

Wolters-Noordhoff

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Vakblad voor de wiskundeleraar

Euclides

jaargang 66 1990 | 1991 mei

88



Redactie

Drs H. Bakker
Drs R. Bosch
Drs J. H. de Geus
Drs M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
N. T. Lakeman (beeldredacteur)
P. E. de Roest (secretaris)
Ir. V. E. Schmidt (penningmeester)
Mw. Drs A. Verweij (eindredacteur)
A. van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,
8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f55,- per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f37,50; contributie zonder Euclides f30,-. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f58,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f37,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers f9,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUI' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

● Inhoud ● ● ● ● ●

Actualiteit 226

Jan Breeman *Fragmenten uit een dagboek*
Over de Hawex-bijeenkomst in Rotterdam.
Gert, Rob en Bert zijn tevreden.

Mededeling 227

Actualiteit 228

Rens Houtman *Hawex-uitwisseling Rotterdam*
Ook Rens vond het de moeite waard.

Bijdrage 229

Hawexvolggroep van Vrouwen en Wiskunde *Een ochtendje brainstormen* 229
Eén wiskundevak in 4 havo met zowel A- als B-onderwerpen. Een droomidee?
C.C. Bissell *Het Nederlandse aandeel in de Cartesiaanse meetkunde* 231
De betekenis van het werk van Huygens, De Witt, Hudde, Van Heuraet en hun leermeester Van Schooten de Jongere voor de nieuwe wiskunde van de Gouden Eeuw.
Truus Dekker *Examen lbo/mavo C/D 1990 experimenteel (8)* 239

Werkbladen 240

Bijdrage 242

A. Kattenberg *Eenvoudige wiskunde van het broeikaseffect*
Spoorgassen in de atmosfeer schermen het aardoppervlak af tegen de kou van de ruimte. De natuurkunde van de 'warme deken' wiskundig beschreven.

Boekbeschuwing 246

Piet Verstappen *Amerikaanse didactische richtlijnen*
Over een werkdokument dat de weg wijst naar echte zelfwerkzaamheid, samenwerking en wiskundig redeneren in de klas.

Brief 248

Bijdrage 249

Francis Meester, Joop van Dormolen *Het nieuwe leerplan 12-16*
Hoe zit het met nascholing?

Mededeling 251

Verenigingsnieuws 252

Agneta Aukema-Schepel *Van de bestuurstafel* 252
Prijsvraag 'Anders dan anders' 253

40 jaar geleden 254

Recreatie 255

Verschenen 255

Mededelingen 256

Kalender 256



... de boeiende persoon van Frans van Schooten de Jongere.

Het was een heel karwei, maar Felix heeft het voor elkaar! Ook van de collega's die in Delft wel eens een nascholingscursus hebben gevolgd, zijn de adressen achterhaald. In totaal zijn ruim 400 brieven de deur uitgegaan (ook uitgevers/auteurs en nascholingsinstituten zijn op de hoogte gesteld). De regionale proefbijeenkomst zal worden gehouden in Rotterdam op 26 februari 1991.

Begin februari 1991

Uit de aanmelding blijkt duidelijk dat de belangstelling bij de collega's groot is. We gaan dus door. De opmerkingen op de antwoordformulieren geven aan dat Gert, Rob en Bert niet de enigen zijn met problemen.

Ook het idee van een repetitie-ruilbeurs slaat aan. Men vraagt zich wel af hoeveel exemplaren men mee moet nemen. Van elke school maar voor alle zekerheid een docent gebeld om door te geven dat men van elke repetitie ten minste 20 exemplaren mee moet nemen, want die kunnen zeker geruild worden. Ook gezegd dat men zich niet moet schamen voor het gebruiken van opgaven uit andere methoden, dat doet toch vrijwel iedereen.

De aanmelding voor het leiden van een gespreksgroep per methode valt helaas een beetje tegen, maar het lijkt net te lukken.

Jammer dat de conciërge op onze school door problemen met de offsetmachine de examen- en schoolonderzoekopgaven die we van Martin Kindt hebben gekregen niet kan vermenigvuldigen. Nu het via de kopieermachine moet, wordt het voor de vereniging toch wat duurder. Het is een heel werk, maar we kunnen iedere school die zich heeft aangemeld, zoals we beloofd hadden in onze aankondigingsbrief, toch namens de vereniging een prachtige opgavenverzameling aanbieden.

Midden februari 1991

Door een laatste vloedgolf van aanmeldingen moet het schema van gespreksgroepen worden bijgesteld. Gelukkig kent Agnes Verweij (TU Delft) nog

► **Fragmenten uit een dagboek**

Jan Breeman

November 1990

Tijdens de sectievergadering blijkt dat Gert, Rob en Bert toch wel erg veel werk hebben aan de nieuwe havoprogramma's. Niet alles lukt direct en ze zijn al heel wat verrassingen tegengekomen. Ondanks de ruime ervaring met vwo A en B en het volgen van een nascholingscursus Hawex loop je klaarblijkelijk nog tegen veel problemen aan.

December 1990

Het bestuur vindt het een goed idee om na te gaan of de havo-docenten belangstelling hebben voor een regionale bijeenkomst waar knelpunten besproken kunnen worden. Tegelijkertijd kunnen we misschien ook een repetitie-ruilbeurs organiseren. Besloten wordt om als proef in de regio Zuid-West-Nederland aan de hand van o.a. de presentielijsten van de regionale normenvergaderingen een groot aantal collega's persoonlijk aan te schrijven. Felix Gaillard en ik zullen de zaken coördineren; Jan Maassen staat gereed als stand-by. Een lid van het Hawex-team en een collega van een experimenterschool zullen ook worden uitgenodigd.

een collega die bereid is om een extra gespreks-groep te leiden. Als het echt nodig is, wil ze zelf ook wel inspringen, maar we vinden allebei dat zo nodig tijdens de bijeenkomst nog een 'gewone' collega bereid gevonden moet worden.

26 Februari 1991

De opkomst overtreft de verwachtingen, 100 collega's! Er zijn 45 dagscholen en nog een aantal avondscholen vertegenwoordigd. De snel verzamelde informatie over het aantal lessen in 4 en 5 havo voor Wiskunde A/B*), wordt ijverig genoteerd.

De gespreksgroepen per methode blijken een succes. De rapportage ervan brengt voor iedereen herkenbare zaken naar voren. Iemand merkt terecht op dat de problemen bij havo-B op den duur wel eens groter kunnen zijn dan die bij havo-A.

De repetitie-ruilbeurs loopt geweldig goed. Een collega uit Den Briel heeft zijn keurig uitgevoerde proefwerken zelfs nog een keer opnieuw in een grote oplage laten stencillen en stelt het voor anderen zo maar ter beschikking. Bravo!

Belangrijk is ook dat men met de eigen schoolleiding gaat praten over de opvang van de niet-geslaagde kandidaten van dit jaar. De aanwezigheid van de inspectie wordt op prijs gesteld; Wim Kleijne kan nog een aantal belangrijke vragen beantwoorden.

Vrijwel iedereen is van mening dat zo'n bijeenkomst als deze volgend jaar weer gehouden moet worden waarbij dan de repetities over nog te behandelen hoofdstukken en schoolonderzoeken (!) uitgewisseld kunnen worden. En men vindt dat dit soort bijeenkomsten ook voor de andere regio's georganiseerd moet worden.**)

27 Februari 1991

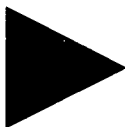
Tijdens de sectievergadering vertellen Gert, Rob en Bert dat ze uiterst tevreden zijn. Ze hebben het gevoel veel aan de discussies gehad te hebben en het ruilen heeft bijzonder leuk materiaal opgeleverd.

Noten

* urentabel

	HAVO-A (45 scholen)	HAVO-B (44-scholen)
4 + ?	2	1
4 + 4	18	11
4 + 5	2	2
5 + ?	3	4
5 + 4	9	5
5 + 5	11	21

**) Ook voor de collega's Marian, Jan, Els, Tom, Ruud, Anja, Henk, Gijs, Wim, ... die in een andere regio wonen/werken zullen door de vereniging HAWEX-bijeenkomsten/ruilbeurzen worden georganiseerd. Aankondiging van plaats en tijdstip zal geschieden in Euclides.



Mededeling

Bericht van de penningmeester aan alle leden van de NVvW

De Postbank heeft laten weten dat het verwerken van acceptgiro's geld gaat kosten. Daarom zijn wij genoodzaakt per 1 augustus 1991 f0,45 kosten aan elk lid in rekening te brengen. Leden die een machtiging tot automatische overschrijving van het contributiebedrag aan de Vereniging geven, betalen f0,15 kosten.

Voor de goede orde zij nogmaals vermeld dat de eerste acceptgiro die half augustus uitgaat voor 1 november betaald dient te zijn. Voor aanmaningen na 1 november moet de Vereniging kosten (f2,50 per aanmaning) berekenen omdat het opsporen en herhaald aanmanen van te-laet-betalers een kostbare aangelegenheid is.

Opzeggingen dienen te geschieden voor 1 juli. Het verenigingsjaar loopt van 1 augustus t/m 31 juli. Tussentijdse opzeggingen zijn niet mogelijk.

► **Hawex-uitwisseling Rotterdam**

Rens Houtman

Het was even zoeken naar het City-college in Rotterdam. Maar gelukkig waren we bijtijds van school vertrokken en lukte het na enig omzwerven juist vóór vieren de school te betreden.

Met een honderdtal collega's werden we ontvangen met koffie en een mapje met examens en schoolonderzoeken van de experimenteerscholen. Een betere ontvangst als Hawex-beginners hadden we ons niet kunnen denken.

De heer Breeman, bestuurslid van de NVvW, heet de aanwezigen welkom. Een bijzonder woord van welkom aan de schrijvers van de Hawex-pakketjes, de inspecteur en aan de uitgevers die hadden toegezegd te komen. (De uitgevers van Moderne Wiskunde en Sigma bleken de enigen die deze toezegging hadden waargemaakt.) De heer Breeman zet op heldere wijze uiteen wat de NVvW met deze bijeenkomst beoogt. Het is een proefbijeenkomst, die tot doel heeft gelegenheid te geven ervaringen met en proefwerken over de leerstof van wiskunde A en B uit te wisselen.

We gaan al snel in groepen uiteen. Een groep Getal en Ruimte gebruikers (A en B), een groep Moderne Wiskunde gebruikers (A), een groep Sigma gebruikers (A), een groepje Wiskunde Lijn gebruikers (A) en een groep gebruikers van verschillende methoden (B).

Problemen worden uitgewisseld. Verademend is het om te constateren dat ook anderen problemen hebben met de nieuwe stof, die zo veel verschilt van de vertrouwde wiskunde. Het uitwisselen van de meegenomen proefwerken was een ware happening.

In de hal heeft ieder inmiddels ingevuld hoeveel uren les wordt gegeven in wiskunde A en B. Bij telling blijken 22 scholen 4 uren te hebben voor wiskunde A in klas 4 en 23 scholen 5 uren.

Voor wiskunde B hebben 14 scholen 4 uren en 30 scholen 5 uren gekregen. Het idee leeft vrij algemeen dat het niet lukt het B-programma op een verantwoorde wijze door te werken als je in klas 4 maar over 4 uren beschikt.

Ter afsluiting komen we plenair bij elkaar. Bij de verslagen uit de groepen blijkt, dat in de verschillende groepen steeds dezelfde problemen naar voren komen:

- het probleem van het lezen bij wiskunde A
- hoe gebruik je de computer bij wiskunde A?
- wiskunde A is niet gemakkelijker voor de leerlingen, toch werken ze er met plezier aan. En de leraren i.h.a. ook!
- bij wiskunde B lijkt de computer beter te gebruiken. Velen hebben goede ervaringen met programma's als VU-grafiek.

Als tenslotte de ongerustheid nog eens wordt geventileerd of we wel voldoende niveau halen om straks met deze groep het examen in te gaan stelt een oudere collega de zaal gerust:

'Het is net als met de stereometrie; in het begin gaat het allemaal erg moeizaam, maar het komt allemaal heus wel.'

Een bijeenkomst die de moeite van het herhalen waard is. Daar is ieder het over eens.

Over de auteur:

Rens Houtman heeft bijna twintig jaar les gegeven op scholengemeenschappen voor havo en vwo, eerst in Hardenberg, later in Maarssenbroek. De laatste twee jaar maakt hij deel uit van de verzameling uitgevers, waarvan er slechts twee in Rotterdam aanwezig waren.

► Een ochtendje brainstormen

Hawexvolggroep van Vrouwen en Wiskunde

Hoe prettig is het om gelijk te krijgen?
Het schijnt een grotere kunst dan gelijk te hebben, maar het genoeg is wat dubieus als je veel liever dat gelijk niet zou hebben.

Waar gaat het om?

Op een achttal scholen hebben we gekeken naar het keuzegedrag van de leerlingen in 4 havo in het eerste Hawex-jaar*. De resultaten ziet u in tabel 1. Ondanks alle relativering die bij deze cijfers past valt niet te ontkennen dat meisjes in wel zeer geringe mate voor wiskunde B kiezen. De ervaringen met wiskunde A op het vwo wezen ook al in die richting, maar het lijkt dat op de havo wiskunde B zo mogelijk nog minder populair is. Wij vinden dat zorgwekkend, niet allen omdat het belangrijk is dat meisjes en jongens kiezen naar hun

capaciteiten, – je kunt je afvragen of het huidige beeld in overeenstemming is met de verdeling van die (wiskundige) capaciteiten – maar ook vanwege de consequenties van een dergelijke asymmetrische keuze. Als die in de toekomst niet verandert en minder meisjes wiskunde-B in het pakket nemen (in vergelijking met de keuze voor wiskunde in het oude programma), betekent dat een (nog) kleinere groep vrouwen die voor een technisch beroep of voor een baan in het onderwijs in de exacte vakken kan kiezen.

Over de mechanismen die de keuze bepalen is in de 10 jaar dat de Werkgroep Vrouwen en Wiskunde bestaat het nodige bekend geworden.

Een belangrijke factor is het tijdstip waarop in 3 havo een keuze gemaakt moet worden. Dit is heel ongunstig voor meisjes; ze zijn net in de puberteit met door de psychische veranderingen veel fundamentele onzekerheid over de eigen identiteit. Verder is er door de fysieke veranderingen een oriëntatie op het vrouw zijn en wat daarbij hoort (jongens!!); kortom, het is vaak niet direct een tijd om rustig na te denken over een toekomstige carrière.

Daarnaast spreekt de gekozen invulling van de vakken met wiskunde A als maatschappelijke variant meisjes op die leeftijd in het algemeen wel aan, terwijl wiskunde B als meer technische variant dat vaak niet doet. Bovendien kiezen ze vaak voorzichtig en nemen liever geen risico met een 'moeilijk' vak als wiskunde B.

Helaas is er aan dit keuzeprobleem voor meisjes geen wezenlijke aandacht geschonken en werd Hawex onder het uiten van geruststellende geluiden in de huidige vorm ingevoerd.

Dit was voor ons aanleiding om te brainstormen over mogelijke alternatieven. Toen de wind ging liggen, lag het volgende idee op tafel, dat we hierbij graag ter discussie stellen.

Tabel 1 Keuzegedrag in 4 havo (8 scholen)

	A	B	niet	totaal
meisjes	230 (56%)	64 (16%)	116 (28%)	410
jongens	174 (46%)	165 (44%)	37 (10%)	375

Dubbel kiezen kwam nauwelijks voor.

Het plan

Waarom niet, dachten wij, een tussenvariant geprobeerd tussen dat oude ene wiskundevak op de havo en die twee nieuwe?

Of concreter: bied in 4 havo één breed wiskundevak aan, met daarin zowel A- als B-onderwerpen en aandacht voor de basisvaardigheden. In de examenklas kan dan gekozen worden uit wiskunde A met kansrekening en statistiek, en/of wiskunde B, met daarin een plaats voor de ruimtemeetkunde en verdere analyse.

Als voordeel zien we in de eerste plaats het uitstellen van het keuzemoment: kiezen voor wel of geen wiskunde is eenvoudiger en minder ingrijpend dan ook nog kiezen voor A en/of B; daarvoor is nog een jaar bedenktijd. In dat jaar is het mogelijk een goed beeld te krijgen van de beide vakken en de eisen die er gesteld worden. Daarnaast gebeurt naar onze ervaring veel met de leerlingen in 4 havo; in de loop van de vierde ontstaat in het algemeen een beter beeld van wat ze willen en kunnen; de toekomst na school komt dichterbij en wordt wat concreter. Een vakinhoudelijk voordeel zou zijn het bereiken van een wat hoger algemeen niveau, hetgeen ook voor vervolgopleidingen na wiskunde A, zoals bijvoorbeeld havo of vwo, prettig is. Daarbij ontstaan in onze visie twee meer gelijkwaardige vakken dan nu het geval is, en dat kan ook omdat wiskunde niet meer voor allen hoeft te zijn. De prijs is misschien een lager eind B-niveau, te betalen door diegenen die een technische vervolgopleiding kiezen.

Uitvoerbaar?

Naar ons idee kan deze verandering gerealiseerd worden. Immers, er komt een nieuw onderbouwprogramma, dat – al ligt de precieze inhoud nog niet vast – hoogstwaarschijnlijk meer A-achtige onderwerpen en meer training in ruimtelijk inzicht, maar minder formele algebra zal bevatten dan nu het geval is. In dat kader is het niet onterecht om alvast te denken aan een bijstelling van de Hawex-

programma's. De exameneisen zouden in principe gelijk kunnen blijven, er hoeft alleen sprake te zijn van een verwisselen van onderbouw- en bovenbouwonderwerpen en een nadere inspectie van de ijskast met B-onderdelen.

'Wiskunde verplicht' is van de baan en in de onderbouw wordt in het nieuwe programma hopelijk genoeg 'algemeen vormende' wiskunde aangeboden om als mondig en kritisch consument het leven door te kunnen gaan bij de keuze van een beroep waarvoor niet meer dan de – nieuwe – kennis van 3 havo of mavo-D vereist is.

Hierdoor kan de gemeenschappelijke stof in het vierde jaar moeilijker worden dan het huidige A-programma; er is al het nodige voorbereid in de onderbouw en de leerlingen hebben voor wiskunde kunnen kiezen.

Een probleem hierbij kan wel zijn voor het bereiken van het Hawex-B niveau aan het eind van de vijfde klas – dat hoger is dan het niveau van de oude havo-wiskunde – dat dan het gezamenlijke 4 havo basisprogramma onder druk komt te staan en misschien zo moeilijk zal worden dat veel leerlingen er helemaal maar niet aan beginnen. Dat is een keuze die gemaakt moet worden.

Wij denken aan invoering van deze verandering direct na het eerste nieuwe C/D eindexamen, zodat er aansluiting is voor de eerste lichting die mavo-examen heeft gedaan met het nieuwe programma. Op dat moment moeten de boeken voor 4 havo toch aangepast worden.

Dit was ons droomidee. Maar ooit is ons verteld dat tussen droom en daad wetten in de weg staan en praktische bezwaren

Het woord is nu aan u.

Reacties op dit artikel graag bij de redactie.

Over de auteurs:

De Hawexvolggroep van Vrouwen en Wiskunde bestaat uit Marian Kollenveld, Agneta Aukema, Irma Koper, Ynske Schuringa en Emma Rozendaal.

* Inmiddels zijn vergelijkbare gegevens bekend geworden van 18 experimenteerscholen. Zie 'Jongens kiezen B, meisjes kiezen A' in Uitleg nr. 5, februari 1991, blz. 11.

► **Het Nederlandse aandeel in de Cartesiaanse meetkunde**

C. C. Bissell

1 Inleiding

Aan het begin van de 17e eeuw bestond de wiskunde, om met Morris Kline te spreken, feitelijk nog uit een kern van meetkunde met algebraïsche ahangsels. De meetkunde begon echter een nieuwe betekenis te krijgen, met name in het licht van recente ontwikkelingen op het gebied van wetenschap en techniek. De bij de Grieken zo geliefde kegelsneden beschreven de omloopbanen van hemellichamen en de baan van projectielen; de studie van krommen in het algemeen was van wezenlijk belang voor vorderingen op het gebied van de optica, astronomie en mechanica. De wiskundige technieken voor het werken met krommen waren echter nog zeer elementair, aangezien ze uitgingen van de klassieke methoden van Euclides en Apollonius.

Waar men behoefte aan had, en wat voor het eerst werd ontwikkeld door René Descartes (1596-1650) en Pierre de Fermat (1601-1655), was een radicaal nieuwe benadering van de wiskundige beschrijving van krommen. In wezen was dit de tegenwoordig gebruikelijke methode, waarin krommen worden

beschreven door middel van algebraïsche vergelijkingen.

Fermat publiceerde tijdens zijn leven weinig, maar Descartes zette zijn nieuwe benadering van meetkundige problemen uiteen in *La Géométrie*, één van drie belangrijke supplementen bij zijn filosofische magnum opus, de *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (uitgegeven in 1637). De studie der krommen was nu veranderd in die van vergelijkingen, en een meetkundig vraagstuk kon worden aangepakt door het om te zetten in een algebraïsch vraagstuk, dit op te lossen, en tenslotte de algebraïsche uitkomst terug te vertalen naar het oorspronkelijke meetkundige vraagstuk.

Descartes en Fermat waren weliswaar de grondleggers van de moderne, algebraïsche benadering van de meetkunde (een benadering die als een rode draad loopt door de Newtoniaanse mechanica, de 19e eeuwse natuurwetenschappen, en zelfs de Einsteiniaanse revolutie), maar de term *Cartesiaanse meetkunde* in zijn moderne zin is enigszins een anachronisme: Descartes heeft zijn ideeën nooit op de nu zo bekende manier uitgedrukt. Hij bleef bijvoorbeeld scheve assen gebruiken, in plaats van de orthogonale die later de kern van het 'Cartesische' coördinatensysteem zouden vormen. Nog een wezenlijk verschil is dat voor Descartes een algebraïsche vergelijking op zich onvoldoende was om een kromme te beschrijven – krommen moesten ook *construeerbaar* zijn op een meetkundig acceptabele wijze. Bovendien maakte Descartes zijn werk, hoewel hij zich goed bewust was van de revolutionaire aard ervan, voor zijn tijdgenoten niet makkelijk toegankelijk. Zoals Boyer¹ schrijft:

'Men krijgt de indruk dat Descartes *La Géométrie* niet schreef om uitleg te geven, maar om op te scheppen over de kracht van zijn methode ... [Hij] rechtvaardigt de gebrekkigheid van zijn uiteenzetting met de ongerijmde opmerking dat hij veel ongezegd laat teneinde de lezer de vreugde der ontdekking niet te ontnemen.'

Niettemin is Descartes' *La Géométrie* de eerste algebraïsche verhandeling die er modern uitziet (Figuur 1).

autres $+xx - 4x - 3 \infty 0$. Et $+xx + 4x + 2 \infty 0$.
 car y est 4, $\frac{1}{2}yy$ est 8, p est 17, & q est 20, de façon que
 $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, fait -3 , & $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$, fait $+2$. Et
 tirant les racines de ces deux Equations, on trouve toutes
 les mesmes, que si on les tiroit de celle où est x^4 , a
 sçavoir on en trouve vne vraye, qui est $\sqrt{7+2}$, & trois
 fausses, qui sont $\sqrt{7-2}$, $2 + \sqrt{2}$, & $2 - \sqrt{2}$.
 Ainsi ayant $x^4 - 4xx - 8x + 17 \infty 0$, pour ce que la racine
 de $y^4 - 8y^2 - 124yy + 64 \infty 0$, est derechef 16, il faut
 escrire

$$xx - 4x + 5 \infty 0, \& xx + 4x + 7 \infty 0.$$

Car icy $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, fait 5, & $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$,
 fait 7. Et pour ce qu'on ne trouve aucune racine, ny
 vraye, ny fausse, en ces deux dernières Equations, on
 connoist de là que les quatre de l'Equation dont elles
 procedent sont imaginaires, & que le Probleme, pour
 lequel on l'a trouvée, est plan de la nature; mais qu'il
 ne sçavoit en aucune façon estre construit, a cause que
 les quantités données ne peuvent se joindre.

Tout de mesme ayant

$$x^4 + \frac{1}{2}aa \} x^2 - a^2 \} x - \frac{1}{2}aa \infty 0,$$

pour ce qu'on trouve $aa + cc$ pour yy , il faut escrire

$$xx - \sqrt{aa + cc} x + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a \sqrt{aa + cc} \infty 0, \&$$

$$xx + \sqrt{aa + cc} x + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a \sqrt{aa + cc} \infty 0.$$

Car y est $\sqrt{aa + cc}$, & $+ \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p$ est $\frac{1}{2}aa$, & $\frac{1}{2}$,
 est $\frac{1}{2}a \sqrt{aa + cc}$. D'où on connoist que la valeur de x
 est.

Figuur 1: Een bladzijde uit de eerste uitgave van *La Géométrie*.
 De uitdrukking zes regels van onderen luidt, in moderne notatie,
 als volgt:

$$z^4 + (\frac{1}{2}a^2 - c^2)z^2 - (a^3 + ac^2)z + \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0$$

(Uit: *The Geometry of Descartes*, ed. trans. D.E. Smith & M. L.
 Lathán, Dover 1954, p. 186)

Afgezien van het gebruik van ∞ als is-gelijk-teken
 en de neiging om tussen haakjes geplaatste termen
 verticaal in plaats van horizontaal bijeen te zetten,
 is de notatie haast modern. Opmerkelijk is met
 name het gebruik van kleine letters, waarbij die uit
 het begin van het alfabet constanten vertegenwoor-

digen en die uit het slot variabelen. De tekens voor
 optellen, aftrekken, machtsverheffen en wortel-
 trekken zijn de moderne lezer ook vertrouwd.

Fermats nauw verwante werk, dat in vele opzichten
 systematischer en beter gepresenteerd was, werd
 pas veel later gepubliceerd, hoewel het deels duide-
 lijk ouder is dan *La Géométrie*. Noch Fermat, noch
 Descartes was echter direct verantwoordelijk voor
 de verbreiding van hun nieuwe ideeën onder de wis-
 kundigen van die tijd. Vanwege de moeilijke in-
 houd van *La Géométrie*, en omdat het werk in het
 Frans was geschreven in plaats van het Latijn (toen
 nog de academische lingua franca), was zijn onmid-
 dellijke effect gering, en bracht het zeker geen
 wiskundige revolutie teweeg, zoals men soms wel
 geloofd. Hoewel Descartes de Cartesiaanse analyti-
 sche wiskunde als eerste presenteerde, was het in
 feite een kleine groep geleerden aan de Leidse
 Universiteit die haar ingang deed vinden. De spil
 van deze groep was de boeiende persoon van Frans
 van Schooten de Jongere (ca. 1615-1660), een be-
 gaafd docent en wiskundige aan de Ingenieurs-
 school (Figuur 2).

Hoewel Van Schooten waardevol origineel werk
 verrichtte, is het als animator van zijn studenten en
 als commentator en uitlegger van de toenmalige
 ontwikkelingen in de wiskunde dat hij een plaats in
 de annalen verdient. Onder zijn studenten bevon-
 den zich Christiaan Huygens, die later een van de
 grootste geleerden en wiskundigen van zijn tijd zou
 worden, Johan de Witt, later Raadpensionaris van
 de Republiek, Joannes Hudde, die in totaal 21 ter-
 mijnen het burgemeestersambt van Amsterdam
 zou bekleden, en Hendrik van Heuraet, uit een rijk
 koopmansgeslacht. Hoewel ze niet een hechte
 groep in de moderne zin vormden, onderhielden
 deze mannen later contact met elkaar en met hun
 vroegere leermeester, en correspondeerden zij met
 geleerden en wiskundigen elders in Europa. Huy-
 gens was de enige die zich geheel aan de wetenschap
 wijdde; voor de anderen was de wiskunde een
 liefhebberij. Allen echter verrichtten wetenschap-
 pelijk werk van hoog niveau, en hadden deel aan de
 verbreiding en consolidatie van de nieuwe wiskun-
 de. Hun bijdrage geeft Nederland een belangrijke
 plaats in de ontwikkeling van de wiskunde tussen

enerzijds Descartes en Fermat, en anderzijds Newton en Leibniz.



Figuur 2. Frans van Schooten de Jongere. (Academisch Historisch Museum, Leiden)

2 Descartes' betrekkingen met Nederland

Descartes' jonge jaren waren, zacht gezegd, enigszins rusteloos. Hij leefde enige tijd als beroepsmilitair, op veldtochten door heel Europa, en reisde veel voor particuliere zaken. In 1629 verhuisde hij naar Nederland. Hier speelde hij een actieve rol in het intellectuele leven van zijn nieuwe vaderland, en bracht hij de rest van zijn leven grotendeels door.² (Hij ging in 1649 op uitnodiging van koningin Christina naar Zweden en stierf het jaar daarop in Stockholm.)

Frans van Schooten de Jongere werd omstreeks 1615 geboren.³ Zijn vader, Frans van Schooten de Oudere, hoogleraar in de wiskunde aan de Leidse Ingenieursschool, zorgde ervoor dat zijn zoon aan de Leidse Universiteit een grondige kennis van de Nederlandse wiskundetraditie opdeed. De jonge Van Schooten nam in 1635 het docentschap in de 'duytsche mathematycke' van zijn vader over, en

schijnt ongeveer in dezelfde tijd Descartes te hebben ontmoet, toen laatstgenoemde in Leiden was om toe te zien op het drukken van zijn *Discours de la méthode*. In de zomer van 1637 had Van Schooten de drukproeven van *La Géométrie* gezien, maar enige moeite gehad de inhoud ervan te begrijpen. In de loop van de volgende paar jaren maakte hij zich de nieuwe wiskunde echter grondig eigen, waartoe zijn vele reizen naar Frankrijk, Engeland en Ierland bijdroegen. Dankzij aanbevelingsbrieven van Descartes was Van Schooten in staat de meest vooraanstaande wiskundigen van zijn tijd te ontmoeten, hun manuscripten in te zien en vertrouwd te raken met hun ideeën.

Van Schooten keerde in 1643 terug naar Leiden en hielp zijn vader weer bij diens onderwijstaak, en gaf daarnaast privélessen in de wiskunde. Op verzoek van de Leidse uitgever J. Elzevier had hij exemplaren meegebracht van de gedrukte werken van Francois Viète, wellicht de belangrijkste voorloper van de Cartesiaanse algebra, en al gauw begon hij te werken aan een verzameleditie. In deze tijd kwam ook de jonge Johan de Witt als student naar Leiden. Zoals het een jongeman betaamde die voor een hoog politiek ambt was voorbestemd, kwam hij rechten studeren. Hij bezocht ook Van Schootens colleges 'Inleiding tot de wiskunde', waarbij hij al gauw een grote bekwaamheid aan de dag legde, en een blijvende vriendschap met zijn leermeester opbouwde.

Van Schooten de Oudere overleed in december 1645, en zijn zoon volgde hem in zijn academische functie op. Het jaar daarop verscheen de verzameleditie van Viètes werk, waartoe Elzevier de opdracht had gegeven. Hoewel hij de oorspronkelijke teksten nauwkeurig volgde, had Van Schooten de notatie verbeterd en maakte hij het materiaal toegankelijker voor de lezer, waarbij hij zijn talent als uitlegger toonde. Nu was De Witt uit Leiden vertrokken, maar Van Schooten had twee nieuwe studenten van naam – Constantijn en Christiaan Huygens. Ook zij volgden, hoewel gekomen om rechten te studeren, tevens de wiskundecolleges. Christiaan wierp zich op de studie der wis- en natuurkunde, waarbij hij al gauw zijn leermeester voorbijstreefde en de welwillende aandacht van Descartes op zich vestigde.



Figuur 3. René Descartes. (zie tekst)

Tegen het einde van de jaren '40 had Van Schooten het werk voltooid waarmee hij zijn reputatie zou vestigen: een Latijnse vertaling van Descartes' *La Géométrie*, voorzien van zijn eigen commentaar. Dit verscheen in 1649, werd enthousiast ontvangen, en was grotendeels verantwoordelijk voor de verbreiding van de Cartesiaanse wiskunde onder Van Schootens tijdgenoten die de Franse taal niet beheersten. Het was zelfs zo'n succes dat er een tweede druk van moest komen. Aan deze tweede druk, die in 1659-1661 in twee delen uitkwam, kan de ware omvang van Van Schootens eigen bijdrage goed worden afgelezen. Van de bijna 1000 bladzijden beslaat de vertaling van Descartes' originele werk er slechts iets meer dan 100. De rest omvat niet alleen Van Schootens commentaar, maar ook waardevolle bijdragen van Huygens, De Witt, en twee andere studenten van Van Schooten, Joannes

Hudde en Hendrik van Heuraet, die in het midden van de jaren '50 studiegenoten schijnen te zijn geweest aan de Leidse universiteit. Boyer heeft deze uitgave één van de belangrijkste gebeurtenissen in de geschiedenis van de analytische wiskunde genoemd. Van Schootens zelfgemaakte gravure van Descartes (Figuur 3), tegenover de titelpagina, verdraagt tevens zijn kunstzinnige talent!

3 De *Geometria* van 1659-1661

Het feit dat Van Schooten bijdragen van zijn meest getalenteerde studenten in zijn eigen publikatie opnam, geeft blijk van zijn begaafdheid als leermeester, maar ook van zijn bescheidenheid en onzelfzuchtigheid. Bovendien droeg een dergelijke vereende inspanning zonder twijfel bij tot de kwaliteit van zijn publikaties. Zo is de tweede editie van de *Geometria* een groot werk, dat een aanzienlijke invloed had op de wiskundigen van toen. Het materiaal is systematisch gerangschikt, en kan als het eerste handboek voor de Cartesiaanse wiskunde worden beschouwd.

Het eerste deel bevatte de Latijnse tekst van Descartes' oorspronkelijke werk, tezamen met Van Schootens commentaar en waardevol materiaal van Huygens over de meetkunde van kegelsneden. Omvangrijker werk door Van Schootens andere studenten was er ook in opgenomen. Joannes Hudde (Figuur 4) droeg belangrijke studies bij, één over het vereenvoudigen van vergelijkingen en een ander, *De Maximis et Minimis*, over diverse problemen met betrekking tot extreme waarden en raaklijnen. Hudde presenteerde een aantal regels waarvan sommige brede bekendheid zouden verwerven. Eén hiervan, die van bijzonder belang is, formuleerde Hudde als volgt:

'Indien in een vergelijking twee wortels gelijk zijn, en de vergelijking wordt vermenigvuldigd met een willekeurige rekenkundige rij, d.w.z. de eerste term van de vergelijking met de eerste term van de rij, de tweede term van de vergelijking met de tweede term van de rij, enz., dan zeg ik dat het produkt een vergelijking zal zijn waarin één van de voornoemde wortels voorkomt.' (Zie noten 4, 5 en 6 voor een bespreking hiervan.)

In moderne notatie uitgedrukt:

Indien r een dubbele wortel is van de veelterm $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ en indien $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ getallen in een rekenkundige rij zijn, dan is r ook een wortel van de vergelijking $a_0b_0x^n + a_1b_1x^{n-1} + \dots + a_nb_n = 0$.

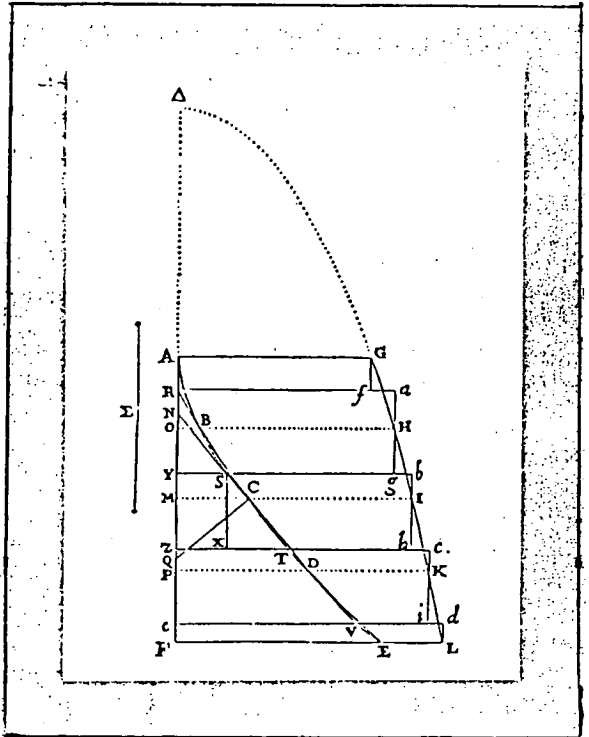
De lezer bedenke dat de bovenstaande regel overeenkomt met de stelling dat een dubbele wortel van $f(x) = 0$ ook een wortel is van $f'(x) = 0$. Dat hij dit resultaat bereikte zonder gebruikmaking van de analyse is een indrukwekkende prestatie – hoewel ook hier het onterechte idee moet worden vermeden dat de analyse in zijn geheel pas door Newton en Leibniz uit de doeken werd gedaan. Vele eerdere wiskundigen leidden uitkomsten af die we nu beschouwen als fundamentele onderdelen van de analyse, en Huddes werk met de maxima en minima bevat, zoals te verwachten, vele bewerkingen van veeltermen en exponenten die kenmerkend zijn voor de differentiaalrekening.



Figuur 4. Johannes Hudde op latere leeftijd. (Rijksmuseum, Amsterdam)

Nog een belangrijke bijdrage in Deel I van de *Geometria* was een studie door Van Heuraet over de rectificatie van krommen, d.w.z. een procedure

om de lengte van een kromme te bepalen met behulp van zijn algebraïsche weergave.^{4,5} Van Heuraet toonde een verband aan tussen de *lengte* van een kromme en de *oppervlakte* omsloten door een tweede kromme die nauw verwant is aan de eerste (Figuur 5).



Figuur 5. Van Heuraets constructie voor de rectificatie van krommen. De lengte van kromme ABCDE staat in een bepaalde verhouding tot de oppervlakte van AGHIKLF; en wel, de rectificatie van de 'kubieke parabool' $y^2 = x^3/a$ is, afgezien van een vermenigvuldigingsfactor, gelijk aan de kwadratuur van de kromme

$$y = \sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{1}{9}a^2}$$

Het bepalen van oppervlakten onder krommen – destijds bekend als *kwadratuur* – was een grote voorliefde van 17e-eeuwse wiskundigen, en er waren reeds vele standaardoplossingen voorhanden. Deze benadering van de rectificatie van krommen greep ook reeds vooruit op de analyse, en Van Heuraet slaagde erin, voortbouwend op Huddes uitkomst voor de krommen waarvoor geldt:

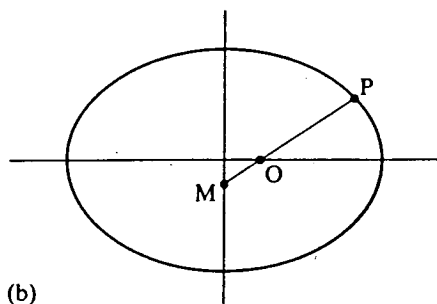
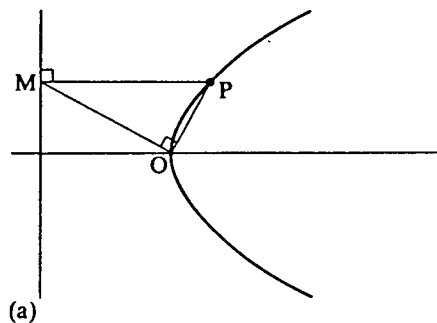
$$y^n = \frac{x^{n+1}}{a} \quad (n \text{ even}),$$

de oppervlakte-elementen te sommeren die overeenkomen met de lijnelementen van de oorspronkelijke kromme. Zodoende bereikte hij hetzelfde resultaat als de moderne methode, die gebruik maakt van de uitdrukking:

$$S = \int \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$$

(Zijn uiteenzetting was natuurlijk heel anders geformuleerd – zie 5 voor een vertaling en commentaar.) Bovendien vormde Van Heuraets techniek een belangrijke breuk met Descartes, die evenals Aristoteles geloofde dat krommen en rechte lijnen wezenlijk verschilden en, op filosofische gronden, niet vergeleken konden worden.^{6,7}

Deel II van de *Geometria* begint met een herdruk van Van Schootens wiskundeleergang (die voor het eerst uitkwam in 1651) en bevat een belangrijke verhandeling over kegelsneden door Johan de Witt. De Witts bijdrage, *Elementa curvarum linearum*, was op zich al omvangrijk genoeg om in twee delen te worden gepubliceerd; er zijn bovendien exemplaren van bekend in de vorm van een zelfstandige uitgave. Het eerste deel gaf een reeks methoden om de kegelsneden te construeren, waarvan er twee in moderne vorm geïllustreerd zijn in Figuur 6. (Zie 8 voor een gedetailleerde bespreking.) Voor Descartes was het, zoals reeds gezegd, onvoldoende om een kromme algebraïsch te beschrijven – de kromme moest ook meetkundig construeerbaar zijn. De Witts constructies zijn duidelijk in dit licht gepresenteerd; ze bouwen voort op eerdere, soortgelijke methoden, met name die van Van Schooten zelf, in 1646 gepubliceerd in *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus* (Figuur 7). Het tweede deel van De Witt gaat verder uitvoerig in op de algebraïsche weergave van de kegelsneden en vormt in feite een leerboek voor de analytische meetkunde.

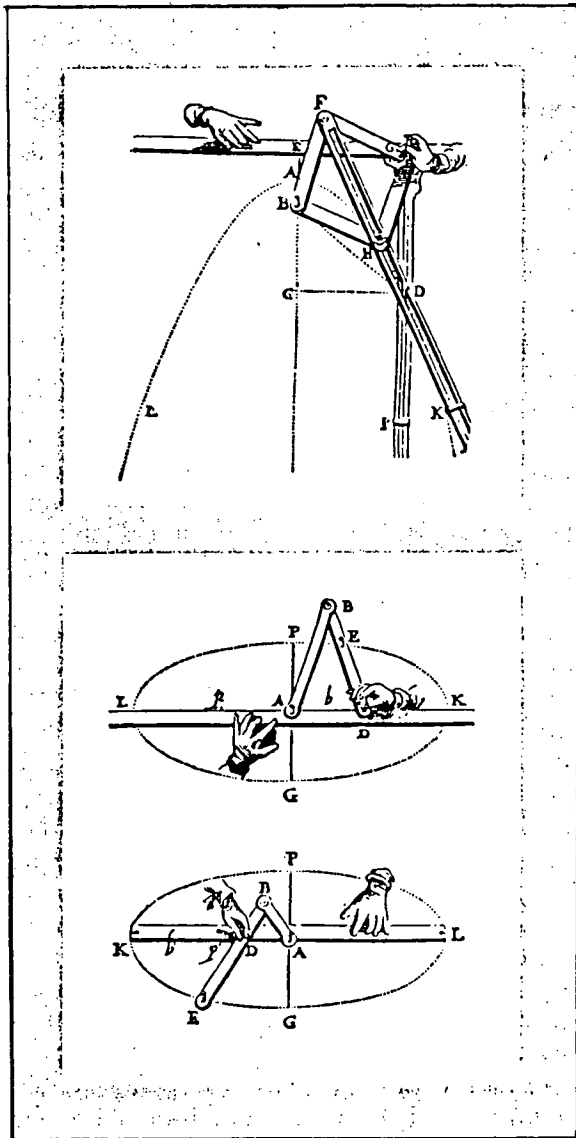


Figuur 6. Johan de Witts constructie van (a) de parabool en (b) de ellips. In (a) beschrijft het punt P een parabool indien het zodanig beweegt dat de rechte hoeken bij O en M gehandhaafd blijven (de afstanden OP en OM zijn variabel). In (b) dient men zich voor te stellen dat de punten O en M op het vaste lijnstuk MP respectievelijk langs de horizontale en de verticale as glijden. Punt P beschrijft dan een ellips.

Van Schootens *Geometria* werd, in zijn diverse edities, verplichte lectuur voor een hele generatie wiskundigen. Naar verluidt heeft Newton de stof zonder hulp van anderen onder de knie gekregen, terwijl Leibniz⁹ als knaap de poging maar opgaf. De inhoud weerspiegelt het wiskundige klimaat van die tijd, en heeft dus betrekking op onderwerpen die de wiskundigen toen het meest bezighielden.

Niet verbazend is het dus dat elders onafhankelijk resultaten werden verkregen die vergelijkbaar waren met de hierboven genoemde. Terwijl De Witts werk aan de kegelsneden op het Europese vasteland bijdroeg tot de verbreiding van de analytische meetkunde, had John Wallis in 1655 nauw verwant werk in Engeland gepubliceerd. Resultaten op het gebied van de rectificatie, vergelijkbaar met die van Van Heuraet, werden onafhankelijk door zowel

William Neil als Fermat verkregen. Onnodig te zeggen dat in beide gevallen de gebruikelijke onenigheden over prioriteit rezen. (Zie 10 voor een overzicht en vergelijking.) In grote lijnen was de *Geometria* echter het onbetwiste compendium en handboek voor recent werk op het gebied van de analytische meetkunde, dat wezenlijk invloed had op de ontwikkelingen in de 17e-eeuwse wiskunde.



Figuur 7. Voorbeelden van Van Schootens constructies.

4 Verdere levensloop

Frans van Schooten overleed in 1660; er is weinig bekend over de aard van zijn vroegtijdige dood. Zijn beste wiskundestudenten volgden hun eigen, niet-academische carrières.

Huygens begon uit te kijken naar belangrijke wiskundige ontwikkelingen buiten de Republiek. In de jaren '50 had hij grote bekendheid verworven als een vooraanstaand geleerde, door zijn uitmuntende werk aan het slingeruurwerk, in de astronomie (in 1655-'56 ontdekte hij de ringen om Saturnus) en de mechanica. In 1666 vertrok hij naar Parijs om mede-oprichter te worden van de *Académie des Sciences*, en daar bleef hij, afgezien van korte onderbrekingen, tot 1681, ondanks de staat van oorlog tussen Frankrijk en de Republiek gedurende een deel van die periode. Het zwaartepunt van de natuurwetenschappelijke wereld had zich nu grotendeels van Nederland naar Engeland verlegd, vanwege het werk van o.a. John Wallis en Isaac Newton.

De Witt wijdde zijn leven aan de politiek, zoals eerder gezegd, als Raadpensionaris van de Republiek. Tenslotte stierf hij een gewelddadige dood, een van de meest beruchte incidenten in de Nederlandse geschiedenis, toen hij en zijn broer Cornelis na de Franse inval in 1672 door een woedende menigte werden gegrepen en aan stukken gereten.

Hudde daarentegen leidde een voor die woelige tijden tamelijk vreedzaam leven. Hij werd in 1672 door Willem III benoemd tot een van de vier burgemeesters van Amsterdam, en een van zijn eerste taken lag in het organiseren van de inundatie van de polders rondom Amsterdam tegen de Franse invasie. Hij was een zeer actief stadsbestuurder, en bekleedde de ambten van raad van de Vroedschap, schepen en thesaurier. Behalve zijn 21 ambtstermijnen als burgemeester (met de wettelijk voorgeschreven tussenpozen van een jaar) was hij ook raad van de Admiraliteit. Hij ontving voor zijn verdiensten hoge onderscheidingen.

Veel minder is bekend over Van Heuraet. In 1658 vertoefde hij samen met Hudde aan de Protestantse Academie van Saumur, waar hij de eerdergenoemde rectificatie van krommen bestudeerde, en in 1659 keerde hij terug naar Leiden, nu als student

medicijnen. Naar het schijnt is Van Heuraet in het jaar daarop gestorven.

Ondanks hun status als amateur bleven De Witt en Hudde belangstelling tonen voor de wiskunde en natuurwetenschappen. Hudde correspondeerde met Huygens over astronomische onderwerpen en werkte samen met Spinoza aan de constructie van telescopen. De Witt schreef in 1671 voor de Staten-Generaal een verhandeling over lijfrenten, waarbij hij wiskundig aantoonde dat de geboden rentetarieven veel te hoog waren. Later dat jaar correspondeerde hij met Hudde over een aanverwant onderwerp. De wiskundige talenten van beiden staan buiten kijf. Huygens schreef aan Wallis dat als De Witt al zijn krachten zou hebben gespaard voor wiskundig werk, hij hen allen overtroffen zou hebben¹¹, terwijl Leibniz, in 1697, over een uitzonderlijk moeilijk wiskundig probleem (de brachistochroon) schreef dat een oplossing slechts te verwachten was van De l'Hospital, Newton, de Bernoulli's of Hudde, 'indien laatstgenoemde zulk werk niet lang geleden had gestaakt' (4, p.267).

In dit artikel heb ik gepoogd een indruk te geven van de Nederlandse bijdrage aan de wiskunde in de Gouden Eeuw, zonder in te gaan op technische details. De geïnteresseerde lezer zal een uitvoerige wiskundige bespreking van het hier geschetste werk in de onderstaande literatuur kunnen vinden, en wel in die over Van Schooten³, over Hudde⁴, over Van Heuraet⁶ en over De Witt⁸. In 12 staan diverse bijdragen over Huygens, en 13 behandelt de hele periode. Deze publikaties bevatten tevens uitvoerige bibliografieën van zowel primaire als secundaire bronnen.

Dankbetuiging

De auteur is dank verschuldigd aan J. A. van Maanen van de Faculteit voor Wiskunde en Informatica van de Rijksuniversiteit Utrecht, voor zijn uitvoerige commentaar op een conceptversie van dit artikel, en voor het beschikbaar stellen van bronmateriaal uit zijn eigen onderzoek.¹³

Literatuur en noten

Behalve de hieronder genoemde titels zijn voor dit artikel ook afzonderlijke vermeldingen in de volgende werken waardevolle bronnen gebleken:

Dictionary of Scientific Biography (ed. C. C. Gillispie), New York, 1970-1980; *Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek* (ed P. C. Molhuysen and P. J. Blok), Leiden, 1911-1937.

1. C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry*, Scripta Mathematica (1956), 103-104.
2. M. Kline, *Mathematics in Western Culture*, Penguin, 1972, Ch. 12.
3. J. E. Hofman, *Frans van Schooten der Jüngere*, Boethius II, Wiesbaden (1962). Biografische gegevens op pp. 1-8.
4. K. Haas, 'Die mathematischen Arbeiten von Johann Hudde (1628-1704) Bürgermeister von Amsterdam,' *Centaurus*, 4 (1956), 235-284.
5. A. W. Grootendorst and J. A. van Maanen, 'Van Heuraet's letter (1659) on the rectification of curves. Text, translation (English, Dutch), commentary,' *Nieuw Archief voor Wiskunde* 30, (1982), 95-113.
6. J. A. van Maanen, 'Hendrick van Heuraet (1634-1660?): His Life and Work,' *Centaurus* 27 (1984), 218-279.
7. H. J. M. Bos, 'On the Representation of Curves in Descartes' *Géométrie*,' *Arch. Hist. Exact. Sci.* 24 (1981), 295-338.
8. J. B. Easton, 'Johan de Witt's Kinematical Constructions of the Conics,' *Mathematics Teacher* 56 (1963), 632-635.
9. D. M. Burton, *The History of Mathematics: An Introduction*, Newton, MA: Allyn & Bacon (1985), 362, 384.
10. C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, New York: Wiley (1968), Ch. 18.
11. J. B. Easton, citaat uit een artikel over De Witt in *Dictionary of Scientific Biography*, p. 466.
12. H. J. M. Bos et al. (ed.), *Studies on Christiaan Huygens*, Lisse: Swets & Zeitlinger (1980).
13. J. A. van Maanen, *Facets of the history of mathematics in the Netherlands in the seventeenth century* (1987), dissertatie, Faculteit voor Wiskunde en Informatica, Rijksuniversiteit Utrecht. Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht.

Over de auteur:

De auteur is verbonden aan de Faculteit voor Technologie van de Open Universiteit te Milton Keynes, Engeland.

Oorspronkelijke titel: Cartesian Geometry: The Dutch Contribution.

Verschenen in *The Mathematical Intelligence*, Vol. 9, no. 4 (1987); pp. 38-44.

Vertaling: A. C. Bardet, Groningen

► Examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (8)

Truus Dekker

In de afgelopen periode hebt u een aantal opgaven en uitwerkingen kunnen bekijken van het experimentele examen lbo/mavo 1990. Het is duidelijk dat ook binnen het 'oude' examenprogramma heel andere vragen gesteld kunnen worden dan tot nu toe gebruikelijk was. Vragen via contexten, een grotere vrijheid bij het beantwoorden van de vragen, zélf bepalen in welke orde van grootte het antwoord gegeven moet worden, het is niet gemakkelijk allemaal. Dat moet uiteraard geoefend worden; daarom zijn vorig jaar een aantal oefenexamens gemaakt die u mét de examens in de examenbundel vindt die via de SLO (nog) verkrijgbaar is.

Inmiddels zijn we alweer bijna aan het examen van 1991 toe. Daarom wil ik u ditmaal enkele opgaven laten zien uit een oefentoets die n.a.v. het experimentele lespakket 'de berg' in klas 4 mavo werd gegeven. Dit lespakket is speciaal gemaakt om leerlingen duidelijk te maken hoe allerlei onderwerpen met elkaar samenhangen. Veel stukjes wiskunde die in de loop van de jaren werden geleerd worden hier binnen een nieuwe context teruggevraagd.

Het woord 'sequia' uit de oefentoets betekent 'irrigatiekanaal'. In het lespakket 'de berg' komt een

gedeelte voor over een gebied in Marokko waar deze naam gebruikt wordt. De leerlingen mochten bij het maken van de oefentoets hun boek erbij nemen.

Vraag 2 is een mooi voorbeeld van een opgave die aan de plaatselijke situatie van de leerlingen is aangepast. De vraag werd goed beantwoord, ook door matige leerlingen. Dat zouden mijn leerlingen uit klas 4 mavo absoluut niet kunnen! Terwijl je er eigenlijk alleen voor hoeft te weten dat de zon, gezien vanaf de aarde, ongeveer een halve graad in beslag neemt en in 24 uur 360° aflegt. Per uur 15° , dus na ongeveer 6 minuten is de zon wel achter het dak verdwenen.

Vraag 3, over de snelheid van de aarde bij de evenaar werd goed gemaakt. Wat wel lastig blijft is de nauwkeurigheid waarmee het antwoord gegeven moet worden. Veel leerlingen nemen het zekere voor het onzekere en noteren kennelijk alle cijfers die ze op hun rekenmachine zien staan, 1666,6667 km/uur.

En dan de vraag over de omloopsnelheid op 52° Noorderbreedte. Theo schrijft daarbij:

'We gaan overal even hard! Want de ene helft kan niet harder draaien als de andere. De omloopsnelheid is nergens op aarde het minst.'

Zijn leraar vertelt daarover dat hij in de klas aan de hand van een aardbol de rotatie van de aarde heeft laten zien, misschien is daar de gedachte over 'overal even hard gaan' vandaan gekomen? Overigens was Theo lang niet de enige die deze opgave moeilijk vond.

Een aantal leraren heeft er zijn bezorgdheid over uitgesproken dat het niveau van het experimentele lbo/mavo-examen veel lager zou zijn dan het huidige. Ik ben ervan overtuigd dat deze collega's onderschatten hoe moeilijk het is om kennis toe te passen op nieuwe situaties. De antwoorden op de goede manier kunnen formuleren. En laten zien dat een schatting maken niet hetzelfde is als goed of minder goed gokken. Natuurlijk blijven er een heleboel zaken over die domweg uit het hoofd geleerd moeten worden en er is ook niets op tegen om daar vragen over te stellen. Maar een leerling die alleen dat laatste heeft geleerd heeft echt te weinig wiskundige bagage meegekregen om in het vervolgonderwijs goed mee te kunnen komen.

● Werkblad ●

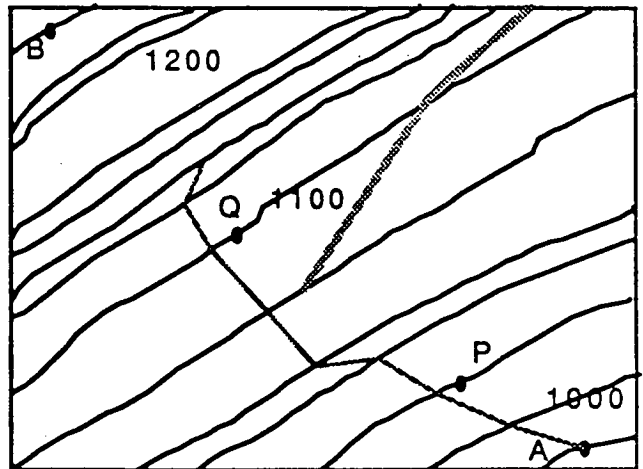
► De berg

1 ——— pad

————— sequia

schaal 1 : 25000

verschil tussen twee
aangrenzende hoogtelijnen
is 20 meter



- Maak het pad verder af van A naar B.
Het mag nergens steiler worden dan het al is.
- Een irrigatiekanaal mag nooit meer dalen dan 3%.
Klopt dat hier?
- Teken een mogelijke voortzetting van het irrigatiekanaal.
Waar ongeveer komt dan een bruggetje in het pad van A naar B? Teken dat.
- Teken de doorsnede door P en Q.

Uit: oefentoets bij experimenteel lespakket 'de berg'.

► De zon en de aarde

2 Ik bevond me in hotel 'De Kroon'.

Zo zag ik op 24 oktober om 16.00 uur de zon boven het dak van de ABN.



dak ABN

Hoe laat was de zon achter het dak van de ABN verdwenen?

3 De aarde draait in 24 uur om haar as.

De snelheid op de evenaar is hierdoor 40000 km in 24 uur. Dat is km/uur.

Waar op aarde is deze omloopsnelheid het minst?

Hoe hard gaan wij, op 52° noorderbreedte?

Uit: oefentoets bij experimenteel lespakket 'de berg'.

► **Eenvoudige wiskunde van het broeikaseffect**

A. Kattenberg

1 Inleiding

Het broeikaseffect mag zich in een warme belangstelling verheugen. Die bekendheid kan motiveren om te willen begrijpen 'hoe het werkt'. We laten zien hoe dat kan, met behulp van wiskundige modellen, gebaseerd op natuurkundige beschouwing: de eenvoudigste wiskundige modellen van het Aardse klimaat kunnen heel goed in een educatieve context gebruikt worden.

Hiervoor bekijken we de Aarde als planeet: we richten de blik op een geïsoleerde wereld die vrij in de ruimte zweeft. Dit beeld geeft een eerste natuurkundige benadering van het Aardse klimaat. In die beschouwing blijkt de warmtehuishouding van de Aarde eenvoudig te beschrijven (figuur 1, paragraaf 2).

Maar er is iets vreemds. De temperatuur die de Aarde vanuit de ruimte gezien lijkt te hebben is veel lager dan de bij ons bekende gemiddelde temperatuur van het aardoppervlak. Dit verschijnsel heet het broeikaseffect (figuur 3):

Het is een waarneembaar feit dat de stralingswerking van een aantal spoorgassen (dwz. in kleine concentratie aanwezig) plus vocht, van onze atmo-

sfeer een 'warme deken' maken, die het oppervlak afschermt tegen de kou van de ruimte. Het is zeker dat wij mensen, o.a. door verbranding van fossiele brandstoffen als olie, kolen en gas, o.a. door ontbossing op grote schaal, de hoeveelheid spoorgassen die bijdragen aan het 'warme deken'-effect in de atmosfeer bijna hebben verdubbeld sinds het begin van de industriële revolutie (verdubbeling wordt in de eerste helft van de volgende eeuw verwacht). De meeste onderzoekers menen dat wij daardoor het klimaat op Aarde aan het verwarmen zijn.

Ook de natuurkunde van die 'warme deken' blijkt, in eerste benadering, eenvoudig wiskundig te beschrijven (paragraaf 3).

2 Het stralingsevenwicht van de Aarde

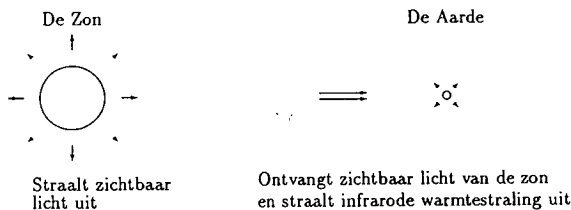
Afgezien van wat ruimtesondes die wij de Aarde afschieten en een hoeveelheid stof en meteorieten die vanuit de ruimte op de Aarde terecht komen heeft de planeet Aarde alleen *stralingsuitwisseling* met de ruimte eromheen. Daar de (over enkele jaren en over de hele globe) gemiddelde temperatuur in eerste benadering constant is, heerst er een *stralingsevenwicht* tussen de Aarde en de rest van het heelal.

De Aarde ontvangt haar energie voornamelijk als 'zichtbaar' licht van de Zon. Die zonne-energie warmt de Aarde op, die verwarmde Aarde straalt haar warmte weer uit naar de ruimte. Zulke warmtestraling wordt ook wel 'infrarood-' of 'langgolelige' straling genoemd. De natuurkundige wetten die de warmteuitwisseling tussen objecten door middel van thermische (met warmte te maken hebbende) straling beschrijven werden in het begin van deze eeuw ontdekt. Zij gelden zowel voor de hete Zon (die zo heet is dat ze in 'zichtbaar licht' straalt) als voor de veel koudere Aarde (die infrarood uitstraalt).

Als historische kanttekening kan vermeld worden dat deze onderzoeken destijds leidden tot de invoering van het 'quantum' ('stralingsdeeltje') door de Duitse onderzoeker Max Planck, wat aanleiding gaf tot een revolutie in de natuurkunde (de geboorte van de quantumtheorie).

Wij hebben van die stralingswetten hier alleen de wet van Stefan-Boltzmann nodig. Die wet zegt dat elk oppervlak dat een (absolute) temperatuur T heeft stralingsenergie uitzendt, en wel een hoeveelheid σT^4 per m^2 per seconde. (σ heet 'de constante van Stefan-Boltzmann' en zij heeft een waarde van $5.7 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$).

Met behulp van deze wet en wat eenvoudige meetkunde kunnen we het stralingsevenwicht van de Aarde beschrijven (zie figuur 1):



Figuur 1: De Aarde en de Zon zijn stralende lichamen in de ruimte; de temperatuur van de Aarde wordt bepaald door het (stralings)-evenwicht tussen opvallende en uitgestraalde energie.

– Het uitgestraalde vermogen van de Zon, die een temperatuur $T_{\odot}$ heeft en een (bol)straal van $R_{\odot}$ bedraagt:

$$4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4$$

(Oppervlak van bol $\times$ uitstraling per oppervlakeenheid; dit is dus die wet van Stefan-Boltzmann in de praktijk!)

– De energieflex (hoeveelheid energie die per tijdseenheid door een eenheidsoppervlak stroomt) op een afstand r van het zonnestraalpunt is:

$$\frac{4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4}{4\pi r^2}$$

(Totaal uitgestraald/boloppervlak met straal r)

– De Aarde, die op een afstand van $r_{\oplus}$ haar jaarlijkse kringetje om de zon draait onderschept een hoeveelheid van die zonne-energie; hiervan wordt een fractie α meteen weer teruggekaatst (bv. door witte wolken en poolkappen; α heet 'albedo'); totaal vangt de Aarde aan zonne-energie op:

$$\frac{R_{\oplus}^2 \sigma T_{\odot}^4}{r_{\oplus}^2} \pi R_{\oplus}^2 (1 - \alpha)$$

($\pi R_{\oplus}^2$ is het oppervlak dat de Aarde de zonnestraling biedt; een schijf met straal $R_{\oplus}$.)

– De Aarde straalt al die energie zelf weer uit, de ruimte in. Haar (effectieve) temperatuur $T_{\oplus}$ bepaalt het uitgestraalde vermogen:

$$4\pi R_{\oplus}^2 \sigma T_{\oplus}^4$$

(Weer de wet van Stefan-Boltzmann).

– De inkomende en uitgestraalde vermogens zijn gelijk als:

$$T_{\oplus} = T_{\odot} \sqrt{\frac{R_{\odot}}{r_{\oplus}}} \sqrt[4]{\frac{1}{4}(1 - \alpha)}$$

De straal van de aardbol ($R_{\oplus}$), van de zonnepool ($R_{\odot}$) en de temperatuur van de Zon ($T_{\odot}$) zijn al heel lang goed bekend. Het albedo van de Aarde (α) weten we tegenwoordig dankzij satellietmetingen heel nauwkeurig ($\alpha = 0,33$); vroeger moest α geschat worden, dat kan heel goed b.v. uit de weerkaatsing van 'aardlicht' door de maan (zg. 'asgrauw schijnsel').

Met: $T_{\odot} = 5800 \text{ K}$, $R_{\odot} = 7 \times 10^5 \text{ km}$,

$r_{\oplus} = 1,5 \times 10^8 \text{ km}$ en $\alpha = 0,3$ blijkt uiteindelijk dat de Aarde in stralingsevenwicht is met de Zon en de vrije ruimte als:

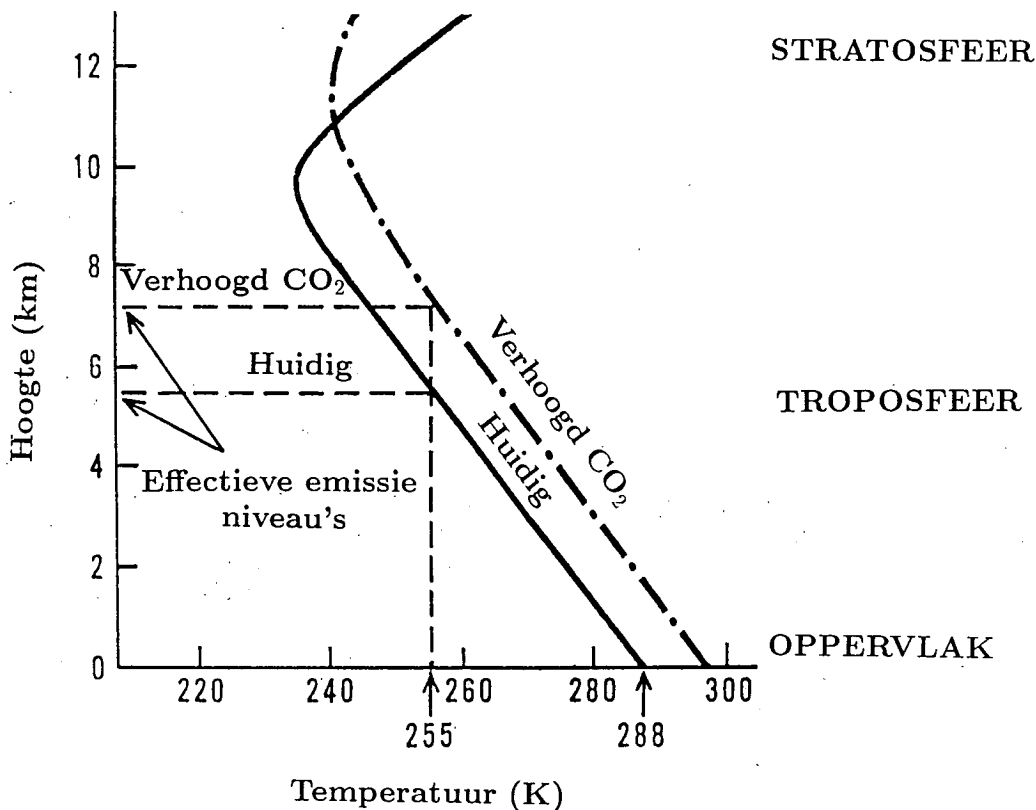
$$T_{\oplus} = 256 \text{ K} = -17^{\circ} \text{C}.$$

D.w.z. als het gemiddelde op de Aarde zeventien graden onder nul is! Dat lijkt erg laag, als je bedenkt dat de *aan het oppervlak* waargenomen gemiddelde temperatuur ongeveer vijftien graden boven nul is, dat scheelt maar liefst tweeëndertig graden.

Toch, als je *vanuit de ruimte*, met een satelliet, de Aardse straling meet, dan blijkt de Aarde precies de goede stralingstemperatuur te hebben. Die waargenomen straling komt van hoog in de atmosfeer, waar het aanzienlijk kouder is dan aan het oppervlak (zie figuur 2).

3 Broeikaseffect

De warmtestraling van het door zonlicht verwarmde aardoppervlak (of oceaan-oppervlaktewater)



Figuur 2: De atmosfeer is aan de grond veel warmer dan bovenin; dit heet het broeikaseffect.

kan niet zomaar de ruimte in verdwijnen. De warmtestraling wordt geabsorbeerd door de atmosfeer erboven: Door druppeltjes (wolken), stofjes (aerosolen) en moleculen water, kooldioxide, methaan, lachgas, CFK's, ozon enz. De atmosfeer wordt daardoor verwarmd en zij straalt zelf warmte uit, die het oppervlak extra verwarmt. In het eenvoudige model van figuur 3, wordt de (stralings-)werking van de voor warmtestraling 'on-doorzichtige' atmosfeer voorgesteld door een glazen plaat: Het zonlicht ('kortgolvlige straling'; Flux = I , inkomend) kan er ongehinderd door naar het aardoppervlak komen; de 'langgolvlige' warmtestraling (Flux = U , opwaarts) wordt voor een deel (f), geabsorbeerd door het glas. Dat glas

wordt daardoor verwarmd en straalt zelf (Flux = B naar beide kanten!).

Er is evenwicht als de fluxen op en neer elkaar opheffen;

buiten het glas:

$$I = (1 - f)U + B$$

en in de broeikas, tussen glas en grond:

$$I = U - B.$$

Als we B hieruit elimineren dan zien we dat de opwaartse flux aan het aardoppervlak, U , gelijk is aan:

$$U = \frac{I}{(1 - f/2)}$$

Met de wet van Stefan-Boltzmann brengen we het warmteverlies van de grond, U , in verband met de grondtemperatuur, T_g :

$$\sigma T_g^4 = U = \frac{I}{(1 - f/2)}.$$

Zonder glas ($f = 0$) is I gelijk aan U ; de oppervlakte-temperatuur is dan gelijk aan de stralingstemperatuur (256 K). Als het glas *al* de warmtestraling zou absorberen ($f = 1$) dan is U gelijk aan $2I$; twee keer zoveel. De grondtemperatuur zou in dat geval $\sqrt[4]{2} = 1,19$ keer zo groot zijn. Voor de stralingstemperatuur van 256 K die we hierboven vonden betekent dat een broeikaseffect van $0,19 \times 256 = 48,6$ graden.

De werkelijke atmosfeer geeft ongeveer 32 graden temperatuurverhoging aan de grond te zien, dat is een met 12,5% verhoogde stralingstemperatuur. D.w.z. als we voor $f = 0,75$ kiezen geeft het eenvoudige model dezelfde verwarming van de grond als wordt waargenomen. Als er meer infrarood absorberende spoorgassen in de atmosfeer komen wordt (in ons eenvoudige model) f groter, wat een groter broeikaseffect tot gevolg zal hebben.

Dit eenvoudige model illustreert het *principe* van het broeikaseffect goed. Het stelt echter de atmosfeer voor als een dunne plaat glas die alleen infrarood absorbeert, terwijl de werkelijke atmosfeer een behoorlijke dikte heeft en ook zichtbaar licht voor een deel absorbeert. Men kan het bovenbeschreven model echter eenvoudig uitbreiden met meerdere platen glas boven elkaar, die ook zichtbaar licht kunnen absorberen, om zo tot een betere benadering van het atmosferische temperatuurprofiel te komen. Daarnaast is er in de werkelijke atmosfeer ook verticaal warmtetransport door middel van *convectie* (opstijgende warme- en neerdalende koude 'luchtballen'), waarbij verdamping van vocht en vrijkomende ('latente') warmte uit condenserend vocht een belangrijke rol speelt (zg. natte convectie). Vanwege deze ingewikkeldheden kan de waarde: $f = 0,75$, die hierboven genoemd wordt, niet eenvoudig gerelateerd worden aan de concentratie van spoorgassen: het model is te eenvoudig om er meer dan een ruwe grootte-orde (laat staan veranderingen) van het broeikaseffect mee te schatten.

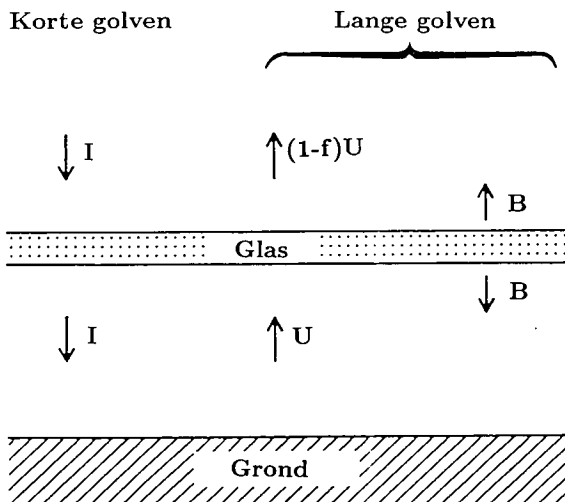
De eenvoudigste klimaatmodellen waar de onderzoekers 'voorspellingen mee doen' zijn dan ook zg. 'stralings-convectieve' modellen.

Bron

Het model van paragraaf 3 werd beschreven door Adrian Gill in het eerste hoofdstuk van zijn uitstekend overzichtsboek (over Geofysische stromingsleer) 'Atmosphere-Ocean Dynamics'.

Over de auteur:

Dr. A. Kattenberg is werkzaam bij het K.N.M.I. te De Bilt.



Figuur 3: Het stralingseffect van een atmosfeer die warmtestraling slecht doorlaat kan geïdealiseerd nagebootst worden door een glazen plaat die slecht warmtestraling doorlaat.

► Amerikaanse didactische richtlijnen

Piet Verstappen

Sinds kort beschik ik over een werkdocument met de titel 'Professional Standards for Teaching Mathematics'. Het is een vrij omvangrijk produkt van meer dan 250 bladzijden, vervaardigd door de 'Commission on Teaching Standards for School Mathematics' van de NCTM, de National Council of Teachers of Mathematics. De NCTM is een machtige vereniging van wiskundeleraars in de Verenigde Staten. Voornoemde commissie is zoiets als de didactiekcommissie van de NCTM.

Vernieuwing van het wiskundeonderwijs

De NCTM behartigt mede de vernieuwing van het wiskundeonderwijs. De NCTM gaat er vanuit, dat de docenten de sleutelfiguren zijn voor de wijze waarop wiskunde wordt onderwezen en geleerd in de scholen. De docenten moeten daartoe gedurende een lange termijn ondersteuning krijgen en kunnen beschikken over geschikt materiaal en geschikte bronnen.

Zo is in maart 1989 uitgekomen 'The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics'. Deze inhoudelijke richtlijnen, die wij tegenwoordig kerndoelen of eindtermen noemen, waren opgesteld in drie jaren van plannen, schrijven en

consensusvorming tussen leden van de NCTM en een groot veld van wiskundig betrokkenen uit wetenschap, techniek, onderwijsinstituties, zakenwereld, ouders, schoolleiders en bestuurders.

De NCTM vormt commissies op verschillende terreinen en breed samengestelde werkgroepen ondersteunen elke commissie. Daarbij wordt ook een beroep gedaan op de leerplanontwikkelingsprojecten. Momenteel legt een commissie, voornoemd, de laatste hand aan de didactische richtlijnen. Drie werkgroepen zijn daarbij betrokken, die elk een hoofdstuk hebben voorbereid, namelijk:

- wiskunde onderwijzen,
- wiskundeonderwijs evalueren en
- de scholing van de wiskundeleraars.

Daarnaast heeft de commissie een inleiding toegevoegd, een hoofdstuk over de ondersteuning geschreven en ook een kort afsluitend hoofdstuk over de te nemen stappen ter verbetering van het onderwijs. Mij is verteld, dat binnenkort het nog voorliggende werkdocument vrijwel ongewijzigd in de vorm van een definitieve handleiding zal verschijnen, vandaar dat ik er nu al op inga.

Didactische richtlijnen

Na de verschijning van de inhoudelijke richtlijnen lag het voor de hand, dat er didactische richtlijnen zouden verschijnen. Dat ze zo snel zouden verschijnen had ik eerlijk gezegd niet verwacht. Het is al een hele onderneming om tot heldere ideeën te komen over het gewenste doel. Zoveel hoofden, zoveel zinnen, is immers een uit de praktijk voortgekomen gezegde.

Vervolgens moeten de gevormde ideeën kort en bondig en zonder afbreuk te doen aan de duidelijkheid, worden beschreven. Volgens mij is de commissie daar op voortreffelijke wijze in geslaagd. Dit kan alleen gelukt zijn door het 'zoveel zinnen' te minimaliseren, door zo mogelijk dus uit te gaan van één principe. Het grondidee: *de leerlingen moeten hun eigen wiskundig begrip vormen*, spreekt inderdaad uit vrijwel elke bladzijde. Constructivisme dus. Weg met de huidige lesorganisatie: huiswerk bespreken, uitleg nieuw onderdeel, vastleggen volgende huiswerk, rest van de les alvast beginnen aan

het huiswerk, waarbij de docent(e) hier en daar helpt.

Op naar echte zelfwerkzaamheid, in samenwerking met anderen aan de slag met zinvolle open vraagstukken, die niet enkel op routine kunnen worden gemaakt. Op naar wiskundig redeneren en naar een eigen netwerk van cognitieve activiteiten. Let wel: de NCTM richt zich op het hele onderwijs aan 4-18-jarigen.

Ik meen dat het huidige klimaat gunstig is. Er was de laatste tijd heel wat ophef, ook in de pers, over de naar verhouding slechte resultaten van het Amerikaanse wiskundeonderwijs, vergeleken met bijvoorbeeld het Japanse. De New York Times publiceerde zo in juli 1990 enkele bijdragen onder koppen als: 'As Johnny learns to shop, Hiroko learns to think' en: 'Johnny can't add, Hiroko can'.

Aandachtsgebieden

Uit de opzet van het werkdocument spreekt ervaring. De hoofdstukken waarin de didactische richtlijnen verwoord worden zijn op eenzelfde, overzichtelijke wijze ingedeeld. Deze hoofdstukken beginnen met een overzicht (een korte samenvatting), daarna komt een inleiding op de inhoud van het hoofdstuk, gevolgd door een korte beschrijving van de uitgangspunten die gehanteerd werden. Dan komen er richtlijnen, gegroepeerd naar een aantal gebieden; elk van deze (aandachts-)gebieden is voorzien van een uitwerking, gevolgd door een aantal taferelen (doorkijkjes).

Zo komen er in het hoofdstuk over het wiskunde onderwijzen de volgende zes aandachtsgebieden voor:

- *waardevolle wiskundige opdrachten,*
- *de rol van de docent in het leergesprek,*
- *de rol van de leerling in het leergesprek,*
- *instrumenten voor het verbeteren van het leergesprek,*
- *de leeromgeving,*
- *de analyse van onderwijs en leren.*

Ik kan in dit bestek niet in detail treden, daarom volsta ik met een voorbeeld en wel met een willekeurig genomen aandachtsgebied uit één van de

andere hoofdstukken. Uit het hoofdstuk over het evalueren van wiskundeonderwijs nam ik het volgende aandachtsgebied:

Wiskunde als probleem oplossen, redeneren en communiceren.

Hierin komen onder meer de volgende didactische richtlijnen voor:

- *de docent blijft vragen stellen om het redeneren van de leerlingen op een hoger niveau te brengen,*
- *de docent observeert de gesprekken in de klas om zeker te weten dat alle leerlingen meedoen,*
- *de docent leest vakbladen om zijn/haar didactische vaardigheid te vergroten,*
- *de docent begint de les met het vaststellen van en voortbouwen op wat de leerlingen kunnen en kennen.*

Deze, en andere richtlijnen, staan genoteerd naast taferelen uit lessen. Deze taferelen acht ik van het hoogste belang. In de taferelen kunnen de docenten zich waarschijnlijk het beste herkennen. Immers, men beschrijft gewone docenten in hun voorbereiding op de bespreking van een wiskundig probleem en de ervaring daarmee in de klas. Het zijn voortreffelijke doorkijkjes naar docenten en naar klassen die iets nieuws voorgeschoteld krijgen. Elk van de taferelen is op zich niet revolutionair, maar samen zijn ze zeker toereikend om te begrijpen waar het over gaat.

Conclusies

Nogmaals, in deze globale reactie kan niet alles aan de orde komen. Ik voorspel, dat het boekwerk een grote invloed zal hebben op het toekomstig wiskundig gebeuren in niet alleen de Verenigde Staten. Het is fraai opgezet en goed doordacht. Het is ook veel gematigder in de doelstellingen vergeleken met een aantal jaren geleden. Geen wiskunde voor allen meer, maar *wiskundig vermogen voor allen*. Daar staat tegenover, dat communicatief onderwijs veel van de docenten vraagt.

Bekijk ik het vanuit mijn visie op de inhoud van het wiskundeonderwijs, en vooral vanuit het oogpunt van de leerplanontwikkeling, dan ben ik enigszins teleurgesteld over de keuze van de voorbeeldopgaven.

Neem:

– Een boek wordt willekeurig opengeslagen. Het produkt van de paginanummers is 3192. Bij welke pagina(s) is het boek opengeslagen?

Duidelijk onrealistisch en gekunsteld.

Helemaal uit de oude doos is:

– Zoek alle waarden van x waarvoor

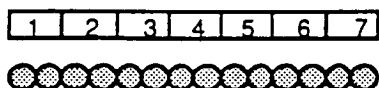
$$(x^2 - 5x + 5)^{x^2 - 9x + 20} = 1$$

Ik heb er wel begrip voor, dat er aansluiting moet blijven met het huidige gebeuren. Deze opeenstapeling van zinloos gepriegel gaat me echter te ver.

Onverantwoorde slordigheden vind ik

– Hoe groot is $\frac{3}{4}$ van 18?

en:



als visuele voorstelling van $7 : \frac{1}{2}$.

Wat verder geheel ontbreekt is inzicht in de samenhang tussen de gewenste cognitieve activiteiten en de open vragen.

Desalniettemin is 'Professional Standards for Teaching Mathematics' een interessante uitgave, ook dienstig en nuttig bij onze eigen, Nederlandse ontwikkeling van wiskundeonderwijs.

Over de auteur:

Piet Verstappen is werkzaam bij de SLO te Enschede.

Opmerking over de vertaling van enkele termen uit de oorspronkelijke Amerikaanse tekst.

Bij de vertaling van deze termen is getracht zo goed mogelijk aan te sluiten bij wat in Nederland wordt gezegd en geschreven. Het woord 'richtlijnen' (Am. 'Standards') klinkt wellicht te voorschrijvend; dat is uiteraard niet de bedoeling.

Het Amerikaanse 'vignettes' is hier vertaald met 'taferelen' of 'doorkijkjes'. In Nederlandstalige onderwijskundige literatuur is 'vignetten' ingeburgerd.

► Waar zit de fout?

Van drs. M. S.R. Nihom mochten wij onderstaand stukje ontvangen. Hij zond het ons naar aanleiding van de bijdrage '40 jaar geleden' in Euclides 66-1. Ten einde geen extra aanwijzing te geven laten wij de vermelding van de vindplaatsen van de bladvulling en van de toelichting daarop vooralsnog achterwege.

Bladvulling

$$\sqrt[3]{-1} = \frac{1}{2}.$$

We lossen $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x-3} = 1$ op de bekende manier op n.l. door gebruik te maken van

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

Men vindt dan $(1-x) + (x-3) + 3\sqrt[3]{(1-x)(x-3)} \times 1 = 1$, waarbij we alles zo duidelijk mogelijk aangeven, zoals de lezer ziet.

De herleiding geeft $\sqrt[3]{-x^2+4x-3} = 1$, dus $x^2 - 4x + 4 = 0$, waaruit $x = 2$.

Substitutie geeft $\sqrt[3]{1-2} + \sqrt[3]{2-3} = 1$, dus $\sqrt[3]{-1} = \frac{1}{2}.$

Waar zit de fout? Inzendingen voor 1 Mei 1935 aan Wijdenes.

► **Het nieuwe leerplan 12-16**

Hoe zit het met nascholing?¹

Francis Meester, Joop van Dormolen

Ergens, ook op verschillende regionale bijeenkomsten van oktober en november 1990, heeft het geklonken: 'We vinden dat nascholing verplicht moet zijn en wel onder schooltijd'. Het klonk als een noodkreet aan de C.O.W.² of aan de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren om hier achter te staan en zich daar sterk voor te maken.

Er staan drie dingen in deze uitspraak:

- er moet nascholing komen,
- die nascholing moet verplicht zijn,
- die nascholing moet onder schooltijd gebeuren.

Over elk van deze drie willen we iets zeggen.

Er moet nascholing komen

Laten we er duidelijk over zijn. Wij, als vertegenwoordigers van de NVvW in de C.O.W. vinden ook dat er gelegenheid moet zijn om op een goede en goed geregelde manier bij- en nascholing te krijgen. We zijn van mening dat zonder bij- en nascholing het hoogst onwenselijk zou zijn een nieuw leerplan in te voeren van een inhoud die in grote lijnen overeenkomt met wat er in het *Concept examenprogramma mavo/lbo C/D*³ staat.

De noodzaak van nascholing komt niet zozeer voort uit de veranderingen in de wiskundige inhoud. Wat er aan echt nieuwe dingen in staat zou eventueel wel zonder georganiseerde nascholing bij te leren zijn. Anders is het met de doelstellingen van het nieuwe leerplan. Voor veel leraren zal de manier waarop over wiskunde-onderwijs binnen de nieuwe doelen gedacht wordt betrekkelijk nieuw zijn. Dit heeft didactische consequenties waar men mee moet leren werken. Niet iedereen heeft daar ervaring mee. We hebben er bij het bestuur van de NVvW op aangedrongen om schoolleidingen en vakbonden te informeren over de noodzaak van nascholing.

Het bestuur van de NVvW en ook de C.O.W. zijn het over die noodzaak helemaal eens. In de opdracht van de staatssecretaris aan de C.O.W. van 13 november 1986 staat welke concrete resultaten van de Commissie worden verwacht. Eén ervan luidt: 'Daarnaast zou moeten worden aangegeven welke aanpassingen nodig zijn in opleiding en nascholing van docenten om het nieuwe programma met succes te kunnen onderwijzen.' Verderop in dit artikel zullen we rapporteren wat de C.O.W. tot nu toe gedaan heeft om nascholing voor te bereiden. Eerst moeten we echter iets over de andere twee punten schrijven.

De nascholing moet verplicht zijn

Over een verplichte nascholing heeft de C.O.W. helemaal niets te zeggen. Sterker nog: in Nederland kan niemand verplicht worden nascholing te volgen bij verandering van een leerplan. Noch door het bevoegd gezag, noch door de overheid kan een verplichting opgelegd worden. Wel is de gevolgde nascholing één van de promotiecriteria om binnen de HOS⁴ een schaal hoger te komen. Verder kunnen de C.O.W. en de NVvW zich sterk maken voor de wenselijkheid van nascholing.

Als we verder doordenken over de vraag wie verplicht zou moeten worden nascholing te volgen, komen ook wij in de moeilijkheden. Wij kennen eerstegraders voor wie we nascholing hoogst wenselijk vinden en derdegraders voor wie we dat niet noodzakelijk zouden vinden. Er zijn ook heel wat leraren wier wiskundekennis een wat steviger basis

●

zou moeten hebben. Het zou heel moeilijk, zo niet ondoenlijk zijn mensen aan te wijzen die nascholing moeten volgen.

De nascholing moet onder schooltijd gebeuren

Er zijn minstens twee interpretaties van deze zin mogelijk. Een ervan is: leraren moeten via verlof-eenheden of taakuren vrijgesteld worden om nascholing te volgen. We weten niet of de C.O.W. in haar eindverslag van 1992 daar een mening over zal geven. Eerlijk gezegd hebben we minimale verwachtingen ten aanzien van de bereidheid van de overheid extra gelden te geven voor de nascholing wiskunde of om schoolbesturen voor te schrijven zulke taakuren te geven.

Het Rijk geeft geld voor nascholing. Dat geld is bedoeld om nascholing te kopen bij instanties die cursussen aanbieden. De terugtrekkende overheid stelt die gelden ter beschikking aan de scholen zelf (nauwkeuriger gezegd: aan de bevoegde gezagen) en laat het aan hen over waar zij dat geld aan willen besteden. Dat betekent, dat scholen hun eigen nascholingsplan moeten maken. We bevelen alle wiskundeleraren aan er op toe te zien dat de school gelden reserveert voor wiskundenascholing.

‘Nascholing onder schooltijd’ kunnen we ook interpreteren als een roostertechnische vraag aan de school: Maak het mogelijk een middag vrij te hebben om nascholing wiskunde te volgen.

Een voordeel daarvan is dat leraren niet na een vermoeiende dag met lessen ook nog een cursus moeten volgen. Het nadeel is duidelijk: een vol rooster op andere dagen.

We vinden het moeilijk de C.O.W. te vragen in haar eindrapport een aanbeveling in deze richting te doen. Het zou betekenen dat de C.O.W. zich bij voorbaat neerlegt bij de onmogelijkheid van de eerste interpretatie. We willen bestuur van de NVvW vragen een standpunt in te nemen en dat tijdig kenbaar te maken opdat leden erop kunnen reageren.

Daar hoeft u overigens ook niet op te wachten. Het is wenselijk, dat u uw ideeën aan het bestuur kenbaar maakt. De instanties die nascholing gaan verzorgen willen trouwens ook graag weten waar behoefte aan is. Ze hebben vragen als: wat is een geschikt tijdstip, wat is een geschikte dag om nascholing aan te bieden? Een andere vraag is hoe lang nascholing moet duren: is het beter een paar lange bijeenkomsten te houden, of hebt u liever een groter aantal kortere.

Wie is verantwoordelijk voor de nascholing?

Zoals gezegd heeft de C.O.W. de opdracht gekregen aanbevelingen te doen over nascholing en opleiding. Over die nascholing en opleiding zelf heeft de C.O.W. echter niets te zeggen. Nascholingscursussen moeten worden gegeven door de Hogescholen. Wellicht zijn er ook particuliere instellingen die dat willen doen. Scholen zullen geld krijgen om deze cursussen te betalen.

Gelukkig is de C.O.W. eigenwijs genoeg geweest te beslissen het niet alleen bij adviezen te laten, maar ook het nodige voorwerk te doen. Direct al bij de oprichting van de C.O.W. is een subcommissie *Nascholing/Opleiding* gevormd. Deze realiseerde zich heel goed, dat we voor bij- en nascholing voor wiskunde een rijke traditie hebben in Nederland. Allerlei instanties die ermee te maken hebben – Hogescholen, Universitaire Lerarenopleidingen, Pedagogische Centra, Vakgroep OW & OC, SLO, nog bijgestaan door leden van de NVvW – werkten goed en zakelijk samen, en dat moet zo blijven.

Wat gebeurt er nu?

Momenteel gebeurt er het volgende:

- Ook dit cursusjaar worden er vier nascholingsbijeenkomsten gehouden voor docenten van de A/B-scholen.
- Ter voorbereiding op nascholingscursussen in de toekomst is in april 1990 een kader-conferentie gehouden. In mei 1991 komt er weer een.
- Ten behoeve van de begeleiding van leraren aan de C-scholen⁵ is een Samenwerkingsgroep ge-

vormd van het A.P.S., leraren van Hogescholen, leden van het Team Wiskunde 12-16⁶ en van elke C-schooleen contactpersoon. Uit de ervaringen op de C-scholen moeten nieuwe nascholingsbehoeften en ideeën ontstaan. Leraren van de Hogescholen beschrijven die en zullen ze omzetten in materialen voor toekomstige nascholing. Het is de bedoeling dat deze materialen gebruikt zullen kunnen worden door iedereen die met nascholing te maken zal krijgen.

– Door het A.P.S. is in samenspraak met de C.O.W. een plan gemaakt voor de nascholing na 1992 als de C.O.W. formeel opgehouden zal zijn te bestaan. In dit plan wordt ervan uitgegaan dat er grote groepen leraren zijn, die zich willen oriënteren over en voorbereiden op het nieuwe programma.

Wat zijn de plannen van de overheid?

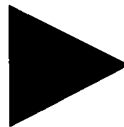
Nog altijd moet het politieke besluit genomen worden over de basisvorming. Op dit moment⁷ luiden de geruchten nog steeds dat de basisvorming in augustus 1992 ingevoerd gaat worden. Dan gaat ook het daarbij horende leerplan voor de basisvorming van start. Hoe verhoudt zich dit tot de plannen voor het nieuwe wiskundeprogramma? Het advies over het nieuwe mavo/lbo-programma wordt toch pas in de zomer van 1992 ingediend? Hopen we er maar op dat de basisvorming niet eerder dan 1993 van start gaat en dat dan tevens het nieuwe wiskundeprogramma ingevoerd kan worden? Kunnen er dan al schoolboeken op de markt zijn?

Dergelijke vragen kunnen we nu nog niet beantwoorden. De discussie en onduidelijkheden over de basisvorming in de afgelopen jaren heeft het werk van de C.O.W. er niet makkelijker op gemaakt. Professor Van der Blij, de eerste voorzitter van de C.O.W. kan al dat denken en speculeren over de basisvorming altijd mooi relativiseren: 'Een wet is pas wet als er Beatrix onder staat'.

Net als nu hebben we de afgelopen jaren vaker gedacht: Wanneer u dit leest is misschien het politieke besluit genomen en kunnen we verder denken en de strategie voor de invoering bepalen.

Noten

1. Het vorige artikel in deze serie verscheen in *Euclides* 66, 90/91, no. 7.
2. Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs.
3. Het *Concept examenprogramma mavo/lbo C/D* is in november 1990 uitgereikt aan alle deelnemers van de toen gehouden regionale cursussen. Het is verkrijgbaar bij de Vakgroep OW & OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, tel. 030-61 16 11 of bij het secretariaat van de COW, p/a SLO, postbus 2041, 7500 CA Enschede, tel 053-84 03 39.
Meer over de bedoelingen van het nieuwe leerplan is in diverse artikelen in *Euclides* en de *Nieuwe Wiskrant* te lezen. In het najaar 1990 is aan alle scholen een exemplaar van een *Nieuwe Wiskrant Special* (10e jaargang, nr. 1, september 1990) toegestuurd. Ook deze publikatie is bij bovengenoemde adressen verkrijgbaar.
4. Herstructurering Onderwijs Salarissen 1985.
5. Er zijn in augustus 1990 vijf C-scholen gestart met een beperkte invoering van een nieuw wiskundeprogramma. De lbo/mavo-leerlingen van deze scholen krijgen in 1994 een aangepast eindexamen. Dat geldt nu al voor leerlingen van A- en B-scholen. Dat zijn scholen die in 1987 en 1988 met de experimenten mee zijn gaan doen.
6. Het Team Wiskunde 12-16 is het uitvoerend orgaan van de C.O.W.
7. Op het moment dat we dit schrijven is het februari 1991.



Mededeling

Vakantiecursus 1991

De vakantiecursus 1991 wordt in Amsterdam gegeven op 23 en 24 augustus en in Eindhoven op 29 en 30 augustus. Het thema van de cursus is: **Meetkundige structuren.**

Eerste dag:

A. W. Grootendorst: *De meetkundige algebra bij Euclides*
H. J. A. Duparc: *Rondom de s-formule*
J. H. M. Steenbrink: *Meetkunde en groepen*
M. Hazewinkel: *Symmetrische problemen*

Tweede dag:

J. Simonis: *Configuraties en computers*
J. van de Craats: *Puzzles, pariteit en permutaties*
Praktische toepassingen
F. van der Blij: *De vierde dimensie*

Deelnamekosten: f 75,- exclusief maaltijden. Voor nadere inlichtingen en toezending van de uitgebreide brochure: Mevrouw M. Bruné, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Postbus 4079, 1009 AB Amsterdam, Tel. 020-5924058.

● Verenigingsnieuws ●



► Van de bestuurstafel

Agneta Aukema-Schepel

Wiskunde 12-16 blijft een topic

De regionale werkgroepen zijn intensief en enthousiast aan het werk en rapporteren regelmatig aan het bestuur. Ook wiskundesecties van scholen en individuele leden leveren ons commentaar op de COW¹-plannen.

Hartelijk dank voor al deze bijdragen, die wij uitgebreid bestuderen. De algemene tendens tot dusverre is er een van redelijk enthousiasme, maar onder andere over vectoren en grafen is geen eenstemmigheid.

Weliswaar hoeft de NVvW, evenals de VALO², pas medio 1992 een onafhankelijk advies aan de staatssecretaris van O & W uit te brengen over de definitieve COW-voorstellen, maar dankzij de vertegenwoordigers van de NVvW in de COW, Francis Meester en Joop van Dormolen, wordt deze kritiek van onze leden nu al meegenomen in het COW beleid.

Er is een prima samenwerking met de VALO. De leden van onze regionale werkgroepen werden uitgenodigd voor een in Amersfoort gehouden conferentie, waarop men meningen van de eigen werkgroep kon uitwisselen met meningen uit andere delen van het land en andere schooltypen. Niet alleen voor het toekomstige wiskundeonderwijs in het algemeen is het meedenken nuttig, maar het

deelnemen aan zo'n werkgroep blijkt zeer verrijkend voor de deelnemers persoonlijk; het geeft hen vaak een heel nieuwe kijk op wiskunde en nieuwe ideeën voor de dagelijkse lespraktijk, zo wordt gemeld. Naarmate men zich meer in de COW-plannen verdiept blijkt, in het algemeen, het enthousiasme hierover toe te nemen. Samen met de VALO zijn we bezig met een precieze analyse van de bevindingen van onze leden; in één van de volgende nummers zal hierover worden gepubliceerd. In dit najaar organiseren wij weer regionale bijeenkomsten om u op de hoogte te houden van alle ontwikkelingen. Hierbij wordt samengewerkt met de COW en het team W12-16 (het uitvoerend orgaan), de VALO en het APS³, dat een invoeringsplan heeft gemaakt voor het leerplan wiskunde 12-16.

Invoering basisvorming

Nu ik dit schrijf – half maart – ziet het er naar uit dat de basisvorming in augustus 1993 ingevoerd wordt. Wij vinden dat beslist **gelijktijdig** met de basisvorming het nieuwe leerplan W12-16 ingevoerd moet worden en wel geleidelijk vanaf de eerste klas. Op 7 maart 1991 schreven wij daarom een brief aan de staatssecretaris van Onderwijs, met afschrift aan de Vaste Kamer-Commissie Voor Onderwijs en Wetenschappen van de Tweede Kamer, om dit te benadrukken. Bij alle besprekingen tot nu toe is gebleken dat de docenten uiterst beducht zijn voor overhaaste invoering omdat vóór de invoering van de nieuwe leerplannen een uitgebreide bijscholing van alle docenten noodzakelijk is. Zonder deze bijscholing is vernieuwing tot mislukken gedoemd, omdat het nieuwe programma niet alleen andere leerstof zal omvatten, maar ook andere manieren van werken in de klas zal vragen. De kerndoelen van de basisvorming mogen geen storende breuk in de leerweg van het nieuwe wiskundeleerplan vormen, maar moeten hierin ingebed zijn.

Het APS en alle Nieuwe Leraren Opleidingen willen samen de 'voor' scholing en verdere begeleiding in de eerste jaren na de invoering verzorgen, maar..... welke momenten van de week, losse

dagdelen of een weekendcursus? **Wat wilt u? Meld het ons!**

Euclides

Tot onze grote spijt stopt zowel Auke Oosten als voorzitter, als Agnes Verweij binnenkort als eindredacteur van Euclides. Wij zijn hen beiden zeer dankbaar voor het enorm vele goede werk dat zij voor de kernredactie deden. Het bestuur is op zoek naar geschikte opvolgers, het zal niet meevallen gelijkwaardige opvolgers te vinden; Euclides is mede onder hun leiding een prima vakblad geworden! In het volgende nummer komen wij terug op het afscheid van Auke Oosten in de redactievergadering van 20 april.

Er gebeurt nog meer

Elders in dit nummer kunt u lezen over de zeer geslaagde proefbijeenkomst voor docenten wiskunde A en B havo. In het najaar zullen wij ook in andere regio's zulke bijeenkomsten organiseren. Let op de aankondigingen!

Na de invoering van Hewet heeft een commissie zich gebogen over nieuwe nomenclatuur. We overleggen met de Hawex-resonansgroep of er nog aparte nomenclatuurafspraken gemaakt moeten worden voor havo A en B, en wie zich dan daarover moeten buigen.

De voorzitter bezocht een bijeenkomst met vertegenwoordigers van andere lerarenvakorganisaties, waarin plannen besproken werden om te komen tot een platform, teneinde regelmatig met de minister te kunnen overleggen.

Het bestuur heeft eind januari ons advies over AGV⁴ binnen vwo wiskunde A aan PRINT⁵ gestuurd. Dit wordt in een volgend nummer van Euclides gepubliceerd.

Tenslotte vinden wij dat bekeken moet worden of nu de analyse en misschien, na havo B, ook weer de ruimtemeetkunde van vwo B aan herziening toe is, nadat alle andere wiskunde in avo/lbo aan de beurt gekomen is. Zo blijft er vernieuwing...

Noten

- 1 Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs.
- 2 Veld Advisering van de Leerplan Ontwikkeling.
- 3 Algemeen Pedagogisch Studiecentrum.
- 4 Automatische Gegevens Verwerking.
- 5 Project Invoering Nieuwe Technologieën.

► Prijsvraag 'Anders dan anders'

Rapport van de jury

De jury van de prijsvraag 'Anders dan anders', uitgeschreven door de NVvW en de NVORWO, heeft de inzendingen uitvoerig bestudeerd.

Allereerst wil de jury, bestaande uit mevrouw N. C. Verhoef en de heren J. van Dormolen, F. Goffree en F. van der Blij (voorz.), zijn waardering uitspreken voor het vele werk dat de inzenders aan hun werkstukken hebben besteed. De misschien wel wat hoog gestelde criteria hebben de inzenders niet ontmoedigd.

Toch is de jury wat teleurgesteld zowel over het kleine aantal (zes) inzendingen, als over de hoedanigheid van de inzendingen. Geen van de inzendingen betrof het beroepsonderwijs; de jury had gehoopt dat gebruik van de computer bij het wiskundeonderwijs een dankbaar te benutten mogelijkheid voor 'anders dan anders' zou zijn. De uitdaging om de vlakke meetkunde opnieuw een plaats in het voortgezet onderwijs te geven werd niet opgepakt.

De jury gelooft dat in Nederland en Vlaanderen veel leraren zijn die in de klas stukken leerstof anders dan anders aanbieden, welke van voldoende creatief niveau zijn om aan de prijsvraag mee te doen.

Om al deze redenen beveelt de jury de besturen aan thans maar één prijs uit te reiken, in de hoop op tal-

rijke inzendingen bij eventuele volgende prijsvragen.

Bij de beoordeling van de ingezonden werkstukken heeft de jury zich laten leiden door de vier beoordelingscriteria zoals geformuleerd in Euclides 65, pagina 30. Voorop stond 'Oorspronkelijkheid' gevolgd door 'Verantwoording', 'Toepasbaarheid' en 'Presentatie'.

Geen enkele inzending voldeed naar het oordeel van de jury volledig aan al deze eisen. Waren de gestelde criteria wellicht te zeer idealen?

De jury stelt de besturen voor de uit te reiken prijs te delen tussen twee inzendingen, die naar het oordeel van de jury aan verschillende van de criteria op verdienstelijke manier voldeden.

Eén van de twee bedoelde werkstukken behandelt het parkeren van auto's in een straat langs de trottoirs. Zeker een creatief idee om een toepassing van goniometrie te laten zien. Het andere werkstuk is een plan om leerlingen actief bezig te laten zijn met maquettes, kaarten enz. van hun eigen omgeving; de combinatie van verschillende methoden van aanpak was naar het oordeel van de jury verdienstelijk.

Een meer gedetailleerd oordeel over de beide voor bekroning voorgestelde werkstukken is verkrijgbaar bij E. de Moor, p.a. OW & OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.

Prijswinnaars

De prijs voor de prijsvraag 'Anders dan anders' 1990 is tijdens de studiedag van de NVORWO op 12 april 1991 uitgereikt aan:

Johan Gademan, wiskundeleraar voortgezet onderwijs, te Bennekom, voor zijn inzending: 'Parkeer-voorzieningen voor personenauto's', een lessencyclus over toegepaste goniometrie voor de derde klas van het voortgezet onderwijs, en

Jan Hofmeester, leraar basisonderwijs, te Delft, voor zijn inzending: 'De stad Assen', een lessencyclus over ruimtelijke oriëntatie voor de hoogste klassen van de basisschool.

► Vraagstukken

3444. Een cirkel en een orthogonale hyperbool snijden elkaar in vier punten. Als twee daarvan diametraal op de cirkel liggen, liggen de andere twee diametraal op de hyperbool. Toon dit aan.

3445. Van een boldriehoek is gegeven:

$$\alpha + a = 229^\circ; \beta + b = 157^\circ; \gamma + c = 207^\circ.$$

Bereken de hoeken en de zijden van de boldriehoek.

3446. Als het natuurlijke getal n het produkt is van λ oneven priemgetallen, dan heeft de congruentie $x^2 \equiv a \pmod{n}$ of geen, of 2^λ oplossingen. Toon dit aan.

3447. Gegeven zijn drie kruisende rechten, a , b en c . Onderzoek of het mogelijk is op deze rechten opvolgend de punten A, B en C zo te kiezen, dat $BC \perp a$, $CA \perp b$ en $AB \perp c$.

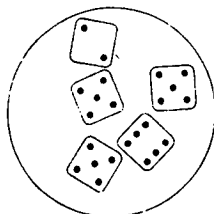
Vraagstukken uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 38, 1950-1951.

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

► Oplossing 624

Velen reageerden (zelfs telefonisch!) op de dobbelsteen-puzzel. Algemeen vond men dat ik *elk* antwoord goed moest rekenen, omdat men in feite een reeks getallen moest aanvullen. Men keek dus niet naar het werkelijke probleem, namelijk het zichtbaar zijn van vijf dobbelstenen. Merkwaardig vind ik toch dat men na deze 'kritische noot' allemaal met de volgende oplossing op de proppen komt!

We zagen de volgende vijf dobbelstenen liggen:



Een wak is een oog in het midden. In dit geval 3 stuks. De ijsberen staan om het wak: de worp 5 heeft dus 4 ijsberen. Totaal 12. Vissen zwemmen in het water, dus aan de onderkant van de dobbelsteen. U kent de eigenschap van een dobbelsteen, dat de som van de ogen op tegenover elkaar liggende vlakken 7 is. Het aantal vissen is dan $35 - \text{zichtbare ogen} = 12$. De boot-missers zijn de ogentallen die we niet zien: de 1, 3 en 4. Totaal 8.

Lokko Rang (5) uit Frederiksoord vindt het geen puzzel maar een gokspelletje, omdat we het algoritme moeten RADEN! Hij voert ook nog 'dronken eskimo's' ten tonele.

Arie Heikoop (13) uit Kampen had een alternatieve oplossing: een vis is een verbindingslijnstukje tussen twee ogen, zonder dat er een ander oog op ligt. Een twee heeft dan 1 vis, een vijf 8 vissen en een zes 13 vissen. Totaal 38 vissen!

Met 20 punten ontvangt Jan Verbakel, Pisanostraat 282, 5623 CJ Eindhoven de boekenbon van f25,-. Proficiat!

Bij de behandeling van de stelling van Pythagoras vertel ik meestal ook iets over de Laatste Stelling van Fermat (1601-1665): $X^n + Y^n = Z^n$ is onoplosbaar in gehele getallen (> 0) als $n > 2$.

In 1640 bewees Fermat zelf de stelling voor $n = 3$ en $n = 4$. Pas in 1987 bewees D. R. Heath-Brown de stelling voor 'bijna alle' n . Voor $n = 3$ gaat het bijna goed bij $9^3 + 10^3 = 12^3 + 1$ en bij $6^3 + 8^3 = 9^3 - 1$.

Laat $s(n)$ het kleinste getal > 1 zijn zodanig dat er $s(n)$ n -de machten bestaan wier som een n -de macht is. Euler vermoedde dat $s(n) > n$.

$s(2) = 2$ volgens de stelling van Pythagoras.

$s(3) = 3$, bijvoorbeeld $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Intussen is bewezen dat $s(4) = 3$, $s(5) < 4$, $s(6) < 7$, $s(7) < 8$.

Voorbeelden:

$$12^7 + 35^7 + 53^7 + 58^7 + 64^7 + 83^7 + 85^7 + 90^7 = 102^7$$

$$74^6 + 234^6 + 402^6 + 474^6 + 702^6 + 894^6 + 1077^6 = 1141^6$$

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 135^5 = 144^5 \text{ (gevonden in 1966)}$$

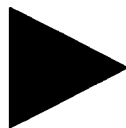
$$\text{Verder was bekend dat } 30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4$$

Uiteindelijk bewees Noam Elkies in 1988 (!!) dat $s(4) = 3$: $2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = X^4$

De opgave van deze maand is: bereken de waarde van X .

(Intussen is er een oplossing gevonden met getallen die kleiner zijn: $95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$.)

U ontvangt 5 punten voor uw puzzelladder als u mij binnen een maand na verschijning de waarde van X opstuurt. Graag ook de gevolgde methode aangeven!



Verschenen

Varga, R.S.: *Scientific Computation on Mathematical Problems and Conjectures*; SIAM; ISBN 0-89871-257-2; 122 blz.

De auteur heeft zich ten doel gesteld te beschrijven hoe gebruik gemaakt kan worden van hoge precisie berekeningen bij onderzoek aan wiskundige problemen en vermoedens. Enkele onderwerpen: Bernstein-Vermoeden; '1/9'-Vermoeden met oplossing; Riemann Hypothese (o.a. nodige en voldoende voorwaarden); Hurwitz-Polynomen.



Mededelingen

Wedstrijd 'De dag van de computer-crash'

Dit jaar viert de drie technische universiteiten gezamenlijk het 10-jarig bestaan van de studierichting Informatica. Voor vwo-scholieren betekent dit dat zij worden uitgenodigd mee te doen aan een wedstrijd. Als wedstrijdthema is gekozen voor 'De dag van de computer-crash', een dag waarop alle computertoepassingen het hebben begeven. De scholieren worden uitgedaagd zich zo'n dag voor te stellen en er vóór 1 juli 1991 een werkstuk over te maken.

De drie TU's proberen daarmee de scholieren uit 4, 5 en 6 vwo wat bewuster te maken van de talloze toepassingen van de automatisering. Op ludieke wijze wel te verstaan. Want het is de bedoeling dat zij zich zo origineel mogelijk uitleven op de crashdag. Er zijn drie categorieën waarin prijzen te winnen zijn: tekst (b.v. verhaal, gedicht), beeld (b.v. cartoon, schilderen) en video. Een wedstrijdkrant biedt aanwijzingen voor alle drie de categorieën.

De jury bestaat uit bekende Nederlanders: Cees Grimbergen (t.v.-programma Sjappoo), prof. Herschberg (deskundige op het terrein van computerbeveiliging), Charlotte Mutsaers (schrijfster en beeldend kunstenaar), Diana Ozon (popdichteres). En uiteraard zijn er prijzen te winnen, onder andere computers en cd-walkmans. De beste producten uit elke categorie (beeld, tekst of video) maken kans om te winnen.

Voor geïnteresseerden is er een wedstrijdkrant beschikbaar: mw. Franka van Neerven, Technische Universiteit Eindhoven, vakgroep Informatica, tel. 040-47 39 02.

Cursus 'Computergebruik in het wiskunde-onderwijs'

De Faculteit Educatieve Opleidingen van de Hogeschool Midden Nederland te Utrecht verzorgt gedurende het cursusjaar 1991/1992 opnieuw nascholingscursussen voor wiskunde-docenten over

'Computergebruik in het wiskunde-onderwijs'.

Er worden twee groepen gevormd: een havo/vwo groep en een mavo/lbo groep.

Deze groepen komen, beurtelings om de veertien dagen, bij elkaar op woensdagmiddagen van 15.00-18.00 uur. De havo/vwo groep start op 11 september en de mavo/lbo groep op 18 september. Voor elke groep zijn er 17 bijeenkomsten gepland. Inschrijfformulieren zijn aan te vragen bij het Bureau Nascholing V.O., tel. 030-52 51 11, t.s. 221.

Voor informatie over de inhoud van deze cursussen kunt u terecht bij Dr. M. Riemersma, tel. 030-52 51 11/61 16 11 of 033-94 29 08 ('s avonds).

Cursus 'Wiskundelessen met de computer'

De Rijksuniversiteit Leiden en de Technische Universiteit Delft bieden in het schooljaar 1991/1992 de volgende nascholingscursus aan:

'Wiskundelessen met de computer'.

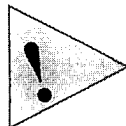
De cursus is bedoeld voor docenten wiskunde in het hele voortgezet onderwijs.

Kennismaking met alle relevante software en het effectief werken in de klas met deze software komen beide aan de orde.

Er zijn acht cursusbijeenkomsten op dinsdag van 14.30-17.30 uur, te beginnen op 24 september en vervolgens ongeveer om de vier weken tot in mei.

Voor nadere inlichtingen over de organisatie van de cursus en inschrijving kunt u zich wenden tot het Bureau Coördinatie Nascholing, mw. I. C. Leenstra, Postbus 9555, 2300 RB Leiden, tel. 071-27 40 16.

Informatie over de cursusinhoud is te verkrijgen bij G. Bulthuis (RUL), tel. 071-27 71 25, en mw. drs. A. Verweij (TUD), tel. 015-78 58 08.



Kalender

16 mei 1991: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen vwo A en havo. Zie Euclides jg. 66, nr. 7, bladzijde 223.

22 mei 1991: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen mavo/lbo C-D. Zie Euclides jg. 66, nr. 7, bladzijde 224.

27 mei 1991: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen vwo B. Zie Euclides jg. 66, nr. 7, bladzijde 224.

12 juni 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW met de inspecteurs voortgezet onderwijs.

19 juni 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

23 en 24 augustus 1991: Amsterdam, Vakantiecursus 1991. Zie de mededeling op blz. 251 van dit nummer.

29 en 30 augustus 1991: Eindhoven, Vakantiecursus 1991. Zie de mededeling op blz. 251 van dit nummer.

6 september 1991: Eindhoven, Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade.

9 t/m 13 september 1991: Noordwijkerhout, ICTMA 5, Zie Euclides jg. 66, nr. 3, bladzijde 96.

Najaar 1991: Diverse plaatsen, Regionale bijeenkomsten over W12-16.

26 oktober 1991: Jaarvergadering/Studiedag NVvW. Nadere informatie in de volgende nummers.

Inhoud

Inhoud 225

Jan Breeman: Fragmenten uit een dagboek 226

Mededeling 227

Rens Houtman: Hawex-uitwisseling Rotterdam 228

Hawexvolggroep van Vrouwen en Wiskunde: Een ochtendje brainstormen 229

C. C. Bissell: Het Nederlandse aandeel in de Cartesiaanse meetkunde 231

Truus Dekker: Examen Ibo/mavo C/D 1990, experimenteel (8) 239

Werkbladen 240

A. Kattenberg: Eenvoudige wiskunde van het broeikas effect 242

Piet Verstappen: Amerikaanse didactische richtlijnen 246

Brief 248

Francis Meester, Joop van Dormolen: Het nieuwe leerplan 12-16 249

Mededeling 251

Agneta Aukema-Schepel: Van de bestuurstafel 252

Prijsvraag 'Anders dan anders' 253

40 jaar geleden 254

Recreatie 255

Verschenen 255

Mededelingen 256

Kalender 256