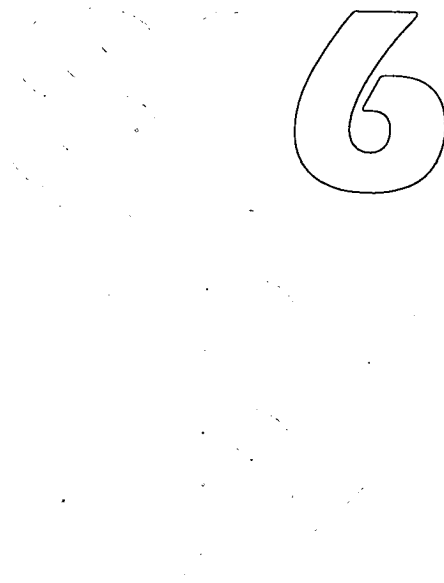


Wolters-Noordhoff

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Vakblad voor de wiskundeleraar

Euclyides



6

jaargang 66 1990 | 1991 februari/maart

Redactie

Drs H. Bakker
Drs R. Bosch
Drs J. H. de Geus
Drs M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
N. T. Lakeman (beeldredacteur)
Drs A. B. Oosten (voorzitter)
P. E. de Roest (secretaris)
Ir. V. E. Schmidt (penningmeester)
Mw. Drs A. Verweij (eindredacteur)
A. van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,
8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 55,- per verenigingsjaar;
studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de
V.V.W.L. f 37,50; contributie zonder Euclides f 30,-.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met
vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de
leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan
F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij
drs M. C. van Hoorn, Noordersingel 12,
9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te
zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos
5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is
opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f 58,00. Een collectief
abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 37,00.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie,
Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86.
Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen
tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend
nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag
leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde
van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 9,50 (alleen verkrijgbaar na vooruit-
betaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUI' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

● Inhoud ● ● ● ● ●

Bijdrage 162

Bram van der Wal *Een experimenteel voorbeeldexamen lbo/mavo*

'Wat heeft dit nu met wiskunde te maken?' luidde de reactie van leerlingen die gestruikeld waren over onzorgvuldige formuleringen en niet herkenbare situaties.

Mededeling 167

40 jaar geleden 167

Vraagstukken

Bijdrage 168

Frederik van der Blij, Waldy Vastrick *Constructies van regelmatige veelhoeken* 168

Regelmatige zeven- en negenhoeken kunnen geconstrueerd worden, als behalve de gewone passer en liniaal ook een neuspasser gebruikt mag worden.

Truus Dekker *Examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (6)* 175

Werkbladen 176

Bijdrage 178

Folkert Schlichting *Eerstegraads functies en de wijzers van de klok*

Over een onderhoudende opdracht die leerlingen aanzet tot activiteiten op verschillende gebieden van de wiskunde.

Mededeling 179

Bijdrage 180

Ben Mooiman, Douwe T. Prinsse *Wiskunde-onderwijs aan de Heao in Zwolle*

Een gedifferentieerde aanpak van wiskunde-deficiënties bij aankomende heao-studenten als praktische oplossing voor aansluitingsproblemen.

Mededeling 181

Bijdrage 182

Victor Schmidt *Wiskunde op de heao* 182

Een pleidooi voor een andere oplossing van de aansluitingsproblematiek havo-heao: het wiskundeprogramma van de heao op de helling!

Douwe T. Prinsse, Ben Mooiman *Wiskunde op de heao: een reactie* 184

H. N. Schuring *De 29e Nederlandse Wiskunde Olympiade 1990* 185

Het verslag, de opgaven en de oplossingen.

Verenigingsnieuws 188

Advies bezemexamens havo

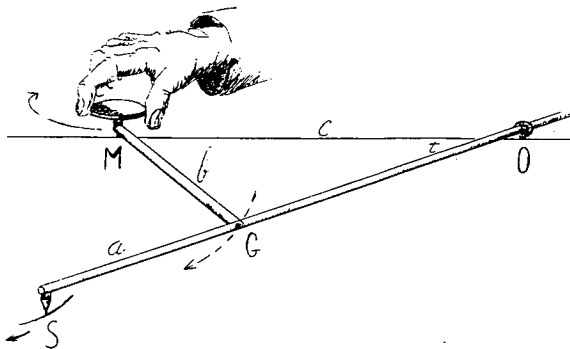
Recreatie 189

Verenigingsnieuws 190

Freek Mahieu *Van de bestuurstafel*

Boekbespreking 192

Kalender 192



De neuspasser

► **Een experimenteel voorbeeldexamen lbo/mavo**

Bram van der Wal

Op 15 en 16 maart 1990 vond in Beekbergen een VALO-conferentie plaats. Een verslag daarvan was te lezen in het juninummer van Euclides. De deelnemers aan de conferentie kregen na afloop van de conferentie een huiswerkopdracht mee. Eén van de opdrachten betrof de beoordeling van een experimenteel voorbeeldexamen lbo/mavo-D. Dit examen was alleen nog maar een voorbeeld van hoe een examen er in de toekomst uit zou kunnen zien. Op deze wijze kregen docenten de gelegenheid om te ontdekken in welke richting het examen zich in de toekomst misschien ontwikkelt. Om tot een zo goed mogelijk oordeel te komen werd de tip gegeven het examen door leerlingen te laten maken.

De ontvangst

‘Wat heeft dit nou met wiskunde te maken?’ Deze opmerking werd het meest gemaakt aan het eind van twee uur zwoegen. De zwoegers waren lbo-examenkandidaten, een D- en een C-groep. Nadat ze een aantal traditionele examens van de laatste jaren hadden doorgewerkt en er nog wat ruimte was om te experimenteren kregen ze eind april (veertien dagen voor hun echte examen) dit voorbeeldexamen voorgezet.

Geen wiskunde dus. Wie heeft ze dan verteld wat wiskunde is? Niemand natuurlijk. Maar zo min als je op de basisschool aan leerlingen de DNA-structuur van een grasspriet hoeft uit te leggen en ze toch wel weten wat een grasveld is, zo min hoeft je leerlingen na vier jaar nog uit te leggen wat wiskunde is. Voor hen is wiskunde de stelling van Pythagoras, het berekenen van volumes en oppervlakten, functies en parabolen tekenen. Niet veel meer, soms minder.

De discussie of wiskunde levensecht dan wel spannend moet zijn, wellicht toepasbaar, of wiskunde nodig zou zijn voor verdere studie, mogelijk een vormende waarde heeft en of je met wat wiskundige bagage beter kunt overleven, deze discussie wordt buiten de klas gevoerd. Wiskunde betreft in de praktijk van alle dag op school opdrachten met meestal slechts één antwoord (tweedegraads vergelijkingen vormen daar om onduidelijke redenen een uitzondering op) en dat antwoord is dan goed of fout. Als de leerlingen in het voorbeeldexamen geen wiskunde zien spreken ze daarmee nog geen waardeoordeel uit over dit produkt. Ze geven slechts aan dat het examen niet aansluit bij hun ideeën omtrent wiskunde.

Aan het einde van dit artikel wil ik proberen zelf een antwoord te formuleren op de door de leerlingen gegeven cri de coeur. Maar eerst wil ik een aantal opdrachten uit het voorbeeldexamen de revue laten passeren.

Het examen

Het eerste item van het examen bestond uit een veel te lange leestekst met vier opdrachten. Een deel van de tekst was nogmaals op het bijgevoegde werkblad afgedrukt zodat er ook voor een geoefende lezer erg veel tijd nodig was om een en ander helder te krijgen. De lawine tekst die in dit vraagstuk op de leerlingen af kwam was dermate groot dat een aantal van hen er in versloeg. De vraag blijft dan ook waarom het examen op een dergelijke manier werd geopend. Een collega die het examen eveneens met een groep maakte zag de bui al hangen en gaf ‘de tip’ met opdracht 5 te beginnen. Indien er nog tijd over zou zijn kon alsnog begonnen worden aan de grafieken. Hij kreeg gelijk. De resultaten van

zijn vergelijkbare groep waren veel beter. Zijn leerlingen werkten de opdrachten vanaf 5 vlot door terwijl die van mij zeker een half uur zaten te kankeren bij het maken van opdracht 2.

Opdrachten 1 t/m 4

Fietsen

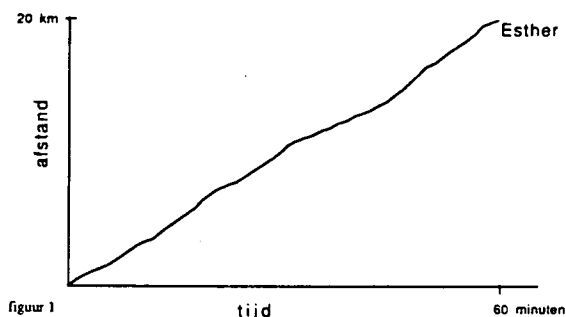
Leerlingen van een derde klas hebben een ronde uitgezet van 500 meter.

Ze gaan een uur lang rondjes rijden op de fiets.

Het gaat erom wie de meeste rondjes haalt in een uur.

Ze starten om de beurt.

Hieronder staat de tijd / afstand-grafiek van Esther die als vierde eindigde in het klassement.



Opdracht 1 zie werkblad

- Wat vind je, haalt Esther in één uur veel of weinig kilometers?
- Maak een verdeling met streepjes en getallen op de verticale as en de horizontale as (zie werkblad).

Als iedereen gereden heeft, kunnen de ritten vergeleken worden. Hier volgt de beschrijving van de drie beste ritten.

Joep: Hij voetbalt. Eens in de week traint hij en in het weekend speelt hij een wedstrijd. Hij gaat snel van start. Na een kwartier had hij het grootste aantal ronden afgelegd van allemaal. In de rest van de wedstrijd gaat hij steeds iets langzamer rijden. Na 45 minuten heeft Joep evenveel rondjes gereden als Monique en Henk. Alle anderen hebben na 45 minuten minder ronden afgelegd.

Na 58 minuten valt Joep van vermoeidheid van zijn fiets. Als hij overeind krabbelt is zijn uur om.

Monique: Ze traint twee keer in de week voor schaatsen. Ze fietst iedere dag 10 km naar school. Ze rijdt een zeer regelmatige race. Ze rijdt op een omafiets.

Henk: Hij zit op waterpolo. Hij begint heel rustig. Na een kwartier heeft hij van alle leerlingen het minste aantal rondjes gereden. Maar dan gaat hij steeds sneller rijden.

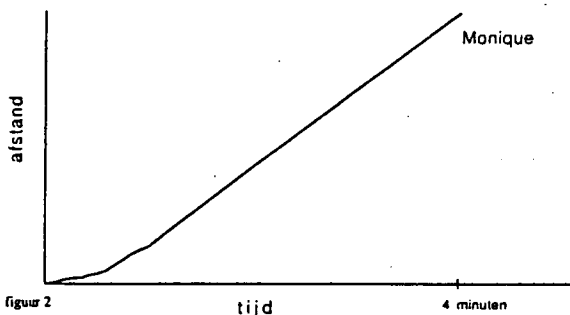
Opdracht 2

- Wie waren 1, 2, 3 en 4 bij deze wedstrijd?
- Schets in figuur 1 van je werkblad de grafieken van Joep, Monique en Henk.

Opdracht 3

- Onderstreep in de verhaaltjes over Joep, Monique en Henk op het werkblad welke informatie echt nodig was om de grafieken te kunnen tekenen.

We bekijken nu een grafiek van de eerste vier minuten van de race van Monique. Ze moet even op snelheid komen. Daarna rijdt ze met constante snelheid.



Opdracht 4

- Maak zelf een verdeling op de horizontale as van figuur 2 van je werkblad.
- Zet streepjes met afstanden op de verticale as.
- Leg uit hoe je aan die getallen komt.

De allereerste opdracht bleek niets om het lijf te hebben: 'Haalde Esther in één uur veel of weinig kilometers?'

Ja, wie zal uitmaken of Esther veel of weinig kilometers maakt? Is Esther getraind, rijdt ze op een oma-fiets of op een heuse mountain-bike? Weten leerlingen wel hoe snel ze zelf rijden? En als ze dat al weten, is dat dan een te gebruiken referentiekader? Als aanloopvraag was het voldoende geweest om de afgelegde weg na één uur te vragen. Indien dit geen D-niveau is (en dat is het niet naar mijn mening) vraag dan hoeveel rondjes Esther na één uur heeft afgelegd.

Opdracht 2 had om uiteenlopende redenen aan waarde gewonnen als de afstand (in km of in rondjes) van de drie genoemde leerlingen na drie kwartier gegeven was.

Bijvoorbeeld: Deze drie leerlingen hebben na 45 minuten 36 rondjes gereden. Hoeveel kilometer is

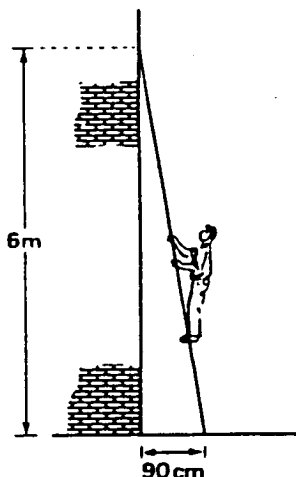
dat? Teken het bij deze gegevens behorende punt in de grafiek.

Met zo'n opstapje was het voor de leerlingen mogelijk geweest tot een enigszins verantwoorde oplossing te komen op de vraag wie één, twee of drie wordt. Uit het gemaakte werk blijkt dat sommige leerlingen het bewuste punt direct boven de grafiek van Monique kiezen en dan hopeloos verstrikt raken in de veelheid van lijnen.

Evergreen

Opdracht 6

- Een ladder staat met de voet 90 cm bij een muur vandaan en steunt op 6 m hoogte tegen de muur. Bereken de lengte van de ladder in cm.

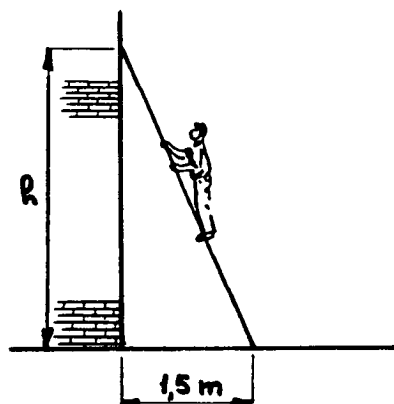


Opdracht 6 is ondertussen een evergreen geworden. Het vraagstuk wijkt in geen enkel opzicht af van hetgeen in de traditionele examens op dit gebied gevraagd wordt. Dat is opmerkelijk daar juist hier wiskunde voor alledag aan de orde is. Door de verschillende maateenheden waren er wel wat extra problemen maar desondanks was het geen D-niveau. Ik denk dat veel leerlingen op B-niveau deze opdracht met succes maken. Als toets om te zien of men de stelling van Pythagoras kent overigens een prima vraagstuk. Voor het leven van alledag moet de vraagstelling echter anders zijn.

Als je de lengte van een ladder wilt weten leg je deze op de grond en meet de lengte op. Een andere manier is het tellen van het aantal sporten. In de praktijk komt het immers niet op een centimeter aan. Hieronder drie proeven van een soortgelijk vraagstuk met 'alledaagse' vragen.

Proeve 1. Jan wil in zijn vrije tijd geld bijverdienen door glazen wassen en dakgoten schoonmaken. Hij komt tot de conclusie dat de ladder tot een hoogte van 6 m moet reiken. (Hier zit ook al stof tot een vraagstuk in; hoe bepaal je namelijk de hoogte van een gebouw of een deel er van zonder daadwerkelijk opmeten?) Twee sporten van een ladder staan 25 cm uit elkaar. Hoeveel sporten moet de ladder hebben die Jan gaat kopen? (C-niv.)

Proeve 2. Glazenwasser Jansen heeft een ladder met 3×18 sporten. De totale lengte van de ladder is 12 m. Tot welke hoogte komt deze ladder als hij geplaatst wordt zoals in figuur 1 is te zien. (C-niv.) De aardigheid is hier het overbodige gegeven.



Figuur 1

Proeve 3. Met ladders gebeuren veel ongelukken. De meest voorkomende oorzaak is dat de ladder weg glijdt. Aannemer Gorissen heeft ontdekt dat de kans op wegglijden het geringst is als de verhouding 1 : 5 (horizontaal : verticaal) is. Hij heeft een ladder met een lengte van 7,5 meter. Hoeveel cm moet deze ladder ongeveer uit de muur geplaatst worden? (D-niveau)

Draaisymmetrie

Opdracht 16

Maak met tegels van deze vorm:



een tegelpatroon van zes tegels dat draaisymmetrisch is. Gebruik de tekening op het werkblad.

Het maken van een tegelpatroon van zes tegels dat draaisymmetrisch moet zijn met de in het vraagstuk gegeven tegels is niet alleen lastig maar ook weinig bevredigend. Lastig, omdat deze tegel weinig mogelijkheden in zich bergt. Bijkomend probleem, dat bij meer alledagswiskunde voorkomt, is de vraag in hoeverre deze tegel aan onder- en bovenzijde gelijk is. Met andere woorden: Mag deze tegel straffeloos omgedraaid worden? In de werkelijkheid is dat namelijk niet zo.

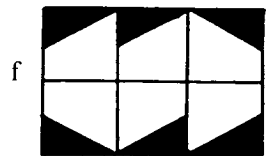
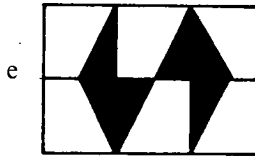
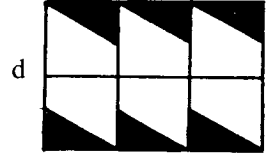
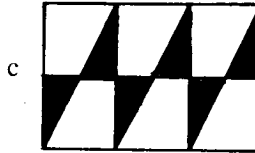
De leerlingen kozen dan ook veel patronen waarbij de tegels naar hartelust met de 'bovenkant' boven of juist onder lagen. Ook bij deze ruime interpretatie van de mogelijkheden ontstonden geen juweeltjes van oplossingen. Dat is jammer omdat bij dit soort opdrachten toch een fraaie oplossing mogelijk moet zijn.

Waarom niet een opdracht gemaakt waarbij de leerlingen zelf een tegel mogen ontwerpen die een draaisymmetrisch patroon moet vormen bij aanleggen van een x -aantal.

Overigens rijst bij mij de vraag – pas nadat ik deze opdracht zelf heb uitgewerkt – of het hier gestelde probleem wel realistisch is. Bij tegelmotieven wordt vaak van lijnspiegelingen uitgegaan. Met name in randen van vloeren en wanden zijn vaak op lijnspiegelingen gebaseerde ontwerpen te zien.



a en b: Randen van vloeren en wanden.



c en d: Draaisymmetrisch, maar ook mooi?

e en f: Draaisymmetrisch met tegels die onder en boven gelijk zijn. Mooi?

De redelijke pizza

Opdracht 18

- Een pizzabakker verkoopt éénpersoonspizza's met een diameter van 10 cm en gezinspizza's met een diameter van 25 cm. Als de kleine pizza $f2,15$ kost, wat is dan een redelijke prijs voor de grote pizza?

Bij het voorbeeldexamen val je van de ene verbazing in de andere. Waarom is het pizza-vraagstuk – wiskunde voor alledag; wat mij betreft zelfs realistische wiskunde – zo onbeholpen aan de leerlingen voorgezet? Het kan dan wel leuk zijn om ze met de weinige gegevens te verplichten hun fantasie te gebruiken, het lijkt zeker zo zinnig om enige wiskundige activiteit te vragen.

Als een kleine pizza $f2,15$ kost is het dan redelijk te veronderstellen dat een grote $2,5 \times f2,15 = f5,40$ zal kosten?

Of is de leerling die $(2,5)^2 \times f2,15 = f13,45$ voor zijn pizza berekent redelijker bezig?

Een andere leerling veronderstelt dat er grondstofkosten en andere kosten (noem ze vaste kosten) zijn. Hij of zij veronderstelt dat er $f1,50$ vaste kosten zijn en $f0,65$ variabele bij de kleine pizza. Aldus geredeneerd kost de grote pizza $f1,50 + (2,5)^2 \times f0,65 = f5,60$, daarmee heel dicht in de buurt komend bij de prijs van de eerste pizzabakker. De schijfjes salami blijven even dik! Uitgaande van dezelfde realistische situatie zou ik kiezen voor de volgende benadering van het vraagstuk. Een pizzabakker verkoopt éénpersoonspiz-

za's met een diameter van 10 cm en gezinspizza's met een diameter van 25 cm. De prijs van de pizza's wordt als volgt opgebouwd: vaste kosten voor elke pizza f1,50 en de rest voor de grondstoffen. De kleine pizza kost f2,15. Wat is een redelijke prijs voor een grote pizza als je deze gegevens gebruikt?

Spiegeltje, spiegeltje aan de wand

Opgdracht 19

- Kun je jezelf helemaal zien in een spiegel die 100 cm lang is? Laat dat met behulp van een tekening zien.

Opgdracht 19 mag dan realistisch lijken maar is het ook realistisch om deze opdracht op deze wijze aan leerlingen voor te zetten?

Een paar antwoorden van leerlingen:

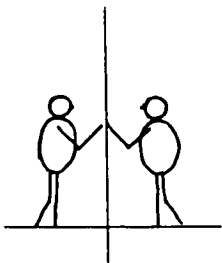
'Ja natuurlijk kun je jezelf zien. Dan moet je gewoon bukken!'

'Was het een vlakke spiegel of een bolle spiegel?'

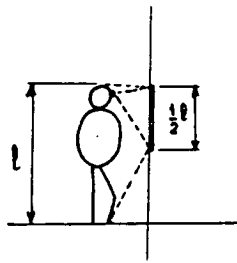
'Ik zou het niet weten.'

Er wordt aan de leerlingen gevraagd om een tekening te maken. Welke tekening zullen de opstellers van het vraagstuk daarbij voor ogen hebben gehad? Ik kan me niet voorstellen dat aan een simpele lijnspiegeling is gedacht. Zo werkt het bij een echte spiegel namelijk niet. (figuur 2a)

Omgekeerd kan ik me ook niet voorstellen dat hier de spiegeling wordt bedoeld die in de natuurkunde aan de orde komt. En als dat wel de bedoeling is wat doen we dan met leerlingen die geen natuurkunde in hun pakket hebben? (Zie figuur 2b)



Figuur 2a



Figuur 2b

In de laatste vorm biedt het vraagstuk overigens allerlei leuke mogelijkheden. Wanneer de eigenschappen van spiegelen worden vermeld (hoek van inval = hoek van terugkaatsing) met een bijbehorend plaatje is de eerder genoemde opdracht wel te maken en zijn er bovendien aardige uitbreidingen mogelijk zoals: is de afstand van je zelf tot de spiegel van invloed op de 'hoogte' van het beeld. Of: bereken de afstand die je van de spiegel staat niet van invloed is op de lengte van je spiegelbeeld.

Met de beschikbare gegevens uit de opdracht was helaas niets zinnigs te maken.

Conclusie

Met de kanttekeningen die in dit artikel bij een aantal vraagstukken gezet zijn ga ik terug naar de door de leerlingen gemaakte opmerking: 'Wat heeft dit nu met wiskunde te maken?'

Aan de hand van een aantal algemeen aanvaarde criteria zal ik proberen duidelijk te maken dat ik een heel eind met hen mee kan gaan.

1. De opdrachten moeten realistisch zijn

Er is in het voorbeeldexamen vrijwel geen enkel vraagstuk dat een voor leerlingen herkenbare situatie aan de orde stelt. In de opdrachten waar die situatie in principe aanwezig was of kon zijn (met name de in dit artikel besproken opdrachten) werd deze op voor leerlingen niet relevante manier opgepakt.

2. Problemen moeten actief en wiskundig verantwoord opgelost kunnen worden

Door een onjuiste of voor velerlei uitleg vatbare vraagstelling is het maar de vraag of het tot een wiskundig verantwoorde manier van oplossen komt. Een voorbeeld is daarvan het spiegelvraagstuk.

3. Wiskunde is nuttig

Dat wiskunde nodig is op velerlei terreinen van het leven wordt door het voorbeeldexamen niet duidelijk gemaakt. Met name in de experimentele opdrachten lag de mogelijkheid om op z'n minst de schijn van nuttigheid op te voeren. De vraag of je je

in een spiegel van 1 meter lengte nu wel of niet kunt zien is niet bevredigend opgelost, de redelijke prijs voor een gezinspizza is niet te bepalen en een aardig tegelpatroon is niet te vinden. Kortom, vrijwel geen enkel vraagstuk geeft de leerlingen of de buitenwacht de indruk dat wiskunde belangrijk is voor het dagelijks leven.

Daarmee kom ik nog niet tot de ongenueanceerde conclusie van mijn leerlingen die in het voorbeeld-examen geen wiskunde zagen. Natuurlijk zat er voldoende wiskunde in, maar de onzorgvuldige en soms zelfs slordige formulering zorgde er voor dat de leerlingen de indruk kregen dat het om andere dingen ging dan die waaraan ze gewend waren. Gevoegd bij het al eerder genoemde feit dat de geschetste situaties niet herkenbaar of oplosbaar waren, kan ik me hun reactie wel voorstellen. Als wiskunde in de toekomst op dezelfde wijze zou worden geëxamineerd sluit ik me bovendien volledig bij hen aan.

Mededeling

'Ondersteunend of Ondermijnend'

Onder dit motto wordt op het 27e Nederlands Mathematisch Congres (4 en 5 april 1991 aan de Erasmus Universiteit Rotterdam) een symposium gehouden over de mogelijkheden van Computer Ondersteund Onderwijs (COO) in de wiskunde op het voortgezet onderwijs en het hbo.

In twee voordrachten worden 'software' pakketten behandeld waarmee wiskunde-opgaven exact kunnen worden opgelost. In een forumdiscussie komt de toekomst van het wiskunde-onderwijs met betrekking tot dit COO aan de orde. Tevens zijn er computerdemonstraties. Het symposium vindt plaats op vrijdag 5 april 1991, 9.00-11.00 uur.

Overige programmaonderdelen op deze dag omvatten een voordracht en films over het leven en werk van H. Freudenthal, beroepsvoorlichting voor studenten, een voordracht over de grenzen tussen wiskunde en informatica.

Nadere inlichtingen: tel. 010-4082231 (alleen maandag en woensdag), zie ook de Mededelingen van het Wiskundig Genootschap.

40 jaar geleden

Vraagstukken

649. Van de veelterm $ax^3 + bx^2 + cd + d$ is gegeven, dat de rest bij deling door $x^2 - x - 2$ gelijk is aan $2x - 3$.

Substitueert men in deze veelterm voor x achtereenvolgens de grootste en de kleinste wortel van de vergelijking

$$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0,$$

dan vindt men twee tegengestelde waarden als uitkomst.

Gevraagd a , b en c uit te drukken in d .

653. Van $\triangle ABC$ is gegeven, dat de basis AB en de hoogtelijn op de basis gelijk zijn. De opstaande zijden verhouden zich als twee gegeven lijnstukken m en n , terwijl verder de zwaartelijn naar BC is gegeven. Construeer die driehoek.

658. Wat weet ge van de hoeken van $\triangle ABC$, als gegeven is, dat $\sin 3A + \sin 3B - \sin 3C = 0$ is? Bereken de hoeken van $\triangle ABC$, als bovendien gegeven is, dat $b \cos B = c \cos C$ is.

Vraagstukken uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 38, 1950-1951.

Deze vraagstukken kwamen voor in het in april 1950 in Indië afgenomen examen Wiskunde L.O.

► Constructies van regelmatige veelhoeken

Frederik van der Blij, Waldy Vastrick

1 Inleiding

De vraag naar de construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken is één van de oudst bekende meetkundige opgaven.

Uitgaande van een getekende cirkel vraagt men veelal de regelmatige ingeschreven veelhoek te construeren. De zijde van een ingeschreven regelmatige zeshoek is gelijk aan de straal van de cirkel, de constructie van de ingeschreven regelmatige zeshoek is kinderspel (in de letterlijke betekenis van het woord!). De regelmatige drie- en vierhoek zijn eveneens eenvoudig in de cirkel te construeren. Een elementaire berekening laat zien dat de verhouding van de zijde van de regelmatige vijfhoek en de straal van de cirkel gelijk is aan

$$\frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}:1.$$

Om de ingeschreven regelmatige vijfhoek te construeren kan men in een cirkel met middelpunt M twee onderling loodrechte middellijnen AB en CD tekenen. Vanuit het midden E van CM cirkelt men EB om, deze cirkel snijdt MD in een punt F . De lengte van FB is gelijk aan de lengte van de zijde van de ingeschreven regelmatige vijfhoek (MF is de zijde van de regelmatige tienhoek!).

De vraag naar de constructie van de regelmatige 7-

hoek is al in de klassieke arabische wiskunde aan de orde gesteld.

De constructie van een regelmatige $2n$ -hoek bij gegeven n -hoek is eenvoudig.

Wanneer in een cirkel zowel een regelmatige n -hoek als een regelmatige m -hoek getekend zijn is ook de regelmatige mn/d -hoek te construeren, waarin d de grootste gemene deler van m en n is. We kunnen ons dus beperken tot de vraag naar de constructie van regelmatige q -hoeken, waarin q een macht van een priemgetal is.

Het is bekend dat, wanneer we onze constructies alleen met passer en liniaal uitvoeren slechts voor speciale priemgetallen p de regelmatige p -hoek te construeren is, namelijk alleen voor de zogenaamde Fermat-priemgetallen, die te schrijven zijn als één plus een macht van twee. Deze som kan alleen een priemgetal zijn als de exponent van de macht van twee zelf ook weer een macht van twee is. De eerste Fermat priemgetallen zijn:

$$3 = 1 + 2^{\uparrow(2^0)}$$

$$5 = 1 + 2^{\uparrow(2^1)}$$

$$17 = 1 + 2^{\uparrow(2^2)}$$

$$257 = 1 + 2^{\uparrow(2^3)}$$

$$65537 = 1 + 2^{\uparrow(2^4)}$$

maar

$$4294967297 = 1 + 2^{\uparrow(2^5)}$$

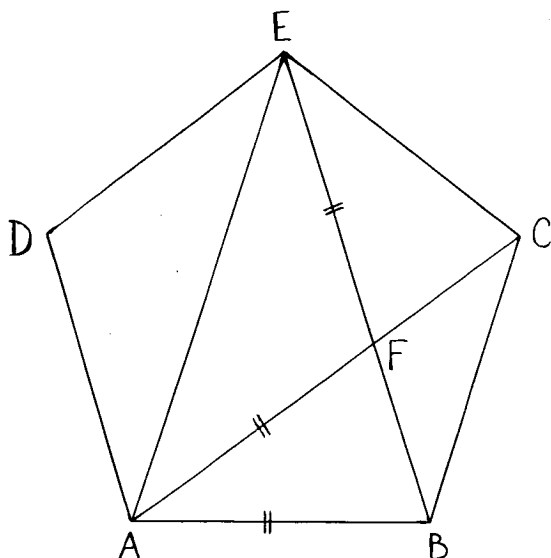
is geen priemgetal want

$$4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

In deze notitie willen we uitgaan van een gegeven lijnstuk en vragen een regelmatige veelhoek met dit lijnstuk als zijde te construeren. Voor de al dan niet construeerbaarheid met passer en liniaal is deze vraagstelling gelijkwaardig met de constructie van regelmatige veelhoeken in een gegeven cirkel. Meetkundig gezien zijn de constructies van de regelmatige drie-, vier- en zeshoek triviaal. De constructie van de regelmatige vijfhoek met gegeven zijde is eenvoudig uit te voeren.

2 De vijfhoek

In figuur 1 zien we $AB = AF = EF$. Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken EAB en ABF is direct af te leiden dat

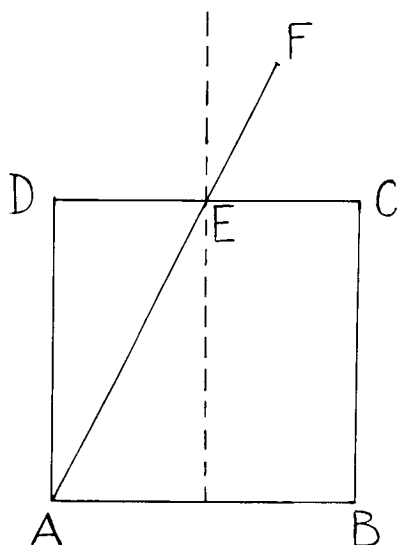


Figuur 1

$$AE = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \cdot AB$$

Wanneer we eerst een vierkant met de gegeven zijde tekenen is de constructie van de regelmatige vijfhoek met deze zijde eenvoudig uit te voeren.

We verlengen in figuur 2 het lijnstuk AE met een



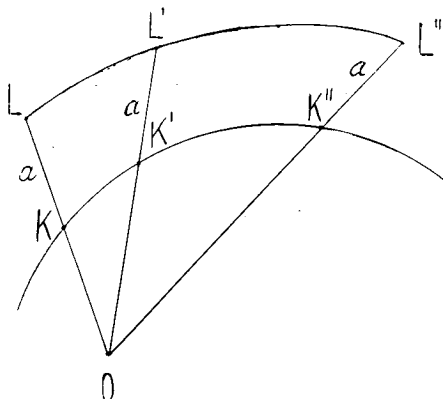
Figuur 2

stuk gelijk aan de helft van AB en cirkelen AF vanuit A om. Waar deze cirkel de middelloodlijn van AB snijdt ligt een punt van de regelmatige vijfhoek met AB als zijde. De vijfhoek is nu gemakkelijk af te tekenen. Bovendien is DF gelijk aan de straal van de omschreven cirkel.

3 De neusspasser

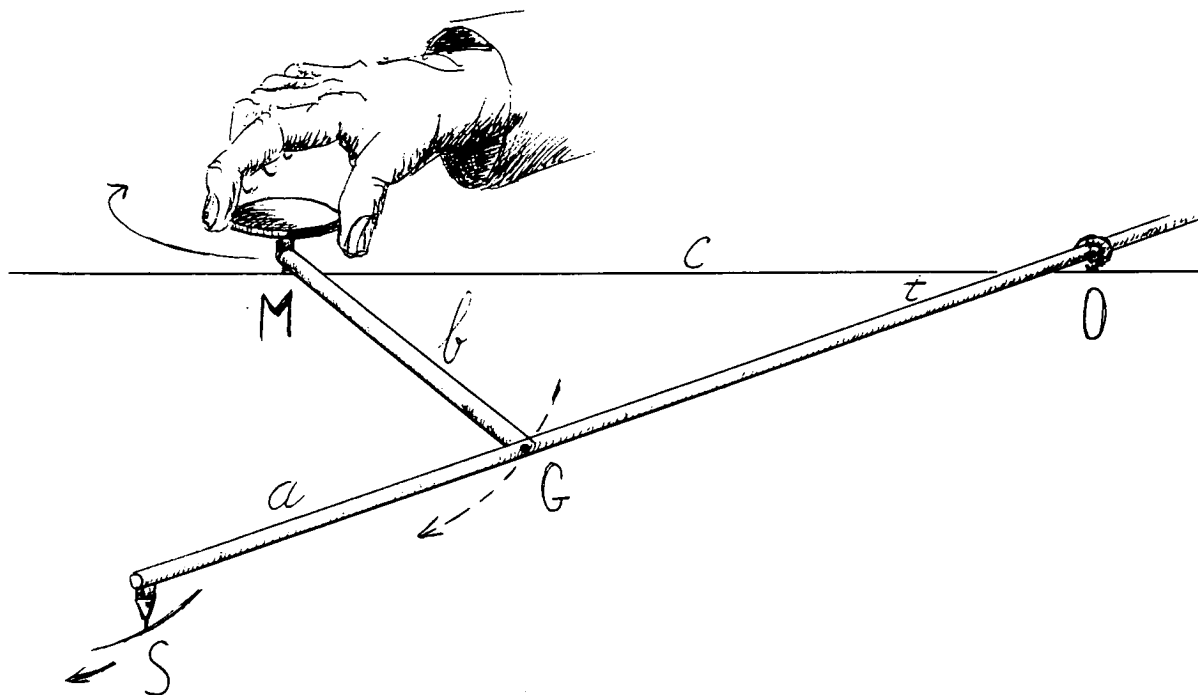
Daar de constructie van de regelmatige zevenhoek met passer en liniaal niet mogelijk is kan men andere tekenapparatuur ontwerpen en deze gebruiken om deze constructie toch uit te voeren. In de klassieke meetkunde zijn neusis-constructies voorgesteld en onderzocht.

In een voorbeeld hiervan gaat men uit van een gegeven vast punt O en een gegeven rechte of kromme lijn. Men verbindt het vaste punt O met ieder punt K van de kromme en verlengt OK met een lijnstuk KL met gegeven vaste lengte a . De punten L vormen zo een nieuwe beeldkromme. Zie figuur 3.



Figuur 3

Gaan we uit van een rechte lijn dan ontstaat zo de conchoïde, een welbekende speciale kromme. Men kan deze neusis-constructies uitvoeren met een tekenapparaat door in O een draaibaar oogje aan te brengen, een stokje met aan het einde een schrijfstift S zo te bewegen dat het stokje door O gaat en een gemerkt punt G op het stokje langs de gegeven kromme beweegt.

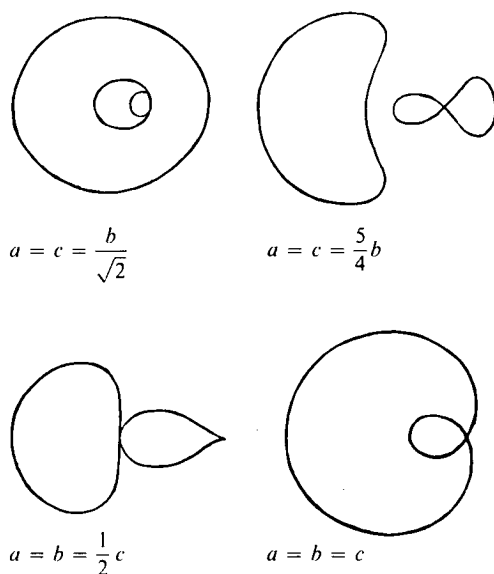


Figuur 4

We specificeren nu de gegeven kromme tot een cirkel, technisch kunnen we dan het punt G met een stokje GM met vaste lengte b om het punt M laten draaien. Er ontstaat zo een tekenapparaat enigszins lijkend op een passer. Om het apparaat te gebruiken moet men het punt M vastzetten (we noemen dit voortaan het prikpunt), in G is een scharnier en het verlengde van het been SG moet door het in het tekenvlak aangebrachte oogje O gaan (zie figuur 4).

Met de neusispasser kunnen krommen met verschillende vormen getekend worden, afhankelijk van de keuze van de verhoudingen van de lengten van de lijnstukken a , b en de afstand van O tot M , die we nu even c zullen noemen.

We merken op dat deze kromme een algebraïsche kromme is, in het algemeen van de zesde graad. Voor verschillende verhoudingen van a , b en c ontstaan krommen met een verschillende vorm. (figuur 5)



Figuur 5

Wanneer men een grafieken-programma op de computer heeft is het eenvoudig grafieken van deze krommen voor verschillende waarden van de parameters te maken. Daarvoor is het handig de vergelijking van de kromme in parametervorm te geven. Zo'n parametervoorstelling kan men bijvoorbeeld vinden door (zie figuur 4) de afstand OG in b, c en de hoek GOM uit te drukken. De coördinaten van S in een rechthoekig coördinatenstelsel met O als oorsprong en OM als X -as zijn dan direct als functie van de hoek GOM bepaald.

$$x = w \cdot \cos t \quad t = \angle GOM$$

$$y = w \cdot \sin t \quad w = a + c \cos t \pm \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 t}.$$

De bepaling van snijpunten met een rechte lijn of cirkel kan tot de constructie van lijnstukken voeren, die met passer en liniaal niet construeerbaar waren. Met passer en liniaal zijn immers alleen lengtes te construeren die als oplossingen van vierkantsvergelijkingen te beschouwen zijn. Het gebruik van de bovenbeschreven neuspasser laat constructies van oplossingen van sommige hogere graads vergelijkingen toe.

Het zou interessant zijn te onderzoeken welke regelmatige veelhoeken met behulp van liniaal, passer en neuspasser geconstrueerd kunnen worden. Daar de constructie van regelmatige veelhoeken te behandelen is met de oplosbaarheid van bepaalde algebraïsche vergelijkingen is dit in de eerste plaats een algebraïsch probleem.

In de volgende paragraaf geven we constructies van de regelmatige zeven- en negen-hoek met behulp van liniaal, passer en neuspasser.

4 De zevenhoek

Voor de constructie van de regelmatige zevenhoek zoeken we niet naar een constructie op grond van een eventueel af te leiden algebraïsche of goniometrische vergelijking van lijnstukken of hoeken.

Het is overigens eenvoudig in te zien dat voor de constructie van deze veelhoeken vergelijkingen van de derde graad opgelost moeten worden.

We proberen langs meetkundige weg een meetkundig eenvoudige constructie te vinden. We gaan uit

van een gegeven zijde AB en proberen het tegenover liggende hoekpunt van de regelmatige veelhoek te construeren, dat wil zeggen het hoekpunt T zodat AT en BT de langste diagonalen zijn. We tekenen in figuur 6 in driehoek ABT het punt S op BT zodat $TS = AB$. We beweren nu als we het lijnstuk AS gelijk maken aan $AB\sqrt{2}$ de hoek ATB gelijk is aan $\frac{\pi}{7}$ radialen en het punt T dus een

hoekpunt van de regelmatige zevenhoek met zijde AB is. We geven de hoek ATB aan met $2t$ en stellen $AB = 1$ en $AT = BT = x$. Een eenvoudige meetkundige berekening met de formule van Stewart of de cosinusregel leert:

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$$

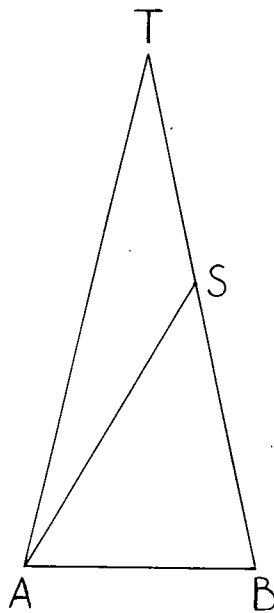
en dus

$$8 \sin^3 t - 4 \sin^2 t - 4 \sin t + 1 = 0 \quad (*)$$

Stelling 1:

Uit $0 < t < \frac{\pi}{6}$ en de relatie (*) volgt $t = \frac{\pi}{14}$.

Het bewijs van deze stelling vraagt enig rekenwerk. We geven dit bewijs in paragraaf 6.



Figuur 6

Met de neuspasser is nu bij gegeven lijnstuk AB het punt T te construeren, voor de parameters van de neuspasser kiezen we $a = AB$, $b = AB\sqrt{2}$, $c = AB$. Bij de constructie is A het vaste punt, B het oogje en T beschrijft de kromme. Omdat het gezochte punt ook op de middelloodlijn van AB moet liggen is het nu als snijpunt van deze middelloodlijn en de door de neuspasser getekende kromme geconstrueerd.

Het bewijs dat bij de juiste keuze van het snijpunt inderdaad de regelmatige zevenhoek is geconstrueerd, hetgeen we aan de hand van de boven gegeven analyse vermoeden, laten we aan de lezer over.

We geven nog een andere constructie van de regelmatige zevenhoek met behulp van de neuspasser. In de getekende regelmatige zevenhoek in figuur 7 merken we op dat het snijpunt T van de diagonalen DG en FC op de symmetrieas EH door E van de zevenhoek ligt. De figuur $EDTF$ is een ruit. We geven de grootte van de hoeken in de figuur aan met stippen, iedere stip staat voor $\frac{\pi}{14}$.

We trekken nu uit T een lijn loodrecht op de symmetrieas door E , deze snijdt de zijde CD in een punt O . Consequent met de stippen rekenend zien we dat de driehoek TOD gelijkbenig is, $TO = TD = DE = AB$.

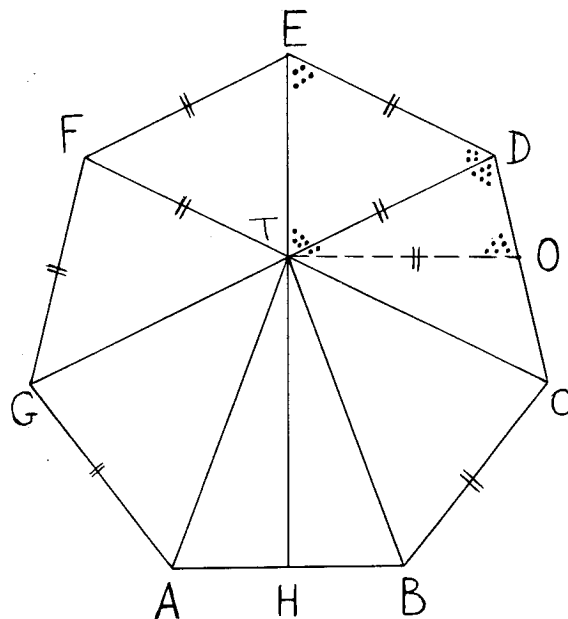
Wanneer nu TH te construeren zou zijn bij gegeven lijnstuk AB is een eenvoudige constructie van het punt D met de neuspasser mogelijk. Het punt D ligt immers op een cirkel met straal AB en middelpunt T en op het 'neusbeeld' van de cirkel met straal AB om B geconstrueerd met oogje O en verlengstuk (CD) gelijk aan AB . We gebruiken nu dus de neuspasser met $a = b = AB$ en $c = BO$.

We beweren nu dat in de regelmatige zevenhoek geldt dat

$$TH = \frac{1}{2}AB\sqrt{7}.$$

We schrijven t als afkorting voor $\frac{\pi}{14}$ en merken op dat eenvoudig meetkundig is af te leiden dat

$$TH = EH - ET = \left[\frac{1}{2 \tan t} - 2 \sin 2t \right] \cdot AB$$



Figuur 7

Stelling 2:

$$\text{Uit } 0 < t < \frac{\pi}{6} \text{ en } \frac{1}{\tan t} - 4 \sin 2t = \sqrt{7}$$

$$\text{volgt } t = \frac{\pi}{14}.$$

Het bewijs van deze stelling geven we in paragraaf 6.

De constructie van de regelmatige zevenhoek verloopt nu als volgt:

In het midden H van AB trekt men een loodlijn HT met lengte gelijk aan $\frac{1}{2}AB\sqrt{7}$.

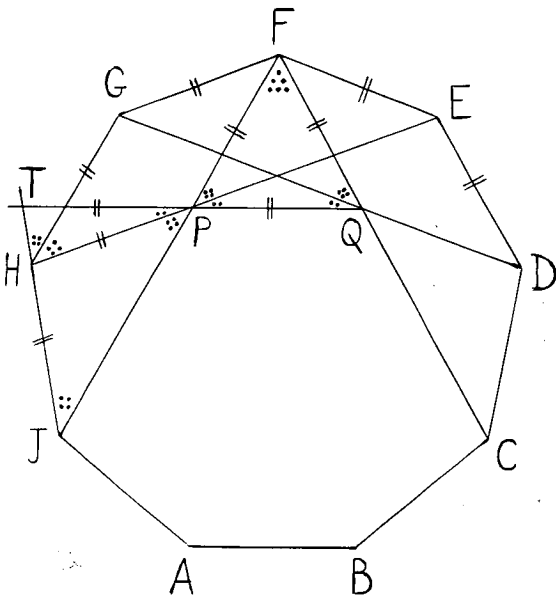
We merken nog op dat

$$OB = TB = AB \cdot \sqrt{2}, \quad OA = 2AB.$$

Het punt O is nu direct te construeren. Met T als middelpunt beschrijft men een cirkel waarvan de straal een lengte AB heeft. Met B als prikpunt en O als oogje tekent men met de neuspasser (met $a = b = AB$) een kromme, die met de eerder getekende cirkel het snijpunt D heeft. Daarna is de zevenhoek eenvoudig af te tekenen. Ook nu laten we het bewijs van de juistheid van de constructie weer aan de lezer over.

5 De negenhoek

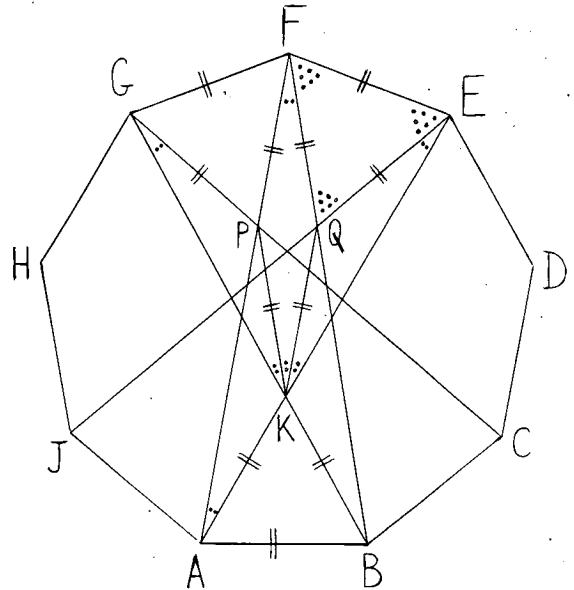
Laat in figuur 8 een regelmatige negenhoek getekend zijn. We tekenen de diagonalen CF , JF , EH en DG . We verlengen QP met $PT = PQ$. Driehoek PTH is gelijkbenig en eenvoudig rekenen met hoeken laat zien dat T op het verlengde van JH ligt. De constructie van de regelmatige negenhoek kan nu worden uitgevoerd door een gelijkzijdige driehoek FPQ te tekenen, QP met $PT = PQ$ te verlengen en met de neusspasser met parameters $a = b = PQ$ en P als prikpunt en T als oogje een kromme te beschrijven. Een snijpunt van deze kromme met het verlengde van FP geeft een punt J van de regelmatige negenhoek. Daarna is het punt H eenvoudig te tekenen en de constructie te voltooien.



Figuur 8

Ook voor de negenhoek geven we nog een andere constructie. In de negenhoek (figuur 9) trekken we de diagonalen FA , FB , EJ , GC , EA en GB . Het snijpunt K van AE en GB ligt op de middelloodlijn van AB . We geven de grootte van de hoeken weer met puntjes aan, ieder puntje stelt $\frac{\pi}{18}$ voor. P is het

snijpunt van CG met AF en Q is het snijpunt van BF met EJ . Nu geldt $AB = AK = BK = EF = EQ = FQ$. Omdat hoek KAF gelijk is aan hoek QFA en $AK = FQ$ is KQ evenwijdig met AF . Dus is hoek QKE gelijk aan hoek FAK en driehoek QKE is gelijkbenig. We vinden in driehoek FAB dus de gelijkheden $AB = AK = BK = KQ = KP = QF = PF$.



Figuur 9

De constructie van de regelmatige negenhoek met de neusspasser gaat nu als volgt: Construeer de gelijkzijdige driehoek ABK .

Gebruik nu B als oogje en K als prikpunt ($a = b = c = AB$).

Snijd de getekende kromme met de middelloodlijn van AB . Het snijpunt is het punt F . Daarna is het punt E direct te construeren en de negenhoek verder af te tekenen.

Ook nu laten we de bewijzen weer aan de lezer over.

6 Bewijzen van de stellingen

We volstaan met een schets van de bewijzen, die nogal wat elementair rekenwerk vragen. Eerst ver-

melden we een goniometrische identiteit. We schrijven ter afkorting s voor $\sin x$. We vinden na wat rekenwerk:

$$\frac{1 - \sin 7x}{1 + \sin x} = (1 - 4s - 4s^2 + 8s^3)^2.$$

Stelling 1 is een direct gevolg van deze formule. Voor het bewijs van stelling 2 merken we op dat de functie

$$\frac{1}{\tan x} - 4 \sin 2x$$

op $(0, \frac{\pi}{6})$ monotoon dalend is, en de waarde $\sqrt{7}$ op dit interval precies één keer aanneemt.

Verder is de vergelijking

$$\frac{1}{\tan x} - 4 \sin 2x = \sqrt{7}$$

om te schrijven tot een veelterm-vergelijking in $s (= \sin x)$.

Deze vergelijking is van de zesde graad in s :

$$(1 - 4s - 4s^2 + 8s^3) \cdot (1 + 4s - 8s^2 - 8s^3) = 0$$

De gezochte oplossing op het aangegeven interval voldoet aan

$$1 - 4s - 4s^2 + 8s^3 = 0.$$

en hiermee is het bewijs van stelling 2 terug gebracht tot dat van stelling 1.

7 Verantwoording

Het initiatief dat tot bovenstaand onderzoek voerde werd door de tweede auteur genomen. Vervolgens ontwierp hij de neusispasser en kwam op meetkundige gronden tot de bovengenoemde constructies. De in de stellingen tot uitdrukking gebrachte goniometrische identiteiten werden door hem via de rekenmachine gecontroleerd. De wiskundige bewijzen werden door de eerste auteur gegeven.

De tweede auteur ontwierp nog een ander tekenapparaat waarmee onder andere de verdeling van een hoek in een willekeurig aantal gelijke delen mogelijk is. Met dit apparaat is dan natuurlijk zonder meer iedere regelmatige veelhoek te construeren door verdeling van de middelpunthoek.

Voor de 11-hoek en de 13-hoek vond hij echter ook meetkundig geïnspireerde constructies. De bewijzen berusten op merkwaardige goniometrische identiteiten voor de goniometrische functies van hoeken van $\frac{\pi}{22}$ en $\frac{\pi}{26}$ respectievelijk. Volledigheids-

halve merken we op dat bij de uitvoering van de constructies nog wel keuzen gemaakt moeten worden welk van de ontstane snijpunten van de getekende krommen gekozen moet worden. Gebruikmakend van geometrische intuïtie is de keuze niet moeilijk, een formele omschrijving is wiskundig zeker interessant.

Het artikel van J. P. Hogendijk: *Greek and Arabic Constructions of the regular Heptagon*, Archive for History of Exact Sciences, vol. 30, 1984, pag. 197-330 geeft veel informatie over klassieke constructies van de regelmatige zevenhoek. In de klassieke periode zijn al verschillende alternatieve tekenapparaten voorgesteld om onder andere problemen als de driedeling van de hoek of de kubusverdubbeling op te lossen. We verwijzen naar de gegevens daarover onder andere in B. L. van der Waerden: *Ontwakende Wetenschap* (Groningen 1950) hoofdstuk VII.

In het boek *Theorie der Geometrische Konstruktionen* van L. Bieberbach (Basel 1952), zijn onder andere op de pagina's 84 en 157 gegevens te vinden over klassieke neusis-constructies van de regelmatige zevenhoek.

Het artikel Walter Breidenbach en Wilhelm Suss: *Geometrische Konstruktionen in Grundzüge der Mathematik*, Band II, Teil A, herausgegeben von Heinrich Behnke e.a. (Göttingen 1967) p. 214-252 bevat vele gegevens over meetkundige constructies, ook over de constructies van de regelmatige zeven- en negenhoek.

► Examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (6)

Truus Dekker

De opgaven die ik u dit keer wil laten zien zijn heel verschillend. Allereerst een opgave die toetst of leerlingen ruimtelijk inzicht hebben, zie het werkblad op pagina 176. Deze opgave kwam zowel in het C-als het D-examen voor. En verder een opgave op C-niveau, over eerstegraads functies, zie het werkblad op pagina 177.

De 'blokkenopgave' werd van tevoren door enkele mavo-leerlingen van een school die niet aan de experimenten meedoet, uitgeprobeerd. Hoewel één van hen erbij schreef dit een onbenullige som te vinden, had geen van deze leerlingen het juiste antwoord. Dat was op het experimentele examen gelukkig anders, daar maakte ongeveer tweederde van de leerlingen de vraag goed. Tellen valt nog niet altijd mee wanneer je je moet voorstellen hoe zo'n gefotografeerd object er in werkelijkheid uitziet!

En dan de vraag over eerstegraads functies, een belangrijk onderwerp in het huidige mavo/lbo-examenprogramma dat óók voor deze experimentele examens gold. Met het tekenen van de grafieken hebben de leerlingen meestal geen moeite. Toch heb ik ook een leerling gezien die de as van symmetrie had berekend en via de abc-formule twee snijpunten met de x -as vond. Een tekening had hij niet

gemaakt maar dat zal u niet verbazen. Ik ben geen leerlingen tegengekomen die met de richtingscoëfficiënt en de richtingsvector werkten maar dat verwacht je op C-niveau ook niet. Er worden drie (maar soms – voor alle zekerheid – veel meer) punten berekend en de grafiek wordt getekend.

Opgave 2 werd op deze manier geformuleerd om het 'KANJEZOZIEN'-effect te vermijden. Voor C-niveau liggen de snijpunten van grafieken vrijwel altijd netjes in roosterpunten en je kunt ze dus zo uit de tekening aflezen. Waarom je ze dan ook nog zou moeten berekenen is voor deze leerlingen een raadsel. Nu laten sommige leerlingen zien dat het gevraagde snijpunt in allebei de lijsten van berekende punten voorkomen, ze vullen de coördinaten van het snijpunt in beide functievoorschriften in of ze geven alsnog een berekening. Op je eigen manier een antwoord geven dus, niet voorgestructureerd door de manier van vragen stellen.

De opgaven 3 en 4 gaan heel vaak fout. De lijnen worden correct getekend en ik denk ook niet dat de leerlingen de begrippen 'horizontaal' en 'verticaal' verwisselen. Naar mijn indruk hebben de leerlingen vooral moeite met het hanteren van de verschillende schrijfwijzen die wij voor functies gebruiken. Het is natuurlijk ook verwarrend dat we steeds min of meer hetzelfde bedoelen wanneer we schrijven:

$$f: x \rightarrow 2x + 4$$

$$y = 2x + 4$$

$$f(x) = 2x + 4$$

De verschillen hiertussen zijn voor leerlingen van dit niveau veel te abstract!

Bij de opgaven 5 en 6 kwamen dezelfde problemen als hierboven genoemd naar voren. Sommige leerlingen vertrouwden er niet op dat je zó maar een lijn door het snijpunt mocht kiezen. Rick schreef bij opgave 5:

Ik heb de lijn van g gespiegeld in $x = 2$.

In het nieuwe examenprogramma waarvan het eerste voorstel inmiddels is gepubliceerd en door leraars besproken, wordt overigens ook aandacht besteed aan het globaal tekenen, interpreteren en analyseren van grafieken. Aan het opstellen van een functievoorschrift, zoals in de besproken opgaven werd gevraagd zou inderdaad het globaal interpreteren van grafieken en het beschrijven van verbanden in woorden en/of formules moeten voorafgaan.

► Blokken

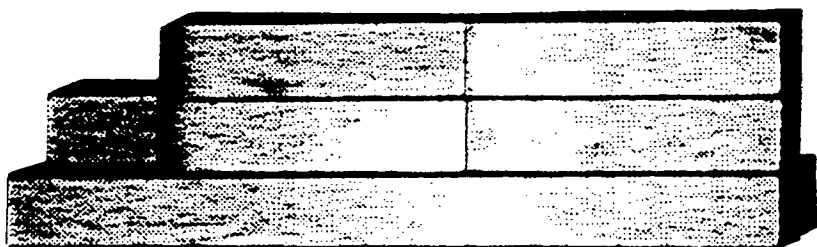
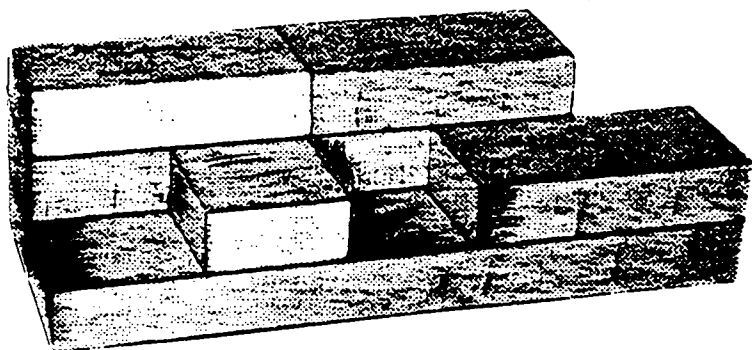
Een blokkendoos heeft blokken in drie verschillende lengten.

Alle blokken zijn even hoog en even breed.

Op een langste blok passen precies twee middenmaatblokken plus een kleintje.

Twee kleintjes tegen elkaar zijn even lang als een middenmaatblok.

Een kleuter heeft met de blokken gespeeld en er een bouwsel van gemaakt. Hieronder staan twee verschillende foto's van dit bouwsel.



25. Als je dit bouwsel wilt namaken met alleen maar kleine blokken, hoeveel heb je er dan nodig?

Uit: experimenteel examen lbo/mavo C/D 1990

► Eerstegraads functies

Hieronder staan twee functievoorschriften:

$$f: x \rightarrow \frac{1}{2}x - 2 \quad \text{en} \quad g: x \rightarrow -3x + 5.$$

- 1 Teken in één assenstelsel de grafieken van beide functies.
- 2 Lees uit je tekening af wat de coördinaten zijn van het snijpunt van die twee grafieken en laat door berekening zien dat die coördinaten juist zijn.
- ③ Trek door dat snijpunt de verticale lijn.
Als je géén snijpunt hebt gevonden, trek dan een verticale lijn door het punt $(5, -1)$.
Gebruik dit punt dan ook in opgave 4, 5 en 6.
Welke vergelijking hoort bij de verticale lijn die je hebt getrokken?
- ④ Trek ook de horizontale lijn door dat snijpunt.
Wat is daarvan de vergelijking?
- ⑤ Trek nóg een lijn door dat snijpunt, maar neem er wel één, waarvan je de vergelijking kunt vinden.
- ⑥ Wat is de vergelijking van jouw lijn uit opgave 5? (Of geef het bijpassende functievoorschrift, als je dat liever doet.)

► Eerstegraads functies en de wijzers van de klok

Folkert Schlichting

De introductie in de onderbouw van eerstegraads functies met de vergelijking $y = mx + n$ en de bijbehorende grafiek leidt regelmatig tot de vraag van leerlingen, of het hierbij nu om een onderwerp uit de meetkunde of uit de algebra gaat.

Het probleem

Vrij snel geef ik 'ter ontspanning' de volgende denksport-huiswerkopdracht:

'Bepaal zo nauwkeurig mogelijk de tijdstippen waarop de grote en de kleine wijzer dezelfde stand innemen.' Alle hulpmiddelen zijn toegestaan met inbegrip van ouders en rekenmachine; maar alsjeblieft niet te goedkoop: 1.05 uur klopt bijvoorbeeld zeker niet!

Het volgende lesuur levert dan –afgezien van 12 uur – goed en slecht geraden of berekende oplossingen en enkele totaal radeloze leerlingen. Een nauwkeurige inspectie van alle pogingen brengt steeds slechts benaderingen aan het licht, maar geen enkele precisie.

Het probleem: zodra men de grote wijzer op de positie van de kleine wijzer zet, is deze al een klein

stukje verder gelopen. Wanneer men echter listig met de grote wijzer vooruit springt, dan blijkt men de kleine wijzer meestal overschat te hebben en is er weer geen gelijke stand. Als voorbeeld de tijd vanaf 1 uur:

Wijzerplaatpositie	
van de grote wijzer	van de kleine wijzer
0h 00m 00s	1h 00m 00s
Benadering: 1h 00m 00s	1h 05m 00s
Benadering: 1h 05m 00s	1h 05m 25s
Sprong 1h 05m 30s	1h 05m 27,5s

Deze zorgvuldige analyse is voor de leerlingen niet erg gemakkelijk; ze hebben nu echter belangstelling voor de oplossing en begrijpen het probleem.

Net als bij Achilles en de schildpad komt men steeds dichterbij het punt van inhalen, maar bereikt het niet. Bovendien worden de getallen 'steeds erger'. Het is om wanhopig van te worden! Is het misschien zelfs onmogelijk? Maar we kunnen het toch waarnemen, de wijzers springen immers niet!

Een oplossing

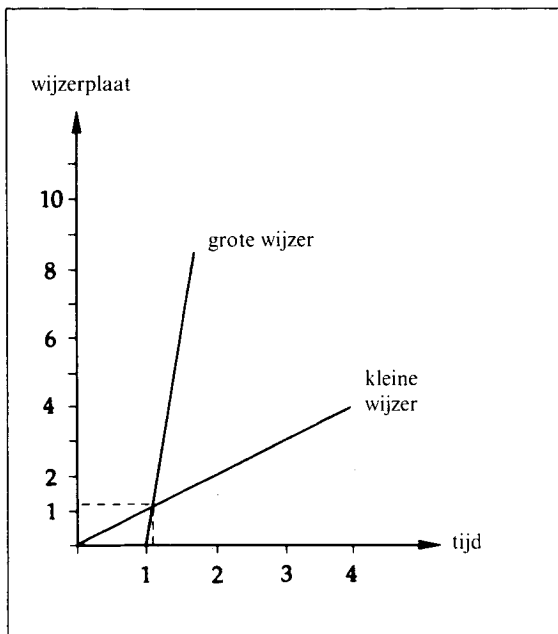
Een impuls van mijn kant: zou onze nieuwe wiskundige kennis ons niet verder kunnen helpen? Hoe zou de beweging van de wijzers er in het coördinatenstelsel uitzien? Zou er grafisch een snijpunt te bepalen zijn?

Nadat ik de ongelovigen geactiveerd heb, leidt het overleg voor de tijd vanaf bijvoorbeeld 1 uur, na het tekenen van het juiste assenstelsel, snel tot de grafiek van figuur 1.

Resultaat: we hebben een snijpunt! Dit snijpunt is op de assen weliswaar slechts onnauwkeurig af te lezen, maar we kunnen immers voor de rechte lijnen vergelijkingen vinden en hun gemeenschappelijke punten berekenen. Men ziet:

$$\text{I. } y = x$$

$$\text{II. } y = 12x - 12$$



Figuur 1

Het snijpunt is $\left(\frac{12}{11}; \frac{12}{11}\right)$, wat betekent, dat een relatief eenvoudige breuk de oplossing levert: het snijpunt ligt bij 1h 05m $27\frac{3}{11}$ s. De leerlingen zijn door de eenvoudige weg naar het resultaat meestal verbouwereerd; bij een herhaling van de overwegingen voor bijvoorbeeld het snijpunt na 2 uur beginnen ze de weg naar de oplossing beter te overzien.

Algebra of meetkunde?

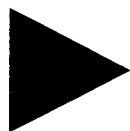
Een probleem van de infinitesimale benadering is door middel van analytische meetkunde snel en eenvoudig opgelost en wel methodisch lonend:

- Vanuit leerlingenoptiek is het een praktische, maar in ieder geval onderhoudende opdracht.
- De uitwerking vereist veel leerlingenactiviteit met verschillende moeilijkheidsgraden en op alle wiskundige gebieden: tekenen, rekenen, plannen, combineren, discussiëren, ...

– De opdracht is flexibel te gebruiken (bijvoorbeeld als inleiding op de berekening van snijpunten of later als toepassing) en uit te breiden: de vraag naar alle snijpunten is nog onbeantwoord, een methode voor een snelle omrekening van uren naar minuten zou nuttig zijn, en zelfs de nieuwe technologieën zijn zinvol te gebruiken, wanneer men bijvoorbeeld de snijpuntsberekening door middel van benadering via omkering met behulp van een spread-sheet uitvoert (berekening van de positie van de uurwijzer vanuit de positie van de minutenwijzer; n -de uurwijzerpositie = $(n-1)$ -de minutenwijzerpositie).

Algebra of meetkunde? Wiskunde!

Vertaling: A. J. F. van den Berg, Bedum.
Uit: Mathematik lehren, Heft 31.



Mededeling

Op 16 januari j.l. hield Jan de Lange, pas benoemd tot hoogleraar in de didactiek van het wiskunde- en informatica-onderwijs, zijn oratie in de aula van de Rijks Universiteit Utrecht. Heel wat bekenden uit het wiskundeonderwijswereldje gaven bij zijn oratie acte de présence. met zijn oratie 'Hard tegen hart' heeft Jan ongetwijfeld velen een hart onder de riem gestoken. Graag wensen wij de jonge professor, tevens hoogleraar-directeur van het OW & OC en voorzitter van de COW, in zijn nieuwe functie veel succes en veel wijsheid!

De redactie

► **Wiskunde-onderwijs aan de Heao in Zwolle***

Een voorbeeld van gedifferentieerd onderwijs binnen het hbo

Ben Mooiman, Douwe T. Prinsse

Bij de aanvang van het wiskunde-onderwijs worden docenten van het heao geconfronteerd met grote verschillen in voorkennis bij de studenten (niveau, beheersingsgraad, tempo). Studenten met als vooropleiding: havo, meao, mds, vwo, met of zonder wiskunde in het eindexamenpakket hebben een plaats op de heao gevonden. Er zijn zelfs studenten die via de meao binnenkomen met slechts twee jaar wiskunde op mavo-niveau. Hieronder willen we een schets geven van een praktijkvoorbeeld, hoe binnen het hbo om kan worden gegaan met dergelijke verschillen.

De eindtermen voor de propaedeutische zijn voor wat betreft wiskunde voor alle studenten hetzelfde. Om zoveel mogelijk studenten op een enigszins gelijk beginniveau voor het reguliere heao-wiskundege-deelte te krijgen, is er aan de Heao-Zwolle een aanpak ontwikkeld om wiskunde-deficiënties, afgestemd op de wensen van de individuele student, te verhelpen.

De bekend veronderstelde wiskundeleerstof (genoemd deficiënte leerstof) is verdeeld in 4 taken van elk 20 studiebelastinguren (sbu's).

Alle aanstaande studenten, m.u.v. vwo-ers die voor wiskunde A en/of B een acht resp. een zes of hoger voor hun eindexamen hebben behaald, maken in de eerste week van juli een zgn. allocatieve toets. Dit is een toets die leerstof toewijst aan individuele studenten. Op deze wijze ontstaat een gedifferentieerde groep studenten ieder met zijn/haar eigen takenpakket.

Enige jaren geleden konden studenten zich niet op zo'n allocatieve toets voorbereiden. Twee jaar geleden besloot de vakgroep wiskunde om naast een zelfstudiepakket ook een zomercursus (instapcursus) aan de aanstaande eerstejaars studenten aan te bieden. Deze cursus bestaat uit vier bijeenkomsten van drie klokuren, waarin de studenten instructie ontvangen, kunnen oefenen, vragen kunnen stellen en individuele hulp kunnen krijgen. Deelname hieraan vindt plaats op vrijwillige basis, studenten schrijven per bijeenkomst in.

Niet alle studenten maken gebruik van de instapcursus, een deel bereidt zich alleen m.b.v. het zelfstudiepakket voor op de allocatieve toets. Een dag nadat de allocatieve toets gehouden is krijgen de studenten hun resultaat toegezonden. Zo zijn ze voor de zomervakantie op de hoogte van de nog te bestuderen leerstof. In de zomervakantie kunnen ze dan indien nodig zelfstandig proberen om de resterende taken te bestuderen.

Het voordeel van het deelnemen aan zomercursus en allocatieve toets is dat studenten een behoorlijk stuk studielast kunnen 'inverdiene(n)'. Met b.v. twee voldoende(n) heeft men al een studielastvermindering van 40 sbu's; dit is zeker in het begin van een heao-studie een welkome verlichting.

In de week voorafgaand aan de eerste lesweek wordt de tweede allocatieve toets gehouden, om zo studenten nog een keer de mogelijkheid te geven stukken leerstof af te ronden. Van deze gelegenheid maken vooral die studenten gebruik die eerder niet in de gelegenheid waren te toetsen, of in de zomervakantie een deel van het zelfstudiepakket hebben doorgenomen.

Studenten die niet aan een allocatieve toets/instapcursus hebben deelgenomen of die nog enkele taken

moeten doen, krijgen in het eerste semester van de propaedeuse de gelegenheid de resterende taken af te ronden. Hierbij krijgen ze gerichte ondersteuning in de vorm van instructielessen, werkcolleges en spreekuren.

Eens per twee weken (over relatief kleine stukken leerstof) krijgen de studenten een toets aangeboden. Deze toetsen worden altijd met de studenten nabesproken, zodat de leerprestaties snel worden teruggekoppeld. Aan het eind van een periode (8 weken) mogen de studenten maximaal twee van de vier toetsen herkansen.

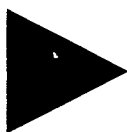
Bij de aanvang van het tweede semester zijn de verschillen op het gebied van de wiskunde behoorlijk genivelleerd. En wat prettig te constateren: het zelfvertrouwen in het eigen kunnen van de student neemt toe. Men heeft voldoende gereedschap in handen gekregen om het volgende semester voldoende af te kunnen ronden.

In het tweede semester volgt elke student hetzelfde wiskundeprogramma: dit programma bestaat uit het afronden van 3 taken (in totaal 80 sbu's) in een tijdsbestek van 8 weken. Ook hier wordt ondersteuning verstrekt in de vorm van een zelfstudiepakket, instructielessen en werkcolleges.

Een mogelijk nadeel van een dergelijke manier van werken zou voor een grote school de organisatorische rompslomp kunnen zijn. In Zwolle is de organisatie van de toetsen e.d. ondergebracht bij een apart toetsbureau. Dit bureau regelt de inschrijvingen en de planning van toetsen.

Al met al levert deze aanpak een individueel pakket leerstof, waarbij een student optimaal gebruik kan maken van de kennis die hij al bezit en zich kan richten op de leerstof die hij nog moet bestuderen.

Samenvatting van een op de Studiedag van de NVvW tijdens een werkgroepbijeenkomst gehouden inleiding.



Mededeling

Vrouwen en Wiskunde

Op **vrijdagavond 22 maart** en **zaterdag 23 maart** vindt de landelijke bijeenkomst van de werkgroep Vrouwen en Wiskunde plaats in de Jeugdherberg Altevener te Arnhem.

De vrijdagavond wordt besteed aan de voorbereidingen van de viering van het lustrum in het najaar van 1991 (inlichtingen bij de werkgroep Vrouwen en Wiskunde, tel. 030-612806).

De zaterdag heeft als centraal thema: **loopbaanplanning en deskundigheidsbevordering**.

Een rectrix houdt een lezing over dit thema. Daarna kan iedere deelneemster kiezen voor één werkgroep waarin op een actieve wijze aandacht besteed wordt aan deelgebieden van genoemd thema. De onderwerpen van de werkgroepen zijn:

spreeken in het openbaar

rooster maken

vergadertechniek

gespreks- en sollicitatietraining

omgaan met faalangst bij wiskunde

fusieproblematiek

Elke werkgroep duurt tweeënehalf uur. De dag wordt besloten met een presentatie van een banenbank.

Het wordt een dag waarop u zich bewust kunt worden van de mogelijkheden die er zijn om actief betrokken te zijn/worden bij ontwikkelingen op wiskundig en onderwijskundig terrein en waarop u de mogelijkheid heeft een specifieke vaardigheid te trainen. U bent van harte welkom!

De kosten van de dag zijn f25,-, voor studenten f15,- (inclusief lunch). Bij voldoende belangstelling is er de mogelijkheid van kinderopvang.

Aanmeldingen voor de zaterdag **uiterlijk 10 maart** bij de werkgroep Vrouwen en Wiskunde, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, tel. 030-612806, onder vermelding van een eerste en tweede voorkeur voor een werkgroep en belangstelling voor kinderopvang. De kosten dienen overgemaakt te worden op gironummer 303323 t.n.v. Vrouwen en Wiskunde, Amsterdam, o.v.v. scholingsconferentie.

Deelnemers krijgen medio maart nadere informatie ter voorbereiding op de scholingsconferentie.

Jacqueline Ketel, Gery Gorter

► **Wiskunde op de heao**

Victor Schmidt

Op de studiedag van de NVvW van 27 oktober 1990 werd in een van de keuzegroepen de aansluiting tussen havo en heao aan de orde gesteld. De heren Prinsse en Mooiman van de Heao te Zwolle zetten op overzichtelijke wijze uiteen hoe in Zwolle een structuur was bedacht om de sterk uiteenlopende verschillen in vooropleiding te ondervangen. In hun uiteenzetting lag de nadruk op de organisatorische kant van het wiskunde-onderwijs. Het inhoudelijke beperkte zich tot het noemen van wat onderwerpen en bijbehorende toepassingen.

In de wandelgangen was onder de deelnemers van deze keuzegroep teleurstelling merkbaar over dit laatste. Tevens bleef er onduidelijkheid over de vraag welk van de wiskundevakken A en B door de heao als gewenste vooropleiding wordt beschouwd. In dit artikel wordt gepoogd inzicht te geven in de inhoudelijke kant van het wiskunde-onderwijs op de heao.

Huidige situatie

Er bestaat geen landelijk erkend leerplan wiskunde voor het heao. Het staat elke school in principe vrij te bepalen of wiskunde een verplicht vak is, welke onderwerpen er aan de orde komen en hoeveel college-uren er per week aan de studenten worden aangeboden. Op de meeste heao's is wiskunde al-

leen een verplicht vak in het eerste jaar. Slechts in een aantal studierichtingen wordt er ook wiskunde gegeven in de hogere jaren, soms in de vorm van het vak Operations Research. Wiskunde wordt veelal gezien als een ondersteunend vak. Ondersteuning wordt geboden aan economische vakken zoals bedrijfseconomie, algemene economie en commerciële economie. Bij deze vakken wordt wiskunde geacht toegepast te worden op economische problemen.

Hoewel er geen leerplan wiskunde bestaat, is er toch sprake van een soort van standaard-programma. Dit programma is niet als zodanig beschreven, maar kan worden afgeleid uit de onderwijsprogramma's van de diverse heao's.

Het wiskunde-onderwijs op de heao blijkt dan op twee pijlers te stoelen: het oefenen van algoritmische vaardigheden en het toepassen van die vaardigheden in de economie. Omdat wiskundige technieken het meest worden toegepast in de algemene economie, speelt deze tak van economie een grote rol in het wiskunde-onderwijs op de heao.

Dat gaat zelfs zo ver dat er in lesboeken wiskunde en algemene economie dezelfde vraagstukken kunnen voorkomen.

De algoritmische vaardigheden worden uitgebreid getraind. Onafzienbare rijen vergelijkingen dienen door de studenten te worden opgelost. Functies met pathologische voorschriften wachten op moeizaam functie-onderzoek. Zo maar een greep uit leerboeken en tentamens:

- Ontbind in factoren $6a^{10}b^4 - 7a^5b^2x^2y^3 - 5x^4y^6$
- Bereken de eerste orde partiële afgeleiden van $z = {}^2\log((x+1)(y+1))$
- Onderzoek de functie $f(x) = 4e^{-\frac{1}{x}}$

De economische toepassingen leunen sterk tegen de wiskunde aan. Zo moeten vaak marginale kosten en marginale opbrengsten worden bepaald bij kosten- respectievelijk opbrengstfuncties. Omdat deze marginale grootheden bepaald kunnen worden door kosten- respectievelijk opbrengstfuncties te

differentiëren, zijn dit feitelijk wiskunde-vraagstukken. Dat geldt ook voor een ander geliefd onderwerp, namelijk het bepalen van elasticiteiten bij allerhande vraagfuncties. Dit soort toepassingen wordt door studenten echt niet als zodanig herkend.

Vraagstukken waarbij iets meer inzicht van studenten wordt gevraagd zijn die van het volgende soort: Gegeven de afzet van een produkt als functie van de prijs en de totale produktiekosten als functie van het aantal te produceren produkten. Bereken de prijs waardoor de winst een maximum heeft. Op zich zijn vraagstukken van dit soort nuttig. Jammer genoeg schaadt hier de overdaad. Telkens komen dit soort problemen terug, waarbij men er niet voor terugdeinst als afzetfunctie een of andere bizarre logaritmische functie te kiezen.

Aansluitingsproblematiek

Een van de grootste problemen bij het wiskunde-onderwijs op de heao is de ruime verscheidenheid aan vooropleidingen van de studenten. Zo is het mogelijk dat de ene student een vwo-diploma heeft met wiskunde A en B terwijl een andere student de route mavo - meao - heao heeft gevolgd zonder wiskunde. Veelal wordt er een deficiëntenprogramma aangeboden of zelfs verplicht opgelegd aan studenten met een 'lagere' vooropleiding dan het oude wiskunde-examen van de havo.

In de komende jaren komt er een nieuw aansluitingsprobleem bij, namelijk hoe studenten met alleen wiskunde A op havo-niveau op de heao opgevangen moeten worden. De meest eenvoudige oplossing is te constateren dat zo'n abiturient niet de technieken beheerst die een huidige student met een havo-diploma wiskunde wel beheerst en hem of haar vervolgens geheel of gedeeltelijk deficiënt te verklaren. Op de studiedag deelden Mooiman en Prinse mede dat er in Zwolle aan deze oplossing werd gedacht. Zo'n student krijgt dan te maken met een aanzienlijke cultuurschok, want het aanleren van wiskundige vaardigheden is geen doelstelling van het wiskunde A-programma. U kunt zich voorstellen wat er gebeurt als een A-student opgaven voorgelegd krijgt als in het bovenstaande. Moet aanstaande heao-studenten dan maar aange-

raden worden wiskunde B te kiezen? Op de studiedag werd die suggestie gewekt door Mooiman en Prinse, daarmee verontwaardiging veroorzakend onder hun gehoor.

Een andere oplossing

Mij staat een andere oplossing voor ogen die meer aansluit bij de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs op de havo. In plaats van wiskunde op de heao ondergeschikt te maken aan de wensen van de economische vakken is het ook mogelijk dat wiskunde ondersteuning biedt aan een van de algemene doelstellingen van het heao, namelijk het ontwikkelen van een probleemoplossend vermogen en van een kritische instelling bij studenten. U hoeft er de kranten maar over op te slaan om te zien in hoeverre deze eigenschappen door het bedrijfsleven en overheid wenselijk geacht worden. Om deze eigenschappen bij studenten te ontwikkelen zou onder andere de doelstelling van het wiskunde-onderwijs verlegd moeten worden van het aanleren van technieken naar het leren oplossen van allerlei problemen, zoals die zich in een organisatie voor kunnen doen.

Het wiskunde-programma op de heao zou als gevolg van zo'n accentverlegging grondig herzien moeten worden, want de hiervoor beschreven aanpak voldoet dan niet meer. Op de eerste plaats zou de band tussen algemene economie en wiskunde losser moeten worden. De meeste van de problemen in organisaties zijn problemen van bedrijfseconomische, commercieel-economische, logistieke of sociaal-psychologische aard. In deze disciplines worden veel minder wiskundige technieken gebruikt dan in de algemene economie. Slechts deze verzameling van technieken zou studenten aangeleerd hoeven te worden, zo ze ze al niet beheersen.

De tijd die vrij komt zou besteed kunnen worden aan differentiaalrekening (die in wiskunde A nog niet aan de orde is geweest) en aan case-achtige vraagstukken. Met dat laatste doel ik niet op toepassingen van het soort dat eerder in dit artikel is aangehaald. Dat zijn feitelijk gewone wiskundesommen, overgoten met een economisch sausje. Mij gaat het om min of meer realistische probleem-

stellingen, die niet met een standaard-truc op te lossen zijn en waarbij van de studenten dus een flinke dosis probleem-oplossend vermogen mag worden verwacht.

De overgang van wiskunde A op havo naar de wiskunde op de heao zou dan veel soepeler kunnen verlopen. Zo'n alternatieve aanpak van het wiskunde-onderwijs verdient volgens mij meer aanbeveling dan havo-abituriënten maar aan te raden wiskunde B te kiezen.

► Wiskunde op de heao: een reactie

Douwe T. Prinsse, Ben Mooiman

Het artikel van Schmidt dwingt ons tot een reactie omdat sommige zinswendingen wel erg tendentieus zijn.

Een voorbeeld: 'in de wandelgangen ... teleurstelling merkbaar' en 'verontwaardiging veroorzakend onder hun gehoor'. Dit is wel een erg gekleurde weergave van de geanimeerde discussies. Onze gesprekken met docenten uit zowel het h.b.o. als het v.o. leverden op deze studiedag een toch wat genuanceerder beeld op dan dat Schmidt hier schetst.

Van grote woorden is trouwens Schmidt geheel niet vies. Zo meent de schrijver zelfs een 'aanzienlijke cultuurschok' te registreren. Een schok dat wel, maar dan voor ons, om te moeten constateren dat Schmidt en zijn collega's van de heao uit Groningen een dergelijke dag, mede bedoeld voor docenten uit het v.o., gebruikten om hun eigen gelijk binnen te halen en nauwelijks bereid bleken om de uiteenzetting over de organisatie van het gedifferentieerde wiskunde-onderwijs op de Heao-Zwolle aan te horen.

Natuurlijk zijn wij altijd genegen om een inhoudelijke discussie te voeren over de gekozen uitgangspunten voor het wiskunde-onderwijs, maar dan wel op een gepaste wijze en op de juiste plaats.

Een heel ander punt is welke vooropleiding een student moet hebben om met voldoende kans een heao-opleiding te voltooien. Schmidt doet voorkomen dat het onjuist is om havo-leerlingen te adviseren wiskunde B te kiezen als voorbereiding op een studie aan het heao. Deze zaak ligt niet zo eenvoudig. Iedereen die op de hoogte is van de leerplannen voor havo A en B weet dat beide wiskundeprogramma's onderdelen bevatten die voor een economische studie interessant zijn.

Ook reeds in 1986 publiceerde de 'Werkgroep ter voorbereiding van wijziging van het eindexamenprogramma wiskunde havo' een rapport waarin wiskunde B gezien wordt als de goede vooropleiding voor het heao (blz. 4 en 5). En op 6 december jl. heeft M. Kindt op een bijeenkomst georganiseerd door Hogeschool Utrecht met als onderwerp de aansluitingsproblematiek v.o.-h.b.o. aangegeven dat de wiskunde havo-A beslist niet naadloos aansluit op het heao, vooral niet op heao's met een ongedeelde propaedeuse (in het tweede jaar een splitsing naar studierichting). Kortom, voldoende stof tot nadenken voor de docenten die wiskunde geven aan het heao over de vraag hoe ze op de verschillen tussen studenten moeten inspelen.

Natuurlijk wordt er ook op onze school nagegaan in hoeverre het propaedeuse-programma moet worden bijgesteld, wat wij ook al op de studiedag naar voren hebben gebracht. Of daarbij gedacht moet worden aan de oplossing die Schmidt voor ogen staat valt te bezien.

Voor geïnteresseerden kunnen we nu al melden dat er komend voorjaar op een drietal plaatsen (o.a. in Zwolle) voorlichtingsmiddagen voor heao's zullen worden georganiseerd door het OW & OC, om in te gaan op het gewijzigde wiskundeprogramma.

We hopen dat de inhoud van de discussies op deze middagen een ander niveau zal hebben dan de opmerking van een collega uit Groningen, die meende bijeenkomsten zoals de studiedag van de NVvW te moeten gebruiken, door op wel erg luidruchtige wijze te trachten studenten voor haar opleiding te ronselen. (Citaat: 'Als ik decaan zou zijn van een school voor v.o., zou ik mijn leerlingen niet naar de Heao in Zwolle sturen'.)

► **De 29^e Nederlandse Wiskunde Olympiade 1990**

H. N. Schuring

De eerste ronde

Op vrijdag 16 maart 1990 is de eerste ronde gespeeld. Alle scholen voor havo en vwo zijn uitgenodigd om leerlingen, geen vwo-eindexamenkandidaten, hieraan mee te laten doen. Gedurende drie uur konden de deelnemers proberen 13 opgaven op te lossen. Alleen goede antwoorden telden mee. Het maximaal te behalen puntenaantal was 36.

De wedstrijdleiders van 229 scholen hebben het resultatenformulier tijdig opgestuurd, zodat het resultaat van 2406 deelnemers in tabel 1 verwerkt kon worden.

De cesuur is gelegd bij score 18, wat zeggen wil dat deelnemers die 18 of meer punten behaalden, werden uitgenodigd voor de tweede ronde.

Van de 100 deelnemers, die uitgenodigd zijn voor de tweede ronde, komen er 82 uit 5 vwo, 17 uit 4 vwo en 1 uit 3 vwo.

Van het Gemeentelijk Gymnasium te Hilversum is de somscore van de beste vijf deelnemers 101, terwijl de somscore van de beste drie deelnemende meisjes 50 is. Deze resultaten zijn de hoogste van het land, zodat deze school de Shell-wisselprijs en tevens de door de Staatssecretaris ingestelde wissel-

prijs voor meisjes behaald heeft. Beide prijzen zijn op 19 juni 1990 op de school te Hilversum uitgereikt.

Doordat vier deelnemers aan de Pythagoras Olympiade ook in aanmerking kwamen om aan de tweede ronde mee te doen, zijn 104 leerlingen hiervoor uitgenodigd.

Tabel 1

score	freq.	cum. freq.	score	freq.	cum. freq.
36	—	0	cesuur	—	—
35	—	0	17	20	120
34	—	0	16	26	146
33	—	0	15	60	206
32	2	2	14	38	244
31	1	3	13	62	306
30	1	4	12	75	381
29	1	5	11	53	434
28	1	6	10	136	570
27	—	6	9	92	662
26	6	12	8	125	787
25	3	15	7	196	983
24	8	23	6	103	1086
23	7	30	5	227	1313
22	10	40	4	252	1565
21	8	48	3	100	1665
20	15	63	2	440	2105
19	21	84	1	3	2108
18	16	100	0	298	2406

De tweede ronde

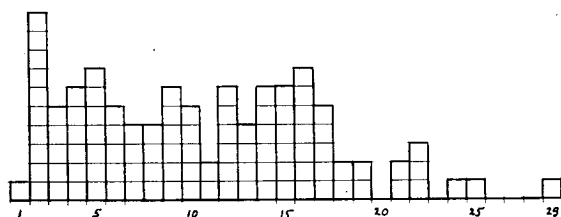
Op 7 september 1990 is in Eindhoven de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade gehouden. Van de 104 uitgenodigde leerlingen hebben er 101 deelgenomen. Ze hadden drie uur de tijd om vier opgaven op te lossen.

De maximale score per opgave was 10 punten.

Door bij gelijke eindscore rekening te houden met het behaalde puntenaantal in de eerste ronde, zijn de volgende tien deelnemers prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1990:

	2 ^e ronde	1 ^e ronde
1. Segher Boessenkool, Den Helder	29 punten	31 punten
2. Willem Spruyt, Zeist	25 punten	25 punten
3. Reinier Torenbeek, Delft	24 punten	26 punten
4. Michiel de Bondt, Malden	22 punten	32 punten
5. Chris Stolk, Bunnik	22 punten	29 punten
6. Timo Gerlagh, Driebergen	22 punten	Pythagoras
7. Lennart de Vos, Eindhoven	21 punten	18 punten
8. Wim Oudshoorn, Heiloo	21 punten	Pythagoras
9. Raoul Trines, Eindhoven	19 punten	23 punten
10. Sander van Rijnsouw, Delft	19 punten	Pythagoras

Het onderstaande staafdiagram geeft een overzicht van de scores van alle deelnemers aan de tweede ronde.

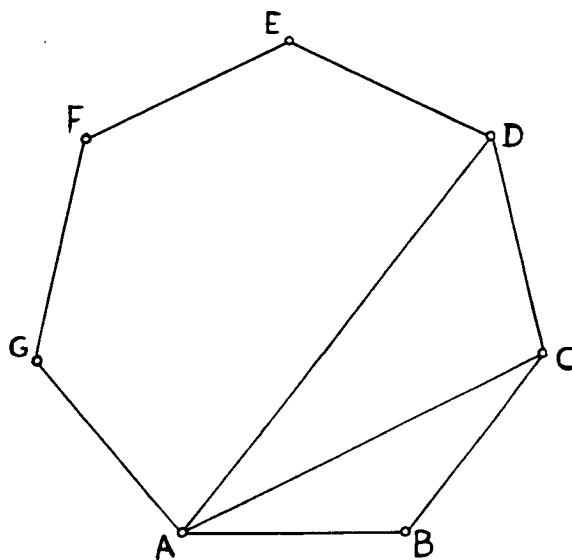


Opgaven tweede ronde



- Bewijs dat voor alle gehele $n > 1$ geldt:
 $1 * 3 * 5 * 7 * \dots * (2n - 1) < n^n$
- Van een rij $a_1, a_2, a_3, \dots$ is gegeven:
 $a_1 = 1\frac{1}{2}$ en $a_{n+1} = \frac{3a_n^2 + 4a_n - 3}{4a_n^2}$

- Bewijs dat voor alle n geldt: $a_n > 1$ en $a_{n+1} < a_n$.
 - Uit a) volgt dat de $\lim a_n$ bestaat voor $n \rightarrow \infty$. Bereken deze limiet.
 - Bepaal de limiet van $a_1 * a_2 * a_3 * \dots * a_n$ voor $n \rightarrow \infty$.
3. Gegeven is van de functie
 $f: x \rightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$:
 – alle coëfficiënten a, b, c en d zijn positief (> 0),
 – voor elke $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ is $f(x)$ een geheel getal,
 – $f(1) = 1$ en $f(5) = 70$.
- Bewijs dat $a = \frac{1}{24}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{11}{24}$ en $d = \frac{1}{4}$.
 - Bewijs: voor elke $x \in \mathbb{Z}$ is $f(x)$ een geheel getal.
4. Gegeven is een regelmatige zevenhoek $ABCDEFG$ met zijde $AB = 1$.



Bewijs dat voor de diagonalen AC en AD geldt:

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$$

Oplossingen

$$\begin{aligned}
 1. \quad P(n) &= 1 * 3 * 5 * \dots * (2n-3) * (2n-1) \\
 &= (2n-1) * (2n-3) * (2n-5) * \dots * 3 * 1 \\
 &= P(n) \\
 (P(n))^2 &= (1 * (2n-1)) * (3 * (2n-3)) * \\
 &= (5 * (2n-5)) * \dots * ((2n-1) * 1) = \\
 &= (n^2 - (n-1)^2) * (n^2 - (n-3)^2) \\
 &= (n^2 - (n-5)^2) * \dots * (n^2 - (n-1)^2) < \\
 &< (n^2)^n = n^{2n} = (n^n)^2. \text{ Dus } P(n) < n^n.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.a) \quad a_{n+1} &= \frac{3a_n^2 + 4a_n - 3}{4a_n^2} = \\
 &= \frac{4a_n^2 - (a_n^2 - 4a_n + 3)}{4a_n^2} = \\
 &= 1 + \frac{(a_n - 1)(3 - a_n)}{4a_n^2}
 \end{aligned}$$

Als geldt $1 < a_n < 3$ dan geldt $1 < a_{n+1}$ want $(a_n - 1)(3 - a_n) > 0$ voor $1 < a_n < 3$.

Verder geldt $(a_n - 1)(3 - a_n) \leq 1$ voor $1 < a_n < 3$ en $4a_n^2 > 4$ voor $a_n > 1$ dus geldt zeker:

als $1 < a_n < 3$ dan $(a_n - 1)(3 - a_n)/4a_n^2 < \frac{1}{4}$ en dus $a_{n+1} < 1\frac{1}{4} < 3$.

Omdat $a_1 = 1\frac{1}{2}$ geldt $1 < a_2 < 3$ etc... dus $1 < a_n < 3$.

$$\begin{aligned}
 a_n - a_{n+1} &= \frac{4a_n^3 - 3a_n^2 - 4a_n + 3}{4a_n^2} \\
 &= \frac{(4a_n - 3)(a_n^2 - 1)}{4a_n^2} > 0 \text{ omdat } a_n > 1.
 \end{aligned}$$

Conclusie $a_n > a_{n+1}$.

b) De limiet bestaat. Noem de limiet A , dan geldt

$$A = \frac{3A^2 + 4A - 3}{4A^2}$$

$$\text{ofwel } 4A^3 - 3A^2 - 4A + 3 =$$

$$(4A - 3)(A - 1)(A + 1) = 0.$$

Omdat $a_n > 1$ moet gelden $A = 1$.

c) Noem $P(n) = a_1 * a_2 * a_3 * \dots * a_n$.

Uit het gegeven volgt direct

$$4a_n^2 * a_{n+1} = 3a_n^2 + 4a_n - 3, \text{ ofwel}$$

$$a_n^2 * (4a_{n+1} - 3) = 4a_n - 3 \text{ dus}$$

$$a_n^2 = \frac{4a_n - 3}{4a_{n+1} - 3} \text{ voor } n \geq 1.$$

$$\begin{aligned}
 (P(n))^2 &= a_1^2 * a_2^2 * \dots * a_n^2 = \\
 &= \frac{4a_1 - 3}{4a_2 - 3} * \frac{4a_2 - 3}{4a_3 - 3} * \dots * \frac{4a_n - 3}{4a_{n+1} - 3} \\
 (P(n))^2 &= \frac{4a_1 - 3}{4a_{n+1} - 3} = \frac{3}{4a_{n+1} - 3} \text{ dus}
 \end{aligned}$$

$$\lim (P(n))^2 = 3 \text{ voor } n \rightarrow \infty.$$

$\lim P(n)$ voor $n \rightarrow \infty$ is dus gelijk aan $\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
 3.a) \quad f(1) &= a + b + c + d = 1 \\
 f(-1) &= a - b + c - d \in \mathbb{Z} \quad \text{dus } 2(a + c) \in \mathbb{Z} \\
 &\text{en } 2(b + d) \in \mathbb{Z} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Omdat $a + b + c + d = 1$ en $a, b, c, d, > 0$ geldt $a + c = b + d = \frac{1}{2}$. (2)

$$\begin{aligned}
 f(2) &= 16a + 8b + 4c + 2d \in \mathbb{Z} \\
 f(-2) &= 16a - 8b + 4c - 2d \in \mathbb{Z} \quad \text{dus}
 \end{aligned}$$

$$32a + 8c \in \mathbb{Z} \text{ en } 16b + 4d \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

$$\text{Uit (1) en (3) volgt } 24a \in \mathbb{Z} \text{ en } 12b \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

$$\text{Uit (2) en (4) volgt } a = \frac{p}{24}, c = \frac{12-p}{24} \text{ met}$$

$$1 \leq p \leq 11$$

$$\text{en } b = \frac{q}{12}, d = \frac{6-q}{12} \text{ met } 1 \leq q \leq 5.$$

$$f(5) = 70 \text{ ofwel } 125a + 25b + 5c + d = 14 \text{ en dus } 5p + 2q = 11.$$

Uit de beperkingen voor p en q volgt direct: $p = 1$ en $q = 3$.

b) Te bewijzen is dat $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$ een veelvoud van 24 is.

$$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x =$$

$$x(x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x - 2) =$$

$$x[(x+2)^3 - (x+2)] =$$

$$x(x+2)[(x+2)^2 - 1] =$$

$$x(x+1)(x+2)(x+3).$$

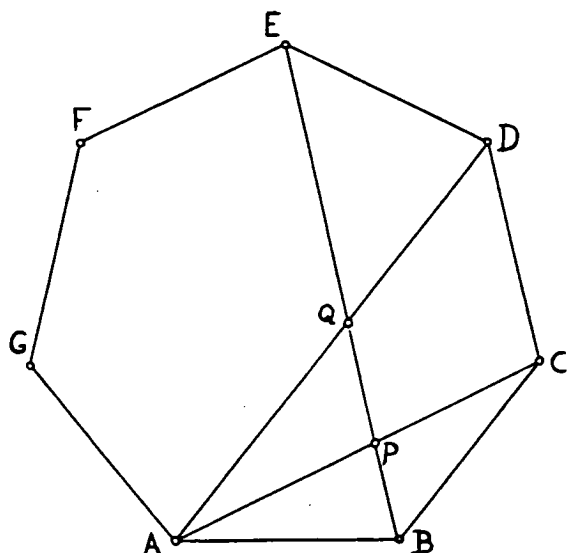
$x(x+1)(x+2)(x+3)$ is een 24-voud omdat onder 4 opeenvolgende getallen altijd een 2-voud, een 3-voud en een 4-voud zijn.

4. Trek BE en noem de snijpunten met AC en AD resp. P en Q .

$$\angle ABC = \frac{5}{7}\pi \text{ en } \triangle ABC \text{ is gelijkbenig, dus}$$

$$\angle CAB = \angle ACB = \frac{1}{7}\pi.$$

$$\text{Dus } \angle ACD = \frac{5}{7}\pi - \frac{1}{7}\pi = \frac{4}{7}\pi.$$



Omdat EB evenwijdig is aan CD geldt:

$$\angle APQ = \angle ACD = \frac{4}{7}\pi \text{ dus } \angle APB = \frac{3}{7}\pi.$$

In driehoek ABP geldt:

$$\angle ABP = \pi - \frac{3}{7}\pi - \frac{1}{7}\pi = \frac{3}{7}\pi. \text{ Dus}$$

$$AP = AB = 1.$$

De driehoeken APQ en ACD zijn gelijkvormig:

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AC}{AD} \text{ ofwel } \frac{AB}{AD - DQ} = \frac{AC}{AD} \quad (i)$$

Omdat $BC \parallel AD$ en $BE \parallel CD$ geldt

$$DQ = CB = 1 \quad (ii)$$

Uit (i) en (ii) volgt: $AD = AC(AD - 1)$ dus

$$AD + AC = AD \cdot AC \text{ en daaruit volgt direct}$$

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{AC} = 1.$$

► Advies bezemexamens havo

In circulaire VO/AV 86-14 van 6 april 1987 werd de eerste informatie met betrekking tot invoering van wiskunde A en wiskunde B als examenvakken op het havo gegeven, waarin gemeld werd dat op het 'bezemexamen' van 1992 geen vragen worden gesteld over de onderwerpen kansrekenen, statistiek, de cirkel, de parabool en puntverzamelingen. Hieraan werd toegevoegd: Het volgen van de lessen wiskunde B maakt zo een goede voorbereiding op het examen wiskunde (oude stijl) mogelijk.

In circulaire VO/AV/BE-894.013 van 7 maart 1989 is deze toevoeging reeds afgezwakt tot: Het volgen van de lessen wiskunde B kan dus een goede voorbereiding zijn op het examen wiskunde (oude stijl). In circulaire VO/AVV/VO.II-90016845 van 7 maart 1990 komt deze toevoeging niet meer voor. Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is van mening dat de geest van het wiskunde-examen oude stijl zo verschillend is van de geest van het examen wiskunde B dat het slechts volgen van de lessen wiskunde B geen goede voorbereiding op het examen wiskunde (oude stijl) mogelijk maakt. Dit geldt het meest voor de meetkunde die in het programma oude stijl een sterk algebraïsch-analytisch karakter heeft terwijl juist de behandeling van algebraïsche methoden in de ruimtekunde geschrapt is toen bleek dat de staatssecretaris het van belang vond dat de programma's behandeld kunnen worden in vier wekelijkse lessen in 4-havo plus vier in 5-havo.

● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

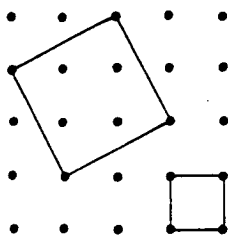
► Opgave 625

Het spijkerbord is een leuk hulpmiddel in de brugklas om vierkanten, ruiten en dergelijke te herkennen. Op een houten ondergrond heb ik in een 15×15 vierkant 225 spijkertjes geslagen. Met elastiek geef ik de verschillende soorten vierhoeken aan.

Wist u: Als het elastiek langs u spijkers gaat en als er i spijkers binnen de veelhoek liggen, dan is de oppervlakte van de veelhoek $i + (u - 2)/2$. (Netter gezegd: als er u roosterpunten op de omtrek van een veelhoek liggen en i erbinnen, dan is de oppervlakte van deze veelhoek $i + (u - 2)/2$.)

Wist u: Als er 1 spijker binnen $\triangle ABC$ ligt en de enige spijkers op de rand zijn A, B en C zelf, dan is die ene spijker binnen $\triangle ABC$ het zwaartepunt van $\triangle ABC$!

In de brugklas kun je de leerlingen bijvoorbeeld vierkanten laten tellen. Op een 5×5 bord zijn 50 vierkanten te vinden:



Onlangs vroeg een leerling: 'en op een 100×100 bord?'. Toen hij zag dat ik met m'n ogen knipperde en verdoemd naar buiten staarde, zei hij: 'geintje mees, geintje!'
Mag ik u deze maand eens vragen: 'Hoeveel vierkanten zijn er eigenlijk op een $n \times n$ bord te vinden?'

De inzenders, die hun oplossing binnen een maand na verschijning insturen, ontvangen voor een correcte oplossing 5 punten op hun puzzelladder. Als u vaak genoeg juiste oplossingen instuurt, dan komt u uiteindelijk aan de top van de ladder en ontvangt u een boekenbon van vijftientig gulden.

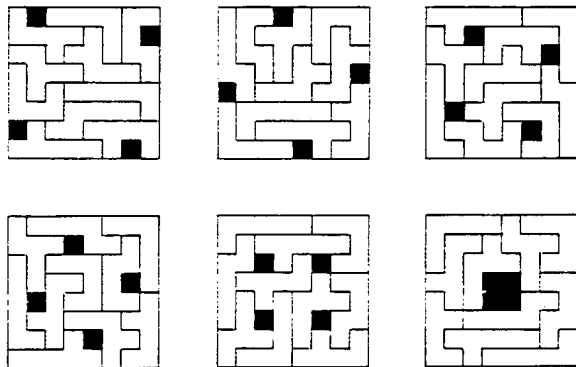
► Oplossing 622

De Oxford University Press brengt sinds enige tijd leuke puzzelboeken op de markt in de serie 'Recreations in Mathematics'. Onder leiding van puzzelexpert David Singmaster zijn de volgende boeken verschenen:

1. Hugh ApSimon: Mathematical Byways (1984).
2. John D. Beasley: The Ins and Outs of Peg Solitaire (1985).
3. Erno Rubik, etc.: Rubik's Cubic Compendium (1987).
4. Edward Hordern: Sliding Piece Puzzles (1986).
5. John D. Beasley: The Mathematics of Games (1989).
6. Stewart T. Coffin: The Puzzling World of Polyhedral Dissections (1990).
7. Hugh ApSimon: More Mathematical Byways (1990).

Het boek van Coffin is een bewerking van zijn privé-uitgave 'Puzzle Craft'. De fraaiste puzzel uit zijn boek vind ik 'The Cornucopia Puzzle':

Met de 10 hexomino's, door Mike Beeler uitgekozen, is er voor elk van de volgende borden slechts 1 unieke oplossing. Een geweldige prestatie!



Bovenstaande oplossing is ingezonden door Jacques Haubrich (15) uit Eindhoven.

Dank ook aan Ir. P. J. Torbijn (10) uit Den Haag, die de 24 zwarte vakjes opvulde met de wens GOEDE KERST EN 'N GEZOND 1991.

Na loting onder de 'toppers' met 15 punten is winnaar van de boekenbon van f25,- geworden:

Willem van der Vegt, Reggelaan 58, 8033 AW Zwolle.

Hartelijk gefeliciteerd en met veel genoegen heb ik je programma, geschreven in TurboPascal 5.5, bestudeerd.



► Van de bestuurstafel

Freek Mahieu

Tijdens de afgelopen vergaderingen heeft het bestuur veel aandacht besteed aan de bijeenkomsten over het **concept programma wiskunde 12-16** en **examenprogramma wiskunde C-D voor mavo/lbo**.

Onder verantwoordelijkheid van onze vereniging werd in elf plaatsen van het land een tweetal bijeenkomsten georganiseerd. Doel: de plannen van de CWO/het team W 12-16 inzake genoemde programma's bekendheid geven en in bespreking brengen.

De opkomst van rond 1200 deelnemers bij de 1e bijeenkomsten overtrof alle voorspellingen.

Bij de 2e bijeenkomsten was bijna 80% weer aanwezig. De leden van COW, W 12-16 en APS (Algemeen Pedagogisch Studiecentrum) en docenten van de met het nieuwe C-D-programma experimenterende scholen slaagden erin een duidelijk beeld van de programma's te geven; bovendien was er gelegenheid tot discussie en eigen inbreng in de diverse werkgroepen.

Onze vereniging heeft er de nadruk op gelegd dat nog lang niet alles vastligt en dat er mede dankzij de discussies nog veel kan worden gewijzigd.

In het kort volgt hier de uitslag van de bij de 2e bijeenkomsten gehouden enquête (633 deelnemers leverden een formulier in).

a. In grote lijnen was de verdeling van de deelnemers over de verschillende schooltypen: 20% ibo/lbo, 50% mavo, 20% havo/vwo, 10% heterogene onderbouw.

b. Er bestaat geen verband tussen de leeftijd van de docent en de opvatting over de richting van de voorgestelde veranderingen.

c. Ongeveer 80% van de deelnemers vond de geboden informatie (Wiskrant special en bijeenkomsten) voldoende en duidelijk.

d. De vraag 'Bent u het in grote lijnen eens met de richting waarin de voorgesteld veranderingen gaan?' werd door 60% met 'ja' beantwoord.

e. Ongeveer 75% van de deelnemers wil volgend jaar weer regionale bijeenkomsten bezoeken. In volgorde van voorkeur is er belangstelling voor

- aansluitingsproblematiek,
- ervaringen van de experimenteerscholen,
- wijze van invoering,
- examenprogramma,
- leerstofgebieden in hun samenhang.

Van de enquêteresultaten is een nadere verfijning te geven, uitgesplitst naar plaatsen, schoolsoorten, enz. Hierover en over een nadere interpretatie van de gegevens kan te zijner tijd meer gepubliceerd worden.

Bij de **verslaggeving** tijdens de bijeenkomsten werd geassisteerd door vertegenwoordigers van de VALO. Het bestuur heeft de VALO uitgenodigd voor een gesprek over de vormgeving van het verslag en de publikatie hiervan.

Al vóór de 2e bijeenkomst ontvingen de deelnemers een brief van het bestuur waarin werd aangedrongen op een kritische houding en de mogelijkheid werd geboden om zich aan te melden voor een regionale werkgroep. Hiervoor hebben zich tot nu toe 36 personen aangemeld waarmee in 7 regio's een groep gestart is.

Belangstellenden kunnen zich wenden tot Agneta Aukema, telefoon 03200-26518.

Op een extra bestuursvergadering is de taak van de vereniging verder uitgestippeld.

a. Het bestuur wil via de twee vertegenwoordigers van de NVvW in de COW, Francis Meester en Joop van Dormolen, invloed uitoefenen op de inhoud van de programma's en de wijze waarop die programma's worden ingevoerd.

b. Informatie over de gedachten die in het veld leven moet vooral uit de regionale werkgroepen komen. In een brief aan de leden van de werkgroepen is o.a. de taakstelling vervat. In ieder geval

komen omvang, inhoud en diepgang van de programma's aan de orde. Verder: wat wordt er gemist?; wat is overbodig?; wat is ongeschikt?; de te besteden tijd per leerstoflijn; wat moeten (mogen) we verwachten van de nieuwe leerboeken?; adequate aansluiting op havo-A en -B en andere vormen van vervolgonderwijs; in welke vorm bijscholing voor docenten?

c. Het bestuur is van mening dat bij een invoering in 1993 vanaf de eerste klas, de bijscholing tijdig kan plaatsvinden.

Bovendien vraagt het bestuur zich af of, in het geval dat in 1997 een eerste nieuw C-D-examen zal worden afgenomen, het wellicht mogelijk is om enkele bekende, al aanvaarde aspecten van het nieuwe programma geleidelijk in het huidige examen op te nemen. Ook is het van belang te onderzoeken of in dat geval scholen in de gelegenheid kunnen worden gesteld om vóór 1997 al deel te nemen aan het nu al bestaande experimentele nieuwe examen.

En dan nu nog enkele andere zaken.

1. Het **CEVO-nieuws** (nr. 16, november 1990) meldt dat het Algemeen bestuur van de CEVO heeft besloten om met ingang van 1992 het aantal te behalen scorepunten per vraag voortaan te vermelden bij de examenopgaven, met name bij open vragen waar de aantallen per vraag kunnen verschillen. De CEVO acht deze informatie voor de kandidaten 'alleszins relevant' en signaleerde bij de CEVO-vaksecties, behalve instemming, géén duidelijke afwijzing.

Enige tijd geleden hebben wij het probleem in deze rubriek aan de orde gesteld en om reacties gevraagd. Hierop kwam bijna geen respons. Ook géén duidelijke afwijzing dus...?

2. Het bestuur heeft een deskundige jury geformeerd die de beoordeling op zich heeft genomen van de inzendingen op de **prijsvraag 'Anders dan anders'**, een gemeenschappelijk initiatief van de NVvW en de NVORWO (Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken Wiskunde Onderwijs).

De jury heeft inmiddels uitspraak gedaan: er zijn twee prijswinnaars. De prijzen zullen aan hen worden uitgereikt op vrijdag 12 april a.s. bij gelegenheid van de jaarvergadering van de NVORWO.

3. Bij de **examenbesprekingen in 1991** moet rekening worden gehouden met het feit dat bij mavo/lbo Pinksteren helaas tussen examentijdstip en centrale bespreking zal vallen.

Data van de regionale besprekingen zijn: vwo A op 16 mei, vwo B op 27 mei, havo op 16 mei, mavo/lbo C-D op 22 mei.

Er moet een aantal nieuwe gespreksleiders worden gevraagd.

4. Het bestuur heeft bij de staatssecretaris het verzoek ingediend om een gesprek met het ministerie te mogen voeren over het onderwerp '**statistiek in het vwo**'.

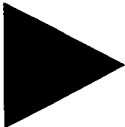
Dit verzoek is afgewezen. Het bestuur stelt momenteel alles in het werk om toch tot een gesprek te komen.

5. Jan Breeman coördineert namens het bestuur de werkzaamheden van de Werkgroep Interpretatie Eindexamenprogramma Wiskunde A-vwo (de WIEWA).

De werkgroep heeft een eerste **deelnarrapport 'waarschijnlijkheidsrekening en statistiek'** uitgebracht. Het is voor advies aangeboden aan de CEVO, waarna zo spoedig mogelijk publicatie zal volgen. In de jaarrede heeft het bestuur haar zorg uitgesproken over het onderwerp statistiek en kansrekening bij vwo-A.

Verder werd er gevraagd naar docenten met belangstelling voor het uitproberen van een **vernieuwde invulling van AGV** (Automatische Gegevens Verwerking). Hiervoor meldden zich 12 docenten. Zij hebben de programma's en bijbehorend lesmateriaal van 'Statistiek op Relationele bestanden' en/of 'Dynamische simulatie' uitgeprobeerd en hiervan verslag gedaan bij het bestuur.

6. Oud-bestuurslid Leen Bozuwa die de algemene leiding had over de **studiedag** op 27 oktober jl., heeft een evaluatie-vergadering belegd met de inleiders van de werkgroepen waaraan op deze dag kon worden deelgenomen. Algemene indruk: een geslaagde studiedag. Vraag: hoe wordt aan de resultaten van de diverse werkgroepen nadere bekendheid gegeven? Misschien is het mogelijk om in Euclides met enkele artikelen hierover aan te sluiten bij de serie 'Wiskunde in vervolgonderwijs'.



Boekbespreking

7. Inmiddels heeft het bestuur zich alweer beraden over de **jaarvergadering/studiedag op 26 oktober 1991**. Als thema is geopperd: toetsen in zich ontwikkelend wiskunde-onderwijs.

Een ander aandachtspunt is de samenstelling van een nieuw **vademecum**.

8. Vertegenwoordigers van de **Bèta Federatie**, waarbij ook onze vereniging is aangesloten, hebben een gesprek gevoerd met minister Ritzen. Onze voorzitter, Hans van Lint, heeft aan dit gesprek deelgenomen. De minister toonde zich erg geïnteresseerd en welwillend ten aanzien van allerlei probleemstellingen, maar zegde niet direct iets structureels toe.

Probleemstellingen waren o.a.: afnemende studie-keuze voor exacte vakken en techniek, de nog steeds te geringe belangstelling voor exacte vakken bij meisjes, gering effect van de actie 'Kies exact', het vervallen van de verplichting voor wiskunde op de PABO, de basisvorming, het tekort aan leraren. Men vroeg zich bij dit alles af: zijn dit typisch Nederlandse problemen?

9. Het bestuur heeft het idee opgevat om docenten de gelegenheid te geven zich samen nader te verdiepen in allerlei facetten van de wiskundeproblematiek van alle dag. Als een eerste begin is als onderwerp gekozen: **hawexproblematiek in de 4e klas havo**.

Uit de bezoekers van één of twee regionale besprekingen zal, mede met hulp van de gespreksleiders(s), een gespreksgroep worden gevormd. Er wordt gedacht aan Zwolle en omgeving en aan Den Haag/Rotterdam.

Als ook in andere regio's belangstelling blijkt te bestaan voor dergelijke gespreksgroepen zal het bestuur het vormen van een groep direct ondersteunen!

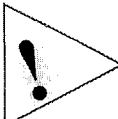
H. J. Reiffen/H. W. Trapp, *Differentialrechnung*, B.I. Wissenschaftsverlag, 388 blz. DM 42,-.

Dit boek is bedoeld als een inleiding in de differentiaalrekening voor eerstejaars studenten van een universitaire opleiding wiskunde, natuurkunde of informatica.

Behandeld worden eerst continuïteit en differentieerbaarheid van functies van 1 variabele, (functie)rijen en (macht)reeksen. Integreren wordt ingevoerd als de omkering van differentiëren. Daarna volgt een behandeling van continuïteit, differentieerbaarheid en integratie van functies en afbeeldingen met 1 of meer variabelen. Complexe functies komen als speciale afbeeldingen aan de orde. Besloten wordt met de oplossing van (stelsels) differentiaalvergelijkingen.

De auteurs zijn verbonden aan de universiteit van Osnabrück, afdeling wiskunde en informatica. Kennelijk verschilt het eerste jaars analyse-programma daar niet wezenlijk van dat van de Nederlandse universiteiten. De opbouw van het boek is traditioneel. Er wordt geen bijzondere voorkennis verwacht. De beschrijving van genoemde onderwerpen is formeel en erg compact. De opgavenverzameling is mager.

S.H. Bos



Kalender

1 maart 1991: Op de scholen voor havo en vwo. Eerste ronde Wiskunde Olympiade.

13 maart 1991: Utrecht. Bestuursvergadering NVvW.

22 en 23 maart 1991: Arnhem, Landelijke bijeenkomst werkgroep Vrouwen en Wiskunde. Zie bladzijde 181.

4 en 5 april 1991: Rotterdam, Symposium over COO in de wiskunde op het Nederlands Mathematisch Congres. Zie de mededeling op bladzijde 167.

17 april 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

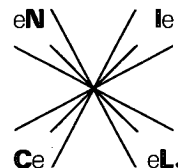
8 mei 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

16 mei 1991: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen vwo A en havo.

22 mei 1991: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen mavo/lbo C-D.

27 mei 1991: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen vwo B.

Najaar 1991: Diverse plaatsen, Regionale bijeenkomsten over W 12-16.



Het NICL:
inventariseert, registreert, structureert
en beschrijft het complete
leermiddelenaanbod voor het basis-,
voortgezet en beroepsonderwijs.
Het NICL is een afdeling van het
Instituut voor Leerplanontwikkeling,
SLO.

NICL-Overzichten 1991

In de reeks NICL-Overzichten zijn
verschenen de nieuwste uitgaven voor
o.a. de vakken

Wiskunde/Rekenen/Informatica
f 14,50

De NICL-Overzichten geven een
actueel en volledig overzicht van wat
er op de markt verkrijgbaar is aan leer-
middelen voor desbetreffende vak-
gebieden. U als docent in het
algemeen voortgezet onderwijs en/of
beroepsonderwijs bieden zij de moge-
lijkheid snel en gemakkelijk een eerste
selectie te maken uit het totale leer-
middelenaanbod.

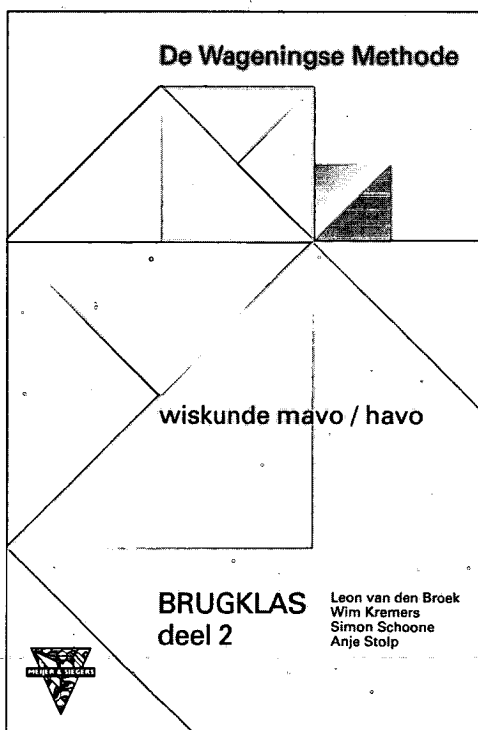
Van ieder leerboek is de volgende
informatie opgenomen: samenstelling,
doelgroep, eerste jaar van uitgave,
laatste (herziene) druk, aantal
pagina's, prijs en ISBN.

Achterin de overzichten staat onder
meer een lijst met recente adressen en
telefoonnummers van uitgevers.

De uitgaven zijn los verkrijgbaar of
door middel van een abonnement. In
het laatste geval blijft u jaarlijks op de
hoogte van alle nieuw verschenen
titels.

Besteladres:

NICL, Nationaal InformatieCentrum
Leermiddelen
Postbus 2041
7500 CA Enschede
Tel.: 053 - 840246



Voor de brugklas bestaan er van de Wageningse
Methode twee edities, een voor mavo/havo en
een voor havo/vwo. Vanuit beide edities is de
overgang naar havo 2 drempelloos.

*Er zijn twee edities omdat wij van mening zijn dat
het niet zinvol is in een wiskundemethode vragen
te stellen waarbij je van te voren weet dat 70%
van de leerlingen ze niet kan beantwoorden. Ook
vinden wij dat je geen vragen moet stellen waarbij
je van te voren weet dat 70% van de leerlingen
niet hoeft na te denken.*

de Wageningse Methode

een wiskundemethode voor mavo (1 en 2),
havo (1, 2 en 3) en vwo (1 t/m 6, A en B) met
ondersteunende software.

Informatie:

onderbouw : Wim Kremers (08373 - 18206)
bovenbouw : Leon v.d. Broek (080 - 788604)
software : Jan Breeman (01828 - 16063)

Verkoopadres:

Meijer & Siegers bv
Postbus 105
6860 AC Oosterbeek
Tel.: 085 - 341045 (Jacqueline)

Inhoud

Inhoud 161

Bram van der Wal: Een experimenteel voorbeeldexamen Ibo/mavo 162

Mededeling 167

40 jaar geleden 167

Frederik van der Blij, Waldy Vastrick: Constructies van regelmatige veelhoeken 168

Truus Dekker: Examen Ibo/mavo C/D 1990, experimenteel (6) 175

Werkbladen 176

Folkert Schlichting: Eerstegraads functies en de wijzers van de klok 178

Mededeling 179

Ben Mooiman, Douwe T. Prinsse: Wiskunde-onderwijs aan de Heao in Zwolle 180

Mededeling 181

Victor Schmidt: Wiskunde op de heao 182

Douwe T. Prinsse, Ben Mooiman: Wiskunde op de heao: een reactie 184

H. N. Schuring: De 29e Nederlandse Wiskunde Olympiade 1990 185

Advies bezemexamens havo 188

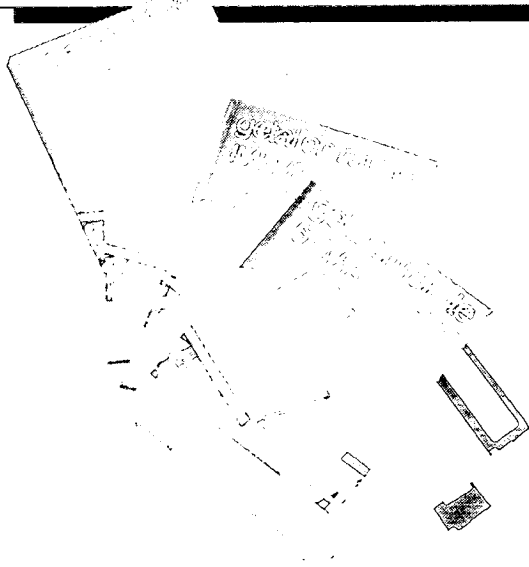
Recreatie 189

Freek Mahieu: Van de bestuurstafl 190

Boekbespreking 192

Kalender 192

GETAL EN RUIMTE: de constante factor voor een geslaagde wiskundeles



De belangrijkste wiskunde methode voor LBO, MAVO, HAVO en VWO kent een groot aantal tevreden gebruikers. Getal en Ruimte is een methode, die zich kenmerkt door een evenwichtig didactisch concept. Geen wonder, want Getal en Ruimte verwerkt onderwijskundige vernieuwingen op een verantwoorde wijze. Getal en Ruimte is een methode die duidelijk, up-to-date en rijkelijk voorzien is van toets- en differentiatiemogelijkheden. Het is een methode waarmee uw leerlingen uitstekend zelf kunnen werken en waarin het vak wiskunde waar mogelijk gerelateerd wordt aan de alledaagse werkelijkheid. En niet alleen uw leerlingen werken er gemakkelijk mee. Ook voor de docent is het een gebruiksvriendelijke methode, mede dankzij de overzichtelijke docentenhandleidingen. Getal en Ruimte is ook verkrijgbaar bij de erkende boekhandel. Voor meer informatie en voor het aanvragen van de nieuwe documentatie LBO/ MAVO of MAVO/HAVO/VWO kunt u zich richten tot:



Educaboek

Educaboek, Postbus 48,
4100 AA Culemborg, tel.: 03450-71880.

Getal en Ruimte: zekerheid in het kwadraat