels gaten op de plaatsen  $i$  en  $j$  zijn aangebracht, waardoor de computer de boodschap  $m_k$  leest; dit zoals beschreven bij Gebruik 2. We gaan er van uit, dat nu een andere boodschap dan  $m_k$  in het geheugen moet worden opgeslagen. Dit moet gebeuren door één of meer nieuwe gaten te ponsen.

**Opgave:** Leg uit dat nu niet kan worden volstaan met het ponsen van één extra gat.

We moeten dus zeker 4 gaten gebruiken. We kunnen deze altijd zó ponsen, dat drie punten op één lijn liggen; de computer leest dan boodschap  $m_i$  (als  $i$  het punt is, dat buiten die ene lijn ligt). Men kan nagaan, dat dit altijd op deze manier kan (ook al zijn er verschillende situaties mogelijk!).

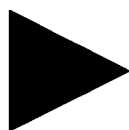
**Gebruik 4:** We hebben nu een geheugen waarvan inmiddels 4 plaatsen zijn voorzien van een gat. Drie punten liggen op één lijn, en een vierde punt,  $l$ , ligt daar niet op. Als de vierde boodschap gelijk is aan  $m_l$ , dan behoeven we nu niets meer te doen. In het algemeen zal de vierde boodschap verschillen van  $m_l$ . Daarom moeten we weer iets verzinnen.

Als de vierde boodschap correspondeert met een plaats waar al een gat was geponst, dan kunnen we één extra gat ponsen, zó dat we twee snijdende lijnen krijgen, en afspreken: is  $h$  het snijpunt van die twee lijnen, dan bedoelen we boodschap  $m_h$ . In dit geval hebben we dus 5 gaten moeten ponsen. Als de vierde boodschap correspondeert met een plaats waar nog geen gat was geponst, dan laten we alleen deze plaats zonder ponsgat. We krijgen dus 6 ponsgaten, en het is duidelijk hoe de computer deze configuratie moet interpreteren.

We hebben hiermee aangetoond dat iedere serie van 4 opeenvolgende boodschappen kan worden geschreven in het geheugen dat we tot onze beschikking hadden. Interessant is om op te merken dat er  $7^4$  verschillende series van 4 achtereenvolgende boodschappen zijn, maar dat desondanks het geheugen maar  $2^7$  verschillende toestanden kent (die bovendien niet allemaal voorkomen: de computer hoeft de toestanden met 0, 3 of 7 gaten zelfs niet te interpreteren). Dit is géén tegenspraak!

## 6 Nabeschouwing

Karton is (nog?) niet duur. Platina CD's zijn dat wel. Laten we ons aan ons model houden. Wat hebben we gevonden? Zonder nadenken hadden we  $w(<7>^4) \leq 12$ . Met wat – mijn inziens *leuke* – wiskunde weten we nu dat  $w(<7>^4) = 7$ . Dit is een besparing van meer dan 40%. Het is beslist niet ondenkbaar dat dit soort technieken in de toekomst zal worden toegepast. Discrete wiskunde is een zeer uitgebreid deel van de wiskunde met vele soorten bewijsvoering. Dit korte artikel geeft een blik op een klein deel van dit gebied. De denktrant mag wel karakteristiek worden genoemd.



## Mededeling

Met ingang van vorige maand heeft Dick Prins, werkzaam aan een hbo-instelling te Leeuwarden, de taak van Pieter de Roest als bureauredacteur en redactiesecretaris overgenomen. Wij heten hem van harte welkom in de redactie!

Tegelijk mag nog wel eens worden gememoreerd dat Pieter de Roest, die eigenlijk al in mei had willen vertrekken, zijn werkzaamheden tot genoemde datum heeft voortgezet. Hij had dat zien aankomen: 'Dat is eigen aan vrijwilligerswerk', schreef hij in mei al. Een woord van dank is hier zeker op zijn plaats. Bij dezen!

De redactie

## ► **Het vwo-programma wiskunde B: een oproep tot verandering**

*J. A. C. Kolk*

### **Het vwo-programma**

Het vwo-programma wiskunde B bestaat in zijn huidige vorm min of meer sinds 1968. Allerhande veranderingen zijn inmiddels doorgevoerd in de meeste soorten van wiskundeonderwijs, maar tot nog toe zijn die voorbijgegaan aan de vwo-wiskunde B, i.h.b. aan het onderdeel analyse daarvan. Wellicht is dat een tijd lang een zegen geweest, maar langzamerhand wordt het contrast tussen de vwo-wiskunde B en de overige schoolwiskunde steeds groter. Daarvan zou men zich niet zoveel hoeven aantrekken, indien er een duidelijke rechtvaardiging bestond voor de inhoud van dit programma en indien weinig was aan te merken op de presentatie ervan.

Welnu, zowel aan inhoud als presentatie schort een en ander, naar mijn oordeel althans. Nu kan men die opinie onmiddellijk van de hand wijzen (als afkomstig van een outsider) met een verwijzing naar mijn achtergrond van universitaire, op research georiënteerde, wiskundige. Niettemin meen ik competent te zijn in dit soort wiskunde, en het vwo-

onderwijs gaat mij ter harte, al was het maar omdat ik erop voortborduur bij mijn eigen onderwijsspanningen. Mijn opmerkingen betreffen nadrukkelijk de wiskunde B; de wiskunde A lijkt mij in het algemeen goed en inspirerend; en ik betreur dat het verschil zo groot is.

Voorts hoop ik dat de opinies die ik hieronder over het onderwijsmateriaal naar voren zal brengen, passend worden geïnterpreteerd. Het is mij er niet om te doen de deskundigheid van de individuele teams van auteurs van studiemateriaal, of van de opstellers van de eindexamens ter discussie te stellen. Veel meer wil ik als conclusie aan mijn observaties verbinden dat er dringend iets moet gebeuren. Primair zullen de hiertoe benodigde activiteiten moeten komen van de zojuist genoemden, maar ook research-wiskundigen verbonden aan universiteiten en hogescholen zullen hun bijdrage moeten leveren. Investeren in het opnieuw tot stand brengen van relaties tussen wiskundeleraars in het vwo enerzijds en wiskundigen verbonden aan universiteiten en hogescholen anderzijds is hard nodig.

### **Inhoud en presentatie**

Bij bladeren in oude jaargangen van Euclides wordt snel zichtbaar dat een discussie over het wiskundeprogramma daar continu wordt gevoerd. Toch mis ik een duidelijke rechtvaardiging van het huidige programma, in de trant van: 'na overleg met universiteiten en hogescholen, en andere afnemers van onze produkten, zijn wij tot de slotsom gekomen dat...' of: 'wiskunde-onderwijs hoort die en die vaardigheden aan te leren'. Wel is evident dat er, nu en dan zelfs bittere, strijd is gevoerd over deelaspecten van het programma, zoals notaties, wel of geen differentiaal, buigpunten.... Maar duidelijke conclusies lijken te ontbreken, onbevredigende compromissen overheersen nog wel eens. Belangrijke determinanten, die bovendien voor een outsider te toetsen zijn, van de inhoud en presentatie van het wiskundeprogramma zijn:

- \* de leerboeken,
- \* het eindexamen.

Voor het betoog hier concentreer ik mij op de wiskundige aspecten, en laat ik de didactische buiten beschouwing. Bladeren in leerboeken leidt bij mij tot oordelen variërend van 'zeer zorgvuldig' tot 'die schrijvers lijken zelf niet te begrijpen waarover ze het hebben'. Toch komt een dergelijke opinie tot stand op een te incidentele basis. Laat ik daarom het eindexamen wiskunde B als toetssteen nemen: dit zal toch de essentie van het echte, serieuze wiskundeonderwijs representeren; en het zal uiteraard met de grootste zorg worden opgesteld.

### **Enige punten van kritiek**

Hieronder volgen onomwonden punten die mij bij de eindexamens opvallen in negatieve zin:

- \* Het volstrekt onnatuurlijke, ja zelfs rituele, taalgebruik dat vol zit met verborgen conventies.
- \* Het is dikwijls volstrekt onduidelijk of inleidende opmerkingen informatie bevatten die de kandidaten voor waar mogen aannemen, of dat daarin, in weggemoffelde vorm, al opdrachten staan om iets te onderzoeken.
- \* Wiskundige notaties die enkel en alleen voorkomen in het Nederlandse vwo-onderwijs, daarentegen niet in andere Europese landen, en zeker niet in de gangbare wiskundeliteratuur. Gaat Europa '92 voorbij aan het vwo-onderwijs?
- \* Wiskundige slordigheden in de opgaven en normen.
- \* Op het toepassen van routinetechnieken staat duidelijk een premie, terwijl een originele inval je in grote problemen kan brengen.
- \* De wiskunde komt er uit naar voren als een onsaamenhangende collectie kunstjes en niet als een netwerk van elkaar ondersteunende technieken. Aan de interne dynamiek van vraagstukken wordt afbreuk gedaan, vermoedelijk ten behoeve van de representativiteit en objectiviteit van het examen. Zo worden echter wel kansen gemist om inzicht te laten blijken, of ook om een probleem nog eens met vrucht van een andere kant te bezien.

Dit is harde kritiek en er is dus bewijsmateriaal nodig. Om het betoog hier niet te onderbreken, heb ik dat in een appendix geplaatst.

### **Wat doet men in het onderwijs met dit soort kritiek?**

Naar mijn ervaring weten leraren veelal perfect aan te geven wat er niet deugt aan het onderwijsmateriaal: zowel de leerboeken als de eindexamens. Zelf hebben ze meestal een uitgebreid repertoire aan absurditeiten die ze zijn tegengekomen; daarvoor hebben ze echt niemand van de universiteit nodig. De leraren maken echter ook dikwijls de indruk dit slechte lesmateriaal en de ondeugdelijke eindexamens net zo te beleven als het Nederlandse klimaat: onplezierig, maar een natuurlijk gegeven, waarbij je hooguit een paraplu opsteekt, d.w.z. waarbij je je zo goed mogelijk wapent tegen de gevolgen. Men brengt de leerlingen bij hoe het dan wel moet, hoe zij zich zo goed mogelijk voorbereiden op het eindexamen. Naar mijn indruk gebeurt dit met een grote inventiviteit en deskundigheid, maar wel heel duidelijk op een ad-hoc-basis. De maatregelen die men zodoende treft, lijken toch wel ongewenste consequenties te hebben:

- \* De leerlingen wordt bijgebracht de tekstboeken niet serieus te nemen, maar in plaats daarvan te vertrouwen op de standaardprocedures van de leraar. Dat de leerlingen zelfstandig bezig zijn, wordt hierdoor niet gestimuleerd. En in de universiteit zien we die houding terug op practica, waar de begeleider maar moet vertellen wat de 'goede' manier van oplossen is.
- \* Er vindt een uitgebreide oefening plaats in het begrijpen van 'mathspeak', een afwijkende en artificiële variant van het Nederlands die alleen voorkomt bij het eindexamen wiskunde. Zonder meer is dit verspilling van energie.
- \* Deze reparende activiteiten gaan ten koste van andere aspecten in het programma, met name die welke de wiskunde zouden kunnen verlossen van het odium van een vak dat totaal is uitontwikkeld en dat alleen maar bestaat omdat het nodig is bij andere disciplines. Het Nederlandse onderwijsmateriaal doet er te weinig aan om te voorkomen dat de wiskunde bij de leerlingen te boek kan staan als een vak dat voltooid is, dat af is.

Uitvoerige commentaren op de eindexamens en de gangbare leerboeken treft men aan in praktisch alle

jaargangen van Euclides, compleet met uitgebreide suggesties hoe het beter zou kunnen. Tot mijn grote verbazing kan men niettemin de gewraakte passages in ongewijzigde vorm wederom vinden in de laatste oplagen van de leerboeken. *Welke mechanismen zorgen ervoor dat dit mogelijk is?*

### Universiteiten betrokken bij eindexamens?

Kritiek op eindexamens wordt soms wel gepareerd met de reactie dat de universiteiten toch ook betrokken zijn bij het opstellen daarvan. Voor mijn eigen Vakgroep Wiskunde van de RU Utrecht blijkt dit nieuwe informatie te zijn, niemand ervan heeft enige betrokkenheid bij het formuleren van eindexamens. Kennelijk ligt hier een terrein braak voor bemoeienis van research-wiskundigen, i.p.v. universitaire wiskundigen wier aandacht primair het onderwijs of het populair-wetenschappelijk verhaal is.

### Wiskunde in de publieke opinie

De bovenstaande opmerkingen overdenkend, begreep ik zelf ook weer beter waarom onze studenten in hun eerste twee jaar op een aantal punten zulke problemen hebben. Maar ook, en dat lijkt mij nog veel belangrijker, waarom wiskunde in Nederland zo laag genoteerd staat in de publieke opinie. Voor de universiteiten, en op langere termijn bezien daarom ook voor de samenleving, is dit een uitermate belangrijke reden om aan te dringen op herziening van het wiskundeprogramma in het vwo. Immers, het aantal wiskundestudenten loopt gestaag terug bij een verwachte toename van de vraag van de samenleving naar wiskundigen; en deze teruggang wijt ik voor een deel aan de saaie uitstraling van de wiskunde B in het vwo. En komt toch niet voornamelijk in het vwo het beeld tot stand dat de publieke opinie van de wiskunde heeft?

### Conclusies

Een betreurenswaardig aspect aan deze zaak is dat het vwo zijn uiterste best doet om gecompliceerde zaken te behandelen. Dit uiteraard in de verwachting dat hiermede het vervolgonderwijs een dienst wordt bewezen. Wat de meeste docenten dáár betreft, hoeft het allemaal niet zo geleerd, indien datgene wat de leerlingen hebben bestudeerd maar een samenhangend geheel is waarmee ze zich vertrouwd voelen.

Dus lijkt het mij nuttig dat er een uitvoerige bezinning plaats heeft op de inhoud van het programma wiskunde B in het vwo:

- \* De inhoud ervan moet opnieuw worden vastgesteld in overleg met afnemers en vervolgonderwijs, in ieder geval na consultatie van deskundigen hieromtrent. Voor zover ik meningen heb kunnen peilen in eigen kring, vindt men het veel belangrijker dat studenten *een beetje goed* begrijpen dan dat ze *veel slecht* verwerken, zoals nu vaak het geval lijkt te zijn.

- \* Een aantal knopen zal nu eens afdoende moeten worden doorgehakt, wel of geen differentialen, differentiaalvergelijkingen, etc.

- \* Het onderwijsmateriaal dient te worden gemoderniseerd, veel meer in de trant van de wiskunde A, en onder gebruikmaking van wat inmiddels aan talloze suggesties voor verbeteringen is aangedragen. In het bijzonder zal, veel meer dan nu het geval is, het materiaal moeten laten zien dat *wiskunde een levend vak is, nog steeds volop in ontwikkeling*.

- \* De gegroeide examencultuur, en in samenhang daarmee het oefenmateriaal, lijkt langzamerhand een aantal ongewenste aspecten te vertonen: sanering lijkt hier onontkoombaar.

- \* Wiskundigen uit universiteiten en bedrijfsleven moeten bij deze veranderingen worden betrokken, dunkt me: maar die zijn ook bereid de benodigde inspanningen te leveren, al is het maar uit eigenbelang.

## Appendix

### Voorbeelden

Om de voorgaande beweringen van bewijsmateriaal te kunnen voorzien, reproduceer ik eerst uit [1] fragmenten van het eindexamen wiskunde B vwo 1989-II, het meest recente dat mij ter beschikking stond. Voorts heb ik uit Euclides vernomen dat dat van 1990 omstreden is.

**Opgave 1** Van  $\mathbf{R}$  naar  $\mathbf{R}$  is voor elke  $a \in \mathbf{R}$  gegeven de functie

$$f_a: x \rightarrow \frac{x^2 + 5x + a}{x^2 + ax + a}.$$

Ten opzichte van .....

**Opgave 2** Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel  $Oxy$  is de kromme  $K$  gegeven door

$$x = 4 - 2 \cos 2\varphi \text{ en } y = (\sin \varphi + 1)(\sin \varphi + 3),$$

waarbij  $\varphi \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ .

5. Onderzoek .....

7 Bereken de coördinaten van het punt van  $K$  waarin de raaklijn aan  $K$  evenwijdig is met de  $y$ -as.

8 Teken  $K$ .

Een lijn  $x = p$ , met  $p \in \mathbf{R}$ , snijdt  $K$  in de punten  $A$  en  $B$ .

9 Bereken  $p$  in het geval dat  $AB = 6$ .

**Opgave 3** Gegeven is de op  $\mathbf{R}$  continue functie

$$f: \begin{cases} x \rightarrow x^2 + 1 & \text{voor } x \in \langle -, 1], \\ x \rightarrow \frac{1 + \ln ax}{x} & \text{voor } x \in \langle 1, +\infty \rangle, \text{ waarbij } a \in \mathbf{R}^+. \end{cases}$$

Ten opzichte van .....

10 Bewijs dat  $a = e$ .

**Opgave 3** Deze begint met een monstrueuze zin, taalkundig gezien. Voorts: de erin gebezigde notaties voor functies, intervallen en  $\pm$  oneindig verschillen van die in de internationaal gangbare wiskundeliteratuur. Maar ernstiger vind ik dat de verschaft informatie mij in de war brengt: er wordt medegedeeld dat deze functie  $f$  altijd continu is, voor alle waarden van  $a \in \mathbf{R}^+$ ; en dat is volgens mij toch echt niet waar. Als ik tenslotte maar doorlees, zie ik dat dit toch niet de bedoeling was, en dat ik in feite onderdeel 10 zit te maken. Let hierbij ook op

de redactie van opgave 2: ogenschijnlijk soortge-lijk, maar daar is  $\varphi$  inderdaad een variabele, en geen parameter zoals  $a$ . Vermoedelijk had ik moeten zijn gewaarschuwd door het, nogal subtiele, feit dat, in contrast met opgave 1, de  $a$  niet voorkomt als subscript van de functie  $f$ ; en derhalve toch weer niet wordt beschouwd als parameter.

Was het volgende niet veel begrijpelijker:

Onderstel dat  $a \in \mathbf{R}^+$ , en laat  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de functie zijn die wordt gegeven door:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{voor } x \in (-\infty, 1], \\ \frac{1 + \ln ax}{x} & \text{voor } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Bewijs dat  $f$  een continue functie is indien  $a = e$ , en alleen in dat geval.

Al met al wel een ingewikkelde manier om te testen of men weet dat  $\ln e = 1$ .

**Opgave 2** Deze handelt over een kromme  $K$ . Waarom ineens hier zo een ouderwetse, en feitelijk onjuiste, notatie? Bij de opgaven 1 en 3 wordt in eenvoudiger gevallen een modernere notatie gehanteerd. Mijn vermoeden is dat  $\mathbf{R}^2$  niet wordt gezien als cartesisch produkt van  $\mathbf{R}$  met zichzelf, maar als een (axiomatisch geïntroduceerd?) meetkundig object dat nog moet worden voorzien van coördinaten. Worden er ooit wel eens andere dan cartesische coördinaten gehanteerd?

Kijk nu eens naar onderdeel 7. Gevraagd wordt naar de coördinaten van *het* punt van  $K$  waarin de raaklijn aan  $K$  verticaal loopt. Toen ik dit zelf voor de eerste keer uitrekende, vond ik *drie* punten; maar tot mijn troost overkwam dit ook enige collega's. Immers, hoe redeneerden wij, en vermoedelijk ook de slimme examinandi? Een raaklijn aan de kromme loopt parallel aan de  $y$ -as, indien de  $x$ -coördinaat van een punt op  $K$  lokaal niet verandert: d.w.z. ik onderzoek de conditie:

$$\frac{dx}{d\varphi}(\varphi) = 4 \sin 2\varphi = 8 \sin \varphi \cos \varphi = 0, \text{ en ik vind}$$

$$\varphi \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2} \right\};$$

en die punten liggen precies in het definitie-interval van onze parametrisatie van  $K$ . Daarom doen na-

tuurlijk de randpunten ook mee! Maar er staat toch: hét punt van  $K$ . Vaklui begint het nu te dagen: die onderzoeken dus ook maar eens:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\varphi}(\varphi) &= \cos \varphi(3 + \sin \varphi) + (1 + \sin \varphi)\cos \varphi = \\ &= 2 \cos \varphi(2 + \sin \varphi) = 0.\end{aligned}$$

Hieraan voldoen:

$$\varphi \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

En dus volgt er enig gemompel in de trant van: 'OK, de kromme is beeld onder een afbeelding waarvan de totale afgeleide in die punten niet meer injectief is'. Misschien wordt daarop nu de parameter  $\varphi$  geëlimineerd en onderzoekt men de eigenwaarden van een  $2 \times 2$ -matrix; er blijkt dan dat onze kromme een gedeelte is van een parabool in scheve ligging, met de vergelijking:

$$(x - 4y)^2 - 44(x - 4y) - 246y + 228 = 0.$$

Tegen deze tijd is ook de vakpersoon die niet naar een plaatje wenst te kijken, ervan overtuigd dat

$$\varphi \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\} \text{ geen verdere kandidaten levert voor}$$

een verticale raaklijn, en dat deze alleen maar is te vinden in het punt  $(2, 3) \in \mathbf{R}^2$ . En terzijde, dit is natuurlijk een prachtig vraagstuk om in de klas te laten plotten op een langzame computer, waarbij men de stip op het scherm steeds trager naar de eindpunten van de kromme ziet gaan.

### Wat moeten nu onze slimme kandidaten?

Om me in hun situatie te kunnen verplaatsen, ben ik op zoek gegaan naar een leerboek; het eerste waarop ik in de RUU zo gauw de hand kon leggen, was [2]. Op mij maakt het 'Hoofdstuk 3. Het onderzoek van krommen' daaruit een ondoordringbare indruk. Immers, in de inleiding daarvan wordt gezegd dat we een notatieprobleem hebben om over raaklijnen te spreken, en dat we daarom differentiaal zullen invoeren. Vervolgens worden meteen opgaven gegeven waarin naar raaklijnen wordt gevraagd: dus zonder dat die zijn gedefinieerd. De

daaropvolgende definitie van differentialen is pure mystiek (nog vriendelijk geformuleerd). Een eindje verder komt plotsklaps de vuistregel:

$$\text{voor een punt met verticale raaklijn geldt } \frac{dx}{dy} = 0.$$

Merk op dat dit net een implicatie is die voor ons probleem de verkeerde kant op is. Ik begrijp nog steeds niet goed wat die  $dx$  en  $dy$  zijn, laat staan hoe ik ze kan berekenen; maar uit een bewijs een eindje verderop, destilleer ik de regels:

$$x = x(\varphi) \Rightarrow dx = x'(\varphi)d\varphi,$$

$$y = y(\varphi) \Rightarrow dy = y'(\varphi)d\varphi.$$

Dus vinden we:

(\*) voor een punt met verticale raaklijn geldt

$$\frac{x'(\varphi)}{y'(\varphi)} = 0.$$

Invullen geeft derhalve de conditie:

$$(**) \frac{2 \cos \varphi \cdot 4 \sin \varphi}{2 \cos \varphi(2 + \sin \varphi)} = 0.$$

De echt precieze kandidaten zouden wederom in de problemen kunnen raken omdat er  $\frac{0}{0}$  in (\*\*) kan

staan. Zij echter die de formule (\*) uit het hoofd hebben geleerd en automatisch de gemeenschappelijke factor in (\*\*) wegstrepen, hebben het verreweg het gemakkelijkst. U begrijpt wel dat ik moeite daarmee heb. En te bedenken dat men dit alles had kunnen voorkomen met de formulering:

$$\dots \text{ waarbij } \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

**Vervolg Opgave 2** Maar laten we doorlezen in opgave 2, en wel in onderdeel 9. Dat begint weer met zo'n onzinnige mededeling, die me even doet twijfelen of ik  $K$  nou wel goed heb getekend, n.l. dat een verticale lijn met de vergelijking  $x = p$  de kromme  $K$  altijd snijdt in twee punten  $A(p)$  en  $B(p)$ . Om de  $p_0$  te bepalen waarvoor de afstand tussen  $A(p_0)$  en  $B(p_0)$  gelijk is aan 6, berekenen we, denk ik, dat: de afstand tussen  $A(p)$  en  $B(p)$  gelijk is aan

$$4\sqrt{p - 2}.$$

Dus verwacht je nu te moeten gaan onderzoeken wanneer die punten  $A(p)$  en  $B(p)$  inderdaad bestaan (uiteraard voor  $p \geq 2$ ); en mooier nog, dat er wordt doorgevraagd naar wat er gebeurt voor  $p = 2$ , d.w.z. wanneer die twee snijpunten samenvallen. Zo zouden we een tweede, onafhankelijke, controle

hebben van onze resultaten in onderdeel 7. Dát maakt voor mij de wiskunde zo boeiend en ook zo vertrouwend.

Geschiedt dit niet omdat we niet meer geacht worden te weten dat een raaklijn aan  $K$  twee samenvallende snijpunten heeft met  $K$ ? Mag het alleen nog maar in termen van algoritmisch bepaalde afgeleiden?

## Een nieuwe poging

Nu ben ik u natuurlijk een voorstel verplicht hoe vraagstuk 2 volgens mij eruit had kunnen zien.

**Vraagstuk 2** Definieer de functies  $f$  en  $g$ :  $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \rightarrow \mathbf{R}$  door:

$$f(\varphi) = 4 - 2\cos 2\varphi, g(\varphi) = (1 + \sin \varphi)(3 + \sin \varphi).$$

De kromme  $K$  in  $\mathbf{R}^2$  wordt gedefinieerd door:

$$K = \{(f(\varphi), g(\varphi)) \in \mathbf{R}^2 \mid \varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)\}.$$

7. Laat zien dat  $[2, 6)$  het beeld van de functie  $f$  is.

8. Bepaal het beeld van de functie  $g$ .

9. Bepaal de punten van  $K$  waar de raaklijn aan  $K$  evenwijdig is aan de  $y$ -as.

10. Teken  $K$ .

Uit onderdeel (7) weten we al dat, voor elke  $p \in [2, 6)$ , de lijn in  $\mathbf{R}^2$  met de vergelijking  $x = p$ , de kromme  $K$  snijdt.

11. Laat zien dat voor  $p \in (2, 6)$  er twee verschillende snijpunten met  $K$  zijn, en dat de afstand tussen die snijpunten gelijk is aan  $4\sqrt{p-2}$ .

Wat gebeurt er voor  $p = 2$ ?

12. Maak onderdeel (9) nog eens, maar nu m.b.v. onderdeel (11).

## Dankwoord

De redactie van Euclides ben ik zeer erkentelijk voor stimulerende opmerkingen en suggesties tot verbetering.

## Bibliografie

[1] J. W. Maassen (red.): 'Opgaven Wiskunde B vwo' Wolters-Noordhoff, Groningen 1990.

[2] J. H. Dijkhuis et al.: 'Getal en Ruimte 5[6V-B2]' (tweede oplage) Educaboek, Culemborg 1988.

## ● 40 jaar geleden ● ●

### ► Plaats van de wiskunde

De ordening der gedachte, het zich rekenschap geven van wat men zegt of schrijft, het elimineren van het bijkomstige, het trekken van de juiste conclusie uit gegeven praemissen, kortom het betrachten der *exactitude*, zijn faculteiten van de geest, die op zijn zachtst gezegd, zeer bruikbaar zijn bij veel wat de mens onderneemt of tracht te doorgronden. Deze eigenschappen, voor zover latent aanwezig, moeten en kunnen evenals alle potentiële mogelijkheden worden ontwikkeld, geschoold, gevormd, geoefend. Het is deze vormgevende kracht, die het onderwijs in wiskunde in het algemeen mede rechtvaardigt. Zij ontwikkelt de verstandelijke instelling, die met name ook de ingenieur zeker behoeft. Zij kan er ook toe bijdragen om de moeilijke vraag te beslissen of de betrokken student de studie zal beginnen of voortzetten en dus van invloed zijn bij het zo klemmende probleem der selectie.

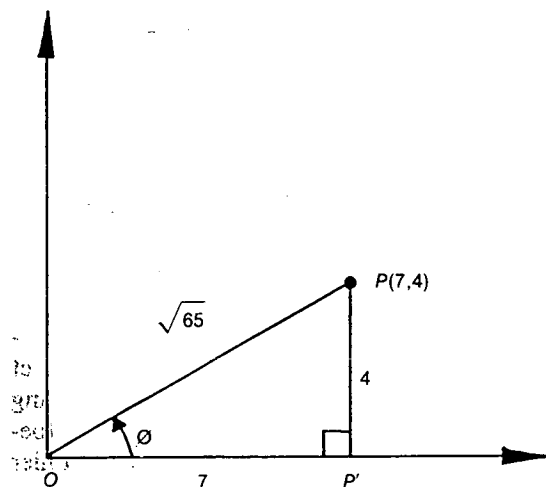
Al deze argumenten, hoe gewichtig ook, rechtvaardigen echter nog niet de belangrijke plaats, die de mathesis aan de technische hogeschool inneemt en mijns inziens is hun betekenis, relatief genomen, in de loop der jaren verminderd, een feit, dat van grote invloed is en zal zijn op de inrichting van het wiskundig programma. In de taakomschrijving van onze leerstoel is namelijk ook sprake van toegepaste wiskunde; het wil mij voorkomen dat hier steeds meer komt te liggen en zeker moet komen te liggen de rechtvaardiging van onze aanwezigheid.

Prof. Dr. O. Bottema in Euclides 27-4 (1951-1952).

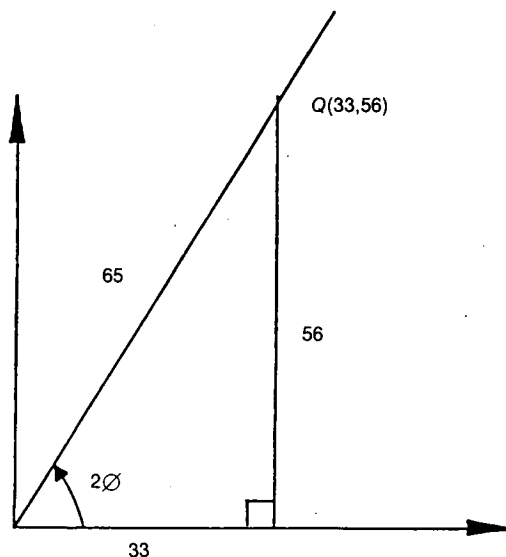
## ► Drietallen van Pythagoras en de dubbele-hoekformules

Rob Bosch

Laten  $x$  en  $y$  twee willekeurige onderling ondeelbare gehele getallen zijn, niet beide oneven. Laat verder gelden dat  $x > y$ ; dit is een niet-essentiële beperking. Het drietal  $x^2 - y^2$ ,  $2xy$  en  $x^2 + y^2$  vormt een primitief drietal van Pythagoras.



Figuur 1  
(1991-12)



Figuur 2

Daarbij heet een drietal  $(a, b, c)$  primitief indien  $\text{ggd}(a, b, c) = 1$ .

Zoals bekend kunnen alle primitieve drietallen van Pythagoras op deze wijze verkregen worden.

De dubbele-hoekformules voor  $\sin$  en  $\cos$  kunnen daarvoor verrassend genoeg ook gebruikt worden, zoals het volgende laat zien.

Neem een punt  $P$  met gehele coördinaten bv.  $P(7, 4)$  (zie fig. 1).

In de rechthoekige driehoek  $OPP'$  is

$$\sin \phi = \frac{4}{\sqrt{65}} \text{ en } \cos \phi = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

De dubbele-hoekformules geven:

$$\begin{aligned} \sin 2\phi &= 2 \sin \phi \cos \phi \\ &= 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{65}} \cdot \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{56}{65} \end{aligned}$$

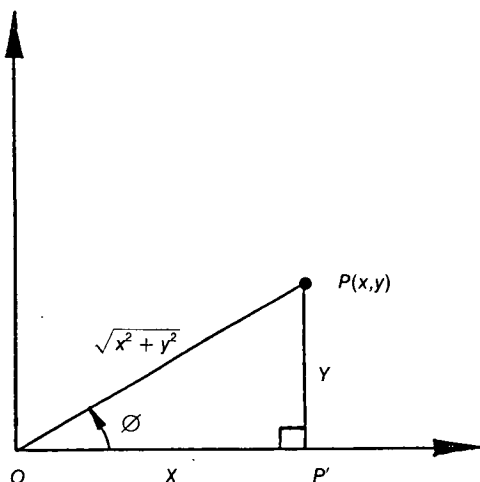
$$\begin{aligned} \text{en } \cos 2\phi &= \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \\ &= \frac{49}{65} - \frac{16}{65} = \frac{33}{65} \end{aligned}$$

De hoek  $2\phi$  bepaalt nu een rechthoekige driehoek waarvan de zijden (33, 56 en 65) een drietal van Pythagoras vormen (zie fig. 2).



Uitgaande van een punt met gehele coördinaten kunnen we zo alle drietallen van Pythagoras krijgen door eenvoudig de hoek  $\phi$  te verdubbelen. Het bewijs(je) hiervoor kan door ieder die de dubbele-hoekformules kent eenvoudig gegeven worden.

Zij  $P(x, y)$  een punt met gehele coördinaten, onderling ondeelbaar en niet beide oneven (zie fig. 3).



Figuur 3

Dan geldt voor de hoek  $\phi$  van de rechthoekige driehoek  $OPP'$ :

$$\sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ en } \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

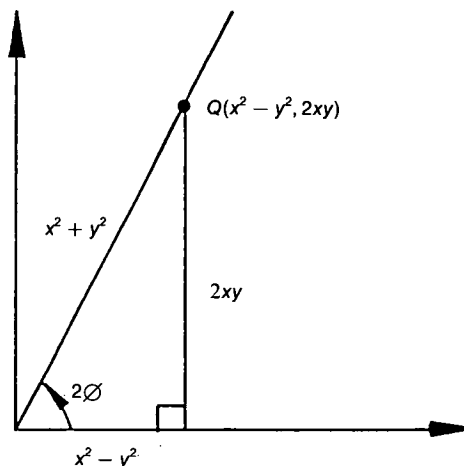
en dus

$$\sin 2\phi = 2 \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

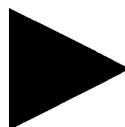
$$\cos 2\phi = \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Uiteraard zijn  $2xy$ ,  $x^2 - y^2$  en  $x^2 + y^2$  weer gehele getallen. Daar ze de zijden zijn van een door de hoek  $2\phi$  bepaalde rechthoekige driehoek volgt dat ze een drietal van Pythagoras vormen.

Zie fig. 4. De (niet-essentiële) voorwaarde  $x > y$  zorgt ervoor, dat punt  $Q$  in het eerste kwadrant ligt.



Figuur 4



## Mededeling

### Congres: Vrouwen gebruiken wiskunde in hun werk

In maart 1992 bestaat de Werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde' tien jaar. Dit tweede lustrum wordt gevierd met een congres op zaterdag 21 maart.

Thema van het congres is:

*Vrouwen gebruiken wiskunde in hun werk*

De bedoeling van deze dag is zichtbaar te maken dat wiskunde een rol speelt in een groot aantal beroepen. Ook in beroepen waarvan men het in eerste instantie niet verwacht.

Een groot deel van de dag is gevuld met workshops. Hier kan men onder leiding van diverse vakvrouwen kennismaken met de wiskunde in hun beroep.

Daarnaast verwachten wij uit Engeland mevr. R. Flowers, uitgeroepen tot wiskundeleraar-van-het-jaar. In haar wiskundeonderwijs werkt zij met drama, rollenspel en projecten. Zij zal op deze dag een lezing geven.

Iedereen die geïnteresseerd is in het thema van deze dag is welkom. Het niveau van de workshops loopt uiteen.

Voor nadere informatie of toezending van de congresfolder, kunt u contact opnemen met:

Werkgroep Vrouwen en Wiskunde, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht (tel. 030-61 28 06).

# ● Werkblad ●

## ► Formules met machten

34. a. Geef steeds aan wat je met de eerste formule moet doen om de tweede formule te krijgen. Soms is er meer dan één mogelijkheid.

|   | Van       |         | naar       |
|---|-----------|---------|------------|
| ① | $8*p^2$   | ... ..  | $= 12*p^2$ |
| ② | $200*p^2$ | — ..... | $= 8*p^2$  |
| ③ | $200*p^2$ | / ..... | $= 8*p^2$  |
| ④ | $2*n$     | ... ..  | $= 6*n^2$  |
| ⑤ | $2*n^2$   | ... ..  | $= 6*n^2$  |

|   | Van      |        | naar          |
|---|----------|--------|---------------|
| ⑥ | $29*k$   | .....  | $= 28*k + 10$ |
| ⑦ | $3*p^4$  | ... .. | $= 12*p^4$    |
| ⑧ | $12*p^4$ | ... .. | $= 3*p^4$     |
| ⑨ | $12*p^4$ | ... .. | $= 3*p^3$     |
| ⑩ | $27*d^5$ | ... .. | $= 3*d^2$     |

- b. Hoe reken je bij iedere opdracht terug?

1  $12*p^2$  ... ..  $= 8*p^2$   
 2 .....

35. Je hebt hier een aantal bordjes, waarop getallen en stukken van formules staan:

|     |       |       |       |       |          |          |
|-----|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| 1   | 0     | 12    | 0,2   | −5    | 600      | .....    |
| $p$ | $p^2$ | $p^3$ | $p^5$ | $p^6$ | $p^{10}$ | $p^{20}$ |
| +   | −     | *     | /     | (     | )        |          |

Je kunt er net zoveel verschillende getallenbordjes bijmaken als je wilt..

Ieder bordje mag je meerdere keren gebruiken.

Maak met de bordjes zoveel mogelijk formules die hetzelfde uitrekenen als  $6*p^3$ .

## ► Winnende functies

$$x! \quad x^2 \quad 10^x$$

zijn drie functies op je rekenmachine voor  $x = 1, 2, 3, \dots$

Vraag:

*Welke heeft het snelst het scherm van je rekenmachine vol?*

Dus: welke van de drie stijgt het snelst voor  $x = 1, 2, 3, \dots$

En welke is het langzaamst, denk je?

.....  
Op de rekenmachine kun je niet verder dan 69!

Ga na  $69! = 1.71122 \quad 98$

Hoeveel cijfers heeft dat getal? .....

Is  $69^2$  groter of kleiner dan  $69!$  .....

Is  $10^{69}$  groter of kleiner dan  $69!$  .....

Welke van de drie functies stijgt het snelst? Waarom is dat zo?

Vergelijk

$$x! = 1 \times 2 \times \dots \times x$$

$$x^2 = x \times x$$

$$10^x = 10 \times 10 \times \dots \times 10 \quad (x \text{ keer een } 10)$$

Voor  $x = 12$  is

$$x! \quad 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$$

$$10^x \quad 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

$$x^2 \quad 12 \times 12$$

Welke van de drie functies stijgt het snelst? .....

Waarom is dat zo?

## Wiskunde 12-16 (experimenteel)

### ► Oude regels met de rekenmachine.

*Wim Schaafsma*

De discussie over het gebruik van rekenmachines bij het vak wiskunde is op onze scholengemeenschap al zo'n tien jaar aan de gang en heeft nog steeds geen consensus opgeleverd. Vanaf schooljaar 1988/89 kunnen onze leerlingen via de administratie een rekenmachine kopen en in de brugklas wordt deze gebruikt. In hogere klassen hangt het van de leraar af of de apparaten tijdens de les of de repetitie gebruikt mogen worden. Het voordeel van eenheid in machines is duidelijk al lukt dat ook bij ons nog niet helemaal. Vandaar dat rekenmachinelessen nogal arbeidsintensief zijn. Sommige machines hebben een x-tot-de-macht-y toets, andere a-tot-de-macht-x, bij weer andere moet eerst een inversetoets (inv, 2nd, F) worden ingedrukt enz.

Daarom is het goed om een aantal lessen te besteden aan het werken met de rekenmachine. Als de leerlingen de verschillende toetsen goed kennen zijn de korte ophaal-lesjes in de vierde klas Mavo geen irritante lessen meer als je pakketten als 'Winnende formules' of 'Dubbel op' behandelt. Op de werkbladen vindt u enkele voorbeelden uit de lespakketjes van het team W12-16 waar de rekenmachine wordt gebruikt. Deze opgaven zijn duidelijk onderdelen uit een groter geheel.

Al heel lang geldt in het (wiskunde)onderwijs de stelregel dat leerlingen regels beter onthouden als

ze die regels zelf ontdekken. Bij het rekenen met machten heb ik die stelregel ook altijd gehanteerd. En eigenlijk zijn dat best leuke lessen voor de leraar:

- \* je deelt het middenbord in tweeën
- \* op de linkerkant schrijf je sommen met machten
- \* rechts voorbeelden en non-voorbeelden
- \* de leerlingen formuleren de regels
- \* je schrijft de regels op de klappborden

Maar iedereen weet dat veel leerlingen eigenlijk niet toekomen aan het formuleren van regels omdat ze onderweg rekenfouten hebben gemaakt. Vaak zijn ze nog zo aan het narekenen, of zit hun hoofd zo vol onzekerheden door de rekenfouten dat het klassikaal formuleren van regels een andere wereld is. Een ander bezwaar van deze methode en van veel opdrachten uit de 'realistische' wiskunde is dat er veel rekenwerk moet worden verricht en dat de leerlingen door een overvloed aan werkzaamheden niet meer toekomen aan meedenken. Het overzicht en het inzicht gaan verloren door teveel 'ruis'.

Meestal beperkte ik me daarom tot eenvoudige getallen en kleine machten. Tenslotte moet je wel een barbaar zijn om leerlingen het produkt van  $7^5$  en  $7^{11}$  met de hand te laten uitrekenen. (Overigens gaf mijn vroegere Mulodirecteur me dergelijke opdrachten vaak als strafwerk op. Vandaar misschien mijn aversie?) Soms kreeg je daarom in de les weleens de vraag: 'Gaat die regel nou wel voor alle getallen op?'

Met de rekenmachine wordt het anders maar zeker niet eenvoudiger. De leerling krijgt het gemakkelijker, de leraar krijgt het moeilijker. Om verschillende redenen blijf ik deze lessen klassikaal en zonder werkbladen doen. Er ontstaat wel een nieuwe 'ruis' in deze lessen met de rekenmachine, je loopt voortdurend van de ene rekenmachine naar de andere. Maar de verwondering is er voor meer leerlingen. Leerlingen die verder willen, die nieuwe sommen willen, die wiskunde soms zelfs leuk gaan vinden.

#### *Over de auteur*

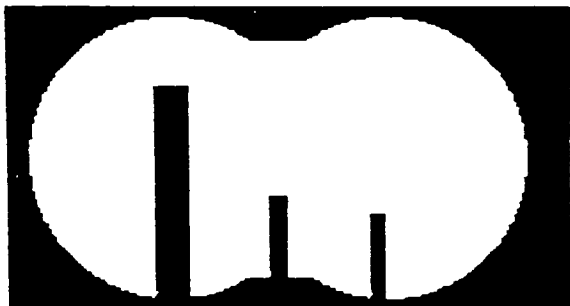
*Wim Schaafsma is docent wiskunde aan de ger. scholengemeenschap prof. dr. S. Greijdanus. Deze school is één van de experimenteerscholen in het project Wiskunde 12-16.*

## ► Analyse, synthese en elegance

*Ed de Moor*

### Samenvatting

Aan de oplossing van een probleem gaat een analyse vooraf. Daarna wordt de oplossing in elkaar gezet, gesynthetiseerd. In de constructie-opgaven uit de oude (synthetische) meetkunde zien we deze werkwijzen heel mooi gedemonstreerd. Omdat het analyseren een divergente denkwijze oproept, kunnen allerlei nevenresultaten optreden. Het is verrassend dat, bij het werken met elementaire middelen, soms zulke elegante oplossingen kunnen ontstaan. In het volgende worden deze begrippen nader toegelicht en in een historisch perspectief gezet.

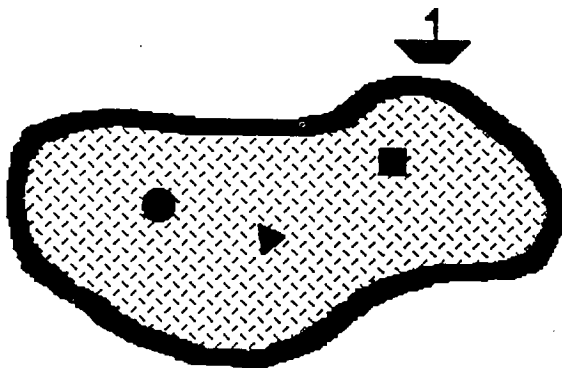


Figuur 1

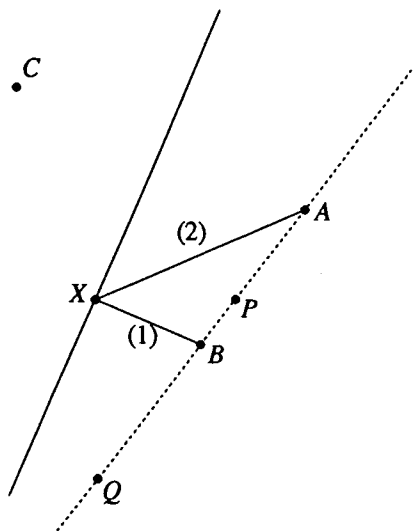
Op het Freudenthal-instituut kwam mij onlangs een blaadje met het volgende probleem onder ogen: 'Je ziet vanaf een boot door je verrekijker drie schoorstenen (fig. 1), waarvan je weet dat ze even groot zijn en dat ze op het eiland met de gegeven kaart liggen (fig. 2). Kun je je positie op zee bepalen?

Het blijkt een opgave uit een computerprogramma van Jan A. de Jong te zijn. De bedoeling van dit programma is dat je probeert het bootje op het scherm zo te verplaatsen, dat de waargenomen hoogtes van de schoorstenen passen bij de afstanden van het bootje tot de schoorstenen. Daarbij wordt geappelleerd aan het principe: hoe verder weg, hoe kleiner. Kijk je naar twee even grote voorwerpen, waarvan de één 10 maal zo ver weg is, dan neem je datgene dat het verst weg is, 10 maal zo klein waar. Overigens geldt dit voor niet te grote afstanden, want je moet de objecten wel in z'n geheel kunnen blijven zien. Wat dit betreft is het plaatje door de verrekijker (fig. 1) misschien wat ongelukkig, maar dit slechts terzijde.

Het probleem trok me aan. Ik ging niet schatten en schuiven op het scherm, maar begon er aan met potlood en papier. Als je de drie schoorstenen die je *A*, *B* en *C* noemt, even groot ziet ben je van alle drie even ver verwijderd, en bevind je je dus op het snijpunt van de middelloodlijnen van *AB*, *BC* en *CA*. Nu neem ik *A* en *C* even groot waar, maar *B* tweemaal zo groot. Dan moet ik even ver van *A* en



Figuur 2

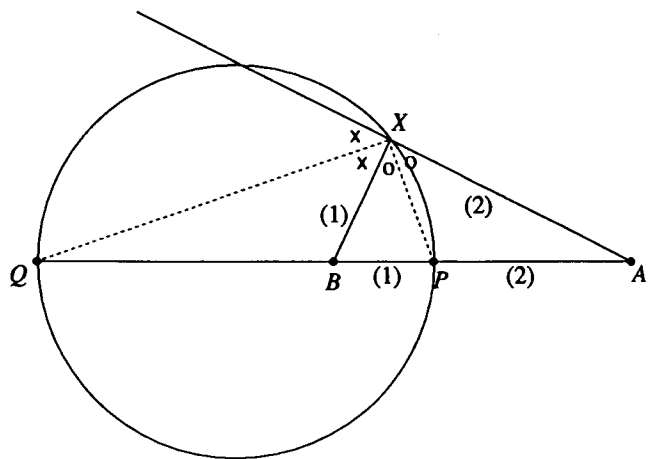


Figuur 3

**Hoe vind ik alle punten  $X$ , die zo liggen dat  $XA:XB = 2:1$ ?**

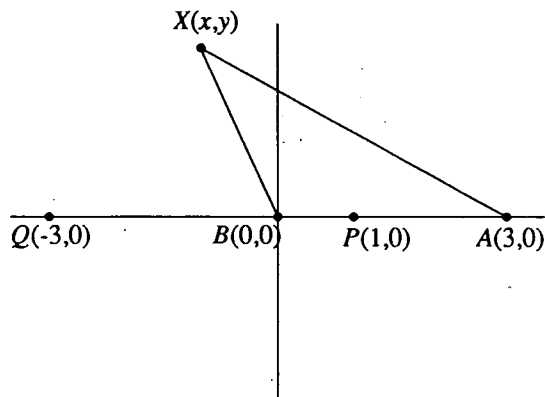
Ik zie er twee,  $P$  en  $Q$  op de lijn  $AB$ . Als ik er één heb, dan vind ik er nog één door het spiegelpunt ten opzichte van  $AB$  te tekenen. De meetkundige plaats van  $X$  is dus symmetrisch ten opzichte van de lijn  $AB$ . Ook zie ik wel dat de punten  $X$  niet erg ver weg kunnen liggen, want dan zijn  $XA$  en  $XB$  vrijwel gelijk. Het moet dus een gesloten kromme zijn. Om me op de vraagstelling te concentreren, maak ik een nieuwe tekening (fig. 4), en als ik de verhoudingsgetallen (1) en (2) er in plaats, zie ik in een flits dat  $XP$  en  $XQ$  respectievelijk de bissectrice en de buitenbissectrice van hoek  $X$  moeten zijn.<sup>1</sup> En die staan loodrecht op elkaar.

We zien de vaste punten  $P$  en  $Q$  vanuit  $X$  dus onder een rechte hoek ofwel  $X$  ligt op de cirkel met middellijn  $PQ$ .<sup>2</sup> Later maakt Martin Kindt mij er op attent dat dit de cirkel van Apollonius (ca. 200



Figuur 4

voor Chr.) is. Dat was ik vergeten, maar mijn vroegere lessen in *synthetische meetkunde* niet. In de hogere klassen kregen we toen ook nog *analytische meetkunde*. Ik breng een assenstelsel aan zó dat  $B$ ,  $A$ ,  $P$  en  $Q$  prettige coördinaten krijgen (zie fig. 5) en de coördinaten van  $X$  noem ik  $(x, y)$ .



Figuur 5

Er moet nu gelden  $XA = 2XB$  of met de afstandsformule (Pythagoras):

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2},$$

wat na een paar algebraïsche handelingen leidt tot:  
 $(x + 1)^2 + y^2 = 4.$

Inderdaad een cirkel, op middellijn  $PQ$  beschreven.

## Synthese en analyse

De synthetische meetkunde is al meer dan twintig eeuwen oud. De ontdekking van de analytische meetkunde wordt toegeschreven aan Descartes en Fermat in het begin van de zeventiende eeuw, maar bestaat in zijn huidige vorm pas zo'n dikke 200 jaar.

*Analyse* en *synthese* zijn tegengestelde maar elkaar aanvullende begrippen. Analyse betekent letterlijk uiteenleggen en synthese is het samenvoegen. Termen die in verband met de bovengeschetste meetkundige methoden wellicht om enige uitleg vragen. Al direct valt op dat we bij de eerste, synthetische oplossingsmanier veel 'analytischer' te werk zijn gegaan dan bij de tweede algebraïsche manier. Ik maakte een analyse van wat de te vinden figuur allemaal voor bekends bevatte. Dat waren de eigenschappen van de bissectrices in een driehoek. En op grond van die analyse kwam ik tot een synthese van de gezochte figuur, i.c. de cirkel. Dit is een voorbeeld van de klassieke aanpak in de synthetische meetkunde, die vooral bij constructies een vast denkpatroon opriep: eerst analyseren, daarna synthetiseren.

Beschouwen we nu de methode van de analytische meetkunde dan valt op dat deze veel directer, algemener en (dus) efficiënter is. Die methode is daarom zo krachtig omdat je direct ziet dat hij voor een hele klasse van problemen een middel biedt dat ons vrijwel werktuiglijk de oplossingen in de schoot werpt. Een nadeel kan zijn dat de extra-vondsten (zoals in dit geval die van de rol van de bissectrices) over het hoofd gezien worden. En verder kan de analytische meetkunde soms voor enig onplezierig algebraïsch rekenwerk zorgen.

Maar waarom spreken we van *analytische* meetkunde? Hiervoor moeten we teruggaan tot Viète (1540-1603), die als de grondlegger van ons algebraïsche notatiesysteem wordt beschouwd. Deze geleerde nu was niet erg gecharmeerd van het Arabische woord algebra. Viète werkte daarom met 'onbekenden' op een manier die al in de vierde eeuw door Pappus werd omschreven als 'analysis'. En dit betekent dat algebraïci, in plaats van te redeneren vanuit datgene wat bekend is naar wat aangetoond moet worden, steevast een redenering toepassen van

uit de aanname dat het onbekende gegeven is en daaruit een voorwaarde opstellen waaruit het onbekende kan worden opgelost.<sup>3</sup> We kunnen daarbij aan ingeklede vergelijkingen denken, maar we zien dit principe ook in de analytische meetkunde-aanpak van het vraagstuk in kwestie. Eigenlijk had de methode net zo goed algebraïsche- of coördinatenmeetkunde kunnen heten. Later is het synthetiseren geheel verdwenen uit de analytische meetkunde.

## Meetkunde in de 19e eeuw

Van alle onderdelen van de wiskunde is de meetkunde door de eeuwen heen wel het meest aan verandering van smaak onderhevig geweest. Bij de oude Grieken had de meetkunde een bijna goddelijk wetenschappelijke glans. Met de ondergang van het Romeinse Rijk is er echter wel meer dan alleen de belangstelling voor de meetkunde verdwenen.

In de zeventiende eeuw had de meetkunde opnieuw kunnen doorbreken. Niet alleen met het begin van de analytische meetkunde, maar ook door de bijdragen van Desargues en Pascal op het gebied van de projectieve meetkunde. De prioriteiten van de wetenschappelijke onderzoekingen lagen echter bij de algebra en de analyse. Het woord 'analyse' nu niet in de betekenis van dit artikel, maar als omschrijving van de differentiaal- en integraalrekening.

In het begin van de negentiende eeuw ontstond er onder invloed van Monge (1753-1818) – de grondlegger van de beschrijvende meetkunde – hernieuwde belangstelling voor de meetkunde. In Frankrijk was het Poncelet die een systematische uitwerking van de projectieve meetkunde ontwikkelde, en wel op een synthetische manier. Ook Gergonne heeft zich hiermee bezig gehouden, maar hij was voorstander van de analytische aanpak. Het verschil in methoden – synthetisch versus analytisch – werd in die tijd zelfs inzet van een strijd, die zo ernstig genomen werd dat er een prijs uitgelooft werd voor het beste artikel over deze controverse.

Ook in Duitsland bloeide de meetkunde op, en ook daar kwamen twee kampen van 'analytici' en 'synthetici' tegen over elkaar te staan. Een fenomeen op

het gebied van de synthetische aanpak was de Zwitser Jakob Steiner (1796-1863). Zijn bijdragen tot de projectieve meetkunde zijn schitterend en talrijk. Als rechtgeaard syntheticus verwierp Steiner de algebra als hulpmiddel bij de meetkunde. Algoritmen zouden het denken blokkeren, terwijl meetkunde dit juist stimuleert, zo luidde zijn argumentatie. In die zin was hij dus de ideale leerling van Pestalozzi (1746-1827), de grondlegger van de aanschouwelijke vormleer, bij wie hij zijn eerste vorming had ontvangen. Hiermee stond hij in Duitsland lijnrecht tegenover Plücker, die juist de analytische meetkunde in systematiek en notatie uitbouwde. Ondanks, of misschien wel dankzij deze controverse, is de 19de eeuw 'De Gouden Eeuw' van de meetkunde geworden. Talrijk waren de ontdekkingen op het gebied van de synthetische meetkunde. Naast de systematisering van de projectieve en analytische meetkunde werd de niet-Euclidische meetkunde ontdekt en de differentiaalmeetkunde ontwikkeld. Daarbij schuwde men niet te werken in méér-dimensionale ruimten.

De groepentheorie toegepast op de transformatie-meetkunde bracht Klein (1849-1925) tot zijn beroemde 'Erlanger Programm', waarmee hij eenheid in de diversiteit van de verschillende ontdekkingen wilde brengen.<sup>4</sup> Deze drang tot unificatie door middel van het onderzoek naar de basisstructuren van de wiskunde heeft zo'n kleine honderd jaar na de publikatie van het 'Erlanger Programm' (1872) z'n uitwerking gehad op de modernisering van het wiskundeonderwijs op de middelbare en lagere scholen, de zogenaamde New Math. Een stroming waar we voor de ontwikkeling van de didactiek niet erg blij mee hebben kunnen zijn.

## Synthese en analyse naast elkaar

Ik kom nu terug op het vraagstuk van de schoorstenen. Bij beide oplossingen begonnen we met een analyse van het probleem. Bij de analytische meetkunde-aanpak was het daarna een fluitje van een cent, ongetwijfeld een efficiënte oplossingswijze.

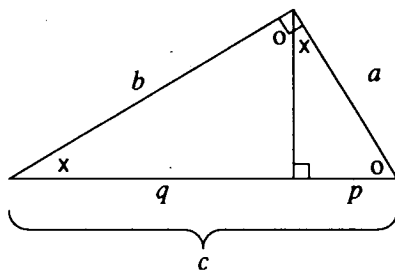
De synthetische oplossing startte met wat proberen en intuïtief zoeken om daarna via het opsporen van de meetkundige bijzonderheden van de figuur, zeg maar kijken en zien, te komen tot het werkelijke doorschouwen van de meetkundige structuur. In die zin is Steiners opvatting over het belang van de synthetische methode goed te begrijpen.

Echter, beide aanpakken hebben hun sterke kanten en zouden mijns inziens in het onderwijs als aanvulling op elkaar aandacht moeten krijgen.

Mijn vroegere wiskundelerares, Dr. C. Faber-Gouwentak, deelde bewijzen in drie soorten in: gewone, lelijke en elegante. Ik heb een boek met 256 bewijzen van de stelling van Pythagoras.<sup>5</sup> De meeste zijn heel erg lelijk, vooral door hun gekunstelde vorm. Grofweg kun je ze indelen in algebraïsche en meetkundige bewijzen.

Het oudst bekende bewijs is van Euclides (ca. 300 voor Christus) en ook dat is tamelijk gekunsteld als gevolg van de streng deductieve eisen die Euclides aan zijn Elementen stelde.<sup>6</sup> Toch heeft dat bewijs meer dan twintig eeuwen stand gehouden.

Het bekende algebraïsche bewijs:  $a^2 = pc$ ,  $b^2 = qc \rightarrow a^2 + b^2 = c^2$ , (zie fig. 6) schijnt van Legendre (1752-1833) te zijn.



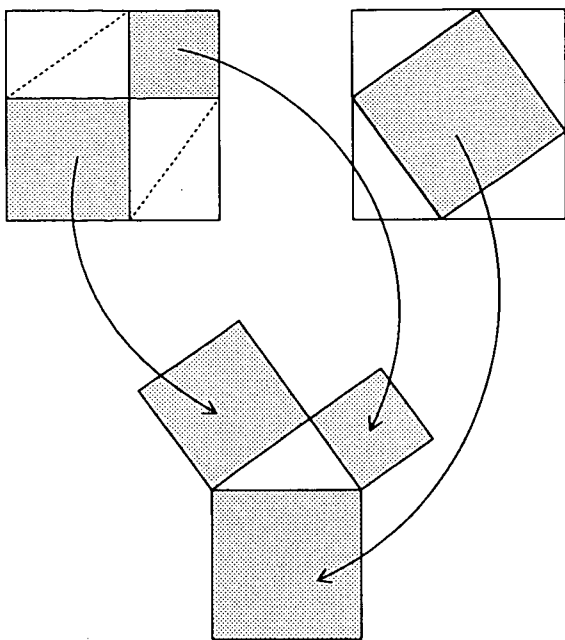
Figuur 6

Het eenvoudigste meetkundige bewijs is afkomstig van een amateur-wiskundige, onze eigen Multatuli, alweer een negentiende-eeuwer!<sup>7</sup>

Beschouw figuur 7 en je ziet(!) gewoon dat het grote vierkant gelijk is aan de som van de twee kleine vierkanten.

Dit nu vind ik een voorbeeld van een *elegant* bewijs. Het is verrassend en krachtig door z'n aanschouwelijkheid en z'n verpletterende eenvoud. Maar ook dit bewijs moet door een nauwkeurige analyse





Figuur 7

vooraf ontstaan zijn. Ook daarbij zouden weer allerlei nevenopbrengsten opgemerkt kunnen worden zoals bijvoorbeeld een aantal merkwaardige produkten in het linker vierkant van figuur 7.

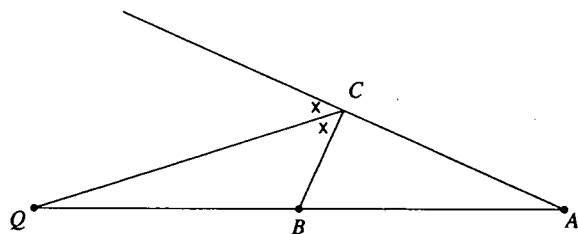
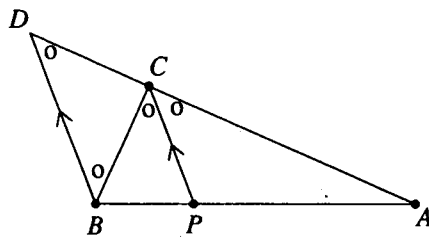
Kortom, de synthetisch meetkundige aanpak biedt door z'n mengeling van intuïtie, aanschouwelijkheid en (lokaal) deductieve redeneringen inderdaad een mooi oefenterrein voor het oplossen van problemen. Het is derhalve heel begrijpelijk dat gedurende de negentiende eeuw aan het oefenen met puzzelachtige meetkundige problemen een grote vormende waarde werd toegekend. En deze opvatting heeft tot het midden van deze eeuw stand gehouden. Daarna is het wiskundeonderwijs haar legitimering veel meer gaan zoeken in de toepasbaarheid. Dat is een begrijpelijke en goede wending geweest. Juist in de huidige programma's staat het oplossen van praktische problemen centraal. Maar het specifieke wiskundige puzzelen op zich, vooral aan meetkundige problemen, is daarmee in het onderwijs wat in de vergetelheid geraakt.

Zoals we uit het schoorstenen-vraagstuk zagen, leent de synthetische meetkunde zich uitermate goed voor dit doel. Maar ik moet toegeven dat het soms wat weg heeft van het rijden van de Tour de

France op een gewone fiets, waarbij je ondertussen ook nog verslag moet doen van het schitterende landschap. Ja, wie dat kan en dan ook nog op een elegante manier, die kan op enig applaus rekenen.

## Noten

1. De bissectricestelling luidt als volgt: 'In een driehoek verdeelt een bissectrice de overstaande zijde in twee stukken die zich verhouden als de aangrenzende zijden.' Een bewijs: verleng  $AC$  met  $CD$ , zodat  $PC \parallel BD$ . De hoeken bij  $B$  en  $D$  zijn nu gelijk, dus  $CA : CD = AP : BP \rightarrow CA : CB = AP : BP$ . Het omgekeerde van deze stelling geldt ook en die hebben we gebruikt bij het torensprobleem. Analoge stellingen gelden voor de buitenbissectrice:  $QB : QA = BC : AC$ .



2. Hiermee is in principe het probleem voor elke verhouding van de afbeeldingen van de schoorstenen opgelost. Ook de onderlinge plaats is in principe niet van belang.
3. Boyer, C., *A History of Mathematics*, Princeton 1985, pg. 335.
4. In het boek van Boyer wordt een apart hoofdstuk gewijd aan wat daar 'The heroic age in geometry' genoemd wordt. Zeer lezenswaardig, zoals trouwens ook de rest van het boek.
5. Loomis, E.S., *The Pythagorean Proposition*, NCTM 1972.
6. Dijksterhuis, E.J., *De Elementen van Euclides*, I, Groningen 1930.
7. Multatuli, *Ideën*, deel II, Amsterdam 1985. Het betreffende bewijs is gepubliceerd als idee nr. 529. Overigens meent K. Vos in het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* (jrg. 8, 1920-1921, pp. 265-268) dat dit bewijs al eerder bekend was.

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

## ► Opgave 633

Grafentheorie: in mijn studententijd een universitair vak, daarna in het vwo bij wiskunde A, nu is het al examenonderdeel in het havo bij wiskunde A. Wordt het in de nabije toekomst een onderdeel van de basisvorming?

Het wordt hoog tijd dat er in deze rubriek eens een puzzel uit de grafentheorie wordt gepubliceerd!

De eenvoudigste gesloten figuur (uit rechte lijnen bestaand), waarbij in elk knooppunt  $n = 2$  takken samenkomen, is de driehoek. Het minimale aantal knooppunten  $k$  is nu 3.

Als  $n = 3$  takken, dan voldoet de rechter figuur. De minimale  $k$  bij  $n = 3$  is dan 4 knooppunten.



Hoeveel knooppunten zijn er minstens nodig voor  $n = 4$ ,  $n = 5$  en  $n = 6$ ?

Nogmaals: de takken moeten recht zijn en van knooppunt naar knooppunt lopen, zonder elkaar te snijden. Als eenvoudigste figuur wordt beschouwd die met het kleinste aantal knooppunten  $k$ .

Als oplossing kunt u de tekeningen insturen. Als het u niet lukt een oplossing te vinden, dan verwacht ik een wiskundig bewijs van het feit dat het probleem onoplosbaar is!

Iedereen kan ladderpunten verdienen, want de graaf met  $n = 4$  levert al 1 punt op. Maximaal zijn er 5 ladderpunten te verdienen als u binnen een maand uw bevindingen opstuurt.

In dit probleem vroeg ik u voorbeelden te geven van zogenaamde 'multigrades'. Dit zijn vergelijkingen van het type  $1^n + 5^n + 8^n + 12^n = 2^n + 3^n + 10^n + 11^n$  voor  $n = 1, 2, 3$ .

We kunnen deze 'multigrades' als volgt vinden:

Start met  $x + y = (x - z) + (y + z)$ .

Dan  $(x + k) + (y + k) = (x - z + k) + (y + z + k)$ .

Heel simpel is nu te bewijzen dat

$$x^n + y^n + (x - z + k)^n + (y + z + k)^n =$$

$$(x - z)^n + (y + z)^n + (x + k)^n + (y + k)^n \text{ voor } n = 1, 2.$$

Merkwaardigerwijs is dit procédé voort te zetten om een relatie te krijgen voor grotere waarden van  $n$ .

Een getallenvoorbeeld:

Start met  $4^n + 1^n = 3^n + 2^n$  voor  $n = 1$ .

Tel er 3 bij op:  $7 + 4 = 6 + 5$ .

We krijgen nu:  $4^n + 1^n + 6^n + 5^n = 3^n + 2^n + 7^n + 4^n$  voor  $n = 1, 2$ .

Laat de 4 weg en tel er 5 bij op:  $6 + 11 + 10 = 8 + 7 + 12$ .

We krijgen daarna:

$$1 + 6 + 5 + 8 + 7 + 12 = 3 + 2 + 7 + 6 + 11 + 10.$$

Oftewel:  $1^n + 5^n + 8^n + 12^n = 2^n + 3^n + 10^n + 11^n$  voor  $n = 1, 2, 3$ .

Een eigenschap van 'multigrades' is verder dat we elke term met 1 kunnen verhogen.

Voor  $n = 1, 2$  vinden we de volgende vier oplossingen als de termen kleiner dan 10 moeten zijn:

$$1^n + 5^n + 6^n = 2^n + 3^n + 7^n$$

$$2^n + 6^n + 7^n = 3^n + 4^n + 8^n$$

$$3^n + 7^n + 8^n = 4^n + 5^n + 9^n \text{ en } 1^n + 6^n + 8^n = 2^n + 4^n + 9^n.$$

Voor  $n = 1, 2, 3$  is eerdergenoemd voorbeeld het enige waarbij de termen kleiner moeten zijn dan 13.

'Multigrades' hebben verschillende eigenschappen. Ze komen onder andere voor in magische vierkanten als  $n = 1, 2$ . Zie het magisch vierkant op de voorkant van dit tijdschrift: eerste met derde rij en eerste met derde kolom!

Vele voorbeelden van 'multigrades' kunt u vinden in het tijdschrift Scripta Mathematica uit de jaren 50.

Een schitterend voorbeeld is ook:

$$1^n + 4^n + 6^n + 7^n + 10^n + 11^n + 13^n + 16^n =$$

$$2^n + 3^n + 5^n + 8^n + 9^n + 12^n + 14^n + 15^n \text{ voor } n = 1, 2, 3.$$

Jan Zuurbier (15) uit Amsterdam zoekt verband met de statistiek: 'Er worden 2 disjuncte steekproeven, zonder teruglegging, van omvang vier uit de getallen 1 t/m 12 gezocht, waarvan het gemiddelde, de spreiding en de scheefheid gelijk zijn'.

Met 32 punten is Jacques Haubrich, Aeneaslaan 21, 5631 LA Eindhoven de tweede puzzelaar die voor de tweede maal de top van de ladder heeft bereikt. De boekenbon van f 25,- is je van harte gegund!

## ● Bijdrage

### ► **Leerboekeffecten: verkeerd weergegeven feiten en onjuiste interpretaties van Van Streun**

*Joost Meijer, Jacob Perrenet en Wim Groen*

In Euclides 66/2 schrijft Van Streun over onderzoek naar wiskunde-onderwijs.<sup>1</sup> Hij benadrukt de invloed van het leerboek op het leerresultaat. Ook de uitkomsten van het project 'transfertest'<sup>2</sup>, uitgevoerd aan de Vrije Universiteit, gebruikt hij daarbij. Helaas bevat het stuk van Van Streun verkeerd weergegeven feiten en onjuiste interpretaties. De twee onderzoekers, die destijds de dagelijkse kern van het project vormden, reageren nu, daarin bijgestaan door één der toenmalige supervisors.

#### **Het project 'transfertest' samengevat**

Het onderzoeksdoel was de constructie van een test om transfer te meten bij wiskundeonderwijs (eind 3vwo). Transfer is het gebruik van het geleerde in een nieuwe situatie. Met de *transfertest* werd onderzocht of er verschillen in transfervaardigheid waren tussen de gebruikersgroepen van Sigma (S), Getal & Ruimte (G&R) en Moderne Wiskunde (MW).<sup>3</sup> Ook werd nagegaan in hoeverre leerling-

kenmerken (bijvoorbeeld faalangst) daarbij een rol speelden. Vanwege de speciale vorm van de test (opgaven met hints) probeerden we tevens met deze test toekomstige wiskundeprestaties te voorspellen. Die prestaties werden gemeten met een *criteriumtest* (halfweg 4vwo).

We vonden geen leerboekeffecten, noch op transfer, noch op actuele beheersing (basiskennis). Wel was er sprake van interactie met leerlingkenmerken. De transfertest had een hogere voorspellende waarde dan de *actuele beheersingstest*, gebaseerd op Cito-items. Zie verder onze artikelen in Euclides.<sup>4</sup>

#### **Drie inleidende correcties**

Ten onrechte stelt Van Streun zijn transferbegrip gelijk aan het onze. Naast horizontale transfer naar buiten (Van Streuns 'toepassingen') onderscheidden we horizontale transfer naar binnen (toepassing van wiskundige kennis op een ander wiskundig gebied) en verticale transfer (generalisering van een principe of een oplossingsmethode op een hoger abstractieniveau).<sup>5</sup>

Ten onrechte meent Van Streun dat één van onze hypothesen was, dat G&R-gebruikers hoger zouden scoren op basiskennis dan MW-gebruikers. We voorspelden namelijk dat S beter op basiskennis zou scoren dan beide andere methoden.

Ten onrechte noemt Van Streun onze criteriumtest een toets voor basiskennis plus toepassingen. Onze criteriumtest peilde het leerlingniveau op de leerstof van begin 4vwo. Er zaten geen transferopgaven in: de ingeklede vraagstukken behoorden tot de basiskennis.

#### **Leerboekeffecten! . . . Of toch niet?**

We wisselen Van Streuns beweringen af met ons commentaar (cursief).

a) Van Streun: Docenten volgen grotendeels het gebruikte leerboek. Daarom heeft het leerboek grote invloed op de leerresultaten. Dat wordt ook ondersteund door de resultaten van het transfertestproject.

Commentaar: *Het leerboek zal ons inziens zeker invloed hebben, maar vaak bleek uit onderzoek dat die invloed door andere factoren (bv. leerlingkenmerken en schoolkenmerken) overschaduw wordt. Dat werd ook in ons onderzoek aan de Vrije Universiteit gevonden.*

b) Van Streun: De MW-leerlingen scoorden het hoogst op actuele beheersing.

Commentaar: *Er was hier geen sprake van een leerboekeffect. De uitkomst moesten we grotendeels toeschrijven aan verschillen op het leerlingkenmerk veldafhankelijkheid en voorts aan verschillen tussen scholen c.q. klassen.*

c) Van Streun: De leerlingen van MW scoorden ook het hoogst op transfer. Natuurlijk moesten de VU-onderzoekers die transferscore corrigeren voor actuele beheersing (basiskennis): de beschikbaarheid van kennis is immers een voorwaarde voor de overdraagbaarheid ervan. Na die correctie bleef geen verschil op transfer over.

Commentaar: *Op het punt van transfer is Van Streun dus met ons akkoord dat er geen leerboekeffect werd gevonden.*

d) Van Streun: Maar belangrijker is het totale leereffect: basiskennis plus transfer. Daar zou waarschijnlijk een leerboekeffect gevonden zijn: MW boven S en G&R.

Commentaar: *Het ging in ons onderzoek om transfer, niet om het totale leereffect. Het optellen van actuele beheersings- en transfertestscore als maat voor het totale leereffect kan niet. De transferscore is afhankelijk van de actuele beheersingsscore en moet daarvoor gecorrigeerd worden (zie punt c). Bij een optelling zou weinig basis-kennis plus veel transfer eenzelfde score krijgen als veel basiskennis plus weinig transfer. We wilden in onze onderzoeksopzet transfer en actuele beheersing juist scheiden.*

e) Van Streun: Bij de criteriumtest (4vwo) zijn de resultaten opvallend anders dan bij de actuele beheersingstest en de transfertest samen. De volgorde van G&R en MW is omgedraaid. Helaas hebben de

VU-onderzoekers geen regressie-analyse uitgevoerd van de criteriumtest op de combinatie van transfer- en actuele beheersingstest. Dat zou zeker een significant resultaat hebben opgeleverd.

Commentaar: *Ook in ons eindrapport gaven we aan, dat de lagere criteriumtestscore van de MW-leerlingen opvalt na de eerdere hogere scores. Maar evenals bij punt d moeten we zeggen: onderzoek van de criteriumtestverschillen behoorde niet tot de onderzoeksvraagstelling. Daarnaast is de door Van Streun voorgestelde regressie-analyse problematisch. Ten eerste vanwege het optellen van actuele beheersing en transfer (zie d). Ten tweede werd bij onze resultaten niet voldaan aan bepaalde statistische voorwaarden voor een adequate vergelijking tussen effecten van leergangen met correctie voor achtergrondvariabelen zoals cognitieve vaardigheden van leerlingen.<sup>6</sup>*

f) Van Streun: De veranderde volgorde bij de criteriumtest is een leerboekeffect. Docenten werken immers prettiger met losse aanvullingen naast de vertrouwde methode (G&R, S) dan met een geheel vernieuwde versie (MW), zoals de situatie was bij de HEWET-invoering in '84-'85.

Commentaar: *We achten een leerboekeffect mogelijk, maar betwijfelen Van Streuns verklaring: Houden docenten van losse katernen? De criteriumtest werd in '86-'87 afgenomen, twee jaar na het uitkomen van het vernieuwde 4vwo MW-deel. Dat boek sloot mogelijk beter aan bij de vorige delen dan de losse katernen bij de boeken van S en G&R. Een andere, meer specifieke verklaring kan zijn dat realistisch getinte methoden met weinig expliciteringen en samenvattingen (zoals de toenmalige editie van MW) onvoldoende structuur bieden bij formeel-abstracte wiskundeleerstof (bijvoorbeeld de regels voor het differentiëren). Dergelijke stof wordt in de vierde klas belangrijk.*

## Slot

Van Streun meent dat het leerboek in belangrijke mate de leerresultaten bepaalt. Wij menen dat het leerboek zeker enige invloed zal hebben, maar dat andere factoren vaak belangrijker zijn, bv. de mate van veldafhankelijkheid van de leerling, de samenstelling van de klas, de kwaliteit van de leraar en het

schoolklimaat. Van Streun ziet soms leerboekeffecten waar ze niet zijn. Hij heeft onze data onzorgvuldig geïnterpreteerd.

## Noten

1. Van Streun, A.; *Leerboeken: feiten en interpretaties*; Euclides 66/2, 1990.

2. Leeuw, L. de, J. Meijer, J. Chr. Perrenet en W. E. Groen; *De constructie en validering van een transfertest voor wiskunde-onderwijs met gebruikmaking van items met gefaseerde hulp*; SVO 1128; Vrije Universiteit Amsterdam, 1988.

3. Het betrof de edities van een vijftal jaren terug.

4. Perrenet, J. Chr.; *Een transfertest voor wiskunde*; Euclides 61/4, 1985.

Perrenet, J. Chr. en W. E. Groen; *Transfertest halfweg*; Euclides 63/2, 1987.

Perrenet, J. Chr. en W. E. Groen; *Transfertest afgerond*; Euclides 65/6, 1989.

5. Zie eerste artikel noot 4.

6. De geconstateerde samenhang tussen achtergrondvariabelen en wiskundeprestaties moet binnen elke leergang gelijk zijn, opdat de correcties binnen elke leergang identiek uitvoerbaar zijn. Zie verder Meijer, J.; *Effects of teaching methods on the mathematical abilities of students in secondary education compared by means of a transfertest*; Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Volume II; 1990.

## ► De rijke context van het onderwijs

A. van Streun

Wiskundeleraars moeten hun leerlingen leren om gegoochel met getallen en statistiek kritisch te beoordelen. Mijn effectenverhaal had tot doel om op het niveau van de lezers van Euclides voorbeelden aan te dragen van de essentiële rol van de context in het onderwijsonderzoek. Wat was de probleemstelling van de onderzoekers? Past hun dataverzameling daarbij? Is het gekozen statistisch

model (er is *altijd* sprake van een *model* van de werkelijkheid!) redelijk te verantwoorden? Zijn er statistisch significante resultaten, die relevant zijn voor de onderzoeksvraag? (Dat zijn andere resultaten dan 'toevallige' significanties, die niet voorspeld zijn.) Leidt een contextuele analyse inderdaad op plausibele wijze naar de conclusies van de onderzoekers of zijn er alternatieve redelijke verklaringen? Dekt de publiciteit inderdaad de inhoud van het onderzoek?

Uit het onderzoeksrapport 'Vernieuwing van het wiskunde-onderwijs in de onderbouw van het voortgezet onderwijs' (J. Meijer, F. Kok, J. de Vries en F. S. J. Riemersma) aangeboden aan de COW citeer ik een samenvattende alinea (pagina 151) over het boven besproken onderzoek van Joost Meijer c.s. (Het is inderdaad dezelfde J. Meijer, nu betrokken in een ander onderzoeksproject met een andere onderzoeksvraag – namelijk naar de effecten van wiskundeonderwijs – en een ander accent in de samenvatting van dat transferonderzoek): 'Superioriteit van realistische methoden kon niet worden aangetoond. Ofschoon leerlingen die door middel van een dergelijke methode (*bedoeld wordt hier Moderne Wiskunde*) wiskundeonderwijs hadden genoten aan het einde van de onderbouw (in klas drie) zowel beter presteerden op een test voor meting van reproductie van onderwezen wiskunde als op een transfertest, presteerden zij ongeveer een half jaar later slechter dan leerlingen die structuralistisch (*bedoeld wordt hier Getal en Ruimte*) of mechanistisch (*bedoeld wordt hier Sigma*) wiskunde-onderwijs hadden genoten.'

Hoe je het ook wendt of keert, de vraag naar het waarom van dit effect dient zich aan. Mijn stelling is dat er niet zo iets bestaat als *het* effect van *de* structuralistische, *de* mechanistische of *de* realistische methode, maar dat er in elke leerboeken- of pakketjesserie meer en minder geslaagde delen of gedeelten voorkomen, die in een effectstudie zijn op te sporen. Alleen door zulke studies ontgroeien we de anecdotische waarheden, de politieke propagandapraat of onterechte statistische generalisaties en kunnen we op het spoor komen van realistische vernieuwingen en verbeteringen van het wiskunde-onderwijs.

## ► Hoe verdeel je een kromme in $k$ gelijke delen?

R. Leentfaar

### 1 Inleiding

Om de lengte van een traject dat je gefietst of gelopen hebt te bepalen is er een handig apparaatje: de curvimeter. Een wielje waarmee je over de kaart rijdt, drijft een wijzer aan die de afstand aangeeft op een schaalverdeling. Door het traject nogmaals met de curvimeter af te leggen kan dat daarna in een aantal ( $k$ ) gelijke delen verdeeld worden. Een experimenteel natuurkundige zou het in een lagere klas waarschijnlijk op de volgende manier doen. Leg een touwtje langs het afgelegde traject, knip dit op de juiste lengte af, verdeel het (in rechte toestand) met lineaal en viltstift in  $k$  gelijke delen en na teruglegging van het touwtje is het (kromme) traject in  $k$  gelijke stukken verdeeld. Hoe verdeelt echter een wiskundige met zijn klas en de computer een kromme in  $k$  gelijke delen? De lengte van een kromme  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  is eenvoudig uit te drukken in een bepaalde integraal. Deze integraal is echter meestal niet (exact) te berekenen.

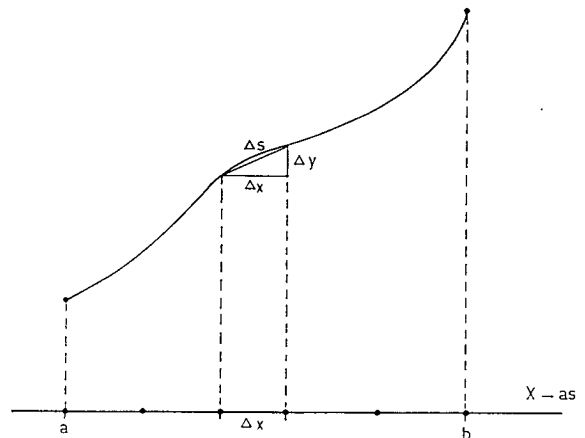
Als de lengte van de kromme in  $k$  (bijv. 10) gelijke 'baanvakken' verdeeld moet worden, ontstaat een extra probleem: als de primitieve functie van de integrand al te bepalen is, moet deze  $k - 1$  keer met

een variabele bovengrens ingevuld een bepaalde waarde opleveren om de  $k - 1$  deelpunten te bepalen.

De vergelijkingen waartoe dit leidt zullen i.h.a. door numerieke benadering moeten worden opgelost. Begin- en eindpunt  $a$  en  $b$  van het interval vormen de twee ontbrekende randpunten van de  $k$  intervallen. In dit artikel wordt de bijbehorende theorie kort beschreven. Er worden twee voorbeelden die wel exact berekenbaar zijn als referentiekaarder vermeld.

### 2 De theorie

Op een klein stukje van de grafiek van een differentieerbare functie  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  is deze vrijwel recht:



Figuur 1

$$(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \Rightarrow$$

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + (\Delta y / \Delta x)^2} \times \Delta x \quad (\Delta x > 0)$$

Via  $s = \Sigma \Delta s$  en de limietovergang  $\Delta x \rightarrow 0$  vinden we

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Slechts in een aantal speciale gevallen is deze integraal exact te berekenen. Vooral de wortelfunctie is

ervoor verantwoordelijk dat dit meestal niet lukt. Er volgen nu eerst twee voorbeelden, waarbij het eerste via integreren wordt uitgewerkt en het tweede met behulp van meetkunde en goniometrie.

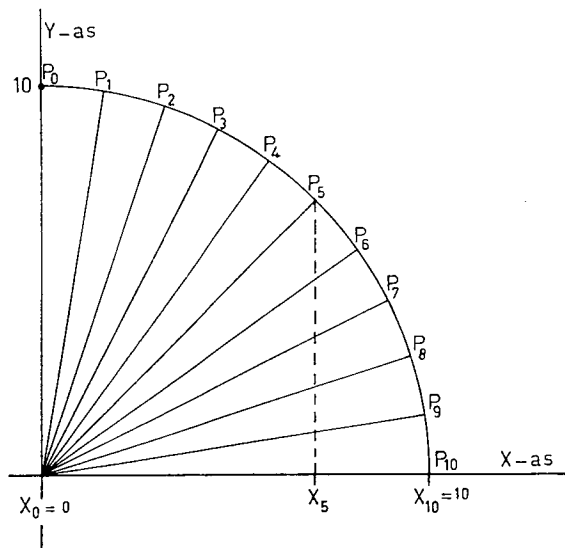
**Voorbeeld 1.** De kromme  $y = 2/3x\sqrt{x}, x \in [0, 10]$  heeft als booglengte ( $y' = \sqrt{x}$ )

$$s = \int_0^{10} \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx = \int_0^{10} \sqrt{1 + x} dx =$$

$$[2/3(1 + x)^{3/2}]_0^{10} = 2/3(11\sqrt{11} - 1) \approx 23.655248$$

Op deze kromme worden in het vervolg ook nog gezocht de deelpunten  $x_0 (= 0), x_1, \dots, x_{10} (= 10)$  die  $s$  in 10 gelijke delen verdelen.

**Voorbeeld 2.** De kwartcirkel  $x^2 + y^2 = 100 \rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}, x \in [0, 10]$  is meetkundig en goniometrisch zo bekend, dat we geen integraal nodig hebben om  $s$  te berekenen. Die is immers  $s = 1/4 \times 2\pi r = 1/4 \times 2\pi \times 10 = 5\pi \approx 15.707963$ . In dit geval zijn zelfs de deelpunten  $x_0, x_1, \dots, x_{10}$  bij verdeling van  $s$  in 10 gelijke delen heel eenvoudig te bepalen:  $x_i = r \cos \phi_i = 10 \cos 1/20(10 - i)\pi$ . Zo is bijv.  $x_5 = 10 \cos 0.25\pi \approx 7.0710678$ . Zie ook de tabel verderop in dit artikel.



Figuur 2

### 3 De numerieke benadering

De eerste gedachte is om de integraal als die niet exact te berekenen valt, numeriek te benaderen volgens één van de vele bekende methoden. Daarmee is dan echter de verdeling in  $k(10)$  gelijke delen nog niet gerealiseerd. Bovendien moet de afgeleide functie bekend zijn om deze integraal te kunnen opstellen. Dat is zeker niet het geval als de kromme bijv. gegeven is via een aantal meetpunten  $(x_i, y_i)$ . De zeer elementaire methode die hierna beschreven wordt, zal blijken – voor ongekunstelde functies – bijzonder nauwkeurige resultaten te geven.

### 4 De methode

Neem een groot aantal punten op de kromme. Bereken voor elk tweetal burens

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

en bepaal  $\Sigma \Delta s$  als benadering voor  $s$ . Er hoeft geen afgeleide bepaald te worden. Nodig zijn slechts een aantal  $x$ -waarden, een functievoorschrift  $y = f(x)$  en een wortel-automaat. Ook als een aantal discrete punten  $(x_i, y_i)$  gegeven is, werkt de methode. Aan een computerprogramma dienen te worden aangeboden:

- 1 Het functievoorschrift  $y = f(x)$ . In PASCAL kan een functie als parameter aan een procedure worden meegegeven. In GW-BASIC moet dit bijv. via DEF FN gerealiseerd worden. In voorbeeld 1 wordt dat dan DEF FNA( $x$ ) =  $2 * \text{SQR}(x * x * x) / 3$
- 2 De linkergrens (A).
- 3 De rechtergrens (B).
- 4 Het aantal delen waarin  $s$  verdeeld moet worden (K).
- 5 Het aantal intervallen (N, bijv. 1000) waarin  $[A, B]$  verdeeld zal worden.

Opmerkingen:

- a Voor ad-hoc-programma's kan N bijv. vast op 1000 gesteld worden, waarbij  $\Delta x$  steeds even groot is n.l.  $(B-A)/1000$ .

b Om een indruk te krijgen van de nauwkeurigheid, is het verstandig om simultaan de berekening uit te voeren met de helft van het aantal punten (daartoe moet  $N$  even zijn). M.a.w. voor de punten  $x_i$  met  $i$  even wordt ook berekend

$$s' = \Sigma \sqrt{(\Delta y')^2 + (2 \Delta x)^2}$$

waarbij  $\Delta y' = y_{i+2} - y_i$ ,  $i$  even.

Door vergelijking van  $s$  en  $s'$  kan men een indruk krijgen van de nauwkeurigheid van  $s$ . Het GW-BASIC programma BOOGLENG.BAS dat door de auteur gemaakt is, werkt volgens het principe van (a) en (b), waarbij  $N$  vrij gekozen mag worden.

c In een standaardprogramma zou men  $N$  steeds kunnen verdubbelen (2, 4, ... met een zeker maximum) totdat  $s'$  en  $s$  absoluut minder dan een klein positief getal EPS van elkaar verschillen.

d Als de kromme heel steil loopt ( $|f'(x)|$  is groot) dan is  $\Delta s$  (relatief) groot. In dat geval kan men het interval  $[x_i, x_{i+1}]$  verder onderverdelen. Als praktisch criterium zou men dan kunnen nemen dat men de stapgrootte  $\Delta x$  onderverdeelt als  $\Delta s$  groter blijkt te zijn dan (bijv.) 2 maal (de oorspronkelijk gekozen)  $\Delta x$ .

e Bij het vorige punt wordt er in feite afgestapt van een vaste  $\Delta x$ . Ook bij een kromme gegeven door **meetpunten** zal  $\Delta x$  i.h.a. variabel zijn. Volgens het principe van (d) werkt het door de auteur ontwikkelde GW-BASIC programma BOOGLENG2.BAS. Als  $\Delta s$  bijv.  $7.3 \times$  (de oorspronkelijk bepaalde)  $\Delta x$  is, wordt deze  $\Delta x$  (zonder verder onderzoek) op het beschouwde interval verdeeld in 4 (gelijke) deelintervallen, waarbij  $\Delta s$  door sommatie van 4 koorde wordt bepaald.

## 5 Een foutbeschouwing

Bij verdubbeling van  $N$  zal de zgn. afbreekfout i.h.a. kleiner worden: hoe kleiner de koorde, hoe beter het resultaat. Omdat een computer met een beperkt aantal significante cijfers werkt (en dus af-

rondt) zal de afrondfout bij het optellen van die steeds meer  $\Delta s$  steeds groter worden bij toenemende  $N$ . Er is daardoor per geval, althans in theorie een optimale  $N$  i.v.m. deze twee optredende fouten. Een optimale  $N$  die praktisch niet gemakkelijk te bepalen is. Het beste lijkt voorsnag om voor zekere  $N$  en voor het dubbele ervan  $s$  en  $s'$  te benaderen:  $|s' - s|$  geeft dan een goed inzicht in de bereikte nauwkeurigheid. In de GW-BASIC programma's die met 8 á 9 significante cijfers werken, blijkt  $N = 1000$  voor zich goed gedragende functies tot prima resultaten te leiden.

## 6 De deelpunten

Omdat het gedrag van  $\Sigma \Delta s$  tamelijk onvoorspelbaar is worden de cumulatieve  $\Sigma \Delta s$  opgeslagen in een tabel  $s(i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  waarbij  $s(0) = 0$  en  $s(N) = s$ . Om nu de (bijv.  $k$ ) deelpunten te vinden wordt in deze  $s$ -tabel bepaald waar  $s/k$ ,  $2s/k, \dots, (k-1)s/k$  liggen. Heeft zo'n  $s$ -index - lineair geïnterpoleerd - de waarde  $p$  dan is de bijbehorende  $x$ -coördinaat  $A + p \times \Delta x$  (mits  $\Delta x$  vast).

## 7 Praktische resultaten

De voorbeelden 1 en 2 zijn doorgerekend met het GW-BASIC programma BOOGLENG.BAS. In beide gevallen geldt  $A = 0$ ,  $B = 10$ ,  $k = 10$ ,  $N = 1000$ , hetgeen neerkomt op een (vaste)  $\Delta x$  van  $10/1000 = 0.01$ . Ook  $s'$  voor  $N' = 500$  is berekend en  $|s' - s|$  is bij de berekening vermeld.

Opmerking: bij de keuze  $k = 1$  wordt alleen  $s$  berekend en worden de begin- en eindpunten weergegeven.

### Voorbeeld 1

| Deelpunt | $x$ -waarde (benaderd) |
|----------|------------------------|
| 0        | 0                      |
| 1        | 1.745146               |
| 2        | 3.032128               |
| 3        | 4.137552               |
| 4        | 5.134302               |



|    |          |
|----|----------|
| 5  | 6.055621 |
| 6  | 6.920205 |
| 7  | 7.739891 |
| 8  | 8.522769 |
| 9  | 9.274674 |
| 10 | 10       |

( $s = 23.65524$ ; de exacte waarde is afgerond 23.655248;  $|s' - s| = 0.00002$ )

#### Voorbeeld 2

| Deelpunt | x(benaderd)<br>met vaste $\Delta x$ | de afgeronde<br>x(exact) | x(benaderd)<br>met variabele $\Delta x$ |
|----------|-------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------------|
| 0        | 0                                   | 0                        | 0                                       |
| 1        | 1.56434                             | 1.5643447                | 1.564346                                |
| 2        | 3.090163                            | 3.0901699                | 3.090171                                |
| 3        | 4.539892                            | 4.539905                 | 4.539905                                |
| 4        | 5.877836                            | 5.8778525                | 5.877853                                |
| 5        | 7.071049                            | 7.0710678                | 7.071069                                |
| 6        | 8.090153                            | 8.0901699                | 8.090171                                |
| 7        | 8.910051                            | 8.910065                 | 8.910067                                |
| 8        | 9.510551                            | 9.5105652                | 9.510565                                |
| 9        | 9.876834                            | 9.876883                 | 9.876871                                |
| 10       | 10                                  | 10                       | 10                                      |

( $s = 15.70792$  bij vaste  $\Delta x$ ; de exacte waarde is afgerond 15.707963;  $|s' - s| = 0.00009$ )

#### Opmerkingen:

1. Omdat de benaderde  $x$ -waarden van de deelpunten bepaald worden aan de hand van de **verhouding** van de  $s$ -waarden zal een kleine fout in de totale  $s$  nauwelijks doorwerken in de gevonden  $x$ -waarden.

2. Opvoeren van  $N$  tot 2000 geeft  $s = 15.70796$  bij vaste  $\Delta x$ .

3. Uitwerking van het idee om (bij  $N = 2000$ )  $\Delta x$  onder te verdelen als  $\Delta s$  'te groot' wordt (d.w.z.  $> 2 \times \Delta x$ ) leidt tot  $s = 15.70797$  en de vierde kolom met waarden uit de voorafgaande tabel: de afwijking van de exacte waarde is 1 tot 2 eenheden in de zesde decimaal en bij  $x_9$  1 eenheid in de vijfde decimaal. Deze berekening is uitgevoerd met het tweede GW-BASIC programma BOOGLN 2.BAS.

## 8 Besluit

Wie zelf de booglengthen van krommen wil berekenen vindt in dit artikel genoeg aanknopingspunten om zelf een PASCAL of GW-BASIC programmaatje te maken. Als voorbeeld worden bijv. nog aanbevolen

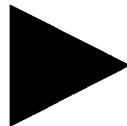
$$y = \sqrt[4]{|x|}, x \in [-10, 10], k = 20, N = 2000,$$

wat bij vaste  $\Delta x$  oplevert  $s = 21.28495$  en  $|s' - s| = 0.001$ . Bij variabele  $\Delta x$  vinden we met het tweede programma  $s = 21.24166$  (Hoe ver zit uw  $x_{10}$  van 0 af?) en

$$\text{en } y = \sqrt[3]{x} = \text{sgn}(x) \times \sqrt[3]{|x|}, x \in [-10, 10], k = 20, N = 2000,$$

wat bij variabele  $\Delta x$  oplevert  $s = 21.27255$ .

Met leerlingen die de stelling van Pythagoras kennen is het begrip booglengthe van een kromme al op te zetten en door te rekenen. Een papieren afdruk van de genoemde GW-BASIC programma's is voor belangstellenden bij de auteur (KMA, Kamer H 303, Postbus 90154, 4800 RG Breda) verkrijgbaar. Ook mag een geformatteerde 3.5" diskette worden opgestuurd aan de auteur.



## Boekbespreking

M. Pfaahl: *Numerische Mathematik in der Gymnasialen Oberstufe*. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 15. B.I. Wissenschaftsverlag Mannheim, 248 blz., D.M. 38,-.

U leest het inderdaad goed: 'numerieke wiskunde in de bovenbouw van het vwo'. Dit boekje draagt een aantal argumenten aan voor het opnemen van numerieke wiskunde in het bovenbouwprogramma. Deze argumenten worden getoetst aan een gedegen curriculumbeschuwing voor de bovenbouw vwo, waarin zowel de algemene als speciale onderwijsdoelen zijn betrokken. Een en ander mondt uit in voorstellen voor een leerplan met thema's uit de numerieke wiskunde en de presentatie van leerplannen, waarin dit onderdeel is opgenomen en die reeds uitgevoerd worden in enkele deelstaten van de Bondsrepubliek. Men kan dit boekje ook zien als een goed uitgewerkt voorbeeld van leerplan- en curriculumonderzoek.

J. J. Sloff

## ● Verenigingsnieuws ●



Nederlandse  
Vereniging van  
Wiskundeleraren

## ► Aanbieding grafische rekenmachine

Uit de vele positieve reacties blijkt dat de aanbieding van de TI 81 een schot in de roos is. De aanbieding geldt uitsluitend voor leden van de NVvW. Tot **1 april 1992** kunnen leden en zij die zich voor die datum als lid opgeven van de aanbieding gebruik maken. Personen die bij Wolters-Noordhoff een abonnement op Euclides hebben kunnen zich bij de ledenadministratie laten inschrijven als lid. U moet uw abonnement **niet** opzeggen, het wordt intern geregeld.

Informatie kunt u krijgen bij de ledenadministratie: 076-65 32 18.

## ► Voorlichtingsbijeenkomst Volwassenenonderwijs

**Nieuwe programma's wiskunde voor de onderbouw, nieuw examenprogramma lbo/mavo C/D**

De NVvW organiseert op zaterdag 18 januari 1992 van 11.00-15.00 u. een bijeenkomst in het Jaarbeurscongrescentrum te Utrecht voor wiskunde-docenten in het volwassenenonderwijs. De bedoeling is aandacht te besteden aan de speciale problemen van het volwassenenonderwijs: modulering, deelcertificaten voor onderdelen van programma's, speciale contexten voor volwassenen e.d. bij het W12/16-programma. Voor een maaltijd wordt gezorgd.

**Aanmelding:**

Men kan zich aanmelden door per persoon f25,- (leden van de NVvW f15,-) over te maken naar giro 143917 t.n.v. NVvW te Amsterdam onder vermelding van volwassenenonderwijs en uw telefoonnummer.

Alleen als de deelname te gering is krijgt u bericht, op voorwaarde dat uw telefoonnummer doorgegeven is.

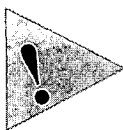
Voor informatie: 076-65 32 18.

## ► Mededeling

**Studiemiddag Universiteit Twente**

Op de Universiteit Twente wordt ieder jaar een studiemiddag gehouden voor (eerstegraads) docenten havo-vwo. Doel is de docenten te informeren over ontwikkelingen op wiskundegebied, m.n. op universitair niveau. Deze keer staat de middag in het teken van het gebruik van software-pakketten, zowel op universitair niveau als in het voortgezet onderwijs. Belangstellenden zijn van harte welkom.

Datum: 12 februari. Tijd: 13.30-17.30 uur. Plaats: TW/RC-gebouw van de Universiteit Twente. Nadere inlichtingen bij de hr. F. Twilt (053-89 34 23) of hr. N. Alink (053-89 34 19, alleen 'smiddags).



## Kalender

15 januari 1992: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.  
18 januari 1992: Utrecht, Voorlichtingsbijeenkomst Volwassenenonderwijs, zie aankondiging hiernaast.  
28 en 29 februari 1992: Wiskunde A-olympiade te Garderen.  
12 februari 1992: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.  
11 maart 1992: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.  
20 maart 1992: eerste ronde Wiskunde Olympiade op de scholen voor havo en vwo.  
21 maart 1992: Utrecht, Congresdag t.g.v. het tweede lustrum van Vrouwen en Wiskunde. Zie blz. 143 van dit nummer.  
8 april 1992: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.  
4 september 1992: tweede ronde Wiskunde Olympiade in de Technische Universiteit te Eindhoven.

# Inhoud

Inhoud 129

Correlatie en Regressie 130

Mededelingen 131, 135, 143, 160

*J. H. van Lint*: Recycling van ponskaarten? 132

*J. A. C. Kolk*: Het vwo-programma wiskunde B: een oproep tot verandering 136

40 jaar geleden 141

*Rob Bosch*: Drietallen van Pythagoras en de dubbele-hoekformules 142

Werkbladen 144

*Wim Schaafsma*: Oude regels met de rekenmachine (W12-16) 146

*Ed de Moor*: Analyse, synthese en elegance 147

Recreatie 152

*J. Meijer, J. Perrenet en W. Groen*: Leerboekeffecten: verkeerd weergegeven feiten en onjuiste interpretaties van Van Streun 153

*A. van Streun*: De rijke context van het onderwijs 155

*R. Leentfaar*: Hoe verdeel je een kromme in  $k$  gelijke delen? 156

Boekbespreking 159

Verenigingsnieuws 160

Kalender 160