

Wolters-Noordhoff

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Vakblad voor de wiskundeleraar

Euclides

jaargang 66 1990 | 1991 april



Redactie

Drs H. Bakker
 Drs R. Bosch
 Drs J. H. de Geus
 Drs M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
 N. T. Lakeman (beeldredacteur)
 Drs A. B. Oosten (voorzitter)
 P. E. de Roest (secretaris)
 Ir. V. E. Schmidt (penningmeester)
 Mw. Drs A. Verweij (eindredacteur)
 A. van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,
 8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
 Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro:
 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f55,- per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f37,50; contributie zonder Euclides f30,-. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f58,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f37,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers f9,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
 ACQUI' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
 Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

● Inhoud ● ● ● ● ●

Actualiteit 194

M.C. van Hoorn *Examinering basisvorming* 194

Zorgen om de ideeën van het Cito over toetsing van de kerndoelen voor wiskunde.

E.J.J. Kremers, H. Boertien *Cito-reactie* 195

M.C. van Hoorn *Nawoord* 197

40 jaar geleden 197

Wimecos

Bijdrage 198

Henk Mulder *Vectoren, schaduwen en rookpluimen* 198

Op het voetbalveld en op zee worden vectoren zichtbaar gemaakt. Suggesties voor opgaven die leerlingen zullen aanspreken.

Frederik van der Blij, Waldy Vastrick *Driedeling van de hoek* 202

Over een eenvoudig tekenapparaat dat 'onmogelijke' constructies mogelijk maakt.

F.H. Simons *Aansluitingsproblematiek vwo-wo* 204

Wiskunde op de universiteit: geen verzameling recepten. Er moet worden nagedacht.

Boekbespreking 206

Bijdrage 207

Truus Dekker *Examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel* (7)

Werkbladen 208

Bijdrage 210

Wim van de Geer *Aansluitingsproblemen op de pabo*

Wiskunde A in het pakket is een oplossing die voor de hand ligt. Nu eisen niet meer mag, blijft adviseren over.

Mededeling 211

Bijdrage 211

Joop van Dormolen, Francis Meester *Een nieuw leerplan* 211

Berichten vanuit de COW. Het eerste van een serie artikelen geschreven door de vertegenwoordigers van de NVvW in de COW.

G. Bakker *De wiskunde-examens lbo/mavo van 1990, eerste tijdvak* 215

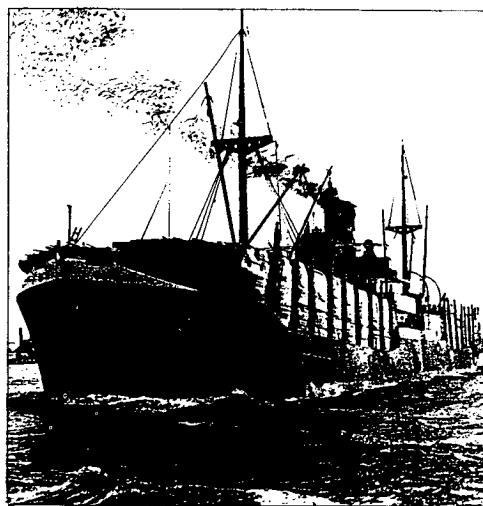
Een overzicht van de wijzigingen in de opzet van de examens. En een nadere beschouwing van de resultaten.

Recreatie 222

Verenigingsnieuws 223

Examenbesprekingen mei 1991

Kalender 224



De rookpluim bij een varend schip ...

► Examinering basisvorming

M. C. van Hoorn

Aan het eind van 1990 verscheen het boekje 'Afsluiting Basisvorming, Voorstellen voor afsluitende toetsen wiskunde', H. Boertien, Cito.

Waarom?

Zodra de basisvorming ingevoerd wordt, wil het Cito klaar staan met een opzet om de kerndoelen van de basisvorming te toetsen. Kerndoelen of eindtermen, dat komt op hetzelfde neer. Gedurende de basisvorming worden de leerlingen geacht zich de zgn. kerndoelen eigen te maken. De verschillen tussen de leerlingen spreken uiteraard een woordje mee. Er zal een groot verschil in tempo zijn, een categorie leerlingen zal de basisvorming niet in 3 jaar kunnen afronden – misschien zelfs helemaal niet, menen sommigen – terwijl een andere categorie leerlingen er binnen 2 jaar doorheen kan zijn.

Men zou zo zeggen, dit overziende: leerlingen moeten een aantal malen per jaar de gelegenheid hebben de basisvorming af te ronden. Het Cito spreekt van 'afsluiten', en meent dat scholen er toe zullen overgaan hiervoor één keer per jaar de gelegenheid te geven. Dit lijkt al verdacht veel op een examen. Het Cito spreekt, begrijpelijkerwijs, dan ook over een 'afsluitingsperiode'. Het belangrijkste verschil met de huidige examens

is de grotere variatie in toetsvormen – ja, daar moest het Cito toch maar eens mee bezig. Uiteraard wordt in het voorliggende boekje de meerkeuzevraagvorm als volwaardig toetsmiddel gepresenteerd. Ik zou zeggen: beschouw de meerkeuzevraag als een speciaal geval van de kort-antwoord-vraag, en klop dit allemaal niet verder op.

In het boekje wordt echter bladzijden lang doorgepraat over zulke zaken als: landelijk afsluitingsniveau, cesuurproblemen en afnameduur. Uiteindelijk worden voor het vak wiskunde aanbevolen:

- een schriftelijke toets van elementaire taken (2 uur), en
- een schriftelijke toets van meer complexe taken (1 uur).

Een grotere variatie aan toetsingsmiddelen wordt door het Cito niet voorgesteld. Dit idee, gevoegd bij de gedachte om jaarlijks één afsluitingsperiode te organiseren, geeft een vrij duidelijk beeld van wat het Cito wil: het Cito propageert een jaarlijks examen.

Het moet het Cito een doorn in het oog zijn, dat momenteel grote aantallen leerlingen hun onderbouwopleiding afronden zonder ooit enig examen te doen. Ik doel hier vooral op de havo- en vwo-leerlingen. Zij mogen, na 3 leerjaren met vrucht te hebben doorlopen, zomaar naar de bovenbouw van het havo/vwo, of naar het mbo.

Er zijn wel klachten over deze leerlingen (ze blijken soms wat vergeetachtig te zijn), maar deze klachten monden beslist niet uit in een roep om een examen in te stellen. Welnee: het *onderwijs* in de onderbouw zou wellicht op z'n merites kunnen worden bekeken – dáár ligt ook een aanleiding aan basisvorming te gaan doen.

Mavo- en lbo-leerlingen doen wel examen. Als het Cito zijn zin krijgt, doen deze leerlingen een jaartje eerder het examen basisvorming!

Terzijde: heel wat leerlingen, onder meer de havo- en vwo-leerlingen, zouden wellicht gewoon drie leerjaren kunnen volgen op de manier waarop dat ook thans gebeurt, en dan *en passant* de basisvorming afgerond hebben. Zulke mogelijkheden zijn voor het Cito hoogst ijszwekkend.

Dit klinkt allemaal wat cynisch en in elk geval simplificerend. Enige nuances lijken op hun plaats.

Het gaat natuurlijk altijd om zo goed mogelijk onderwijs, basisvorming of geen basisvorming. In het vervolgonderwijs en in het latere leven moeten leerlingen uit de voeten kunnen.

In het vervolgonderwijs worden klachten gehoord: de leerlingen kunnen niet zo veel (meer). Zulke klachten zijn al zo oud als het onderwijs zelf. Als we er nu toch even bij stil staan, kunnen we vragen stellen als:

– is er in de onderbouw te weinig leerstof *behandeld*?

– is de *vaardigheid* van veel leerlingen onvoldoende ontwikkeld?

Luisterend naar wat over deze dingen wordt gezegd – onder meer op de laatste studiedag van de N.V.v.W. – ben ik geneigd de *vaardigheid* van de leerlingen nader onder de loep te nemen. In de bovenbouw van het havo/vwo zitten heel wat leerlingen die wél wiskunde volgen, maar het opstellen van een vergelijking van een rechte lijn waarvan twee punten gegeven zijn niet vlotweg kunnen uitvoeren. Deze groep leerlingen neemt kennelijk niet in omvang af. Hier is de *vaardigheid* onvoldoende ontwikkeld. Een handeling die allang geautomatiseerd zou moeten zijn wordt moeizaam volbracht.

Vragen als hiervoor genoemd neemt het Cito niet onder de loep. Als het over eindtermen gaat, blijft het voorafgaand *onderwijs* sowieso gemakkelijk buiten beeld. Maar bij het Cito zijn theorieën over denkniveaus toch al nooit populair geweest. Het Cito is er voor de toetsen.

In de huidige examens, vooral in de lbo-/mavo C/D-examens (maar niet alleen daarin) zit allerlei verwerkt van de Cito-filosofieën. De meerkeuze-vraagvorm is er een voorbeeld van. Al deze Cito-toetsen hebben na ruim 20 jaar hun waarde dus nog niet bewezen. Te zeer heeft aldoor het accent gelegen op het toetsen van wat *behandeld* zou moeten zijn. Zó worden Cito-toetsen dan ook *geconstrueerd*.

Terug naar de Cito-publikatie 'Afsluiting Basisvorming'. Zoals gezegd ziet het Cito het meeste in:

– een schriftelijke toets van *elementaire taken* (2 uur), en

– een schriftelijke toets van meer *complexe taken* (1 uur).

Het toetsen van *geïntegreerde taken* – in het boekje genoemd; wat eronder verstaan zou moeten worden brengt het Cito niet helder onder woorden – hoeft van het Cito niet.

Erger is, dat de *complexiteit* van de complexe taken die het Cito ons voorschotelt, niet een wiskundige complexiteit is. Een complexe taak is gewoon een bewerkelijke taak, *van een hoger denkniveau is geen sprake*.

Minder belangrijk is in dit verband, dat de gekozen context een typische beginners-context is. Cito-medewerkers verkeren blijkbaar in kringen van bezitters van huizen van ruim f200.000,-; dáároveer gaat immers de zgn. complexe taak. Dit doet mij weer onmiddellijk denken aan Belvia (Wiskivon, 20 jaar geleden) en aan de opgaven over autoreisjes naar Spanje of Noorwegen van SLO-medewerkers. Voor niet weinig leerlingen zijn dit abstracte zaken. Ik pleit hier niet voor of tegen realistische contexten. Maar: men zou zich moeten verplaatsen in de *ziel* van de leerling!

Jammer eigenlijk, dat het Cito niet op een andere manier bezig is.

► Cito-reactie

E. E. J. Kremers, H. Boertien

De heer Van Hoorn had en heeft kennelijk iets tegen het Cito. Wat het Cito ook doet, bezien door de anti-Cito bril van de heer Van Hoorn, neemt dit altijd de meest afgrijselijke proporties aan. Wij achten het daarom niet zo zinvol om in een weerwoord alle onjuistheden en ongenueanceerde uitspraken te weerleggen. Daarvoor gaat hij teveel voorbij aan de inhoud van de publikatie 'Afsluiting Basisvorming' (H. Boertien, Cito 1990) alsook aan de omstandigheden waaronder deze tot stand is gekomen en hoe deze bedoeld is. Blijkbaar is de 'Citotoetsings- en meerkeuzefobie' van de auteur zoals die jaren geleden al eens in Euclides onderwerp van discussie was, nog niet verdwenen (vgl. Van Hoorn 1983).

●

Zo wordt in Van Hoorn's stuk totaal voorbijgegaan aan het feit dat zowel de invoering als de afsluiting van de basisvorming niet door het Cito zijn bedacht noch voorgesteld. De regering vindt het vanwege diverse redenen nodig dat er een basisvorming ingevoerd en afgesloten gaat worden. De Minister van Onderwijs geeft in dat kader het Cito de opdracht hem advies te geven hoe deze afsluiting het beste kan plaatsvinden. Het Cito doet hiertoe voorstellen die stroken met de bedoeling van de afsluiting van de basisvorming en die met de overige onderwijsverzorgingsinstellingen zijn besproken. In deze vakkringen heeft de publikatie op hoofdlijnen grote waardering ontmoet. Zo eenvoudig ligt deze zaak.

De functie van de afsluiting van de basisvorming is niet zo duidelijk als wij op het Cito wel zouden wensen. Maar een paar zaken staan volgens het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen als een paal boven water.

Allereerst dat deze afsluiting in het onderwijs geen examenfunctie moet hebben, maar dat er wel uit moet blijken dat de leerling al dan niet alle algemene en dertig kerndoelen wiskunde op voldoende wijze beheerst. Als dat het geval is, krijgt de leerling een getuigenschrift basisvorming. Een van de inschattingen op grond hiervan is dat zo'n toets al gauw minimaal 30 opgaven zal moeten bevatten.

In de tweede plaats dat de scholen zelf moeten kunnen kiezen *wanneer* zij deze afsluitingstoetsing van de basisvorming willen organiseren.

De hierboven genoemde Cito-publikatie gaat daarom over de manier waarop dat voor het vak wiskunde zo verantwoord, economisch en efficiënt mogelijk zou kunnen. De argumentatie waarom voor een afsluitingsperiode is gekozen, is in de publikatie uitvoerig bediscussieerd. Vanzelfsprekend houden scholen de vrijheid om binnen de door de overheid te stellen kaders de afsluiting veel inefficiënter te regelen dan is voorgesteld. Dit als antwoord op de aanmerkingen van Van Hoorn in dezen die totaal niet ingaan op deze achterliggende argumentatie en het kader voor afsluiting.

In het Ten Geleide wordt het kader van de afsluitingstoetsing en de manier waarop het voorstel voor afsluiting geïnterpreteerd moeten worden, duidelijk geschetst.

Overigens was deze publikatie bedoeld voor alle personen die direct met de invoering van de basisvorming op landelijk niveau werkzaam waren. Het is natuurlijk denkbaar dat de heer Van Hoorn niet tot deze doelgroep behoort en daarom dit kader niet goed kent. Maar dan nog is het onbegrijpelijk dat hij denkt dat voorgesteld is de afsluiting van de basisvorming met meerkeuze-opgaven te laten plaatsvinden. Hoewel deze vraagvorm zeker ook voordelen heeft, is de hele publikatie toch gericht op open vragen (kort, lang of zeer lang). In de 26 voorbeeldopgaven komt geen enkele meerkeuzevraag voor! De heer Van Hoorn zal toch niet de aanduidingen a., b., c. en d. van enkele deelopgaven aangezien hebben voor alternatieven? Kortom de suggestie dat het Cito zou pleiten voor een examinering (met meerkeuze-opgaven) van de basisvorming is volkomen uit de lucht gegrepen.

Ter verduidelijking van wat onder het toetsen van geïntegreerde taken verstaan moet worden, is in 'het boekje' als voorbeeld een werkstuk gegeven. Deze gaat over het bouwen van een huis, iets wat leerlingen zich waarschijnlijk uit eigen aanschouwing wel redelijk kunnen voorstellen. De kritiek die Van Hoorn hierop geeft, namelijk dat de prijs iets te hoog is voor de meeste leerlingen, zou gemakkelijk ondervangen kunnen worden door alle bedragen door 2 te delen. Essentieel voor de bedoeling van dit voorbeeld is dat niet. Als dergelijke punten over de voorbereiding van de leerlingen op het vervolgonderwijs en de maatschappij tot relevant worden verklaard, dan is het niveau van de discussie over goed wiskundeonderwijs wel erg gedaald.

Literatuur:

- Van Hoorn, M. C. (1983). *Cito – jammer*. Euclides 58ste jaargang no. 9 (met naschrift van H. Boertien).
- Wijgh, I. (1990). *Over en Sluiten*. Arnhem: Cito Project Afsluiting Basisvorming.

► Over de auteurs

E. E. J. Kremers is projectleider Afsluiting basisvorming bij het Cito.

H. Boertien is medewerker wiskunde van het Cito.

► Nawoord

M. C. van Hoorn

Ten eerste. Misschien gaan scholen, om *verantwoord onderwijs* te kunnen blijven geven, 'de afsluiting veel inefficiënter regelen'. Wie alleen aan toetsing denkt, kan dit wellicht niet geloven.

Ten tweede. Ik was mij er niet van bewust te hebben geschreven dat de afsluiting van de basisvorming volgens het Cito met meerkeuzevragen zou moeten geschieden. Ik ben mij er nu wel van bewust, dat deze in het Cito-boekje ten onrechte worden besproken. Er staan blijkbaar overbodige dingen in het Cito-boekje.

Ten derde. Dan moet ik vervolgens toegeven, dat ik mij vergist heb: ik heb een 'geïntegreerde' taak aanzien voor een 'complexe' taak. Ik vond het toch al een erg bewerkelijke taak. Niet een moeilijkere.

Ten vierde. Als het Cito de huizenprijzen met 0,5 vermenigvuldigt, wordt dan de waarde van de context groter? Een curieuze gedachte, die, naar ik vrees, onderstreept dat er te weinig gekeken is naar leerlingen. Voor heel wat leerlingen kun je rustig zulke prijzen met 0,1 of met 10 vermenigvuldigen zonder dat de zaak voor hen anders wordt. Maar ik moet betwijfelen of het Cito wil afdalen naar leerlingen-niveau.

► Wimecos

Fel werd door één der sprekers van leer getrokken tegen de grote aantallen zittenblijvers.

Opgemerkt werd, dat in Engeland en Amerika, de 1.1. taken krijgen, die ze aankunnen, terwijl ze hier menigmaal voor te zwaar werk worden gezet, hetgeen zeker ook ten nadele van het meer begaafde deel der 1.1. werkt. Daardoor ontstaat steriel onderwijs. Een typische opmerking van Prof. Holst mag hier niet achterwege blijven: 'Men kijkt hier vaak te veel naar de input zonder zich rekenschap te geven van de output'. Dit in verband met de mededeling, dat in Amerika 10% meer leraren nodig zouden zijn dan in Engeland. Naar aanleiding van een vraag over de onbevoegde leerkrachten werd door de Voorzitter meegedeeld, dat men ook in andere landen met een tekort aan leerkrachten voor Wis- en Natuurkunde zit. De oorzaken zijn dezelfde als bij ons; het bedrijfsleven betaalt beter! Aan de andere kant werd gezegd, dat men zich in Engeland b.v. niet zo druk om de bevoegdheden maakt als in Holland.

Uit: Beknopt verslag van de Algemene Vergadering van Wimecos op 3 januari 1951, gepubliceerd in *Euclides*, jaargang 26, 1950-1951.

Wimecos was één van de voorlopers van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren; in Wimecos waren de leraren *wiskunde*, *mechanica* en *cosmografie* aan HBS'en verenigd.

► Vectoren, schaduwen en rookpluimen

Henk Mulder

Bij het werken met vectoren hebben leerlingen moeite met een concrete voorstelling. We verwijzen dan meestal naar fysische toepassingen in de vorm van krachten en snelheden. Maar ook dat is nog vrij abstract, de vectoren zelf verschijnen nog niet in beeld. Dat lukt met schaduwen en rookpluimen beter. Hoe daarmee te werken?

Schaduwen op het voetbalveld

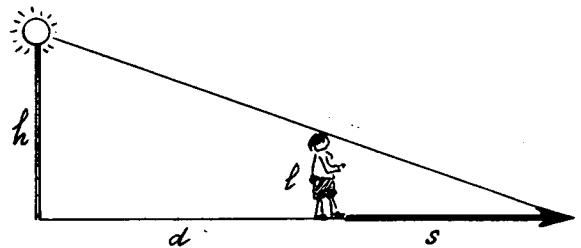


Figuur 1 Bij schuinstaande zon wordt elke speler begeleid door zijn schaduwvector. Zo ontstaat een veld van vectoren.

Als de zon schuin staat werpt deze een schaduw van ons op de grond. Dat is een echte vector met een beginpunt, een richting en een grootte. Dergelijke schaduwen zijn fraai te zien bij een reportage van studio-sport bij een wedstrijd in de late namiddag (fig. 1). Elke speler wordt voortdurend begeleid door zijn schaduw. Het voetbalveld is een veld van vectoren.

De lengte van de schaduwvector hangt af van de zonnehoogte. Bij verplaatsing over het veld blijft de schaduwlengte constant. Anders wordt het als op één van de hoeken van het veld een felle schijnwerper ontstoken wordt. De schaduwlengte wisselt voortdurend in relatie tot de afstand tot de lichtmast.

Als we de lichaamslengte l stellen, de masthoogte h en de afstand tot de mast d , dan volgt de grootte van de schaduwvector $\vec{s}$ uit: $\frac{s}{s+d} = \frac{l}{h}$ of $hs = l(s+d)$ of $s = \left(\frac{l}{h-l}\right)d$ (fig. 2).



Figuur 2 Relatie tussen schaduw en afstand.

Op het PSV-veld in Eindhoven zijn de lichtmasten 45 m hoog en de spelers hebben een gemiddelde lengte van 1,8 m.

De verhouding $\frac{l}{h-l}$ wordt dan $\frac{1}{24}$. Dit betekent dat de schaduwlengte van een speler op dit veld steeds $\frac{1}{24}$ -ste deel is van zijn afstand tot de lichtmast.

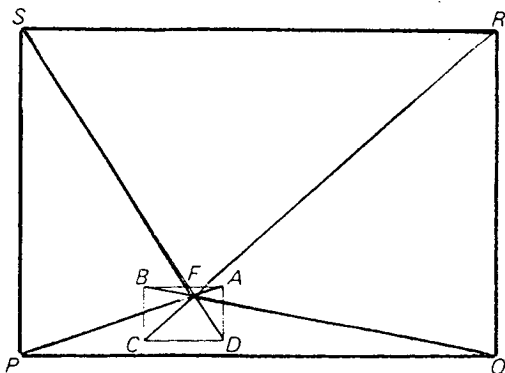
Bij vier masten

Later op de avond vertoont studio-sport beelden zoals in figuur 3. Iedere speler wordt beschenen door vier lampensets, die we voor het gemak maar op de vier hoeken van het veld situeren. Elke schaduwlengte is telkens $\frac{1}{24}$ -ste deel van de afstand tot de betreffende mast.



Figuur 3 Nu zijn de spelers ieder voorzien van vier vectoren. Dit kwartet verandert voortdurend van vorm.

In figuur 4 is zo'n schaduwkwartet geconstrueerd.



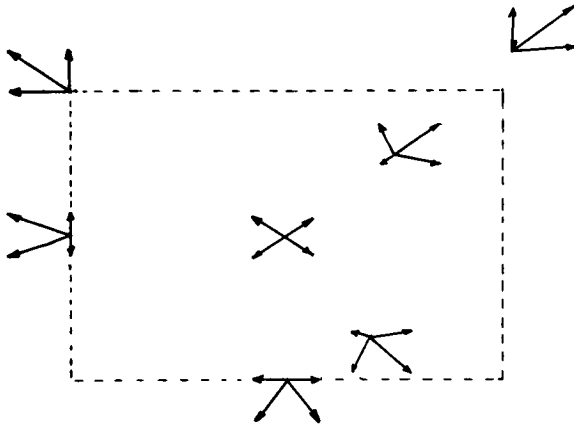
Figuur 4 Constructie van een schaduwkwartet.

Om een duidelijker tekening te krijgen, hebben we als 'verkleiningsfactor' $\frac{1}{7}$ gekozen; of wiskundig juist: een vergrotingsfactor $-\frac{1}{7}$.

Het veld is de rechthoek $PQRS$. Een speler bevindt zich in F . De schaduw FA , veroorzaakt door de lamp in P , wijst in een richting tegengesteld aan FP en met een grootte $\frac{1}{7}FP$. Evenzo geldt: $FB = \frac{1}{7}FQ$ en zo verder. Dat is een bekende transformatie. De vectoreinden geven het voetbalveld weer op verkleinde schaal. Het veld is vanuit F vermenigvuldigd met de factor $-\frac{1}{7}$.

In figuur 5 hebben we nog eens een voetbalveld getekend in de vorm van een rechthoek met verhoudingen 2:3. De officiële maten zijn immers 70 bij 105 m.

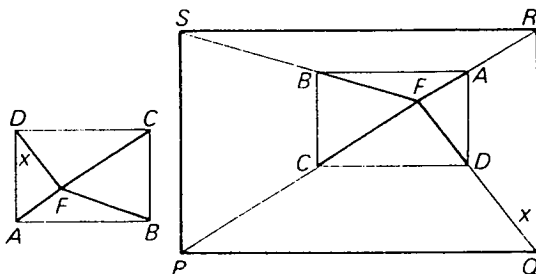
In de tekening hebben we de posities van zeven spelers, ieder met hun schaduwkwartet getekend; Van Basten op de middenstip, Vanenburg bij de hoekvlag, Van Breukelen in het doel.



Figuur 5 De posities van spelers en hun schaduwvectoren.

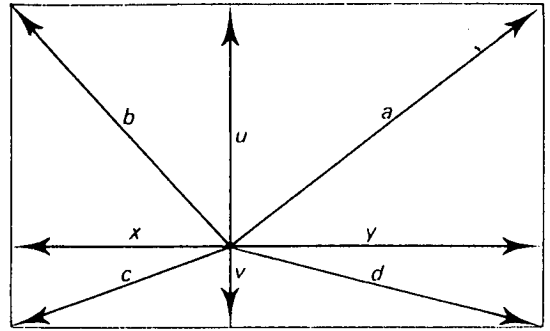
Ideeën voor leerlingenopgaven

1. Bewijs dat de som van twee tegenover elkaar gelegen schaduwvectoren gelijk is aan de som van het andere paar.
2. Van een speler wordt het schaduwkwartet gegeven (fig. 6). Construeer zijn positie in het veld.



Figuur 6 Constructie van de positie van een speler.

3. Bewijs dat de som van de kwadraten van overstaande schaduwlengten gelijk is aan de som van de beide andere kwadraten (fig. 7).



Figuur 7 Schaduwvectoren en hun componenten.

Rookpluimen

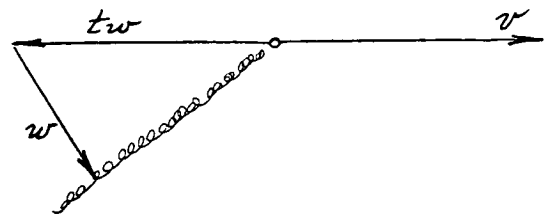
Als rook verticaal opstijgt, is het windstil. Als het waait, wijst de pluim in de windrichting. Een rookpluim geeft alleen de richting van de vector aan, niet de grootte. Ook bij een stilliggend schip bepaalt de rook de windrichting. Anders wordt het als het schip gaat varen; rookpluim en windrichting vallen dan niet altijd meer samen.

Als het windstil weer is wijst de rookpluim van het varende schip altijd naar achteren. Je ervaart dat ook als je fietst bij windstil weer. Je hebt dan altijd tegenwind en wel even groot als je eigen snelheid.

Bij schepen

De richting van de rookpluim bij een varend schip hangt dan zowel van grootte en richting van vaarsnelheid (v) als windsnelheid (w) af.

We beginnen met de tegenwindvector (tw) te tekenen; die is even groot en tegengesteld als de vaarsnelheid (v). Die moeten we dan vectorisch optellen bij de windvector en de resultante van beide bepaalt



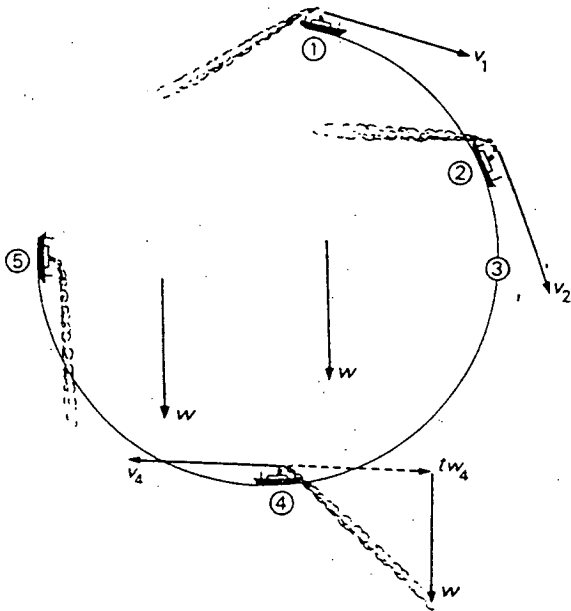
Figuur 8 Bepaling van de rookpluimrichting.

dan de richting van de rookpluim. In figuur 8 is dat door middel van de 'kop-aan-staart' methode gerealiseerd.

Hieruit volgt dan direct dat, als het schip koers wijzigt, ook de rookpluim van richting verandert.

In figuur 9 vaart een schip rond met constante snelheid en bij constante wind. Hoe de pluim telkens gaat staan, hebben we volgens de vorige werkwijze geconstrueerd.

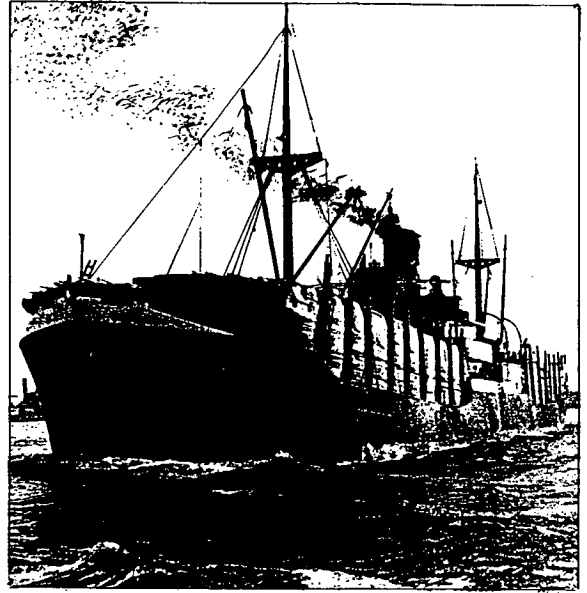
Theoretisch kan bij voldoende vaarsnelheid de rookpluim in elke denkbare richting gaan staan, afhankelijk van de vaarrichting.



Figuur 9 Draaiende rookpluim.

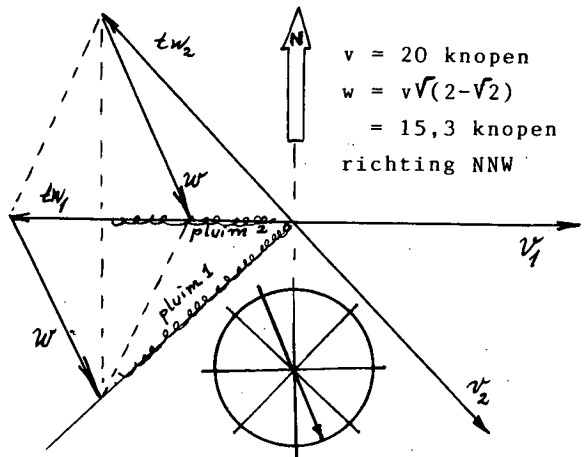
Ideeën voor leerlingopgaven

1. Wanneer wijst bij een varend schip de rookpluim in dezelfde richting als de wind waait, wanneer in tegengestelde richting?
2. Een schip vaart in oostelijke richting met een snelheid 20 knopen (een knoop is 1,8 km/h). Er staat een zuidenwind en de pluim wijst NW. Bepaal de windsnelheid.
3. Hoe gaat de pluim staan als het schip in tegengestelde richting vaart?



4. Een schip vaart met 20 knopen in oostelijke richting. De rookpluim wijst ZW. Het schip wijzigt zijn koers en vaart verder in ZO-richting waarbij de pluim westelijk gaat wijzen. Teken de situatie waarbij de beide v -vectoren eenzelfde beginpunt hebben. Bepaal vervolgens de windvector in grootte en richting.

Deze laatste opgave is wat moeilijker. Figuur 10 geeft de werkwijze in principe aan.



Figuur 10 Constructie van de windvector.

► Driedeling van de hoek

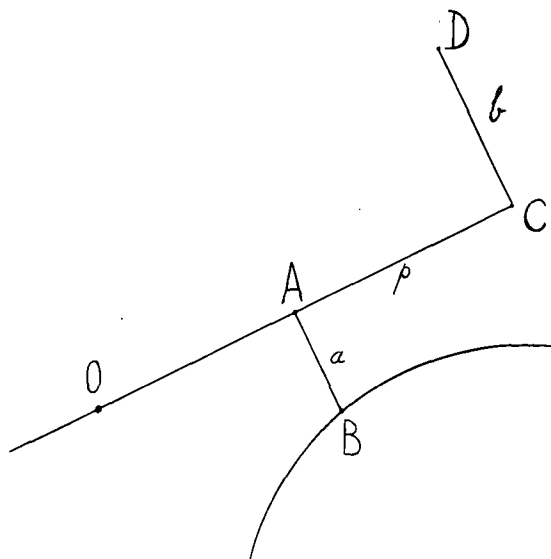
Frederik van der Blij, Waldy Vastrick

Een van de meest bekende meetkundige opgaven die niet met passer en liniaal uit te voeren is, is de verdeling van een willekeurige hoek in drie gelijke delen.

De tweede auteur ontwierp een zeer eenvoudig tekenapparaat waarmee een hoek in een willekeurig (oneven) aantal gelijke delen te verdelen is. Daarmee zijn dus vanzelf ook alle regelmatige veelhoeken te construeren. In een vorig artikel bespraken we de constructie van de regelmatige zeven- en negenhoek met een tekenapparaat dat we een 'neusisspasser' noemden. Het nu te bespreken apparaat noemen we gemakshalve een 'neusisschuif'.

In zijn meest algemene vorm ziet het apparaat er uit zoals in figuur 1 aangegeven is, een stokje met twee dwarslatjes AB en CD . In D is een schrijfstift aangebracht, het (richt)punt B wordt langs een gegeven rechte of kromme bewogen, terwijl het stokje door een vast punt O (het oogje) moet gaan.

Het verband tussen de gegeven kromme en de beeldkromme is niet zo eenvoudig algebraïsch (in rechthoekige coördinaten) te formuleren. Formeel komt het neer op de eliminatie van een aantal veranderlijken uit een stel vergelijkingen. Kiezen we de oorsprong van een coördinatenstelsel in het oogjespunt en verder $AB = a$, $AC = p$, $CD = b$, en doorloopt B een kromme met vergelijking $f(x, y) = 0$ dan beschrijft D een kromme met verge-



Figuur 1

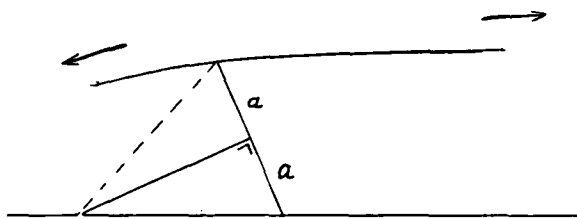
lijking $g(x, y) = 0$, waarbij g gevonden wordt door u , v en t te elimineren uit

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= a^2 + t^2; \\ x^2 + y^2 &= (t + p)^2 + b^2; \\ (x - u)^2 + (y - v)^2 &= (a + b)^2 + p^2; \\ f(u, v) &= 0. \end{aligned}$$

We beperken ons verder tot een 'neusisschuif' met $a = b$ en $p = 0$.

We bespreken eerst het speciale geval dat B een rechte lijn door het oogjespunt O doorloopt.

In dit geval is eenvoudig een parametervoorstelling voor de beeldkromme te vinden. Noemen we de hoek die het stokje door O met de gegeven lijn, die we als X -as kiezen maakt t dan is de bedoelde parametervoorstelling (zie figuur 2):



Figuur 2

$$x = a \frac{\cos 2t}{\sin t}, y = a \frac{\sin 2t}{\sin t}.$$

Deze kromme is een algebraïsche kromme van de vierde graad, door eliminatie van t is de vergelijking eenvoudig te vinden:

$$(4a^2 - y^2)(x^2 + y^2) = 4a^4.$$

De kromme heeft de X -as als symmetrie-as en de lijnen $y = \pm 2a$ als horizontale asymptoten. Het is aardig om na te gaan bij welke standen van de schuif de verschillende takken getekend worden.

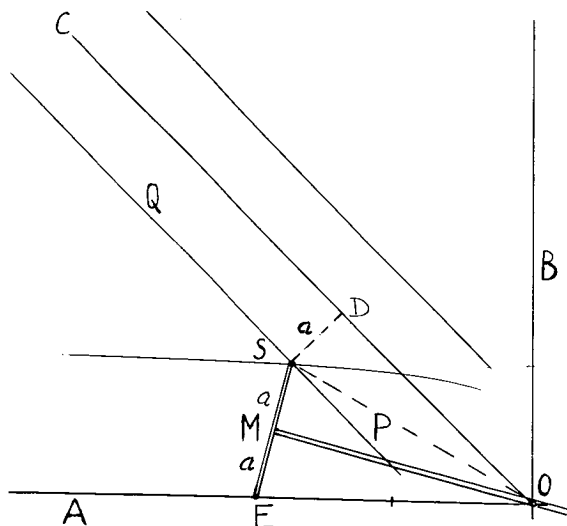
Met dit apparaat kan nu eenvoudig een hoek in drie gelijke delen verdeeld worden.

We willen de hoek AOB (figuur 3) in drie gelijke delen verdelen. Daartoe verdelen we eerst de hoek in twee gelijke delen door de deellijn OC en we trekken een lijn PQ evenwijdig aan OC op afstand a . Met de schuif tekenen we de beeldkromme van het been OA , gebruikmakend van het punt O als oogje.

Het snijpunt van de lijn PQ met de getekende kromme noemen we S . In de figuur is duidelijk dat

$$\triangle EMO \cong \triangle SMO \cong \triangle SDO$$

en dus is hoek SOA gelijk aan een derde deel van hoek AOB .



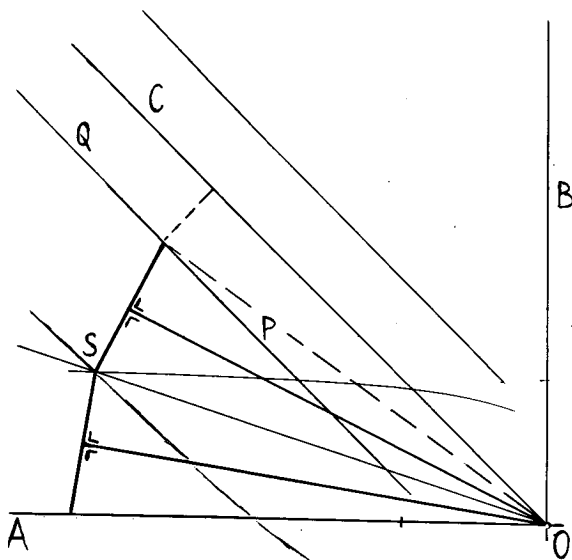
Figuur 3

Wanneer de trisectie van een hoek uitvoerbaar is is ook de constructie van de regelmatige negenhoek mogelijk.

Met deze 'neusisschuif' is ook de verdeling van een willekeurige hoek in een gegeven (oneven) aantal gelijke delen mogelijk.

We bespreken eerst de vijfdeling van een willekeurige hoek.

We tekenen weer de deellijn OC van hoek AOB en de lijn PQ op afstand a evenwijdig met OC (figuur 4). Verder tekenen we het schuifbeeld van de lijn OA weer met de schuif. Vervolgens tekenen we ook het schuifbeeld van de lijn PQ . Het snijpunt van deze twee krommen noemen we S . Het is eenvoudig in te zien dat hoek AOS gelijk is aan twee vijfde van hoek AOC .



Figuur 4

Om de verdeling in meer dan vijf gelijke delen te verkrijgen tekenen we weer met de schuif het schuifbeeld van het been OA . Vervolgens tekenen we weer met O als oogje het schuifbeeld van de zo juist getekende kromme, en zo voorts tot k maal toe.

Deze constructie kan ook in één keer uitgevoerd worden. Daartoe moeten we k exemplaren van de neusisschuif zo koppelen, dat ze het zelfde oogje

gebruiken en dat de schrijfstift van de ene vast gemaakt wordt aan het richtpunt van de tweede. De (tenslotte) getekende kromme snijden we met een lijn PQ op afstand a evenwijdig met de deellijn van hoek AOB . Op deze manier wordt een hoek in $(2k + 1)$ gelijke delen verdeeld.

Natuurlijk zijn ook varianten van deze constructie mogelijk door zowel van OA als van PQ schuifbeelden te construeren. Duidelijk is dat met behulp van deze constructie iedere regelmatige veelhoek geconstrueerd kan worden.

Elf- en dertienhoek

In het geval van de 11- en de 13-hoek zijn echter ook meer meetkundig geïnspireerde constructies mogelijk door gebruik te maken van de neusisspaser en slechts eenmaal van de neusisschuif. Deze constructies lijken op degene die we in een vorig artikel voor de regelmatige zevenhoek bespraken. Voor het bewijs van de juistheid van deze constructies moeten weer goniometrische identiteiten gebruikt worden.

In het geval van de elfhoek moet bewezen worden dat de kleinste positieve hoek x waarvoor geldt

$$\frac{1}{\tan x} - 4 \cos 3x = \sqrt{11}$$

gelijk is aan $\frac{\pi}{22}$.

In het geval van de dertienhoek moet bewezen worden dat de kleinste positieve hoek x waarvoor geldt

$$\frac{1}{\tan x} - 4 \cos 3x = \sqrt{13 + 2\sqrt{13}}$$

gelijk is aan $\frac{\pi}{26}$.

Deze identiteiten hangen samen met de klassieke sommen van Gauss uit de getaltheorie. Elementaire bewijzen zullen vermoedelijk vrij veel rekenwerk vragen.

► Aansluitingsproblematiek vwo-wo*

F. H. Simons

Eerstejaars studenten aan de universiteit hebben soms problemen met wiskunde. Vaak wordt gedacht dat deze problemen voortkomen uit onvoldoende voorkennis of uit onvoldoende beheersing van de vwo-stof. De ervaring van wiskunde docenten in het eerste studiejaar is echter dat het hoofdprobleem niet zozeer in de kennis van de studenten ligt als de houding die zij ten aanzien van de wiskunde hebben.

Veel eerstejaars studenten beschouwen wiskunde als een verzameling trucjes, een verzameling receptuur, die op de daarvoor geschikte problemen kan worden toegepast, liefst zonder al te veel nadenken. Twee voorbeelden:

Het tekenen van de grafiek van een functie loopt in de regel via het tekenverloop van de afgeleide. Het recept is dus eerst differentiëren, de nulpunten van de afgeleide bepalen en daarmee aangeven waar de functie stijgend is, waar hij dalend is en de extreme waarden bepalen. Vervolgens kunnen eventueel de nulpunten bepaald worden, en als laatste wordt dan gebruik makend van de gevonden resultaten de grafiek getekend. Dit proces werkt redelijk voor niet al te ingewikkelde functies. De studenten denken echter dat dit recept toegepast moet en kan worden bij alle functies waar een grafiek van benodigd is. Als dus de grafiek getekend moet worden

van een functie als $\sin x \cdot \arctan x$ dan wordt zonder na te denken direct de afgeleide bepaald. Deze afgeleide is hier heel wat ingewikkelder dan de oorspronkelijke functie. Het recept faalt en weinig studenten zijn in staat om toch de gevraagde grafiek te tekenen als produkt van de 'bekende' functies $\sin x$ en $\arctan x$.

Ook in gevallen waarin het recept wel werkt is het mogelijk zonder enig rekenwerk toch een beeld te krijgen van de grafiek. De functie $x^3 - 2x + 3$ is de som van de functies x^3 en $-2x + 3$, zodat het duidelijk is dat de functie voor negatieve x een nulpunt en een maximum heeft en dat er voor positieve x een minimum aangenomen wordt. Als dit minimum negatief is dan zijn er nog twee nulpunten. Veel studenten staan onwennig tegenover het loslaten van het recept en eerst even nadenken. Dat wordt ook gedemonstreerd door het volgende. De overgrote meerderheid van de studenten verklaart dat als zij de extrema moeten bepalen van de functie $(x-2)^2 + 3$, zij dit doen met het tekenverloop van de afgeleide. Dat de functie een minimum 3 heeft voor $x = 2$ omdat een kwadraat altijd groter dan of gelijk aan nul is, lijkt voor velen nieuw te zijn. De reacties op deze redenering zijn heel gemengd. Sommigen zeiden dat ze deze redenering weliswaar kenden, maar niet op mochten schrijven, iemand verklaarde dat het wel een aardig verhaal was maar absoluut geen bewijs!

Dit brengt ons vanzelf op de rol van bewijzen in het onderwijs voor niet-wiskunde studenten. Veel mathematisch waterdichte bewijzen dragen nauwelijks bij tot een beter begrip van de concepten die een rol spelen. Het is daarom vanzelfsprekend dat er in het service onderwijs in de wiskunde niet veel aandacht aan bewijsvoering gegeven wordt. Misschien als gevolg hiervan springen studenten nogal eens vreemd om met herleidingen. Studenten hebben er in het algemeen geen moeite mee de wiskunde uit te breiden met een aantal nieuwe formules, zoals $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ of $\arctan x = \arcsin x / \arccos x$. Dit soort fouten werd door studenten in het verleden natuurlijk ook gemaakt, maar misschien wat minder massaal dan nu. Wel nieuw is echter de reactie van de studenten als ze zo'n soort fout gemaakt hebben: 'Mag dat dan niet?'. Dat is in

feite een omkering van de bewijslast. De docent moet nu laten zien dat dat inderdaad niet mag, terwijl het vanzelfsprekend zou moeten zijn dat de student aantoonde dat al zijn overgangen in een redenering correct zijn.

In de loop van een eerstejaars cursus wiskunde (voor niet-wiskunde studenten) ontstaat een scheiding tussen enerzijds studenten die zich na verloop van tijd een zeker wiskundig gevoel eigen maken en anderzijds studenten die uitsluitend geïnteresseerd blijven in de recepten; deze laatste groep vormt helaas de meerderheid. Wij proberen bij ons onderwijs de nadruk te leggen op concepten en interpretatie van formules in plaats van op manipulatie met formules.

Moeilijkheden met het interpreteren van bekende formules komen vrij veel voor. Zo is

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

maar vrijwel niemand heeft in de gaten dat hier in feite staat dat voor x dicht bij 0 geldt dat $\sin x \approx x$, een benadering die in veel toepassingen een rol speelt.

Interpreteren van formules is niet eenvoudig. Een fout is door onzorgvuldig redeneren zo gemaakt. Als voorbeeld: wat is

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)?$$

Een voor de hand liggende redenering is dat 2 x voor grote waarden van x verwaarloosbaar klein is t.o.v. x^2 , zodat de wortel dan vrijwel gelijk is aan x en de limiet dus 0. Dit antwoord is onjuist, maar de fout in de redenering is niet zo eenvoudig aan te geven. Voor de docent is hier een mooie kapstok om te praten over relatieve en absolute fouten. Ooit demonstreerde een student naar mijn mening een zeer goed wiskundig inzicht met de volgende afleiding. De wortelfunctie heeft voor grote waarden van de variabele en steeds vlakkere grafiek. Dus voor grote x zijn de wortels uit $x^2 + 2x$ en $x^2 + 2x + 1$ vrijwel gelijk; des te nauwkeuriger naarmate x groter is. De wortel is dus praktisch $x + 1$ en de gevraagde limiet dus 1.

Wiskunde-onderwijs zou zich meer op deze speelse, interpretatieve kant van de wiskunde dienen te richten. Dat gebeurt ook bij het universitair onder-

●

wijs in de regel onvoldoende. Als er al iets aan interpreteren gedaan wordt, dan is dat min of meer een privé-initiatief van de docent. De massaliteit van het onderwijs maakt dat er behoefte is aan zekere standaardisatie van de inhoud van het onderwijs en van de examenvragen. Mede als gevolg daarvan ligt bij het examen de nadruk op zekere technische vaardigheden en ontstaat er zowel bij de studenten als bij de docenten het idee dat het daar dus om gaat.

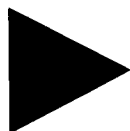
Hoe belangrijk zijn deze technische vaardigheden eigenlijk? In het verleden, in het precomputer tijdperk, uiterst. Het was de enige manier om iets te bereiken. Nu echter zijn computers en software op ruime schaal beschikbaar. Oorspronkelijk was deze software numeriek, later ook grafisch van aard. Daardoor wordt bijvoorbeeld het belang van het kunnen schetsen van een grafiek al veel minder, de computer produceert het plaatje en de kunst is dat te interpreteren. Het vinden van extrema en nulpunten kan numeriek zeer eenvoudig gebeuren; de benodigde programmatuur is zelfs al beschikbaar op kleine pocket-computers. De laatste ontwikkelingen zijn op het terrein van de computeralgebra. Dat zijn pakketten waarmee wiskundige formules gemanipuleerd kunnen worden. In deze pakketten worden de meeste van onze 'recepten' ingebouwd. Er bestaat nu reeds een klein pakket, DERIVE, dat kan draaien op iedere eenvoudige XT-computer en waarmee het gros van onze eerstejaars-opgaven gemaakt kan worden door eenvoudig op wat knoppen te drukken. Daarmee leren de studenten natuurlijk niets, maar leren zij wel iets van het handmatig uitvoeren van een uit het hoofd geleerd recept?

Steeds meer toepassers van wiskunde gaan over tot het gebruik van soortgelijke, krachtige, computer-algebra pakketten. Daarmee neemt de vraag naar kennis van de klassieke handvaardigheden af, maar gelijktijdig de noodzaak van het wiskundig begrijpen wat er gebeurt toe.

We zullen dus, zowel bij het vwo als bij het wo, in de toekomst moeten gaan streven naar onderwijs waar wiskundig begrip centraal staat, wat dat dan

ook mag zijn. Het rekenwerk kan aan de computer worden overgelaten. Niemand weet nog hoe zulk onderwijs er uit moet gaan zien en hoe een evenwicht gevonden moet worden tussen wat nog met de hand gebeurt en waar de computer ingeschakeld gaat worden. Het ontwikkelen en uitproberen van zulk onderwijs ervaar ik als uitermate boeiend.

* Samenvatting van een op de Studiedag 1990 van de NVvW tijdens een werkgroepbijeenkomst gehouden inleiding.



Boekbespreking

R. A. Kortram, *De theorie van complexe functies*, Epsilon, 159 blz.

Dit boek, deel 13 uit de serie Epsilon Uitgaven, is bedoeld voor studenten wiskunde, informatica, natuur- en technische wetenschappen en leraren VWO en HBO. De schrijver gaat er van uit, dat de lezer vertrouwd is met de analyse van functies van één reële veranderlijke en ook enige kennis heeft van functies van twee reële veranderlijken. Die stof is bijv. te vinden in deel 6 van deze serie, *Analyse voor Beginners* van A. van Rooy. Daarnaast is het prettig om ook al iets van complexe getallen te weten.

Het boek is in 3 (hoofd)stukken verdeeld:

1. De fundamenteën. Hierin wordt het complexe vlak geïntroduceerd. Differentieerbaarheid van complexe functies, machtrekken en contourintegralen worden behandeld. Ook wordt een eenvoudige versie van de integraalstelling van Cauchy afgeleid en toegepast.
2. De theorie der complexe functies. Hierin staan de integraalstelling van Cauchy, het maximumprincipe, de residuenstelling, de homotopiestelling en de afbeeldingsstelling van Riemann.
3. Speciale onderwerpen. Hierin wordt o.a. aandacht besteed aan onderwerpen als de analytische voortzetting en nulpunten van gehele functies.

Er zijn in dit boek een kleine 250 (!) vraagstukken opgenomen, die goed aansluiten bij de stof. Als men ten volle wil profiteren van dit boek, is het zeker aan te bevelen veel vraagstukken te maken. Van de vraagstukken zijn (op een paar na) geen uitwerkingen/oplossingen opgenomen.

De theorie van complexe functies is een leerboek dat goed leesbaar is en waar prettig mee te werken valt. Al wordt van degene, die het boek gebruikt om door zelfstudie iets over dit niet gemakkelijke onderwerp te leren, af en toe wel enig doorzettingsvermogen gevraagd.

Z. E. Warmelink

► **Examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (7)**

Truus Dekker

Op de werkbladen vindt u deze keer een opgave uit het experimentele C-examen 1990, 2e tijdvak. Waarbij ik nogmaals wil benadrukken dat dit examen werd afgenomen volgens het 'gewone' examenprogramma. De vorm van de vragen en de manier waarop ze gesteld werden was wel anders. Wanneer een tamelijk groot gedeelte van de stof aan de hand van één context wordt gevraagd en, zoals deze keer het geval was, de gebruikelijke meerkeuzevragen ontbreken, zal dat als consequentie hebben dat niet elk onderdeel van het examenprogramma elk jaar wordt getoetst. Voor mavo/lbo is dat nieuw, bij havo en vwo was dat al zo.

In het concept examenprogramma dat vorig jaar op de regionale bijeenkomsten werd besproken is, behalve in de inleiding, nog geen verschil aangegeven tussen C- en D-niveau. Aan de deelnemers van de bijeenkomsten werd gevraagd daarover suggesties te doen. Het is daarom interessant om te zien hoe bij het eerste experimentele examen verschil tussen C- en D-niveau werd gemaakt:

* Het aantal vragen was voor het C-niveau iets minder. Leerlingen die toch al moeite hebben met het lezen van contexten en het verwoorden van hun antwoord mogen daar wat meer tijd voor krijgen.

* Soms was de gebruikte context voor C- en D-niveau gelijk. U hebt daar de afgelopen maanden enkele voorbeelden van gezien. Voor C werden inleidende vragen toegevoegd om de context nog wat te verduidelijken, voor D waren de gestelde vragen van een hoger niveau.

* De afgelopen jaren werd bij de 'gewone' C- en D-examens al minder formele wiskundetaal gebruikt. Bij deze examens is dat nog duidelijker. Dat betekent ook het gebruik van 'gewone' woorden als die voorhanden zijn, dus geen 'bissectrice' maar 'deellijn'. Er werd geprobeerd de vragen kort en helder te formuleren en, ondanks het werken met contexten, grote stukken tekst bij de opgaven te vermijden.

* De hierbij afgedrukte C-opgave is een voorbeeld van het gebruik van contexten uit de beroepssfeer. Het gebruik van tekeningen maakt grote stukken tekst overbodig. Overigens kan de context natuurlijk ook uit de wiskunde zelf afkomstig zijn.

* Bij het beantwoorden van de vragen werden bij het C-niveau minder eisen gesteld, b.v. antwoorden aflezen uit een tekening, geen formeel bewijs.

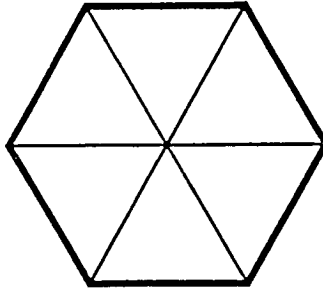
In de loop van dit jaar zal door de COW een standpunt moeten worden geformuleerd over de verschillen tussen C- en D-niveau. Dat is geen gemakkelijke opgave omdat de verschillen tussen de leerlingen die de examens doen zo groot zijn. Op het lbo doet het merendeel van de leerlingen examen op B- of C-niveau; een enkeling doet D-niveau. Bovendien is het aantal lesuren wiskunde bij de diverse typen lbo verschillend en meestal kleiner dan dat op de mavo. Op de mavo doen de meeste leerlingen examen op D-niveau en een minderheid doet C-niveau. Op welk niveau examen zal worden gedaan wordt daar meestal pas na afsluiting van het schoolonderzoek beslist.

De standpunten die leerkrachten innemen over de verschillen tussen C en D lopen ver uiteen. Van een totale splitsing tussen mavo (alleen D) en lbo (alleen C) tot een zo klein mogelijk verschil tussen C en D om gecombineerde klassen lbo/mavo mogelijk te maken. Meer beroepsgerichte wiskunde vanwege de aansluiting bij het mbo of meer formele wiskunde in verband met de aansluiting bij de havo. Het is duidelijk dat de discussie over dit onderwerp voorlopig nog niet is afgerond.

● Werkblad ●

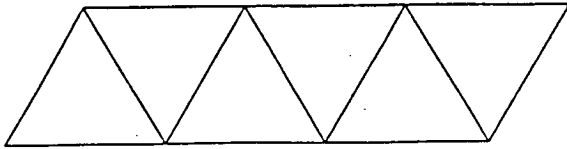
► Het glasraam (1)

Aan een glasbedrijf wordt gevraagd gekleurd glas te leveren voor een raam zoals hieronder staat afgebeeld.

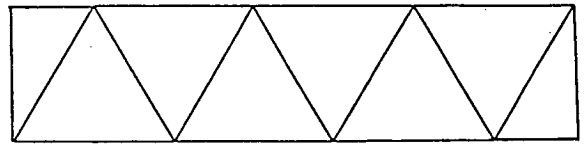


Het gaat om zes driehoekige stukken, waarvan alle zijden 1,20 m moeten zijn.

De man die de opdracht moet uitvoeren neemt in gedachten het raam uit elkaar en legt de stukken zoals in het schetsje van figuur 1 hieronder.



Figuur 1



Figuur 2

Hij besluit een rechthoekig stuk glas te nemen. Daarop tekent hij de stukken die hij uit gaat snijden (zie figuur 2 hierboven).

21. Bereken in mm nauwkeurig hoe lang en hoe breed dat stuk glas moet zijn.

Uit: experimenteel C-examen lbo/mavo 1990, 2e tijdvak.

► Het glasraam (2)

22. Het glasbedrijf rekent f72,00 per m² glas.
Hoeveel kost die rechthoek?

Van die rechthoek blijft links en rechts een driehoek over. De klant betaalt natuurlijk ook voor die afvalstukken.

Op de bijlage zie je hoe de nota voor de bestelling eruit gaat zien.

23. Wat moet ingevuld worden voor de prijs per ruit?

Bovenop die prijs komt nog 18,5% BTW.

Op de bijlage staat een nota voor deze bestelling.

24. Maak de nota verder af.

► Bijlage

24

Aan U geleverd:

6 ruiten (per stuk f) = f

BTW 18 $\frac{1}{2}$ % = f

Door U te betalen f

► Aansluitingsproblemen op de Pabo*

Wim van de Geer

Het publiek dat de Pabo binnenstroomt, is wat de vooropleiding betreft zeer verschillend. Er zijn er met een diploma vwo, maar ook met havo, mdgo, meao of nog andere min of meer gelijkwaardige opleidingen. Daarbij behoeven ze geen wiskunde in hun pakket gehad te hebben. Theoretisch is het mogelijk, en die studenten zitten er inderdaad, dat iemand voor het laatst wiskunde heeft gehad in de tweede klas mavo. Voeg daarbij het feit dat velen, toen ze zelf op de basisschool zaten, een mechanistische rekenmethode gehad hebben en het is duidelijk dat er inderdaad van aansluitingsproblemen gesproken kan worden. Het is daarom geen wonder dat een aantal onderzoeken die in de laatste jaren gehouden zijn, hebben aangetoond dat het niveau van de eigen rekenvaardigheid vaak bedroevend laag is. Toch moet aan het eind van de Pabo een student minstens de rekenstof van groep 8 beheersen. Bovendien gebruikt momenteel 70% van de basisscholen een methode die op realistische leest geschoeid is. Dat betekent dat deze methoden het begrip context, het flexibel leren rekenen, het gebruik van modellen enz. hoog aanslaan. Het lesgeven daarmee stelt hogere eisen aan het eigen inzicht en de eigen vaardigheid.

Overigens zijn ook de studenten die vwo-wiskunde hebben gedaan niet geheel probleemloos. Zij zijn in

hun vooropleiding zo sterk bezig geweest met wiskunde op een abstracte, soms mechanistische manier, dat het voor hen erg moeilijk is een meer flexibele werkwijze te volgen. Een werkwijze waarbij het kind en zijn (informele) manier van werken meer centraal staat dan de rechte lijnige oplossing van b.v. een integraal.

De Pabo's hebben de laatste tien jaar nogal stormachtige ontwikkelingen meegemaakt. Kleuteropleidingen en pedagogische academies werden samengevoegd tot Pabo, het aantal academies werd drastisch teruggedrukt en de opleiding werd verheven tot hbo, wat tot gevolg had dat de Pabo een afdeling werd van instituten waar soms duizenden studenten zijn ondergebracht. Deze reorganisatie viel vrijwel samen met een enorme terugloop in het aantal studenten. Men heeft bij die herstructurering meer naar rechtspositionele zaken gekeken dan naar vakinhoudelijke. Daardoor zijn er in de jaren '84-'85 nogal wat vakbekwame docenten rekenen/wiskunde verdwenen. Zij moesten afvloeien of naar een andere richting binnen de instelling overstappen. Ook moesten andere docenten, die b.v. bij Nederlands of handvaardigheid boventallig werden, het vak rekenen/wiskunde gaan geven. Blijkens een in '89 gehouden enquête heeft nu ongeveer een kwart van de reken/wiskundedocenten aan de Pabo's een niet-exacte opleiding gevolgd.

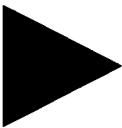
Realistisch rekenonderwijs geven is, zoals gezegd, een totaal andere manier van onderwijs geven dan de student zelf op de basisschool heeft gehad. Er moet een hele attitudeverandering bij de student plaatsvinden. Zo'n verandering heeft tijd nodig en de docent moet gelegenheid hebben dat verandingsproces te begeleiden. Anders gezegd: je zult daar de nodige uren in moeten steken. Maar het aantal uren dat voor rekenen/wiskunde op het rooster staat, is in veel gevallen ontoereikend. Hoeveel uren een docent krijgt toegewezen, is een zaak van de opleiding zelf. Maar die opleiding is heel breed en iedere vakdocent strijdt voor vermeerdering van het aantal uren voor zijn eigen vak.

Zoals u ziet, oorzaken genoeg voor grote aansluitingsproblemen. Veel van die problemen zouden

aanmerkelijk gemakkelijker opgelost kunnen worden als alle studenten die naar een Pabo gaan minstens wiskunde havo-A gevolgd hadden. Het havo-A wiskundeprogramma met zijn leerstofonderdelen als matrices, tabellen en grafieken, formules en statistiek sluit goed aan bij wat we op de Pabo willen met het vak rekenen/wiskunde.

Maar de eis dat vanaf 1992 wiskunde verplicht zou zijn voor studenten die de Pabo binnen willen gaan, de zogenaamde wiskundemaatregel, is teruggedraaid. Bij de directies van de Pabo's werd wel aangedrongen dat het vak rekenen/wiskunde voortaan de nodige aandacht moest krijgen, maar de verantwoordelijkheid hiervoor bleef bij de instituten liggen. Uiteindelijk kan iedere directie beslissen welk gewicht er aan een vak gegeven wordt. Er zijn Pabo's die veel aandacht aan rekenen/wiskunde besteden en er zijn Pabo's die er weinig aan doen. Het zou daarom een goede zaak zijn als alle leerlingen die te kennen geven naar de Pabo te willen gaan, geadviseerd wordt wiskunde-A in hun pakket te nemen. Goed reken/wiskundeonderwijs op de basisschool vormt inderdaad een onmisbare basis voor goed wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs.

* Samenvatting van een op de Studiedag 1990 van de NVvW tijdens een werkgroepbijeenkomst gehouden inleiding.



Mededeling

De Technische Universiteit Eindhoven bestaat dit jaar 35 jaar. In de periode van april tot en met augustus 1991 zal het zevende lustrum gevierd worden met een groot aantal activiteiten onder het motto 'Grenzen over met techniek'.

Met dit motto geeft de TU Eindhoven het belang aan dat gehecht wordt aan het overschrijden van grenzen in zowel het wetenschappelijk onderzoek als bij het contact met derden.

Het lustrumprogramma richt zich op wetenschappers, studenten en overige medewerkers van de Technische Universiteit, maar omvat ook activiteiten die voor een breder publiek buiten de TU-gemeenschap interessant kunnen zijn.

Inlichtingen: bij het bureau In- en Externe Betrekkingen van de Technische Universiteit Eindhoven, HG 0.35, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven, telefoon 040-47 22 78.

● Bijdrage ● ● ● ● ●

► Een nieuw leerplan 12-16

Over de noodzakelijkheid ervan¹

Joop van Dormolen en Francis Meester

De instelling van de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs is een moment in een langere ontwikkeling. De Commissie werd ingesteld omdat veel mensen vonden dat er iets moest veranderen in het wiskundeonderwijs. Wij zijn het daarmee eens. Niet omdat we vinden dat het wiskundeonderwijs van nu slecht is. Wel omdat elke tijd zijn eigen onderwijs heeft. Als de maatschappij verandert, moet het onderwijs ook veranderen. De manier van denken over wiskunde als schoolvak heeft daarmee te maken. We willen in dit artikel ingaan op de verandering in het denken over de manier waarop mensen vinden dat wiskundeonderwijs gegeven zou moeten worden.

Opvattingen over wiskunde als schoolvak

Wiskunde heeft met een aantal andere vakken gemeen, dat het op school anders gebruikt en toegepast wordt dan daarbuiten. Binnen de school is het een vak, dat geleerd moet worden. Buiten de school is wiskunde een middel om je beroep op een goede manier te kunnen uitoefenen of om je in het dage-

lijks leven staande te kunnen houden. Dat laatste is een tamelijk nieuwe doelstelling. Lang heerste de mening dat rekenen, zoals je dat op de basisschool leert, wel nuttig is in het dagelijkse leven, maar dat de wiskunde die je in het voortgezet onderwijs leert een ander doel heeft. Wiskunde is nuttig als basis voor een vervolgopleiding, maar waar gebruik je nu algebra of meetkunde in het huishouden, of op straat, of in de winkel?

Dat ligt anders met wat de 'vormende waarde' wordt genoemd. Als je wiskunde doet zou je een manier van denken ontwikkelen, waar je in het dagelijks leven nut van hebt. Het kan zijn dat je je daar niet eens bewust van bent. Het betekent dat scholieren en hun leraren zich richten op de toekomst. Ze moeten erin geloven dat de moeite die nu gedaan wordt, later beloond zal worden. Het lijkt of de scholier niet veel anders overblijft dan ijverig en intelligent aan het werk te gaan in de overtuiging en verwachting dat de beloning later wel zal komen.

Dit is een schetsmatige en ook wel een karikaturale voorstelling van zaken. In de praktijk ligt het natuurlijk anders. Je vraagt je bij het leren niet aldoor af of het wel van belang is voor je latere leven, of voor het komende proefwerk. Een vaardig docent, een goed leerboek en nog een aantal andere factoren maken dat leren op het moment zelf bevredigend kan zijn.

Door vele mensen is gedurende eeuwen de nadruk gelegd op de vormende waarde van wiskunde. Er is uitgebreide en belangwekkende literatuur over dit onderwerp (bijvoorbeeld Ehrenfest-Afanasjewa 1960). Net als tegenwoordig werd de nadruk gelegd op het ontwikkelen van kwaliteiten die aangeduid kunnen worden met woorden als vermogen tot abstract en kritisch denken. Daarmee is echter nog niets gezegd over de manier waarop deze doelen in het onderwijs kunnen worden nagestreefd. Men kan de middelen daarvoor in verschillende richtingen zoeken: in de inhoud of in de didactiek.

In de jaren vijftig verschenen leergangen voor het

middelbaar onderwijs van Bos & Lepoeter en van het echtpaar Van Hiele. Deze auteurs zochten het vooral in de didactiek. De leergangen onderscheidden zich van wat tot dan toe gebruikelijk was, doordat de schrijvers niet de wiskundige inhoud centraal stelden, maar uitgingen van opvattingen over leerprocessen (Van Dormolen en Vedder 1983). Dit werd in de meeste andere leergangen aan de leraar overgelaten.

In 1958 trad een nieuw leerplan in werking voor het toenmalige VHMO (vergelijkbaar met het huidige havo-vwo). Voor het eerst werd in een officieel stuk een didactische uitspraak gedaan: In de eerste klas zou het meetkundeonderwijs moeten beginnen met een intuïtieve inleiding. Al vele jaren daarvoor waren regelmatig geluiden te horen geweest waarin gepleit werd voor een meer leerlinggerichte aanpak, onder andere omdat anders het abstractievermogen en het kritisch denken niet voldoende ontwikkeld zouden worden (zie bijvoorbeeld artikelen en verslagen in Euclides, zoals Schuh 1927-1928, Dijksterhuis 1933-1934, Van Os 1938-1939).

In de jaren zestig kwam sterk de opvatting naar voren, dat de tot dan toe geldende inhouden van het wiskundeonderwijs ongeschikt waren om er de bedoelde vorming mee na te streven. Het onderwijs zou veel meer gericht moeten worden op de structuur van wiskunde. Een en ander werd samengevat onder de naam 'moderne wiskunde'.

Over didactiek werd nog weinig gesproken. Van hogerhand heerste de mening, dat de staat zich niet met didactiek had te bemoeien. Verzoeken om bijvoorbeeld via een gesubsidieerde heroriënteringscursus didactiek te onderwijzen werden afgewezen omdat zoiets een onrechtmatige inbreuk op de persoonlijke vrijheid van leraren en schoolboek-auteurs zou zijn.

In de loop van de jaren zeventig kwam geleidelijk verandering in de houding van de overheid ten aanzien van de didactiek. Er kwamen nascholingscursussen, waarbij men niet alleen moderne wiskunde leerde, maar ook werd gesproken over de manier waarop die wiskunde onderwezen zou kunnen worden. Mede door opkomst van de Universitaire en Nieuwe Lerarenopleidingen werden didactische

principes ontwikkeld. Er kwamen didactiekcursussen voor leraren onder auspiciën van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO) drukte een belangrijke stempel op het denken over didactiek in en doelstellingen van het wiskundeonderwijs.

Deze ontwikkelingen hebben invloed gehad op het denken over de rol van wiskunde op school. Belangrijke vormingsdoelen hebben, mede onder invloed van maatschappelijke ontwikkelingen, niet langer alleen ten doel leerlingen voor te bereiden op vervolgopleidingen en op hun latere beroep. Steeds meer wordt door docenten, auteurs, ontwikkelaars en onderzoekers gezocht naar inhouden en methoden die scholieren ook op dit moment zullen kunnen gebruiken (bijvoorbeeld Treffers 1978; Meester, Schoemaker en Vedder 1978; Meeder en Meester 1984). Dit blijkt uit de verandering van structuralistische wiskunde naar wat realistische wiskunde genoemd wordt (zie bijvoorbeeld COW 1987; Krabbendam en Ter Pelle 1988; Team W12-16 1989). In het basisonderwijs en in de bovenbouw van havo en vwo is dat gebeurd. Er zijn ook al schoolboeken op de markt, die binnen het huidige examenprogramma mavo en lbo realistisch wiskundeonderwijs aanbieden.

Noodzaak of hobby-isme

Ontwikkelaars en onderzoekers kunnen nieuwe inhouden in hun overwegingen betrekken. Het gevaar is niet denkbeeldig dat daarbij speciale interesses van een kleine groep mensen een grotere rol gaan krijgen dan met betrekking tot algemene doelen verantwoord is. Een mooi voorbeeld daarvan is het klokrekenen, dat in de zestiger jaren werd onderwezen. Dit onderwerp is tamelijk geruisloos verdwenen, net zoals equivalentierelaties en groepentheorie. Niet eens zozeer omdat het allemaal te moeilijk was voor leerlingen, maar vooral omdat het basisbegrippen zijn voor theoretische ontwikkelingen waar leerlingen in het voortgezet onderwijs niet aan toe kunnen komen. Op school konden leerlingen er niets mee doen.

Is nu de nadruk op realistische wiskunde ook zo'n

speciale interesse, of om het onaardig te zeggen, een hobby van een klein groepje doordouwers? Om die vraag te beantwoorden willen we de ontwikkeling naar realistisch onderwijs van een andere invalshoek bekijken.

Het is al haast een gemeenplaats te zeggen dat de opvattingen over de rol van het algemeen vormend onderwijs veranderd zijn. Ietwat zwart-wit kunnen we zeggen, dat de school (voor algemeen vormend onderwijs) oorspronkelijk een inrichting was waar een intellectuele elite –in de beste zin van het woord– wordt gevormd. Voor wie niet mee kon bestonden er uitstekende beroepsopleidingen. Onder invloed van democratiseringstendenzen is de taak van de school veranderd in een waar alle mensen dingen leren waarvan ze ook en vooral profijt hebben in hun leven buiten hun beroep. Voor de wiskunde betekent dat, dat niet alleen algemene vormingsdoelen nader bekeken worden, maar dat ook gezocht wordt naar direct bruibare wiskunde en wiskundige methodieken.

De verandering van de ambachtsschool en de huishoudschool naar scholen voor lager beroeps onderwijs is een voorbeeld van reageren op maatschappelijke ontwikkelingen. Dit betekent dat die scholen meer en meer algemene vorming gaan geven aan groepen leerlingen die vroeger bijna alleen beroepsgerichte praktijkvakken moesten leren.

Een ander gegeven is dat steeds minder geaccepteerd wordt dat er in het algemeen voortgezet onderwijs grote groepen leerlingen zijn die voor het eind van het tweede leerjaar al afhaken voor wiskunde. Ook zij hebben recht op profijt van wat zij aan wiskunde leren. In het bijzonder denken we hier aan de grote groepen meisjes en niet-Nederlandstaligen op het lbo en het mavo die wiskunde vroegtijdig laten vallen. Daarnaast zijn er ook op het havo en het vwo groepen leerlingen die de wiskundelessen in de onderbouw niet kunnen volgen, laat staan dat ze die wiskunde kunnen gebruiken.

In het verleden zijn er duidelijke pogingen gedaan om bovengenoemde algemene doelstellingen te realiseren. Eerst geloofde men dat de mammoetwet

een aardig eind in de richting ging. Later kwam de middenschoolbeweging op. Toen een algemene invoering van de middenschool politiek niet haalbaar bleek werden andere mogelijkheden bedacht. Een ervan is onder woorden gebracht in de Wet op de Basisvorming. Na de nodige wijzigingen in de oorspronkelijke opzet lijkt het of die er wel zal komen. Voor de wiskunde heeft die wet vooral consequenties voor het lbo en haar docenten. In het verleden werd op veel scholen voor lbo na de brugklas nauwelijks meer wiskunde gegeven. In de Wet op de Basisvorming zullen alle leerlingen van 12-16 een groter aantal lesuren wiskundeonderwijs krijgen dan nu. Dat betekent dat gezocht moet worden naar inhouden en methoden die voor die leerlingen geschikt en van belang zijn. Kortom, we moeten zoeken naar wiskunde die behalve in vervolgopleiding en beroep ook daarbuiten zinvol en bruikbaar is.

Realistisch wiskundeonderwijs is geen hobby van vrijgestelden van de een of andere staatscommissie. De veranderingen op de basisschool van mechanistisch rekenen naar realistisch reken-wiskundeonderwijs en de wijzigingen in de programma's in de bovenbouw havo en vwo zijn voorlopers van de veranderingen voor de leeftijdsgroep 12-16. Het is de uitdrukking van het geloof, dat iedereen, zowel de 'elite' als de 'zwakkeren' moet kunnen profiteren van onderwijs. Natuurlijk zitten mensen die dat geloven niet alleen in de COW, in het Team W12-16, in begeleidings- opleidingsinstituten. Als dergelijke ideeën niet gedragen zouden worden door grote aantallen leraren en niet te vergeten schoolboekenauteurs, zouden we niet aan een wijziging van het leerplan hoeven te beginnen. Een duidelijk voorbeeld is de invoering van het leerplan van de basisschool en van de examenprogramma's van het vwo en het havo.

Voor het echter zover is moet er nog wel het een en ander gebeuren. In volgende artikelen willen we ingaan op een aantal praktische consequenties en voorwaarden.

- COW, *Plan Wiskunde 12-16*, COW, Utrecht 1987.
 Dijksterhuis, E. J., 'Epistemisch wiskundeonderwijs', in: *Euclides*, 10, 1933-1934.
 Dormolen, J. van en Vedder, J., Een staalkaart van de didactiek van de wiskunde, in: *Pedagogisch Tijdschrift-Forum voor Opvoedkunde*, 1983, nr. 7.
 Dormolen, J. van en Broekman, H. G. B., *Basisvorming, wiskunde*, Martinus Nijhoff, Leiden 1989.
 Ehrenfest-Afanasjewa, T., *Didactische opstellen*, Zutphen 1960.
 Hiele, P. M. van, *Begrip en Inzicht*, Muusses, Purmerend 1973.
 Krabbendam, H., en Pelle, J. ter, *Wiskundeonderwijs is nooit af, (Leerplanvoorstellen wiskunde 12-16)*, SLO, Enschede 1988.
 Meeder, M. en Meester, F., *VrouWiskundig*, OW&OC, Utrecht 1984.
 Meester, F., Schoemaker, G. en Vedder, J., *Rekening houden met individuele verschillen*, OW&OC, Utrecht 1980.
 Os, Ch. H. van, 'Wat is wiskunde', in: *Euclides*, 15, 1938-1939.
 Schuh, F., De waarde van het wiskundige redeneren, in: *Euclides*, 4, 1927-1928.
 Team W12-16, *Raamplan*, Rijksuniversiteit Utrecht-SLO, Enschede 1989.
 Treffers, A., *Wiskobas doelgericht*, OW&OC, Utrecht 1978.

Over de auteurs

Beide auteurs hebben als vertegenwoordiger van de NVvW zitting in de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs. In die hoedanigheid hebben zij dit artikel geschreven.

Noot

- ¹ Veel van de inhoud van dit artikel is overgenomen uit Broekman en Van Dormolen 1989. Daarin wordt uitgebreider dan nu mogelijk is ingegaan op veranderingen in opvattingen over het wiskundeonderwijs.

► **De wiskunde-examens lbo/mavo van 1990, eerste tijdvak**

Gert Bakker (Cito)

In dit artikel wordt achtereenvolgens ingegaan op de wijzigingen in de wiskunde-examens van het afgelopen jaar en worden de belangrijkste score-resultaten van de examens gepresenteerd.

Daarna worden het C-en D-niveau vergeleken.

Vervolgens wordt wat gedetailleerder ingegaan op het D-examen, respectievelijk het C-examen.

Ter illustratie zijn vijftien vragen uit deze examens afgedrukt, waarnaar in de tekst met vraagnummers wordt verwezen.

Wijzigingen

Met ingang van 1990 zijn het C- en D-examen zo opgezet dat voor de gesloten vragen en de open vragen (vrijwel) evenveel punten behaald kunnen worden. In de drie jaren daarvoor was de verhouding 70% voor gesloten en 30% voor open vragen. In de examens 1990 volgden na 22 meerkeuzevragen à 2 punten, 10 open vragen waarbij per vraag 3 à 8 punten behaald konden worden. De uitwerking is bij de open vragen van vitaal belang en gedeeltelijk goede antwoorden kunnen daarbij punten opleveren. Problemen die in het verleden niet adequaat in meerkeuzevragen te vangen waren, konden nu als

open vragen worden gepresenteerd.

Tegelijk met deze verandering is met ingang van 1990 aan het examen een bijlage toegevoegd met tekeningen die de kandidaten kunnen benutten. Zo gaat geen tijd verloren met het overnemen van tekeningen. Iedere kandidaat kan starten met de goede tekening. Bovendien wordt het beoordelen gemakkelijker. Met de genoemde wijzigingen is er ruimte ontstaan om nieuwe problemen in het examen te verwerken, zoals in 1990 het uitvoeren van een afbeelding.

Voor het eerst zijn er bij wiskunde C en D in het eerste tijdvak identieke vragen opgenomen. Het betreft 9 meerkeuzevragen over het gemeenschappelijke deel van de beide programma's. De verschillen in de scoreresultaten op deze overlap geven tevens een indruk in hoeverre de adviescommissies en de vaksectie erin geslaagd zijn een goed niveau-verschil tussen de examens aan te brengen.

In het ideale geval dienen alle wiskunde-C-examens van de verschillende jaren (en tijdvakken) van dezelfde moeilijkheidsgraad te zijn. Voor het D-examen geldt hetzelfde. In de praktijk wisselt de moeilijkheidsgraad echter en na het examen is het gewoonlijk gissen of het examen moeilijker of makkelijker was en of de kandidaten meer of minder vaardig waren dan in vorige jaren.

Om hier enig zicht op te krijgen heeft de vaksectie van de CEVO begin 1989 zogenaamde referentietoetsen vastgesteld. Deze kunnen jaarlijks vóór het examen bij een steekproef worden afgenomen om het vaardigheidsniveau van de kandidaten en naderhand de moeilijkheidsgraad van het examen te schatten. De vaksectie kan deze gegevens benutten bij het vaststellen van de cesuur.

Scoreresultaten

In tabel 1 treft u de globale scoreresultaten aan voor de verschillende schooltypen. Vergelijking met de resultaten van 1989 leert dat zowel het gesloten als het open deel het afgelopen jaar aanzienlijk beter werd gemaakt. Bij de D-kandidaten is het percentage behaalde punten op het gehele examen 5% hoger dan in 1989: 7% bij de meerkeuzevragen en 10% bij de open vragen. Bij C zijn deze toenames achtereenvolgens 4%, 5% en 11%.

Vergelijking van C- en D-niveau

De D-kandidaten kregen 6 meerkeuzevragen en 3 open vragen voorgelegd die verder gingen dan de C-stof. Hiervoor konden 28 punten worden behaald. De D-kandidaten behaalden voor deze specifieke vragen 37% van de punten: 60% bij de meerkeuzevragen en slechts 20% bij de open vragen. Zie als voorbeeld de vragen 14, 28, 30 en 32. Het C-examen bevatte 4 meerkeuzevragen die voor D zeker te eenvoudig zouden zijn geweest: de C-kandidaten scoorden daar gemiddeld 73% van de punten. Zie als voorbeeld vraag 1.

Voor het C-niveau waren geen vragen over goniometrie in het centraal examen opgenomen; dit onderwerp kwam alleen in het schoolonderzoek aan bod.

Zoals eerder gemeld, hadden de adviescommissies en de vaksectie in 1990 voor beide niveaus 9 identieke vragen gesteld, waarvoor in totaal 18 punten behaald konden worden. Lbo/mavo-C scoorde hierop 54% en mavo-D 71% (zie tabel 1). Voor het C-niveau waren deze vragen gemiddeld zeker van

een acceptabele moeilijkheidsgraad en voor het D-niveau relatief gemakkelijk. Zie als voorbeeld de vragen 2, 3 en 13 van het C-niveau. Het verschil in p-waarden is respectievelijk 16, 28 en 8.

Voor mavo zien we op de identieke vragen een verschil van gemiddeld $71\% - 57\% = 14\%$ tussen de C- en D-populatie (tabel 1). Als de D-populatie het gehele C-examen gemaakt zou hebben, dan had zij ook op het niet gemeenschappelijke deel wellicht zo'n 14% hoger gescoord. Zij zou dan op het gehele C-examen $57\% + 14\% = 71\%$ van de punten behaald hebben.

Omgerekend betekent dit dat een D-kandidaat met bijvoorbeeld de score 55 op het D-niveau een score van omstreeks 68 op het C-niveau zou hebben behaald: bij eenzelfde cesuur is dat een verschil van ruim één punt op de cijferschaal.

Lbo/mavo-D

Tabel 2 geeft de resultaten per vraag weer. Bij elke meerkeuzevraag is met de p- en de a-waarden te zien hoeveel procent van de kandidaten een goed of een fout alternatief koos. Bij elke open vraag is te zien hoeveel procent van de kandidaten een bepaald aantal punten behaalde. Met behulp van de

Tabel 1

	mavo-D	lbo-D	mavo-C	lto-C	leao/lhno llo/lmo-C	mavo/ lbo-C
aantal kandidaten in steekproef	1243	316	1155	1025	750	2368
gemid. p-waarde identieke vragen	71,0	76,5	56,8	54,3	46,1	54,2
gemid. p-waarde meerkeuzevragen	66,6	68,5	61,8	58,5	48,7	58,1
gemid. p'-waarde open vragen	53,4	55,9	52,2	46,2	34,4	45,9
gemid. p'-waarde totaal	59,9	62,0	56,9	52,2	41,4	51,9
gemiddelde score meerkeuzevragen	29,3	30,1	27,2	25,8	21,4	25,6
gemiddelde score open vragen	24,6	25,7	24,0	21,2	15,8	21,1
gemiddelde score totaal (+ 10)	63,9	65,8	61,2	57,0	47,3	56,7
door CEVO vastgestelde cesuur	54/55	54/55	52/53	52/53	52/53	52/53
gemiddeld cijfer	6,4	6,6	6,3	5,9	4,9	5,9
percentage onvoldoendes	24	19	25	37	64	38
betrouwbaarheid meerkeuzevragen	0,62	0,69	0,59	0,70	0,71	0,71
betrouwbaarheid open vragen	0,69	0,69	0,59	0,68	0,70	0,69
betrouwbaarheid totaal	0,77	0,79	0,71	0,79	0,81	0,80

tabel en het betreffende examen is eenvoudig na te gaan welke fouten in welke mate werden gemaakt. Bij 8 van de 22 meerkeuzevragen was de p-waarde groter dan 80, een unicum. Dit jaar werden tevens relatief veel foute alternatieven (16 van de 94) niet of nauwelijks gekozen.

Meerkeuzevragen met $p < 40$ kwamen slechts twee maal voor.

Vraag 14 is een originele vraag voor het D-niveau. Slechts 23% gaf aan dat de 7 bij 7 bij 10 driehoek stomphoekig is. Dat een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 7, een schuine zijde van $7\sqrt{2}$ (of $\sqrt{98}$ of $\approx 9,9$) heeft én dat een grotere zijde (namelijk 10) dus een grotere hoek vraagt, vereist veel inzicht. Dichterbij lijkt de methode ' $\sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{5}{7} \Rightarrow \alpha \approx 91^\circ$ ' of het gebruik van de cosinusregel te liggen.

De andere slecht beantwoorde vraag betrof het arceren van de puntverzameling $V \cup W$. Ook uit de beantwoording van een andere vraag bleek een grote leemte in de kennis van puntverzamelingen: in een driehoek werden zowel hoogtelijn als zwaartelijn veel gekozen voor alle punten die even ver van twee zijden liggen.

De open vraag over de stelling van Pythagoras in de balk werd zeer goed gemaakt. Ook de vragen waar respectievelijk op de bijlage het spiegelbeeld en het rotatiebeeld van een driehoek moesten worden getekend, hadden zeer goede resultaten.

In vraag 27 lukte het vrijwel ieder de coördinaten van het snijpunt te berekenen. Om de vraag goed tot zijn recht te laten komen was bewust gekozen voor breuken. Het verdient de voorkeur dat het antwoord ondubbelzinnig geschreven wordt als $(\frac{7}{4}, \frac{19}{4})$.

Vraag 28 ging echter slecht met een p'-waarde van 18. Deze vraag was vantevoren door de constructeurs niet als origineel ingeschat. Verwacht werd dat redelijk gemakkelijk de link gelegd zou worden tussen de richtingscoëfficiënt en de tangens van de richtingshoek. De bedoeling van de vraag was zeker niet om lengten van zijden te laten berekenen en de consinusregel één of meer keren te laten gebruiken.

Vraag 29 was qua formulering een aanpassing van de traditionele vraag 'Teken de grafiek van f '.

Tabel 2

Toets- en itemanalyse – Cito, Arnhem

Analyse vragen wiskunde-D mavo-populatie

vraag	sleutel	p- en a-waarden									
		A	B	C	D	E	F				
1	C	5	3	77*	1	0	13				
2	C	4	12	81*	3	1	0				
3	E	9	8	30	6	42*	5				
4	C	5	6	89*							
5	B	1	68*	2	18	4	7				
6	D	5	2	1	89*	3					
7	D	8	4	5	83*						
8	D	2	1	4	76*	5	12				
9	B	6	59*	7	10	13	5				
10	E	4	24	1	4	67*					
11	E	2	3	2	12	67*	13				
12	C	10	2	87*	1	0					
13	B	8	56*	4	24	3	3				
14	C	38	39	23*							
15	D	4	3	3	50*	15	26				
16	C	19	12	69*							
17	E	1	2	3	5	82*	7				
18	B	4	81*	2	9	3	1				
19	B	21	40*	35	2	1	1				
20	F	7	7	13	31	7	36*				
21	D	0	0	4	83*	5	8				
22	E	6	2	18	6	62*	6				
	p'- waarde	aantal punten									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	
	23	82	4	8	27	61					
	24	59	23	13	28	35					
	25	82	16	2	2	80					
	26	81	11	3	16	69					
	27	85	7	6	12	75					
	28	18	66	14	8	6	6				
	29	71	4	2	6	6	10	19	10	9	36
	30	31	47	14	10	8	11	11			
	31	57	25	5	5	5	6	9	16	29	
32	14	75	3	8	1	2	3	7	2		

aantal kandidaten: 1243
 gemiddelde score: 63,9
 standaarddeviatie: 13,2
 gemiddeld percentage goed: 59,9

Tabel 3

Toets en itemanalyse – Cito, Arnhem
Analyse vragen wiskunde-C gehele populatie

Hoewel bekend verondersteld mag worden dat kandidaten weten dat berekeningen daar bij horen, geeft deze meer gedetailleerde formulering een aanzienlijke puntenwinst in vergelijking met het verleden. Naar mijn mening is dit een belangrijke verbetering.

Vraag 30 met de raaklijn ging helaas niet beter dan in het verleden.

Vraag 31 van het D-niveau over de oppervlakte had wellicht iets beter gemaakt kunnen worden: 25% van de kandidaten behaalde geen enkel punt bij deze vraag.

Vraag 32 van het D-niveau was, conform de wensen van de vaksectie, bedoeld voor het testen van creatieve, inventieve vermogens bij de kandidaten. De p'-waarde was slechts 14.

De vragen over de afbeeldingen, de gedetailleerde vraag over de grafiek en de puntentoekenning voor gedeeltelijk goede antwoorden hebben tot de goede resultaten bijgedragen. Ook het voorbeeldexamen dat de vereniging van wiskundeleraars verzorgde, zal van invloed geweest zijn.

Gezien de kwaliteit van het examen als geheel, de positieve reacties en de goede scoreresultaten heeft de vaksectie besloten de cesuur vast te stellen op 54/55. Volgens de regels van het Cevo-bestuur is bij een gemengd examen een hogere cesuur niet toegestaan. Het percentage onvoldoendes kwam daarmee voor mavo-D op 24% en voor lbo-D op 19% (vorig jaar 41% resp. 28%) en het gemiddelde cijfer op 6,4 resp. 6,6.

Het onderzoek met de referentietoetsen wees uit dat het examen in 1990 aanzienlijk makkelijker was dan in 1989. Bij het stellen van gelijke eisen had de cesuur dit jaar moeten liggen in de buurt van 60/61.

Lbo/mavo-C

In tabel 3 is per vraag aangegeven hoeveel procent van de kandidaten een bepaald alternatief koos, respectievelijk een bepaald aantal punten behaalde.

vraag	sleutel	p- en a-waarden								
		A	B	C	D	E	F			
1	C	10	4	75*	8	1	2			
2	C	9	6	61*	4	2	18			
3	B	3	39*	8	19	17	15			
4	D	19	11	7	63*					
5	A	65*	9	5	4	12	5			
6	E	8	30	5	6	51*				
7	F	0	1	1	1	22	75*			
8	C	19	7	58*	6	3	7			
9	A	24*	10	38	15	12	2			
10	B	2	36*	50	12					
11	C	29	21	50*						
12	F	12	8	3	3	4	70*			
13	D	4	4	4	42*	16	30			
14	E	9	4	20	8	47*	11			
15	B	9	71*	2	3	2	13			
16	C	7	7	76*	6	3	2			
17	C	8	4	49*	16	17	6			
18	F	2	30	3	6	9	51*			
19	B	7	69*	4	13	4	4			
20	C	4	6	83*	6	1	1			
21	D	1	1	8	67*	10	13			
22	F	4	6	20	6	6	58*			
	p'- waarde	aantal punten								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
23	66	21	11	18	50					
24	83	12	3	11	74					
25	35	56	7	12	25					
26	71	25	4	4	67					
27	46	38	15	8	6	33				
28	43	35	7	7	8	9	5	6	23	
29	37	48	3	9	3	4	4	9	20	
30	55	24	1	6	4	22	1	7	2	34
31	35	45	24	11	20					
32	12	83	2	3	3	2	7			

aantal kandidaten: 2368
gemiddelde score: 56,7
standaarddeviatie: 16,2
gemiddeld percentage goed: 51,9

Alleen bij de meerkeuzevraag over een cirkeldiagram was $p > 80$.

Bij drie meerkeuzevragen was $p < 40$. Het aflezen uit de grafiek voor welke x geldt $f(x) > g(x)$, vinden C-kandidaten kennelijk altijd moeilijk (zie vraag 3). Deze gemeenschappelijke vraag gaf het grootste verschil in p -waarde te zien: 39 voor lbo/mavo-C en 68 voor mavo-D.

Een vraag naar aanleiding van een al getekende vierhoek leverde een probleem op. Er werd gevraagd of de figuur (onder andere) een vlieger is. Omdat een leerboek de indruk wekte dat een vlieger geen tweede symmetrie-as mag hebben, kreeg iedere kandidaat voor deze vraag uiteindelijk twee punten extra.

De vraag over puntverzamelingen betrof dit keer alle punten in een driehoek die even ver van twee zijden liggen. Hier koos slechts 36% voor de deellijn en prefereerde 50% de zwaartelijn!

Het open gedeelte begon met het oplossen van een eerstegraads vergelijking (vraag 23). Volgens het correctievoorschrift konden de kandidaten met alle mogelijke fouten in de verdeeigenschap toch nog 2 van de 3 punten behalen: dat is bij nader inzien wel erg mild beoordeeld.

Bij vraag 24 over het tekenen van het spiegelbeeld van een driehoek behaalden de kandidaten gemiddeld 83% van de punten. Deze nieuwe open vraag bleek zeer goed toegankelijk.

In de opgave over functies bleek de eerstegraads ongelijkheid, aangeboden als $f(x) \leq -2$, slecht opgelost te zijn: $p' = 35$. Ook vielen de resultaten tegen bij het tekenen van de grafiek van de functie $g: x \rightarrow -x^2 - 6x - 5$, ondanks de expliciete toevoeging welke berekeningen vereist waren. Bij de berekening van de oppervlakte van een vierhoek in een rooster, waarbij 7 punten te behalen waren, kreeg 48% van de kandidaten geen enkel punt. Kwam dat omdat het nu eens ging om een vierhoek in plaats van om een driehoek?

Vraag 31 van het C-niveau is slecht gemaakt. De vaardigheid 'het opstellen van een vergelijking van een lijn' liet veel te wensen over.

Vraag 32 van het C-niveau was door de vaksectie bedoeld voor de betere kandidaten. Het lag voor de hand dat de beantwoording begon met het tekenen

van een verbindingslijnstuk om daarna de lengte te berekenen. Bij nader inzien had de tekening beter op de bijlage kunnen staan. De beoordelaar had dan uit de tekening mogelijk al kunnen afleiden of het verbindingslijnstuk wel loodrecht op k en l was genomen. De strekking van de eerste zin in het correctievoorschrift bij deze vraag was beter tot z'n recht gekomen als er had gestaan 'voor het tekenen van een lijnstuk dat de afstand aangeeft of op andere wijze aangeven dat de afstand loodrecht genomen wordt 2 punten'.

De open vragen zijn volgens tabel 1 voor mavo-C en mavo-D van ongeveer dezelfde moeilijkheidsgraad. De resultaten van leao/lhno/llo/lmo-C blijven jaarlijks ver achter bij mavo-C. Opvallend is dat dit jaar de resultaten van lto zowel bij het meerkeuze-deel als bij het open deel zoveel lager zijn dan die van mavo-C. Het verschil op het gehele examen bedraagt 5%. (In 1989 2%, in 1988 -4%). De verschillen zijn het grootst bij niet meetkundig getinte vragen.

Bij dit nieuwe examen zijn zowel de meerkeuzevragen als de open vragen beter gemaakt dan vroeger. De vaksectie wiskunde van de Cevo had de cesuur aanvankelijk vastgesteld op 54/55. Gezien het gemelde probleem bij één meerkeuzevraag werd deze cesuur verlaagd tot 52/53. Vanaf 1990 betekent zo'n cesuurverlaging dat, anders dan voorheen, iedere kandidaat twee scorepunten extra krijgt voor het centraal examen (tot het maximum van 100 punten). Deze punten zijn in tabel 1 alleen bij het gemiddeld cijfer en het percentage onvoldoendes verdisconteerd. Door deze cesuurverlaging kwam het percentage onvoldoendes voor het gehele C-niveau op 38% (vorig jaar 57%) en het gemiddelde cijfer op 5,9. Tabel 1 laat grote verschillen per schooltype zien.

Uit de afname van onder andere de referentietoetsen bij een steekproef van C-kandidaten en de analyse van de gegevens, bleek dat het vaardigheidsniveau in 1990 lager lag dan in 1989 en dat het examen in 1990 gemakkelijker was dan het examen van 1989. Wanneer in 1990 dezelfde eisen gesteld zouden zijn als in 1989, had de cesuur in de buurt van 59/60 moeten liggen.

Examenvragen

C 1 ■ Los op: $5x + 3 = 1$.

De oplossing

- A is kleiner dan -2
- B ligt tussen -2 en -1
- C ligt tussen -1 en 0
- D ligt tussen 0 en 1
- E ligt tussen 1 en 2
- F is groter dan 2

C 2 ■ Los op: $3x + 18 < 6x - 9$

D 1 Deze ongelijkheid is gelijkwaardig met

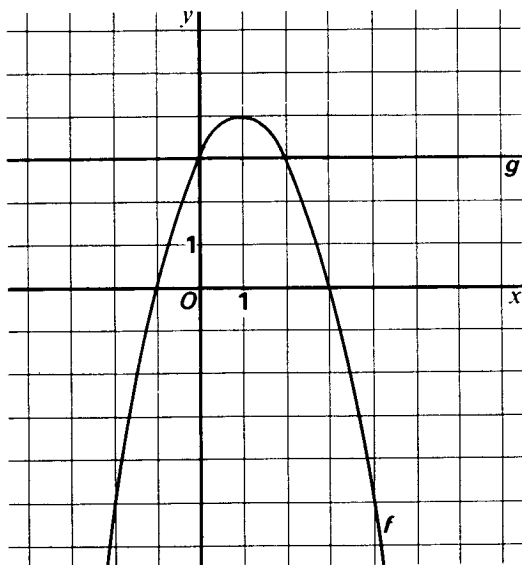
- A $x > -9$
- B $x > -3$
- C $x > 9$
- D $x < -3$
- E $x < 1$
- F $x < 9$

Hieronder zijn de grafieken getekend van een tweedegraads functie f en een constante functie g .

C 3 ■ Lees af voor welke x geldt: $f(x) > g(x)$.

D 5 De oplossingsverzameling is

- A $\langle \leftarrow, 0 \rangle$
- B $\langle 0, 2 \rangle$
- C $\langle 2, \rightarrow \rangle$
- D $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$
- E $\langle \leftarrow, 3 \rangle$
- F $\langle 3, 4 \rangle$

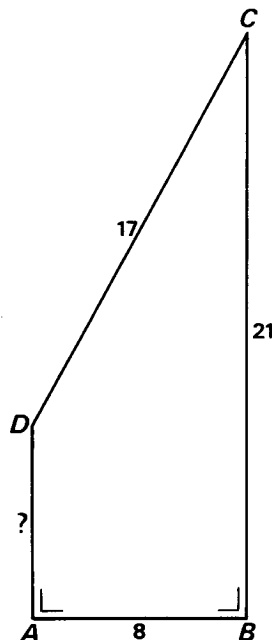


Hieronder is een vierhoek $ABCD$ getekend met $AB = 8$, $BC = 21$, $DC = 17$ en $\angle A = \angle B = 90^\circ$.

C 13 ■ Bereken AD .

D 15 Het antwoord ligt tussen

- A $2\frac{1}{2}$ en $3\frac{1}{2}$
- B $3\frac{1}{2}$ en $4\frac{1}{2}$
- C $4\frac{1}{2}$ en $5\frac{1}{2}$
- D $5\frac{1}{2}$ en $6\frac{1}{2}$
- E $6\frac{1}{2}$ en $7\frac{1}{2}$
- F $7\frac{1}{2}$ en $8\frac{1}{2}$



D 14 ■ Van een driehoek zijn de zijden 7, 7 en 10. Is deze driehoek rechthoekig, scherphoekig of stomphoekig?

- A rechthoekig
- B scherphoekig
- C stomphoekig

Opgave 1 (C-niveau)

23 ☐ Los op: $3(a - 5) - 2(a - 4) = 0$.

Opgave 2 (C-niveau)

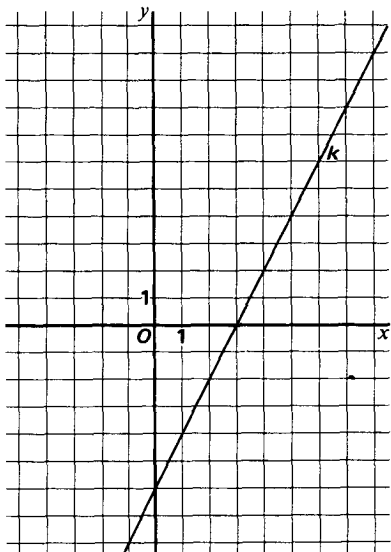
24 ☐ Op de bijlage zijn lijn n en driehoek ABC getekend. Teken het beeld van $\triangle ABC$ bij spiegeling in de lijn n op de bijlage.

Opgave 5 (C-niveau)

Hieronder is een lijn k getekend met vergelijking $y = 2x - 6$.

Een lijn l is evenwijdig met k en gaat door het punt $(-2, 5)$.

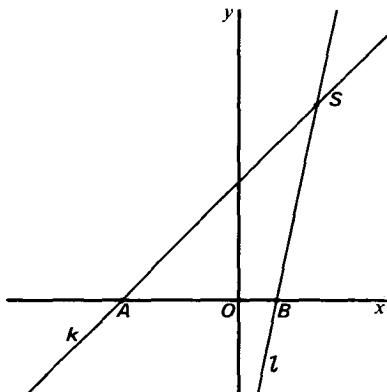
- 31 ☐ Stel de vergelijking op van l .
 32 ☐ Bereken de afstand tussen de lijnen k en l in één decimaal nauwkeurig.



Opgave 3 (D-niveau)

Hieronder zijn de lijnen k : $y = x + 3$ en l : $y = 5x - 4$ getekend.

- 27 ☐ Bereken de coördinaten van het snijpunt S .
 28 ☐ Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle ABS$ in graden nauwkeurig.



Opgave 4 (D-niveau)

Gegeven is de functie $f: x \rightarrow 2x^2 + 12x + 10$.

- 29 ☐ Los op $f(x) = 0$, bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f en teken de grafiek van f in het assenstelsel op de bijlage.

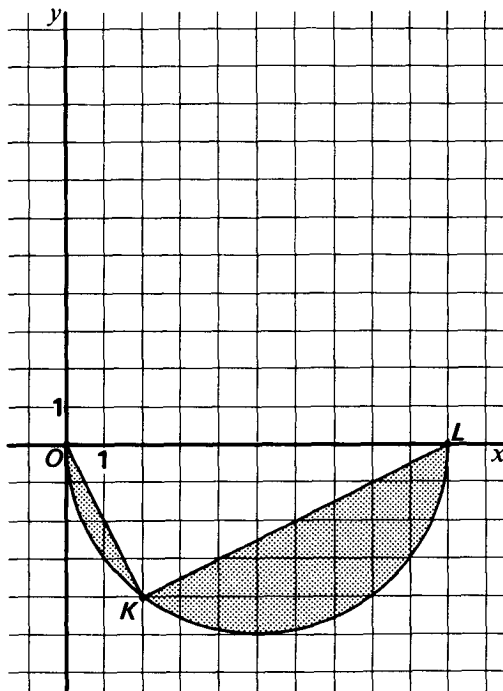
De lijn $y = 4x + b$ raakt de grafiek van f .

- 30 ☐ Bereken b .

Opgave 5 (D-niveau)

Gegeven zijn de punten $O(0, 0)$, $K(2, -4)$ en $L(10, 0)$.

De hoekpunten van $\triangle OKL$ liggen op een halve cirkel. Zie de figuur.



- 31 ☐ Bereken de oppervlakte van het grijze gedeelte in twee decimalen nauwkeurig.

Verder is gegeven een variabel punt $P(x, y)$ in het eerste kwadrant.

- 32 ☐ Onderzoek aan welke voorwaarden x en y moeten voldoen zo dat de oppervlakte van vierhoek $OKLP$ gelijk is aan 64.

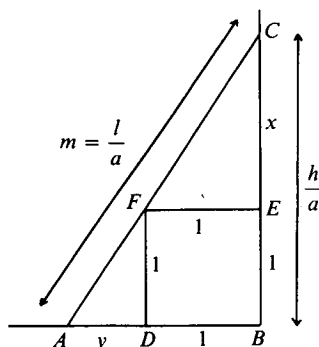
● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

► Oplossing 623

Enthousiast is er in de kerstvakantie gepuzzeld over het beroemde ladderprobleem: ladder AC met lengte l staat tegen een muur en raakt daarbij een vierkante doos $DBEF$ met zijde a . Wat is de maximale hoogte $BC = h$ uitgedrukt in l en a ?

Velen deelden alle afstanden door a , zodat we de volgende tekening krijgen. We zien dan snel twee vergelijkingen:



$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = m^2 \text{ en } y = 1/x.$$

$$\text{Samen levert dat } (x+1)^2 + \left(\frac{1}{x}+1\right)^2 = m^2.$$

In § 48 van [1] noemt Wijdenes dit een *wederkerige vergelijking*. Na herschrijving vinden we:

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 2(x + \frac{1}{x}) - m^2 + 2 = 0. \text{ Stel nu } t = x + \frac{1}{x}.$$

$$\text{Dat levert } (t^2 - 2) + 2t - m^2 + 2 = 0 \\ \text{oftewel } t^2 + 2t - m^2 = 0.$$

$$\text{Wegens } t > 0 \text{ geldt: } t = -1 + \sqrt{1 + m^2} = n - 1 \\ \text{met } n = \sqrt{1 + m^2}.$$

Nu nog $x^2 - tx + 1 = 0$ oplossen, waarbij $x > 0$.

Voor de gevraagde maximale hoogte BC krijgen we:

$$h = a(1+x) = \frac{1}{2}a(n+1 + \sqrt{(n-1)^2 - 2^2}) \text{ met} \\ n = \sqrt{1 + m^2} \text{ en } m = \frac{l}{a}.$$

Dank aan de heer *W. H. V. de Goede* (5) uit Roden voor de tip over [1], een studieboek van zijn vader!

Lourens van den Brom (5) uit Krommenie merkte op dat deze h zelfs te construeren is met passer en liniaal als de lijnstukken a en l gegeven zijn (met $l \geq 2a\sqrt{2}$).

Van de vele, vele methodes wil ik u nog noemen de volgende oplossing van o.a. *Gerrit de Bruijn* (5) uit Amersfoort.

Noem $BC = t + u$, dus $x + 1 = t + u$ en verder $y + 1 = t - u$. We vinden dan $(t+u)^2 + (t-u)^2 = m^2$, dus: $t^2 + u^2 = \frac{1}{2}m^2$. $y = 1/x$ levert dan na wat rekenen: $t^2 - u^2 = 2t$.

Optellen geeft t en aftrekken levert u . Prachtig toch?

U kunt uw eigen uitdrukking voor h controleren met de gehele waarden $l = 35$, $a = 12$ en $h = 28$.

De doos hoeft niet per se vierkant te zijn, getuige de oudste bron [2] die ik gevonden heb: $l = 52$, breedte doos = 15, hoogte doos = 12 en $h = 48$.

Met 20 punten is winnaar geworden: *Jacques Haubrich*, Aeneaslaan 21, 5631 LA Eindhoven. Proficiat met de boekenbon!

Referenties:

[1] P. Wijdenes, *Lagere Algebra* (leerboek voor de akte wiskunde L.O.) Deel II (derde druk 1935, P. Noordhoff N.V., Groningen-Batavia).

[2] A. Cyril Pearson, *The twentieth century standard puzzle book* (1907, Routledge, London).

► Opgave 626

In FOLIA, het weekblad van de Universiteit van Amsterdam, verscheen op 27 augustus 1983 voor het eerst een wiskundige puzzelrubriek. Onder de titel DENKWAAR geeft Jaap Klouwen elke 14 dagen zijn lezers een probleem op. Onlangs verscheen DENKWAAR 150, een aantal waar hij trots op mag zijn.

Toen ik Jaap vroeg wat zijn beste puzzel is geweest, noemde hij na enig nadenken een puzzel in de categorie 'Fairy Chess'. Als eerbetoon aan zijn rubriek leg ik u deze puzzel nu voor.

Omdat er maximaal 8 Dames op het schaakbord gezet kunnen worden zonder dat ze elkaar aanvallen, voegen we aan de Dame een 'stukwaarde' $1/8$ toe. Zo zijn de waarden van Koning, Toren, Loper en Paard respectievelijk $1/16$, $1/8$, $1/14$ en $1/32$.

Probeer nu eens een aantal van de genoemde stukken op het schaakbord te zetten zo dat ze elkaar niet aanvallen en de som van de stukwaarden groter is dan 1. Een voorbeeld: Lopers op a1, a5, b1, b5 en Dames op c8, d6, e3, f7, g2, h4 hebben samen de 'bezettingswaarde' $\frac{4}{14} + \frac{6}{8} = \frac{29}{28}$.

Als u binnen een maand een bezettingswaarde groter dan $\frac{29}{28}$ vindt, wilt u dan uw oplossing insturen? Dat levert sowieso punten voor uw puzzelladder op. Degenen die de grootste waarde (onder de inzenders!) vinden, ontvangen 5 punten.

De maximaal haalbare waarde is overigens nog steeds niet bekend! Jaap besluit zijn oplossing met: 'Ik beschouw de 'jacht op het maximum' in ieder geval niet als afgehandeld'.



► Examenbesprekingen mei 1991

De examenbesprekingen wiskunde voor havo worden dit jaar voor het laatst gehouden. Volgend jaar worden er besprekingen georganiseerd voor havo wiskunde-A en havo wiskunde-B.

De besprekingen voor lbo/mavo moesten gepland worden als op de volgende bladzijde aangegeven. Toch willen we alle collega's oproepen de besprekingen bij te wonen met het oog op de veranderingen in de komende jaren.

Met nadruk zij vermeld dat de vastgestelde normen voor alle examens niet veranderd mogen worden.

Examenbesprekingen wiskunde voor vwo A op donderdag 16 mei 1991 van 16.00 h – 18.00 h te:

Plaats	Gespreksleider:
AMSTERDAM Calandlyceum Hoeken 61 020-44 51 51	S. T. Min 02290-3 77 56
ARNHEM Thorbecke S.G. Thorbeckestraat 17 085-42 30 28	Drs. W. H. M. Kremers 08373-1 82 06
BUSSUM Goois Lyceum Vossiuslaan 2a 02159-3 32 94	L. Sijp 02159-4 41 82

GOES
Buys Ballotcollege
Bergweg 4
01100-1 30 10

's-GRAVENHAGE
St. Janscollege
Colijnplein 9
070-368 76 70

GRONINGEN
Rölingcollege
Melisseweg 2
050-42 10 00

ROTTERDAM
Citycollege E.F.
Beukelsdijk 91
010-4 77 00 33

TILBURG
HS Kath. Leergangen
Pyreneeënweg 3
013-39 46 70

ZWOLLE
Chr. HS Windesheim
Campus 2-6
038-69 92 50

Drs. S. H. P. Garst
01874-21 77

J. P. C van der Meer

C. H. G. Hegeman
050-77 54 90

C. Rijke
01807-2 17 40

Drs. J. J. Verboom

J. T. J. Mahieu
038-54 04 14

Examenbesprekingen wiskunde voor havo op donderdag 16 mei 1991 van 18.30 h – 20.30 h te:

Plaats	Gespreksleider
AMSTERDAM Calandlyceum Hoeken 61 020-19 83 99	Mw drs. G. W. Fokkens 020-6 43 84 47
GRONINGEN Rölingcollege Melisseweg 2 050-42 10 00	Drs. M. van Steenis 05908-1 81 21
ROTTERDAM Citycollege E.F. Beukelsdijk 91 010-4 77 00 33	B. L. G. P. Hillebrand 01807-1 52 10
ZWOLLE Chr. HS Windesheim Campus 2-6 038-69 92 50	J. P. Scholten 053-76 87 91

GRONINGEN
Rölingcollege
Melisseweg 2
050-42 10 00

H. H. C. Pentinga
05909-15 28

HENGELO J. C. A. Epping
Twickelcollege 05452-12 72
Woolderesweg 130
074-42 44 25

ROTTERDAM
Citycollege E.F.
Beukelsdijk 91
010-4770033

E. J. van Dongen
010-4672130

TILBURG
HS Kath. Leergangen
Pyreneeënweg 3
013-39 46 70

LEEWARDEN 1 F. de Boer
 Mavo Nylan 05170-36 10
 Prinsessenweg 4 2 J. Tuinstra
 058-88 42 02 05133-26 57

ROTTERDAM
Mavo Het Lage Land
Kromhoutstraat 1-7
010-420 53 93

TILBURG 1 en 2 F.J. Mahieu
HS Kath. Leergangen 04116-73468
Pyreneeënweg 3
013-394670

UTRECHT
K.S.G. Lunetten
Kampereiland 6
030-88 35 51

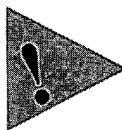
1 J. Beckman
03430-1 40 16
2 R. J. Roukema
03465-6 04 29

ZWOLLE
Thorbecke S.G.
Dr. v. Heesweg 1
038-54 66 77

1 G. J. Scheppink
05291-5 35 26
2 S. R Zwaan
038-65 25 30

Plaats	Gespreksleider
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	
31	
32	
33	
34	
35	
36	
37	
38	
39	
40	
41	
42	
43	
44	
45	
46	
47	
48	
49	
50	
51	
52	
53	
54	
55	
56	
57	
58	
59	
60	
61	
62	
63	
64	
65	
66	
67	
68	
69	
70	
71	
72	
73	
74	
75	
76	
77	
78	
79	
80	
81	
82	
83	
84	
85	
86	
87	
88	
89	
90	
91	
92	
93	
94	
95	
96	
97	
98	
99	
100	

AMSTERDAM
Calandlyceum
Hoekenes 61
020-198399



4 en 5 april 1991: Rotterdam, Symposium over COO in de wiskunde op het Nederlands Mathematisch Congres. Zie Euclides jg. 66, nr. 6, bladzijde 167.

april t/m augustus 1991: Eindhoven, Lustrumactiviteiten TUE. Zie de mededeling op bladzijde 211.

17 april 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

8 mei 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

16 mei 1991: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen vwo A en havo. Zie het Verenigingsnieuws op bladzijde 223.

22 mei 1991: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen mavo/lbo C-D. Zie de aankondiging op deze bladzijde.

27 mei 1991: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen vwo B. Zie de aankondiging op deze bladzijde.

12 juni 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW met de inspecteurs voortgezet onderwijs.

19 juni 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

6 september 1991: Eindhoven, Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade.

9 t/m 13 september 1991: Noordwijkerhout, ICTMA 5. Zie Euclides jg. 66, nr. 3, bladzijde 96.

Najaar 1991: Diverse plaatsen, Regionale bijeenkomsten over W 12-16.

Uw Wens:

Een krachtige rekenpakket waarmee leerling en docent zonder moeite, snel en foutloos

- grafieken van functies tekenen,
- exact rekenen met wiskundige formules,
- numeriek rekenen in elke gewenste nauwkeurigheid.

```
In[1]:=
```

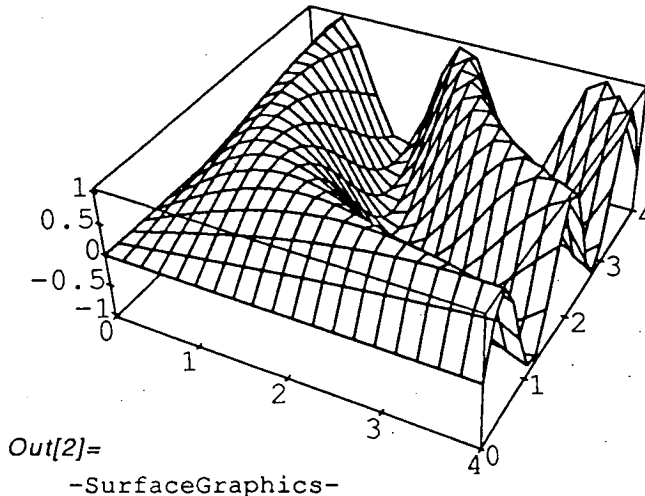
```
Factor[x^8-y^8]
```

```
Out[1]=
```

```
(x - y) (x + y) (x^2 + y^2) (x^4 + y^4)
```

```
In[2]:=
```

```
Plot3D[Sin[x y], {x, 0, 4}, {y, 0, 4},  
Shading->False, PlotPoints->20]
```



De oplossing:

Mathematica, Maple en Derive

Deze computerprogramma's automatiseren grafische, symbolische en numerieke berekeningen.

Klop voor informatie, advies en aankoop van wiskunde-software aan bij het

Expertisecentrum Computer Algebra Nederland

Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam

☎ 020-5926050, fax 020-5924199

Inhoud

Inhoud 193

M. C. van Hoorn: Examinering basisvorming 194

E. J. J. Kremers, H. Boertien: Cito-reactie 195

M. C. van Hoorn: Nawoord 197

40 jaar geleden 197

Henk Mulder: Vectoren, schaduwen en rookpluimen 198

Frederik van der Blij, Waldy Vastrick: Driedeling van de hoek 202

F. H. Simons: Aansluitingsproblematiek vwo-wo 204

Boekbespreking 206

Truus Dekker: Examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (7) 207

Werkbladen 208

Wim van de Geer: Aansluitingsproblemen op de pabo 210

Mededeling 211

Joop van Dormolen, Francis Meester: Een nieuw leerplan 211

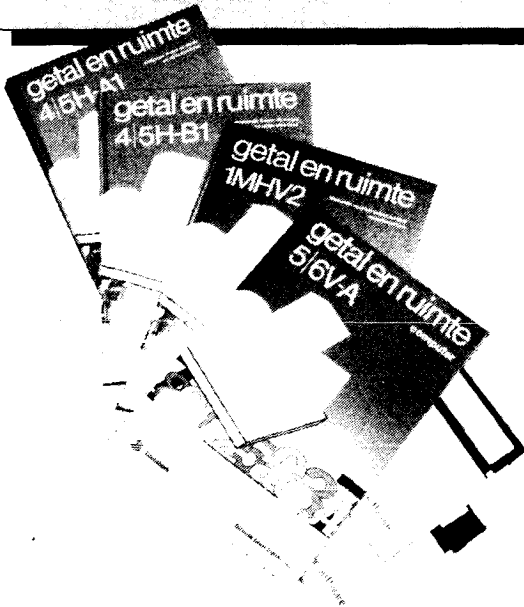
G. Bakker: De wiskunde-examens lbo/mavo van 1990, eerste tijdvak 215

Recreatie 222

Examenbesprekingen mei 1991 223

Kalender 224

GETAL EN RUIMTE: de constante factor voor een geslaagde wiskundeles



De belangrijkste wiskunde methode voor LBO, MAVO, HAVO en VWO kent een groot aantal tevreden gebruikers. Getal en Ruimte is een methode, die zich kenmerkt door een evenwichtig didactisch concept. Geen wonder, want Getal en Ruimte verwerkt onderwijskundige vernieuwingen op een verantwoorde wijze. Getal en Ruimte is een methode die duidelijk, up-to-date en rijkelijk voorzien is van toets- en differentiatiemogelijkheden. Het is een methode waarmee uw leerlingen uitstekend zelf kunnen werken en waarin het vak wiskunde waar mogelijk gerelateerd wordt aan de alledaagse werkelijkheid. En niet alleen uw leerlingen werken er gemakkelijk mee. Ook voor de docent is het een gebruiksvriendelijke methode, mede dankzij de overzichtelijke docentenhandleidingen. Getal en Ruimte is ook verkrijgbaar bij de erkende boekhandel. Voor meer informatie en voor het aanvragen van de nieuwe documentatie LBO/MAVO of MAVO/HAVO/VWO kunt u zich richten tot:



Educaboek

Educaboek, Postbus 48,
4100 AA Culemborg, tel.: 03450-71880.

Getal en Ruimte: zekerheid in het kwadraat