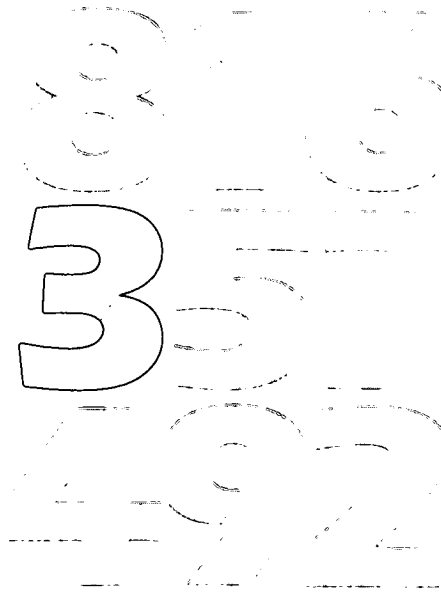


Wolters-Noordhoff

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Vakblad voor de wiskundeleraar

Euclides



jaargang 66 1990 | 1991 november

Redactie

Drs H. Bakker
Drs R. Bosch
Drs J. H. de Geus
Drs M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
N. T. Lakeman (beeldredacteur)
Drs A. B. Oosten (voorzitter)
P. E. de Roest (secretaris)
Ir. V. E. Schmidt (penningmeester)
Mw. Drs A. Verweij (eindredacteur)
A. van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,
8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f55,- per verenigingsjaar;
studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de
V.V.W.L. f37,50; contributie zonder Euclides f30,-.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met
vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de
leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan
F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij
drs M. C. van Hoorn, Noordersingel 12,
9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te
zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos
5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is
opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f58,00. Een collectief
abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f37,00.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie,
Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86.
Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen
tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend
nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag
leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde
van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers f9,50 (alleen verkrijgbaar na vooruit-
betaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUI' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

● Inhoud ● ● ● ● ●

Actualiteit 66

G. Y. Nieuwland *De toekomst van de wiskunde*
Naar aanleiding van een forumdiscussie op het
26e Nederlandse Mathematisch Congres.

Mededeling 70

Actualiteit 71

H. J. Smid *Twee stenen in de vijver* 71
De discussie voortgezet. Over de reacties op twee
artikelen van Anne van Streun.
Nawoord van het bestuur 73
Swier Garst *Opa's meetkunde* 74

Brieven 75

Ger Limpens *Naar China?* 75
F. Smid *Interpretatie van notaties* 75

Mededeling 76

Bijdrage 76

J. M. Buhrman *Pythagorische drietallen en matrices*
Waaruit blijkt dat een matrix van het ene Pythagorische drietal een ander kan maken.

Mededeling 78

Bijdrage 79

Truus Dekker *Het examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (3)*

Werkbladen 80

Bijdrage 82

Jan Breeman *Het rekenwerk bij Correlatie en Regressie*
Met een handig werkschema en een rekenmachientje kunnen tientallen gegevens in een paar minuten verwerkt worden.

40 jaar geleden 86

Geassocieerd leren

Serie 'Wiskunde in vervolgopleidingen' 87

Prof. dr. H. Wolthuis, Drs. B. Kling
Sparen via een levensverzekering
Een wiskundige behandeling van sparen, geïllustreerd aan de hand van een verzekering met koopsombetaling.

Serie 'De zakrekenmachine' 92

Leen Bozuwa *Mijn nieuwste ZRM kan nog meer* 92
Over een programmeerbaar rekenmachientje dat nog geen drie tientjes kost!
Bij de serie over de ZRM 93

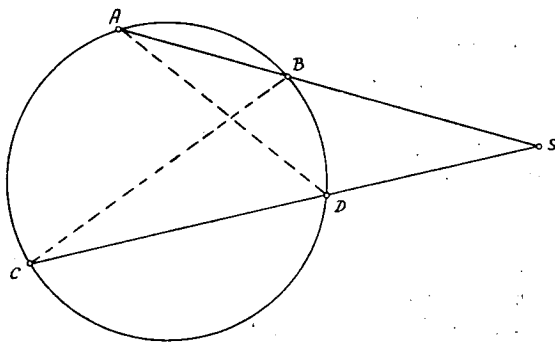
Recreatie 94

Verenigingsnieuws 95

Freek Mahieu *Van de bestuurstafl*

Mededeling 96

Kalender 96



Opa's meetkunde: Gegeven ..., Te bew. ..., Bewijs ...

► **De toekomst van de wiskunde**

G. Y. Nieuwland

Is er wat mis met de wiskunde?

De toekomst van de wiskunde was de titel van een forumdiscussie, gehouden op het onlangs te Nijmegen door het Wiskundig Genootschap georganiseerde 26e Nederlandse Mathematisch Congres, onder leiding van prof. dr. M. Keane van de Technische Universiteit Delft. De redactie van Euclides vroeg aan een van de deelnemers over dit thema wat op papier te brengen – ook al merkte zij (gelukkig) zelf al op dat door het forum geen oplossingen werden aangeboden.

De door de redactie gesignaleerde behoefte aan oplossingen geeft al aan dat het gesprekstema – dat in principe toch ook heel zonnig zou kunnen worden uitgewerkt – van meet af aan op een wat onheilspellende toon was ingezet. Is het dan nodig het reilen en zeilen van de wiskunde aan de orde te stellen met de suggestie dat de toekomst daarvan wel eens niet meer vanzelf zou spreken? Mijn niet-wiskundige kennissen plegen althans met wat verbazing op dat idee te reageren: is dan wiskunde niet voor zo goed als elke opleiding nodig, en dat vooral door al die computers van tegenwoordig? Over de toekomst van de leraar wiskunde wil men desnoods nog wel enige schaduwen zien vallen, maar dan als

onderdeel van de problematiek van het gehele onderwijs, niet in verband met zijn functioneren als wiskundige.

Deze discrepantie, tussen een in brede kring bestaande nogal vage maar zeker positieve verwachting ten aanzien van wiskunde en de door wiskundigen zelf als veel negatiever ondervonden werkelijkheid, werd in de discussie samengevat met:

de toekomst van de wiskunde is verzekerd, *maar niet noodzakelijk in Nederland.*

Nogmaals: het eerste deel van deze zin mag als gemeenplaats gelden, maar is de bijzin meer dan een retorisch grapje? Is er dan iets mis speciaal met de Nederlandse wiskunde?

Beeld en werkelijkheid

Gelukkig kan men nog altijd beginnen met een hele lijst positieve kenmerken van de wiskundebeoefening in ons land op te sommen. Het wiskundeonderwijs op scholen scoort in internationale vergelijkingen hoog, misschien toch niet in de laatste plaats door de didactische voorzetten die indertijd door het IOWO werden gegeven. Er zijn uitstekende lerarenopleidingen, negen universitaire faculteiten voor wiskunde en informatica die ook internationaal in onderwijs en onderzoek heel aardig mee kunnen komen, er is het Centrum voor Wiskunde en Informatica als *trait d'union* met de maatschappij. Kortom, aan infrastructuur ontbreekt het niet, en daarbinnen wordt ook met enthousiasme en niet zonder succes gewerkt.

Maar toch! Het landelijk aantal wiskunde studenten lijkt na jaren terugloop nu het dieptepunt gepasseerd te zijn, maar ligt (zowel bij het hbo als bij het wo) thans wel op een niveau dat voor de meeste instituten sub-minimaal moet worden genoemd. Zeker, men kan dan wijzen op de spectaculaire groei in aanpalende gebieden als informatica en econometrie, die toch ook als takken aan de boom van de wiskundige wetenschappen kunnen worden beschouwd en praktisch gesproken heel wat onderwijsinspanning voor wiskundigen met zich meebrengen. Maar evengoed gaat in de wiskundige wandelgangen het hardnekkig gerucht, dat tegen-

woordig de beste studenten niet meer kiezen voor wiskunde, maar de voorkeur geven aan theoretische natuurkunde en inderdaad, informatica en econometrie. Zulke geruchten zijn natuurlijk heel moeilijk waar te maken, maar passen maar al te goed in een beeld dat ook op heel andere wijze is ontstaan.

In 1983 kondigde de toenmalige minister Deetman de TVC-operatie af, de eerste van de grote universitaire bezuinigingsronden. Over de wiskunde werd hierbij kortweg opgemerkt: de wiskunde financiert de opbouw van de informatica. Nu is moeilijk tegen te spreken, dat daarvoor op dat moment redenen aanwezig waren: zo herinner ik mij nog dat er in die tijd bij een van de Technische Universiteiten 22 leerstoelen wiskunde naast 2 leerstoelen informatica bestonden. Maar met Deetmans boodschap kwam ook een ander signaal bij de bestuurders luid en duidelijk over: wiskunde is temidden van de andere wetenschappen geen zaak van eerste prioriteit meer.

Het gevolg is een beleid geweest, waarbij in de periode 1980-87 het totaal van de overheidsuitgaven voor (para-)universitair onderzoek voor de mathematische wetenschappen met 24% terugliep, gerekend bij constant prijspeil. Let wel: voor de mathematische wetenschappen, dat is wiskunde en informatica samen! Dit gegeven is ontleend aan een vergelijking uit het Strategisch Plan 1990-95 van de NWO-stichting voor natuurkunde FOM, waarin de overeenkomstige teruggang voor de natuurkunde in deze periode onaanvaardbaar hoog wordt genoemd – die bedroeg 19%, de op één na grootste daling.

Kennelijk stemmen de kringen, die er hier nu juist op aankomen – namelijk die van (toekomstige) studenten en van beleidvoerders – overeen in een nogal negatieve taxatie ten aanzien van de toekomstwaarde van de wiskunde. Bij een gelegenheid als het genoemde forum blijkt vooral dat de wiskundige gemeenschap met deze negatieve beeldvorming niet goed raad weet: is de wiskunde dan soms niet een van de belangrijkste kennisbronnen voor de wetenschap, technologie en economie van de moderne maatschappij? Intussen is wel duidelijk, dat een wat dieper gaande reflectie van de wiskundigen

op het maatschappelijk beeld van de wiskunde op zijn plaats zou kunnen zijn: het vaag-positieve beeld van de man in the street blijkt inderdaad moeiteloos samen te gaan met een geheel andere feitelijke gang van zaken.

De waarde van de wiskunde

Het zicht op de toekomstwaarde van de wiskunde wordt natuurlijk bepaald door het daarbij ingenomen standpunt. Wiskundigen zijn geneigd een *ideeel* standpunt in te nemen. Men benadrukt dan als absoluut beschouwde waarden als de geldigheid, de diepgang, de universaliteit, en vooral de schoonheid van de wiskunde. De meeste niet-wiskundigen kiezen een *utilitair* standpunt: dit drukt ongeveer uit hoeveel krediet de burger-belastingbetaler aan de wiskunde wil toekennen als middel ter beheersing van een onzekere toekomst. De wiskunde kan dan wijzen op haar waarde als structuurmodel, van naar willekeur op te voeren complexiteit, met veelzijdige toepasbaarheid, en in een lange geschiedenis gebleken nut.

In het huidige intellectueel-politieke klimaat in ons land zijn echter beide visies moeilijk aan de man te brengen. Het ideële standpunt is vooral een preek voor eigen parochie. Erger nog: de buitenwereld heeft meestal na zijn studiejaren met een hartelijke zucht van opluchting afscheid genomen van de wiskunde. Het argument, dat wiskunde toch zo mooi is, en dat daarom geld op tafel moet komen, komt dan niet zo sterk over. Maar ook het utilitaire standpunt – de tweede verdedigingslinie voor wiskundigen – blijkt in de praktijk zwak te staan: naar huidige opvattingen kost kwaliteit teveel en is de opbrengst van dit soort diepte-investeringen onvoldoende zichtbaar.

De studenten geven hun eigen samenvatting van deze bezwaren: er zijn gemakkelijker manieren om meer geld te verdienen dan met wiskunde – en wie van ons zal dat tegenspreken?

Het politiek klimaat als groeifactor

In de vorige paragraaf werd een nogal onweegbare

instantie ten tonele gevoerd, die dan toch ten aanzien van de wiskunde over een beslissende stem scheen te beschikken: het huidige intellectueel-politiek klimaat in ons land. Dit is het complex van uitgangspunten en veronderstellingen waarop de politieke discussie over de toekomst van Nederland wordt gebaseerd. Het woord klimaat drukt al uit, dat bij de hantering van deze uitgangspunten kennelijk geen verantwoording nodig of mogelijk wordt geacht: ze kunnen – zoals het weer – als een gegeven worden beschouwd. Zulke uitgangspunten worden regelmatig verwoord door invloedrijke opinieleiders als de oud-minister en oud-voorzitter van de Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid, Dr. Albeda.

Het volgende is een poging dit gezichtspunt in enkele sleutelwoorden samen te vatten.

– De toekomst van Nederland blijft, ook in het post-industriële tijdperk, in hoge mate bepaald door gegevenheden verband houdend met zijn geografische ligging. Tegen deze achtergrond dient (en: blijkt) ons land zich te concentreren op: handel, transport en distributie, zakelijke dienstverlening en (ook op volume-transport gebaseerde) intensieve landbouw en veeteelt.

Ik kan niet laten ook de karikatuur van dit standpunt aan te duiden, omdat belanghebbende groeperingen niet zelden de gelegenheid aangrijpen juist dat onverhuld in de media te etaleren: Nederland, de zelfbenoemde scharrelaars, kruiers en varkensmesters van Europa.

Welnu: het is duidelijk dat in zo'n land de wiskunde rustig naar de hobbysfeer kan worden verwezen – en ik meen dat het thans gangbare negatieve beeld van de wiskunde veel met die toekomstprojectie te maken heeft.

Politieke weerkunde voor beginners

Moeten wiskundigen, ter behoud van hun stiel, dan tussen de bedrijven door ook nog even een politieke revolutie tot stand brengen? Men moet er niet aan denken. Maar of zij dat nu willen of niet, weten-

schappers en onderwijsgeevenden stellen in hun werk voortdurend, uitdrukkelijk of onuitgesproken, een toekomstperspectief aan de orde. Dat van de wiskundigen zou wat duidelijker een ander beeld kunnen uitstralen dan dat van de snel te vangen gulden als hoogste wijsheid. En dat wel in de eerste plaats vanwege de verregaande onwaarschijnlijkheid van het succes op lange termijn van het hierboven geschetste, thans nog in brede kring aangehangen scenario.

Dit scenario berust – ik duidde het al aan – op een op het eerste gezicht ijzersterk gegeven: Nederland als het centrum van Europa. Dat is ons allen op school met de stok op de kaart aangewezen, en vervolgens werden in de geschiedenisles de onontkoombare gevolgen van dit geografisch feit voor handel en vervoer onthuld. Het merkwaardige feit doet zich nu voor, dat zo'n eeuwenlang onaantastbaar gegeven in enkele tientallen jaren blijkt te kunnen veranderen. Tekent men in 1990 op de kaart van Europa de nieuwe industriële centra in, de grote autowegen, het TGV-net en de Kanaaltunnel, dan is de conclusie duidelijk: economisch ligt Nederland helemaal niet (meer) in het centrum van Europa, maar aan de periferie. En dat betekent dat de eeuwenoude pijlers van onze nog gangbare toekomstprojectie: transport en handel, in de toekomst in toenemende mate structureel de wind zullen tegenkrijgen. Over de toekomst van een bedrijfstak, die economisch alleen maar kan bestaan zolang de kosten van het opruimen van de veroorzaakte derrie door derden worden betaald, spreek ik nu maar niet. Op de zakelijke dienstverlening als economische steen der wijzen heeft overigens de wiskundige Rinnooy Kan in zijn rubriek in NRC-Handelsblad enige maanden geleden afdoende commentaar geleverd.

We zullen dus de komende tientallen jaren goedschiks of kwaadschiks worden gedwongen tot een heroriëntatie ten aanzien van een traditioneel beeld, dat men belanghebbenden nog vrijwel elke dag kan horen uitdragen: Nederland, het verkeersplein van Europa, etc. Het wordt daarom hoog tijd, dat op de plaatsen waar dat zo te pas komt een beeld wordt geprojecteerd dat uitgaat van een heel andere premisse: in de toekomst zullen we in hoofdzaak alleen nog de kwaliteit van onze ideeën te

verkoop hebben. Want de bulkchemie verdwijnt naar de grondstoffenlanden, de goederen tussen München en Milaan worden heus wel door Duitsers en Italianen vervoerd, en het is in alle opzichten beter de boeren in de derde wereld hun kans in de varkensteelt te gunnen. Onze kansen in de toekomst liggen in de produktie van (al dan niet immateriële) goederen van klein volume en met een hoge intellectuele toegevoegde waarde. Bijvoorbeeld: informatiestromen zijn straks voor ons belangrijker dan goederenstromen.

Nieuw is zo'n perspectief voor Nederland natuurlijk niet. Het is zelfs voor een periode in de vijftiger en zestiger jaren uitgangspunt van een overheidsbeleid geweest, waaraan vandaag mede het succes van bedrijfstakken als tuinbouw, vliegtuigbouw en elektronische industrie te danken zijn. Niet toevallig drie voorbeelden van op research gebaseerde produktie, met een directe toegang van de producenten tot een zorgvuldig opgebouwd en wendbaar onderzoeksapparaat.

Ongetwijfeld zal later het sociaal-cultureel proces, waarbij in de jaren zeventig en tachtig dit perspectief werd vervangen door een totaal ander, gefundenes fressen voor historici worden. Er ontstond een nieuwe toekomstprojectie, waaronder met name onderzoek in de fundamentele disciplines wiskunde, informatica en natuurkunde als een luxe kon worden beschouwd waarop gemakkelijk kon worden bezuinigd. Zo liggen inmiddels de pro capita uitgaven voor de totale sector onderzoek en ontwikkeling in ons land lager dan die in vergelijkbaar ontwikkelde landen, ze liggen bijvoorbeeld 50% hoger in Zweden – een land dat zich altijd al realiseerde aan de periferie van Europa te liggen. Zo kan men bij de grote industrie thans geluiden opvangen als: we zijn nu bezig met de uitverkoop van de resultaten van 15 jaar onderzoek, over 5 jaar hebben we niets meer.

Kortom, het wordt de hoogste tijd dat de traditie van Nederland als land van dominees en handelaars, weer eens wordt afgewisseld door de daar van tijd tot tijd ook bestaande traditie van geleerden, kunstenaars en ondernemers. In zo'n perspectief ziet ook de toekomst van de wiskunde er ineens weer heel anders uit.

Werk aan de winkel

Kunnen wiskundigen aan zo'n culturele klimaatverandering echt wat bijdragen? Zoiets doet denken aan het idee van de haan, die als gevolg van zijn kraaien prompt de zon ziet opgaan. Maar de toekomst van die haan lijkt toch eerder verzekerd dan die van de wiskundige die zich maatschappelijk als lid van een esoterisch genootschap opstelt, en zich in alleen voor mede-ingewijden begrijpelijke geheimtaal tot de buitenwereld richt. Op die manier zijn we, natuurlijk niet alleen in Nederland, verzeild geraakt in het grootste probleem bij het maatschappelijk functioneren van de wiskunde: een ernstig gebrek aan zichtbaarheid. Er zijn daaraan drie aspecten waaraan – met een grote gezamenlijke inspanning – wel wat te doen zou zijn.

In de eerste plaats de zichtbaarheid bij het wiskundig onderzoek. Wiskundigen plegen weinig tijd te besteden om aan een breed publiek uit te leggen waarom nu wel hun vondsten zo boeiend, veelbetekend en voor de verdere ontwikkeling belangrijk zijn. Als excuus hoort men vaak, dat die resultaten zoveel abstracter zijn dan bijvoorbeeld die van natuurkundigen of astronomen – die zich inderdaad aan de p.r. rond hun vak merkbaar meer gelegen laten liggen. De hiervoor benodigde grote inspanning zou dan voor de wiskunde niet meer de moeite lonen. Bij nader inzien blijkt dat verschil in abstractieniveau best mee te vallen. Men moet in de publiciteit natuurlijk niet tegenover een goed verkoopbaar natuurkundig resultaat per se een uiterst technisch detail uit de algebraïsche meetkunde aan de man willen brengen – het is leerzaam hoe knap vooral astronomen in hun populaire verhalen technische details buiten beeld weten te houden.

Het echte verschil werd al eerder aangeduid door de wetenschapsjournalist, die constateerde dat in wetenschappelijke artikelen uit de natuurkunde of biologie op de eerste bladzijde meestal een voor hem begrijpelijke uitleg te vinden was waarom nu juist dit onderzoek zo nodig was, en bij een wiskundig artikel die moeite *nooit* werd genomen. Zoiets is een symptoom van het onvoldoende serieus nemen van de maatschappelijke functie van een vak, en dat kan dunkt mij veranderen.

Die zichtbaarheid zou ook meer aandacht kunnen krijgen in de schoolwiskunde. Hier moet ik me heel voorzichtig uitdrukken, bij gebrek aan elke ervaring in de harde schoolpraktijk. Maar bladerend in de schoolboeken van mijn kinderen viel me toch een belangrijk verschil tussen (alweer) de natuurkunde en de wiskunde op. Van de leraar natuurkunde wordt kennelijk verwacht, dat hij in zijn onderwijs althans een idee geeft van natuurkunde buiten de school – kwantummechanica, relativiteitstheorie, hoge-energiefysica. Inhoudelijk gaan die onderwerpen het bestek van het schoolniveau uiteraard ver te buiten, maar met een plaatje, een praatje en wat welsprekende handbewegingen wordt een beeld geschetst van de opwindende wereld die daarbuiten klaar ligt om ontdekt te worden! De leraar wiskunde dient – nog altijd gezien het hem ter beschikking gestelde materiaal – even beslist de vensters naar de wiskundewereld buiten de school hermetisch(!) gesloten te houden. Sterker nog, het wiskundig ethos verbiedt hem over zijn vak te spreken op dezelfde aanduidende manier die zijn natuurkundige collega wel is toegestaan: hij zou immers (anders dan de natuurkundige?) met zijn praatjes de kern van de zaak volledig missen. Ik denk dat ook dit zou kunnen veranderen, en dat de universitaire wiskunde hier een handreiking zou moeten doen. Misschien kunnen in de tussentijd de videofilms van Garfunkel (verkrijgbaar bij het Wiskundig Genootschap) met het fraaie cursusboek *For all practical purposes* dienst doen. De ‘zuivere’ wiskunde blijft hierin wat onderbelicht, maar je moet tenslotte ergens beginnen.

Het laatste aspect is misschien nog wel het belangrijkste: de zichtbaarheid van *het beroep van wiskundige*. Vooral dit probleem is gemakkelijker aan te duiden dan op te lossen. Ons land kent sinds 30 jaar opleidingen tot wiskundig ingenieur. Daarnaast zijn over de afgelopen 15 jaar de afgestudeerden in de wiskunde van de universiteiten in grote meerderheid niet meer terecht gekomen in de traditionele beroepsgebieden: de school en de universiteit, maar opgenomen in die ruime categorie: het bedrijfsleven. Dit alles heeft er nog niet toe geleid, dat het

beroep van wiskundige een duidelijke optie binnen het beroepenspectrum is geworden. Ik laat het hier nu maar bij de constatering. Aan de vraag waarom dat zo is, en of daaraan wat zou kunnen worden gedaan wil ik proberen nog een volgend artikel te wijden.

Over de auteur:

Dr. G. Y. Nieuwland is hoogleraar toegepaste wiskunde aan de Faculteit Wiskunde en Informatica van de Vrije Universiteit te Amsterdam. Hij was van 1986-90 lid van het bestuur van het Wiskundig Genootschap, de eerste twee jaar als voorzitter. Vanaf 1 september 1990 is hij voorzitter van het bestuur van de Stichting Mathematisch Centrum.



Mededeling

Wintersymposium

Het wintersymposium van het Wiskundig Genootschap heeft deze keer als thema: ‘(Ruimte) Meetkunde’. Het symposium wordt gehouden op zaterdag 5 januari 1991 in het Gymnasium Johan van Oldenbarnevelt, Groen van Prinstererlaan 33, 3818 JN Amersfoort.

Programma:

9.30-10.00 Ontvangst.

10.00-11.00 Prof. dr. J. v.d. Craats: Hoe teken je een kubus?

11.15-12.15 Prof. dr. N. G. de Bruijn: Vlakkervullingen van Escher en Penrose.

13.30-14.30 Drs. A. J. Th. Maassen: Lijnspiegelingen, antiparalleliteit, toepassing.

Voor de lunch dient men zich voor 15 december in te schrijven. Dit kan door overmaking van f15,- voor leden of f20,- voor niet-leden van het WG op gironummer 4157477 van S. Garst te Oude Tonge.

► **Twee stenen in de vijver**

Harm Jan Smid

In een tweetal artikelen heeft Anne van Streun onlangs zijn bezorgdheid geuit over een aantal aspecten van de vernieuwing van het wiskundeonderwijs in Nederland (Nieuwe Wiskrant jg. 9 nr. 4, en Euclides jg. 65 nr. 7). Op beide artikelen zijn reacties gevolgd: op het Nieuwe Wiskrant-artikel reacties van Martin Kindt en van Marja Meeder/George Schoemaker, op het Euclides-artikel een reactie van Hans van Lint, de voorzitter van de NVvW.

Ik juich het feit van die reacties toe. Wat meer discussie en levendigheid zou de vereniging geen kwaad doen. Tegelijkertijd stellen die reacties mij teleur (in het geval van Kindt en Meeder/Schoemaker), of maken mij bezorgd (in het geval van Van Lint). In ieder geval geven de reacties mij aanleiding tot een volgende reactie, waarvan dit stukje het resultaat is.

Eerst het artikel van Van Streun in de Nieuwe Wiskrant, en de reacties daarop.

De kern van Van Streuns artikel wordt hier gevormd door een aantal, als zakelijke constateringeng bedoelde observaties, en een oplossing voor de door hem signaleerde problemen.

Die constateringeng zijn:

– het huidige mavo D-programma biedt voor de analyse voor het havo B-programma een goede

basis, veel minder is dit het geval voor de ruimte-meetkunde,

– het huidige mavo D-programma biedt in het geheel geen voorbereiding voor het havo A-programma,

– het is een probleem hoe binnen het onderbouw-programma voorbereiding op beide programma's zoals die nu zijn voorgesteld, gerealiseerd moet worden,

– eigenlijk zou een belangrijk deel van wat nu in het havo A-programma wordt voorgesteld in het onderbouwprogramma een plaats moeten vinden,

– er is nog steeds geen concept-leerplan voor 12-16 jaar en – maar dat is natuurlijk meer Van Streuns persoonlijke opinie – de gang van zaken m.b.t. de ontwikkeling van dat leerplan is zorgwekkend.

Van Streun sluit vervolgens zijn artikel af met een aantal voorstellen.

In het genoemde Nieuwe Wiskrant-nummer volgt hierop een uiterst zuinige reactie van Martin Kindt. Hij begint maar liever geen polemiek, zo meldt hij, met in feite als argumentatie dat de lezer toch zo dom is om te denken dat de waarheid gelijk is aan de som gedeeld door twee. Een opvatting die een eigenaardig beeld geeft van Kindts opvattingeng over de lezers van de Nieuwe Wiskrant. Veel ernstiger is vervolgens dat Kindts reactie met een grote boog om waar het in Van Streuns artikel om gaat, heen loopt.

Martin Kindt gaat vrijwel uitsluitend in op een opmerking in het begin van Van Streuns artikel, waar hij zegt dat er al eerder op gewezen is dat Hawex A en Hewet A niet zo goed op elkaar aansluiten. Dat heeft te maken met de volgorde – top down – waarin de vernieuwing heeft plaats gevonden. 'Dwaas' noemt Van Streun die volgorde, en dat gaat Kindt te ver: we konden nou eenmaal niet anders, en hebben er toch nog iets heel aardigs van gemaakt. Ja, dat is ook zo, en wordt door Van Streun ook niet bestreden, maar waarom weidt Kindt dan zo gepikeerd uit over een oude koe die Van Streun zijdelings noemt en laat hij waar het om gaat liggen? Nog eens, jongen, en dan beter, ik weet dat je dat kan, zou ik Martin Kindt willen toeroepen, zo makkelijk moet je je er niet van af maken.

Meeder en Schoemaker gaan in ieder geval wel in op de hoofdzaak van Van Streuns artikel. Eigenlijk

zijn ze het grotendeels met hem eens: er moet snel een leerplan komen, en een groot deel van zijn voorstellen kunnen ze volgen. Toch ook in deze reactie weer zo'n aangebrand toontje, en de gedachte dat het bij een reactie zou horen dat men iemand anders artikelen als een schoolopstel zou moeten beoordelen: 'weinig lijn, kromme lijnen'. Ook hier de vreemde opvattingen die kennelijk in Utrecht over de lezers van hun eigen Wiskrant bestaan: snel in de war gebracht en zo maar ontmoedigd als ze een artikel lezen waarin een andere mening dan gebruikelijk wordt verkondigd. Het is verder gewoon flauw om er zo'n punt van te maken dat Van Streun zich baseert op het mavo D-programma. Hoe jammer dat misschien ook is, als er nu al sprake is van een 12-16-programma, dan is het wel dat mavo D-programma waarmee verreweg de meeste leerlingen nu, hetzij rechtstreeks, hetzij in verdunde of in geconcentreerde vorm te maken krijgen. Hoogst opmerkelijk vind ik het bericht dat bij de ontwikkeling van een programma voor de onderbouw 'onze aandacht vooral dient uit te gaan naar de lbo-leerlingen en de doorstroming naar het mbo.' Wie bepaalt opeens zo'n prioriteitsstelling? Opeens komt ook het onderwerp 'informatie en modellen' op de proppen. Voor dergelijke onderwerpen willen zij zich 'met alle betrokkenen sterk maken'. Wel, wie zij als betrokkenen zien, weet ik niet, maar degenen die mij de meest betrokkenen lijken (behalve de leerlingen), de docenten, weten nog van niets, laat staan dat zij zich al ergens 'voor sterk willen maken'.

Het artikel van Meeder en Schoemaker zou natuurlijk aanmerkelijk aan waarde hebben gewonnen als ze echt inhoudelijk op dat nieuwe onderbouwprogramma waren ingegaan. Daarvoor wordt echter verwezen naar de regionale bijeenkomsten in dit najaar, en een Wiskrant-special die daarvoor een 'belangrijke bron van informatie vooraf' is. Op zijn minst zou je dus verwachten dat in die special dat lang verwachte concept-programma gepubliceerd zou worden (zoiets hoort natuurlijk eigenlijk in Euclides te gebeuren), maar nee. Dat schijnt pas op die bijeenkomsten te gebeuren. Het programma bestaat wel, maar er rust nog een embargo op.

Kennelijk wordt het niet verantwoord geacht (ze denken maar gelijk dat de waarheid in het midden ligt, raken in verwarring of worden ontmoedigd) dat de leden zich vooraf een opinie vormen: pas onder begeleiding en onder toezicht mogen de jeugdige leraartjes van dit kennelijk hoogst gewaagde programma kennis nemen. Zou Van Hoorn (Euclides jg. 66 nr. 1) dan gelijk hebben met zijn vermoeden dat die bijeenkomsten niet alleen ter informatie, maar ook ter acceptatie zijn bedoeld?

Ach nee, denk je dan, daarmee zou een oude, eerbiedwaardige en serieuze beroepsvereniging als de NVvW toch nooit accoord gaan? Nu, wie dat dacht, weet na de reactie van Van Lint, eveneens in Euclides jg. 66 nr. 1, wel beter. In een verbazingwekkende reactie op het andere artikel van Van Streun (Euclides jg. 65 nr. 7), gaat hij op de toon van een opgewonden voetbalsupporter tegen Van Streun te keer.

In dat artikel spreekt Van Streun zijn bezorgdheid uit over de gang van zaken met betrekking tot de ontwikkeling van het nieuwe 12-16-programma. Hij memoreert de gang van zaken met betrekking tot de vaststelling van de eindtermen voor de basisvorming. Hij wijst op de zeer smalle basis waarop de experimenten berusten. Hij hekelt het gebrek aan informatie naar de docenten toe. Hij betreurt het dat de vereniging zich niet wat onafhankelijker van de professionele leerplanontwikkelaars opstelt. Allemaal zaken waarover men het meer of minder met Van Streun eens kan zijn, maar ongetwijfeld redelijke en verdedigbare opvattingen. In feite vertolkt Van Hoorn, de hoofdredacteur van Euclides, in jg. 66 nr. 1 min of meer gelijke opvattingen.

De reactie van Van Lint, toch niet minder dan de voorzitter van de NVvW, hierop is hoogst merkwaardig, om het zachtjes uit te drukken.

Ook hier uiteraard weer eerst de mededeling dat hij veel liever niet de discussie zou zijn aangegaan, maar daarna volgt zo'n ophemeling en verheerlijking van de prestaties van de Nederlandse wiskundeonderwijs-ontwikkelaars dat ik mij, zou ik tot hen behoren, de eerste weken niet meer op straat had durven vertonen. Gênant, dat is het enige woord ervoor. Wie zich zó opstelt, geeft iedere onafhankelijke positie bij voorbaat prijs.

Toch is er wel degelijk kritiek geweest, en er zijn 'veel' onderdelen tijdelijk in de ijskast gezet, aldus Van Lint. Voorbeelden van die kritiek geeft hij niet, en het tijdelijk in de ijskast zetten van een paar onderwerpen kan toch moeilijk als iets anders dan als heel nuttig werk in de marge worden beschouwd.

Wel komen we en passant nog even te weten dat wiskunde A nog in de kinderschoenen staat. Dat zouden mijn woorden niet zijn: wie zou een vak dat nog in de kinderschoenen staat tot eindexamenvak durven bombarderen en in hoge mate richtinggevend laten zijn voor de verdere ontwikkeling van het wiskundeonderwijs? De voorzitter van de NVvW kennelijk wel.

Maar laat ik mij beperken tot de hoofdzaak.

Die is de volgende. Binnen het Nederlandse onderwijsbestel zijn de direct betrokkenen: de docenten, en dan vooral via de beroepsverenigingen, in hoge mate bepalend voor de inhoud van programma's en examens. Van Streun wijst erop dat bijvoorbeeld bij het natuurkunde- en scheikundeonderwijs de leden van die verenigingen ook een belangrijke rol spelen bij de vaststelling van die programma's. In geen van de reacties wordt dat weersproken. Voor wat betreft het wiskundeonderwijs is die programma-ontwikkeling in vergaande mate in handen gegeven in wat nu de vakgroep OW & OC is. Binnen die groep heerst een zeer specifieke opvatting over wiskundeonderwijs. Het moge duidelijk zijn dat een dergelijke manier van inschakelen van professionals grote voordelen kan hebben, en die voordelen zijn ook gebleken. Toch zitten hier uiteraard ook risico's aan: gemakkelijk leidt zo'n constructie tot een situatie waarin de leden van de beroepsgroep het gevoel krijgen dat zij in feite buiten spel staan: 'daar kom je toch niet aan te pas'. Een verstandig bestuur zou er nu juist van alles aan moeten doen om zo'n situatie te voorkomen. Daarbij zijn een kritische houding en het betrachten van maximale openheid essentieel.

Twee voorbeelden. In de Wiskrant-special bekent Jan de Lange dat men binnen IOWO/OW & OC toch eigenlijk wel heel lang om de 'algebrij' heeft heen gedraaid en dat hier in feite, nu er beslissingen genomen moeten worden 'nog steeds grote problemen liggen'. (Als Van Streun dat zou zeggen is het natuurlijk een schande).

Zoiets had al in een veel eerder stadium gesignaleerd moeten worden, bediscussieerd moeten worden en het bestuur van de NVvW had zoiets niet moeten accepteren. Het bestuur had al evenmin moeten accepteren dat een concept-programma van zo groot belang als het programma 12-16 niet tijdig in het eigen officiële verenigingsblad *Euclides* gepubliceerd zou worden en had nooit de situatie mogen laten ontstaan dat het voor leden die niet naar die bijeenkomsten (kunnen) gaan onduidelijk is hoe zij van dat programma kunnen kennis nemen.

Wie de tirade van Van Lint leest begrijpt dat hij, en naar ik moet aannemen het hele bestuur, dit absoluut niet inziet. De volgende zin is illustratief: 'dat de docenten veel en veel te druk zijn om zich voldoende te kunnen inleven in nieuwe ideeën.' Daar kunnen Van Lints leden het mee doen. Op zijn best kunnen zij – als zij 'enigszins op de hoogte' zijn – een oordeel geven over de haalbaarheid.

Dat sommige ideeën die docenten misschien wel helemaal niet aanstaan is iets wat kennelijk onvoorstelbaar is. Dat de leerplanontwikkelaars zoiets wel eens denken, is verkeerd, maar begrijpelijk. Ook hen is niets menselijks vreemd. Dat zulke opvattingen openlijk door de voorzitter van de vereniging van wiskundeleraren zelf worden verkondigd is droevig.

► Nawoord van het bestuur

Het bestuur van de vereniging is warm voorstander van elke openhartige discussie die een positieve bijdrage levert aan de kwaliteit van het wiskundeonderwijs.

Respect voor elkaars mening en het veronderstellen van goede intenties bij de ander, moeten uitgangspunten bij een dergelijke discussie zijn.

Het bestuur vindt unaniem dat het artikel 'Twee stenen in een vijver' aan géén van deze uitgangspunten voldoet en betreurt daarom de plaatsing van dit artikel zeer.

Het bestuur van de NVvW

► Opa's meetkunde

Swier Garst

Juni. De vakantie staat voor de deur. Hawex ook, terwijl Hewet al weer een poosje binnen is. Hewet begint al een beetje volwassen te worden. Jammer dat zijn kinderziektes chronisch lijken te worden. Maar goed, Hawex staat voor de deur.

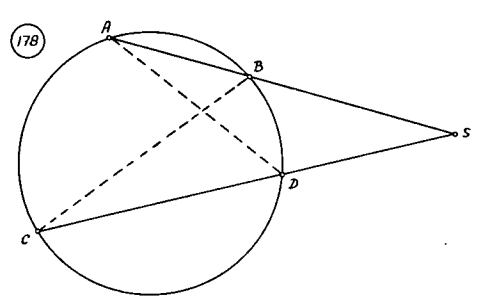
Hij heeft uiteindelijk wat minder kleren aan als misschien nodig in ons klimaat. Verder lijkt het of Hawex zich wat snel heeft aangekleed. De oefening blijkt toch belangrijker dan gedacht.

Achter Hawex staat een 12-16-jarige voor de deur te wachten. Hij lijkt eerder 12 dan 16 maar erg goed kan ik hem eigenlijk nog niet zien. Onder zijn arm heeft hij een stapeltje pakketjes. Belangstellend vraag ik ernaar. Dat is wiskunde. Oh. Door mijn verbaasde gezicht vallen de pakketjes op de grond. De 12-16-jarige raapt ze op. Let erop dat je ze in de goede volgorde opstapelt, zeg ik behulpzaam. Goede volgorde? Onbegrip. Het is uiteindelijk nog geen vakantie, dus ik begin uit te leggen.

Kijk, er is verschil tussen een hoop stenen en een stapel stenen. Als je roert in een hoop stenen dan houd je een hoop stenen en als je roert in een stapel stenen dan krijg je een hoop stenen. Het kan dus ook zonder pakketjes is de reactie. Ja zeg ik, vraag maar aan je vriendjes.

Ik neem toch aan dat een experiment dat moet vaststellen welk onderbouwprogramma het beste is niet alleen de ideeën van één bepaalde groep test? Is

er ook een proefschoon waar het vak wiskunde uit algebra en meetkunde bestaat? Waar bij algebra de leerlingen werken met vergelijkingen en merkwaardige producten? Waar bij meetkunde leerlingen precies leren werken, denken en bewijzen. Veel oefenen. Waar denkt u aan, hoor ik ineens in de verte. Het geduld van de 12-16-jarige is snel op. Die vriendjes die u noemt die ken ik niet. Maar mijn opa, die is nog niet zo oud hoor, die heeft wiskunde in boeken. Ja, dat is wat anders. Daarin staan sommen die ik niet eens begrijp. En ik heb een negen voor textiele werkvormen hoor. Mijn opa zegt dat hij niets meer weet van wat er in die boeken staat, maar dat hij veel heeft geleerd van de manier van denken. Mijn opa zegt dat hij daar nog iedere dag veel plezier van heeft.

178


Gegeven: Cirkel (M, r), AB en CD snijden elkaar in S. (fig. 178)

Te bew.: $SA \cdot SB = SC \cdot SD$.

Bewijs: Trek AD en BC.

$\angle A = \frac{1}{2} \text{ bg DB (st. 73)}$
 $\angle C = \frac{1}{2} \text{ bg BD (st. 73)}$

}

$\rightarrow \angle A = \angle C$
 $\angle S = \angle S$

$\rightarrow \triangle ADS \sim \triangle CBS,$
 geval h.h.

Hieruit volgt, dat $SA : SC = SD : SB$

H.E. $\rightarrow SA \cdot SB = SC \cdot SD$.

Opa's meetkunde

Jullie wiskunde is wel leuk, maar de vraag of wiskunde leuk moet zijn is toch zo iets als: is wiskunde groen? Trouwens, toen ik laatst bij mijn opa was met mijn huiswerk kon hij mij niet helpen. Hij kon zijn schaar niet vinden en zijn plakband was op. Nu had ik genoeg van het gesprek, dacht nog even aan het laatste wiskunde B examen en verlangde naar het volgende schooljaar.

► Naar China?

Ger Limpens

In het mei-nummer van dit jaar trof ik een publikatie aan over de 30e Internationale Wiskunde Olympiade. Dat las ik en er bleef iets bij me hangen.

In het daaropvolgende juni-nummer een interessant artikel van de hand van Henk Bos over het verband tussen wiskunde en de samenleving. In dit artikel wordt de wiskundedocent F. ten tonele gevoerd. Deze docent legt bij zijn verschijnen de nadruk op de ethica. Tot twee keer toe vraagt deze persoon uitdrukkelijk naar de verantwoordelijkheid van de wiskundige voor zijn of haar activiteiten. De gast, die in het artikel van Bos de antwoorden op diverse andere vragen geeft, blijft hierop het antwoord schuldig. Met een, volgens Bos, zwak excuus: geen tijd.

Na lezing schoot me het verhaal over de Wiskunde Olympiade weer te binnen. Met name de uitnodiging voor de 31e versie daarvan, die dit jaar, 1990, in China plaatsvond. Ook Nederland deed mee.

China, denk ik dan, China? Nog geen $1\frac{1}{2}$ jaar geleden vonden daar de gebeurtenissen plaats die de wereld schokten. Weerloze studenten die overreden, vermoord werden in opdracht van in hun denkbeelden vastgeroeste heersers. Tot op dit moment zwerven er vele Chinezen over de hele wereld, niet in staat zonder gevaar terug te gaan naar hun vaderland. De heersende klasse is nog altijd dezelfde. Een moord blijft een moord. En als je duizenden mensen om zeep kunt helpen, dan kan er altijd nog wel eentje bij.

Nee, denk ik dan. Dat kan er bij mij niet in. Naar zo'n land hoor je niet te gaan. Zeker niet als je weet dat de aan de moordpartij ontsnapte studenten die nu in het buitenland verkeren nog steeds oproepen tot een internationale boycot. Want internationale erkenning dien je dit soort machthebbers niet te verlenen. Ook niet als het „slechts” gaat om zoiets onschuldigs als een Wiskunde Olympiade. Dat is, in mijn ogen, ons aller verantwoordelijkheid als wiskundigen. En volgens mij hebben we nog steeds de tijd ons bewust te worden van die verantwoordelijkheid.

Graag verneem ik hoe anderen in den lande hierover denken. Mijn adres is: Zebraspoor 595, 3605 HJ Maarssen.

► Interpretatie van notaties

F. Smid

Een vaktijdschrift als Euclides bevat vaak artikelen die ook voor een breder publiek aantrekkelijk zijn. Om deze reden hebben we het blad in de leesmap van onze wi-na-sch-sectie opgenomen. Soms komen we echter een artikel tegen waarin notaties staan die vragen oproepen.

Een voorbeeld hiervan is het artikel: 'De zakrekenmachine' van Frans Bouman in het febr./mrt.-nummer van Euclides, jaargang 65.

Met de essentie van het artikel heb ik geen moeite, wel met een bepaalde notatie. *In dit artikel wordt de schuine breukstreep (verkeerd) gebruikt.* Dat dit tot misverstanden leidt blijkt al, als de aangehaalde oplossing van drs. A. den Toom vergeleken wordt met de uitwerking van Bouman zelf. Den Toom schrijft correct: $\sin 2 \cdot \frac{5}{6}\pi$, resp. $\cos^2 \frac{5}{6}\pi$.

Bouman schrijft hiervoor: $\sin 2 \cdot 5/6\pi$, resp. $\cos^2 5/6\pi$.

En dat, terwijl wij als natuur- en scheikundeleraren onze leerlingen steeds voorhouden:

- a Gebruik NOOIT een schuine breukstreep.
- b Als je er één tegenkomt betekent dat, dat alles wat na de breukstreep komt in de noemer staat.
- c In twijfelgevallen haakjes gebruiken.

Als een blad als Euclides iets als het bovenstaande opneemt, vraag ik me af of de redactie zich er wel van bewust is dat het blad een soort voorbeeldfunctie heeft en ook wel eens als referentie gebruikt wordt. In veel gevallen zullen 'moderne' printers de oorzaak zijn van dit soort notaties. Ook een breukstreep op een verkeerde hoogte is daar vaak aan te wijten. Dat neemt echter niet weg dat veel misverstanden tussen collega's van verschillende vakken voorkomen kunnen worden door een nauwkeurige notatie aan te houden.

Over de auteur

F. Smid is leraar natuur- en scheikunde aan het MTO-MLO te Emmen.

► **Pythagorische drietallen en matrices**

J. M. Buhrman

Dit artikel sluit aan op twee vragen die in twee verschillende artikelen in Euclides 7 van april 1989 worden gesteld, n.l.

- Hoe vind je een Pythagorisch drietal?
- Waarvoor kan je een matrix gebruiken?

In het onderstaande verhaal blijkt dat een matrix van het ene Pythagorische drietal een ander kan maken.

Uitgaande van een Pythagorisch drietal, bijvoorbeeld (3, 4, 5), geschreven in de vorm van een vector, kan met behulp van vermenigvuldiging met de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

het volgende Pythagorische drietal worden verkregen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 29 \end{pmatrix}$$

Dat dit voor elk Pythagorisch drietal geldt wordt eenvoudig bewezen. Als (a, b, c) een Pythagorisch drietal is, dan geeft de vermenigvuldiging

► **Mededeling**

Cursus Chaos & en Fractals

Het PAON (Orgaan voor Postacademisch Onderwijs in de Natuurwetenschappen) organiseert een driedaagse cursus met als thema: 'Chaos & Fractals, een computer-meetkundige benadering van niet-lineaire dynamica'. De cursus is bedoeld voor belangstellenden met een academisch of hbo-niveau die qua wiskundige ontwikkeling ongeveer op – of iets boven – het vwo-niveau staan.

Data en plaats: van 28 november (10.00 u.) tot en met 30 november (17.00 u.) 1990 in het Academieggebouw van de Rijksuniversiteit Groningen.

Curusgeld: f1975,- incl. literatuur, simulatiepakket, lunches en diners. Voor tweedefase studenten en uitkeringsgerechtigden is een speciale regeling mogelijk.

Inlichtingen en inschrijving: PAON, Schipholweg 94, 2316XD Leiden, tel.: 071 - 21 41 55.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b + 2c \\ a + 2b + 2c \\ 2a + 2b + 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

Het nieuwe drietal (de nieuwe vector) heeft drie eigenschappen:

- I Als a, b en c groter zijn dan 0, dan zijn a', b' en c' groter dan a, b en c .
- II Het verschil tussen de eerste twee componenten is ongewijzigd.
- III Als $a^2 + b^2 = c^2$, dan geldt ook $(a')^2 + (b')^2 = (c')^2$

Eigenschap I is triviaal en ook II is wel zeer direct te bewijzen:

$$(a + 2b + 2c) - (2a + b + 2c) = b - a$$

Het bewijs van de derde eigenschap vereist iets meer rekenwerk.

$$\begin{aligned} (2a + b + 2c)^2 + (a + 2b + 2c)^2 &= \\ = 5a^2 + 5b^2 + 8c^2 + 8ab + 12ac + 12bc \end{aligned}$$

Tellen we hier nu $c^2 - a^2 - b^2$ (hetgeen 0 is) bij op, dan verkrijgen we

$$\begin{aligned} 4a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 8ab + 12ac + 12bc &= \\ = (2a + 2b + 3c)^2 \end{aligned}$$

Hiermee is het bewijs geleverd.

Nog een voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 55 \\ 73 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 55 \\ 73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 297 \\ 304 \\ 425 \end{pmatrix}$$

Hiermee zijn dus twee drietallen (48, 55, 73) en (297, 304, 425) bepaald in een rij drietallen waarvan de eerste twee coördinaten een verschil van 7 hebben. Men kan bewijzen dat we op deze manier elk willekeurig Pythagorisch drietal kunnen krijgen, uitgaande van een 'kleinste' drietal met hetzelfde verschil tussen de twee rechthoekszijden. We zullen hieronder zelfs zien dat we met behulp van deze matrixvermenigvuldiging al dan niet in combinatie met een eenvoudige extra bewerking uit (3, 4, 5) elk Pythagorisch drietal kunnen afleiden.

De eigenschap $a^2 + b^2 = c^2$ geldt ook voor negatieve getallen. Als (a, b, c) een Pythagorisch drietal is, dan is $(-a, b, c)$ ook Pythagorisch. De meetkundige lol lijkt er bij zo'n drietal wel af, maar we passen vermenigvuldiging met de matrix nu toe op $(-3, 4, 5)$ en $(-4, 3, 5)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

En zie, daar verschijnen de twee eerste driehoeken van de ketens van driehoeken met een verschil van 7 tussen de rechthoekszijden. Als we met bijvoorbeeld (5, 12, 13) hetzelfde doen als zojuist met (3, 4, 5) krijgen we $(-5, 12, 13)$ en $(-12, 5, 13)$ en hieruit kunnen we (de twee enige) ketens van driehoeken bouwen met een verschil van 17 tussen de rechthoekszijden.

Voor het maken van een Pythagorische driehoek gebruiken we dus (een combinatie van) de bewerkingen:

- vermenigvuldigen met $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- $(a, b, c) \rightarrow (-a, b, c)$
- $(a, b, c) \rightarrow (-b, a, c)$

De laatste twee zijn ook vermenigvuldigingen met matrices, n.l. met

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Men kan bewijzen dat men, uitgaande van (3, 4, 5), elke Pythagorische driehoek kan krijgen door een aaneenschakeling van deze vermenigvuldigingen.

Dat de bewerking

$$(a, b, c) \rightarrow (-b, -a, c)$$

geen zin heeft, blijkt in het volgende voorbeeld na

driemaal vermenigvuldigen met M:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Zoals elke niet-singuliere matrix heeft ook de bovenstaande een inverse, en wel

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Door een drietal met deze inverse te vermenigvuldigen wordt de rij Pythagorische drietallen met gelijk verschil tussen de eerste twee componenten in omgekeerde richting doorlopen. Een voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Hier zien we hoe van een Pythagorisch drietal met behulp van de inverse matrix een drietal met kleinere coördinaten wordt gemaakt. Het verschil tussen 7 en 24 is gelijk aan het verschil tussen -12 en 5. Een rij van drietallen met een ander verschil verkrijgt men, zoals we al zagen, door een van de twee kleinste coördinaten van een minteken te voorzien.

Het bijgaande BASIC-programma is ontdaan van verdere franje en geeft met weinig berekeningen Pythagorische drietallen. Het programma biedt de keus tussen

- rechtstreekse vermenigvuldiging met de matrix
- of combinatie daarvan met tekenwisseling van een rechthoekszijde.

```

10 INPUT "Geef a, b en c: ", A, B, C
20 IF A * A + B * B - C * C = 0 THEN 100
30 PRINT "Geen Pythagorisch drietal."
40 PRINT "Probeer opnieuw.": GOTO 10
100 PRINT "Kies voortbrengingsmethode:"
110 PRINT "-1: een stap terug"
120 PRINT "0: stoppen"
130 PRINT "1: a := -a, daarna maal M"
140 PRINT "2: a := -b, b := a, daarna maal M"
150 PRINT "3: direct maal M"
160 INPUT "Geef nummer van je keuze: ", K
170 PRINT "Het volgende drietal is:"
200 IF K = -1 THEN 310
210 IF K = 0 THEN 400
220 IF K = 1 THEN A = -A
230 IF K = 2 THEN H = A
240 IF K = 2 THEN A = -B
250 IF K = 2 THEN B = H
260 P = 2 * A + B + 2 * C
270 Q = A + 2 * B + 2 * C
280 R = 2 * A + 2 * B + 3 * C
290 PRINT P; Q; R: PRINT " "
300 A = P: B = Q: C = R: GOTO 100
310 P = 2 * A + B - 2 * C
320 Q = A + 2 * B - 2 * C
330 R = -2 * A - 2 * B + 3 * C
340 PRINT P; Q; R: PRINT " "
350 A = P: B = Q: C = R: GOTO 100
400 END

```

Mededeling

Rectificatie

In Euclides 66-1 wordt op bladzijde 22 de stelling van Stewart ten tonele gevoerd. Hierin is helaas een letter weggevalen. Voor de volledigheid volgt hierbij de juiste formule:

$$c \cdot CD^2 = p \cdot a^2 + q \cdot b^2 - p \cdot q \cdot c$$

► Het examen Ibo/mavo C/D 1990, experimenteel (3)

Truus Dekker

Vertrouwde onderwerpen op een andere manier gevraagd, daar gaat het deze keer over. Het onderwerp afbeeldingen is altijd een belangrijk examenonderdeel geweest dat vaak via meerkeuzevragen werd gevraagd. In dit experimentele examen moesten de leerlingen ook opschrijven waaróm de afbeelding al of niet kan worden uitgevoerd. Leerlingen vinden het over het algemeen heel lastig om een antwoord goed te verwoorden. Maar het is wel een belangrijke vaardigheid waar je in je verdere leven veel plezier van kunt hebben. Een meerkeuzevraag goed kunnen beantwoorden is een vaardigheid waar je voor je examen veel nut van hebt, maar die je later niet veel zult gebruiken. Ook goed formuleren moet je leren; essentieel daarbij is dat het door de leerlingen gemaakte werk besproken wordt en verschillende formuleringen vergeleken worden. Het nakijken van dit werk is tijdrovender, een redenering beoordelen is meer werk dan bijvoorbeeld controleren of een tekening goed is uitgevoerd. Op zich is dat geen reden om van deze manier van vragen af te zien, we leiden leerlingen immers niet uitsluitend op om het examen te halen?

De opgaven 7 t/m 10, zie de Werkbladen op blz. 80 en 81, waren voor C- en D-niveau gelijk. De opgaven 26 en 27 werden alleen bij het C-examen ge-

vraagd. Het gaat bij deze laatste twee vragen om simpele kennisvragen: weten wat een zwaartelijn is en dat deze de driehoek in twee stukken van gelijke oppervlakte verdeelt.

Leerlingen die vraag 26 fout beantwoordden tekenden allemaal een hoogtelijn in plaats van een zwaartelijn.

Roel heeft bij opgave 27 kennelijk de omtrek en de oppervlakte verwisseld: *De driehoeken zijn ongeveer even groot, de ene heeft een lange zijde en de andere ongeveer drie gelijke zijden.*

Maar verder gaven deze twee opdrachten geen problemen.

Opgave 7 werd redelijk goed gemaakt.

Misschien heeft Marjan wel goed begrepen waar het om gaat, maar haar formulering is te gebrekkig om er punten voor te kunnen toekennen. Ze schrijft: *Nee, ze liggen niet op dezelfde hoogte met de grondlijn dus kun je ze ook niet draaien en ze zijn niet draaisymmetrisch.*

En Henk geeft zowel ja als nee als antwoord: *Ja, $180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$. Nee, de ene $\triangle$ ligt hoger dan de andere.*

Andrea geeft een plastische beschrijving bij een tekening met het juiste draaipunt en 180° gedraaid: *Ja, als je met de passer de rondjes draait komt het ene driehoek precies zo te liggen als op de tekening.*

Dat de twee driehoeken elkaar door schuiven niet kunnen bedekken vinden de meeste leerlingen ook: *Nee, je moet eerst draaien voordat ze elkaar kunnen bedekken.*

Of een soortgelijke redenering als: *Nee, want als je de ene driehoek naar de andere schuift komen ze op de kop op elkaar.*

Dat er meer dan één spiegellijn kan zijn zagen maar heel weinig leerlingen.

En vooral de leerlingen die C-niveau examen deden hadden problemen met opgave 10.

De volgende motivatie kwam heel vaak voor: *Nee, want als je hem vermenigvuldigt wordt hij altijd groter of kleiner, deze twee zijn precies even groot.* Dit betekent dat het deze leerlingen (en ongetwijfeld veel andere!) niet duidelijk is wat vermenigvuldigen met 1 of -1 betekent. Was deze vraag als meerkeuzevraag gesteld, dan zou je alleen geweten hebben dat de vraag fout werd beantwoord.

► **Driehoeken**

De opgaven 7 t/m 10 horen bij elkaar. Maak deze opgaven op de bijlage.
Het gaat steeds over twee driehoeken, die elkaar precies kunnen bedekken.

- 7 Kan dat door draaien? Als het antwoord ja is, teken dan het draaipunt en schrijf op hoeveel graden je draait. Als het nee is, leg dan uit waaróm het niet kan.
- 8 Kunnen die twee driehoeken door schuiven elkaar bedekken? Begin weer je antwoord met ja of nee en leg uit hoe het moet of waarom het niet kan.
- 9 Kunnen ze elkaar bedekken door lijnspiegelen? Als het ja is, teken dan de spiegellijn of -lijnen. Als het nee is, leg dan uit waaróm het niet kan.
- 10 Kan het met vermenigvuldigen? Als het kan, teken dan het centrum en schrijf op met welk getal er vermenigvuldigd moet worden. Als je vindt dat het niet kan, leg dan uit waaróm het niet kan.

Alleen C-niveau:

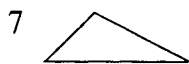
Opgave 26 en 27 horen bij elkaar.

- ②6 Trek vanuit hoekpunt C de zwaartelijn in de driehoek. Zie de bijlage.
- 27 De lijn die je getekend hebt, verdeelt de driehoek in twee stukken. Hoe verhouden de oppervlakten van die twee stukken zich?

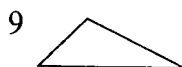
Uit: experimenteel examen Ibo/mavo C/D 1990.

● Werkblad ●

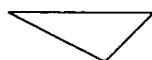
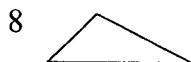
► Bijlage bij 'Driehoeken'



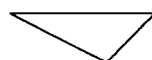
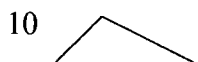
antwoord: _____



antwoord: _____

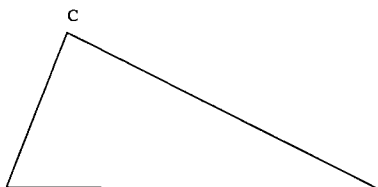


antwoord: _____



antwoord: _____

26



► Het rekenwerk bij Correlatie en Regressie

Jan Breeman

In het examen vwo Wiskunde-A 1992 zullen voor het eerst vragen gesteld (kunnen) worden over het keuzeonderwerp Correlatie en Regressie. Voor behandeling in de les hebben verschillende auteurs-groepen een boekje samengesteld. De manier waarop de *kwalitatieve* aspecten in deze boekjes aan de orde komen, acht ik zeer geslaagd. Minder gelukkig ben ik met de behandeling van de volgende *kwantitatieve* zaken:

- het berekenen van de correlatiecoëfficiënt;
- het opstellen van een vergelijking van een regressielijn.

Vanzelfsprekend schakelen we de computer in als het aantal paren (x_i, y_i) groot is. Betreft het een aantal in de orde van 20 tot 30 stuks, dan zouden de berekeningen met een handig werkschema door de leerlingen met een rekenmachine binnen enkele minuten kunnen worden uitgevoerd. Zo'n handig werkschema kan ik helaas niet in boekjes vinden. Vaak moeten hulptabellen worden opgesteld alsof de rekenmachine nog moet worden uitgevonden. Het wordt dan zo bewerkelijk en tijdrovend dat men zich bij het opstellen van schoolonderzoeken en examens moet beperken tot situaties van zo'n 6 tot 8 paren (x_i, y_i) . Zo weinig in elk geval dat de statistische waarde maar zeer beperkt is.

Kan het anders? Ja.

Hieronder staat een werkschema waarmee de mogelijkheden van de rekenmachine worden uitgebuit. Om typografische (en didactische) redenen gebruik ik de volgende notaties:

- het gemiddelde van de x -waarden: $m(x)$;
- de bijbehorende standaarddeviatie: $s(x)$.

Werkschema

1. Bereken $m(x)$ en $s(x)$.¹
2. Bereken $m(y)$ en $s(y)$.¹
3. Bereken $m(x \cdot y)$.²
4. Bereken $cov(x, y) = m(x \cdot y) - m(x) \cdot m(y)$.
5. Bereken $r = \frac{cov(x, y)}{s(x) \cdot s(y)}$
5. Bereken regr. coëff (y op x) = $\frac{cov(x, y)}{\{s(x)\}^2}$
7. Stel de verg. van de regressie lijn (y op x) op:
 $y - m(y) = \text{regr. coëff.} (x - m(x))$

¹ Het is raadzaam deze waarden *niet* te vroeg af te ronden; adviseer de leerlingen deze getallen 'ruim' te noteren.

² Dit kan *direct* met de rekenmachine:

eerst x_i , dan $\boxed{\times}$, dan y_i , dan $\boxed{=}$, en dan pas op $\boxed{M+}$; men

kan naast de kolommen x_i en y_i een kolom maken voor $x_i y_i$ en daar de produkten laten opschrijven, maar het hoeft niet.

Probeer het maar eens uit:

Tabel 1

i	x_i	y_i	$x_i y_i$
1	26,7	20,3	
2	14,0	4,8	
3	18,0	9,0	
4	10,5	9,0	
5	26,1	10,7	
6	21,5	17,4	
7	7,0	8,2	
8	26,0	7,9	
9	13,9	3,5	
10	19,3	8,7	
11	17,5	4,3	

Vervolg tabel 1

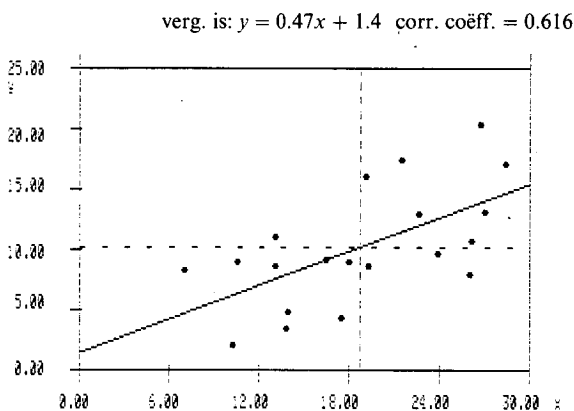
i	x_i	y_i	$x_i y_i$
12	13,1	8,7	
13	16,5	9,1	
14	28,4	17,1	
15	27,0	13,1	
16	10,2	2,1	
17	13,1	11,0	
18	19,1	16,0	
19	22,6	12,9	
20	23,9	9,7	

Controleer:

1. $m(x) = 18,72$ $s(x) = 6,2315006$
2. $m(y) = 10,175$ $s(y) = 4,7131598$
3. $m(x \cdot y) = 208,582$
4. $cov(x, y) = 18,106$
5. $r = 0,6164781 \approx 0,62$
6. regr. coëff. (y op x) = $0,4662697 \approx 0,47$
7. verg: $y - 10,2 \approx 0,47(x - 18,7)$

Het een en ander kan gecontroleerd worden met de figuren 1 en 2. Hierin worden de resultaten die we met de rekenmachine *snel* hebben kunnen vinden, bevestigd.

In figuur 1 treffen we een computerafdruk van de originele puntenwolk met daarin de regressielijn (y op x).



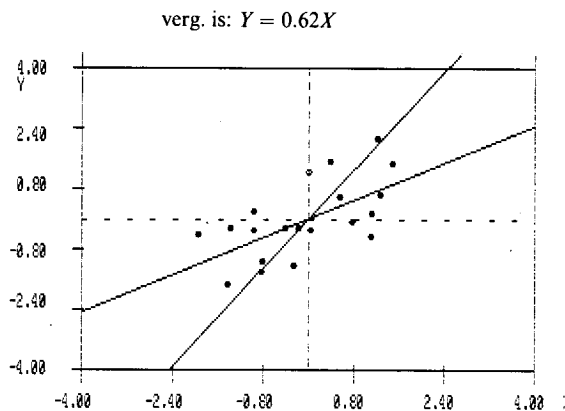
Figuur 1

In figuur 2 zien we de puntenwolk van de gestandaardiseerde scores (X_i, Y_i).

Hierbij geldt:

$$X_i = \frac{x_i - m(x)}{s(x)}$$

De beide regressielijnen zijn aangegeven. De vergelijkingen zijn $Y \approx 0,62 \cdot X$ en $X \approx 0,62 \cdot Y$. Dat ze elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $Y = X$ is heel mooi te zien.



Figuur 2

In tabel 2 is met behulp van de computer het lijstje (X_i, Y_i) opgesteld. Duidelijk komt daaruit naar voren welke paren een positieve en welke paren een negatieve bijdrage tot de correlatie hebben geleverd.

Tabel 2

i	X_i	Y_i
1	1.28	2.15
2	-0.76	-1.14
3	-0.12	-0.25
4	-1.32	-0.25
5	1.18	0.11
6	0.45	1.53
7	-1.88	-0.42
8	1.17	-0.48
9	-0.77	-1.42
10	0.09	-0.31
11	-0.20	-1.25
12	-0.90	-0.31
13	-0.36	-0.23
14	1.55	1.47

Vervolg tabel 2

i	X_i	Y_i
15	1.33	0.62
16	-1.37	-1.71
17	-0.90	0.17
18	0.06	1.24
19	0.62	0.58
20	0.83	-0.10

Het werken met de gestandaardiseerde scores maakt het afleiden van de formules en de verantwoording van het werkschema verrassend eenvoudig, al zal ik het nooit terugvragen op een repetitie of schoolonderzoek. De verantwoording komt straks.

De standaarddeviatie

Bij de introductie van de standaarddeviatie met de formule

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - m(x))^2}{n}}$$

zal iedereen wel in de klas een voorbeeld uitwerken zonder de statistische functies van de rekenmachine te gebruiken. Daarna wordt het berekenen van $s(x)$ met deze formule als hoogst vervelend ervaren en gebruikt men verder de statistische functies van de rekenmachine. Doe ik ook, maar toch blijf ik nog wel even stilstaan bij de formule en laat zien dat $s(x)$ ook gevonden kan worden met

$$s(x) = \sqrt{m(x^2) - \{m(x)\}^2}$$

Dit is ook de formule die 'ingebakken' zit in de rekenmachine!

Om er even mee te oefenen, geef ik een opdracht van de vorm:

30 waarnemingen met $m(x) = 6,3$ en $s(x) = 1,4$; helaas is per ongeluk in plaats van 6,9 de waarde 9,6 ingetoetst.

Hoe groot zijn de werkelijke $m(x)$ en $s(x)$?

(antwoord: $m(x) = 6,21$ en $s(x) \approx 1,265$; het is interessant om deze uitkomsten te vergelijken met de oorspronkelijke waarden en er over te praten in de klas).

Zoals bekend is er een grote overeenkomst tussen $m(x)$ en $s(x)$ bij een frequentieverdeling en de verwachtingswaarde $E(X)$ en $SD(X)$ bij de kansverdeling van een stochast. Ook daar is het goed om naast de formule

$$SD(X) = \sqrt{\sum P(X = x_i) \cdot (x_i - E(X))^2}$$

de beschikking te hebben over de veel handigere formule

$$SD(X) = \sqrt{E(X^2) - \{E(X)\}^2}$$

Controleer dat maar bij het examenvraagstuk 1989, 2e tijdvak, opgave 3 (trouwende zoons):

x	$P(X = x)$
0	0,3172
1	0,3643
2	0,2093
3	0,0801
4	0,0234
5	0,0048
6	0,0009

Het gebruik van de formule waarmee $SD(X)$ gedefinieerd is, wordt vast een ramp.

Nog handiger is natuurlijk net doen of je met een frequentieverdeling bezig bent met in totaal 10000 stuks en via de statistische functies van je rekenmachine de standaarddeviatie op te vragen!

(antwoord: $E(X) = 1,1462$ en $SD(X) \approx 1,0656$).

Het standaardiseren

De al eerder genoemde transformatie

$$X_i = \frac{x_i - m(x)}{s(x)}$$

is bij de leerlingen bekend en zij dienen te weten dat $m(X) = 0$ en $s(X) = 1$.

Voor de verantwoording van het werkschema bij correlatie is nog nodig de ontdekking dat uit

$$s(X) = \sqrt{m(X^2) - \{m(X)\}^2} = 1$$

volgt $m(X^2) = 1$ en daarmee $\Sigma(X_i)^2 = n$.

De verantwoording

Gegeven: n paren (x_i, y_i)

Gevraagd: corr. coëff.

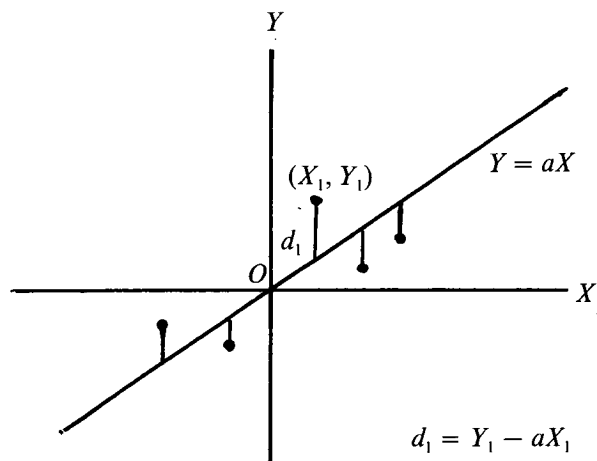
Wat is de correlatiecoëfficiënt eigenlijk? Een getal dat een maat is voor een eventuele (lineaire) samenhang tussen x_i en y_i , die *niet verandert* bij (lineaire) schaaltransformaties, zoals bv. de omzetting van °Fahrenheit naar °Celsius.

Wat is dus een logische stap?

Ga de samenhang bestuderen bij de gestandaardiseerde scores. Dat levert n paren (X_i, Y_i) .

Dan hebben we een kapstok nodig.

De definitie van de regressielijn (Y op X). Dat is die lijn door $(0, 0)$ waarbij de som van de kwadraten van de afstanden, gemeten in de Y -richting, minimaal is.



Figuur 3

Stel deze lijn heeft vergelijking $Y = a \cdot X$.

We zoeken dus die waarde van a waarvoor de functie $f(a) = \Sigma(Y_i - a \cdot X_i)^2$ minimaal is.

Uitwerken levert op:

$$f(a) = \Sigma Y_i^2 - 2a \cdot \Sigma X_i Y_i + a^2 \cdot \Sigma X_i^2$$

En vereenvoudigen (zie eerdere ontdekking):

$$f(a) = n - 2a \cdot \Sigma X_i Y_i + a^2 \cdot n$$

Deze kwadratische functie heeft inderdaad een minimum en wel voor de keuze

$$a = \frac{\Sigma X_i Y_i}{n}$$

De hier gevonden richtingscoëfficiënt noemen we de correlatiecoëfficiënt (r).

Merk op:

1. de regressielijn (X op Y) heeft tot vergelijking $X = rY$ (op grond van analogie).

2. als er een perfect lineair verband is tussen x_i en y_i dan is $r = +1$ of $r = -1$, immers dan geldt voor elke i

ofwel $X_i = Y_i$ ofwel $X_i = -Y_i$.

Nu is het natuurlijk erg vervelend om elke keer voor de berekening van r over te stappen op de gestandaardiseerde scores. Wat wordt r als we teruggaan naar de 'ruwe' scores?

$$r = \frac{\Sigma X_i Y_i}{n} = \frac{\Sigma \frac{(x_i - m(x))}{s(x)} \cdot \frac{(y_i - m(y))}{s(y)}}{n} = \frac{\frac{1}{n} \Sigma (x_i - m(x)) \cdot (y_i - m(y))}{s(x) \cdot s(y)} = \frac{\frac{1}{n} \{ \Sigma x_i y_i - m(x) \Sigma y_i - m(y) \Sigma x_i + n \cdot m(x) \cdot m(y) \}}{s(x) \cdot s(y)}$$

Met $\Sigma y_i = n \cdot m(y)$ en $\Sigma x_i = n \cdot m(x)$ vinden we

$$r = \frac{\frac{1}{n} \{ \Sigma x_i y_i - n \cdot m(x) \cdot m(y) \}}{s(x) \cdot s(y)}$$

Hieruit volgt

$$r = \frac{m(x \cdot y) - m(x) \cdot m(y)}{s(x) \cdot s(y)}$$

Het getal $m(x \cdot y) - m(x) \cdot m(y)$ noemen we de *covariantie* van x en y (notatie $cov(x, y)$), dus

$$r = \frac{cov(x, y)}{s(x) \cdot s(y)}$$

Wat wordt bij de 'ruwe variabelen' de vergelijking van de regressielijn (y op x)?

$Y = rX$ geeft

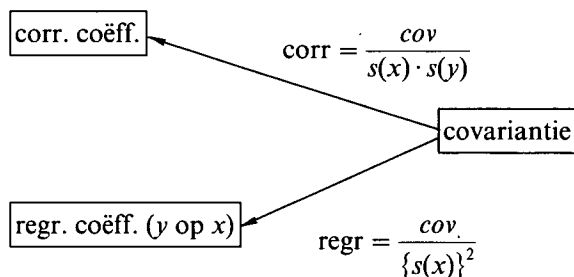
$$\frac{y - m(y)}{s(y)} = r \cdot \frac{x - m(x)}{s(x)}$$

$$y - m(y) = \frac{s(y)}{s(x)} \cdot r(x - m(x))$$

of

$$y - m(y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\{s(x)\}^2} (x - m(x))$$

Hoewel de covariantie zelf geen meetkundige betekenis heeft, blijkt het gebruik ervan door de leerlingen prettig gevonden te worden. Het geeft ze wat houvast in de berekeningen. Ik geef ze nog het schema:



De theoretische achtergrond vertel ik de leerlingen wel, ik stel ze (daarna) direct gerust: zij hoeven alleen maar bij berekeningen handig met het werkschema én hun rekenmachine overweg te kunnen. En dat lukt ze goed, vaak sneller dan ik het zelf kan! Het een en ander wordt natuurlijk wel uitgebreid met computerdemonstraties en practicum ondersteund. Het daarvoor ontwikkelde programma (CGA-resolutie) geeft automatisch als extra de gestandaardiseerde scores. Ook de invloed van enkele koppels toevoegen/weglaten kan snel nagegaan worden.

► Geassocieerd leren

De vraag is eigenlijk: 'Kan men de Wiskunde en de Natuurwetenschappen door dergelijke procedures effectief onderwijzen?' M.a.w. kan de jeugd in deze kennisgebieden een voldoende inzicht verkrijgen door 'geassocieerd leren'? En dan is m.i. gebleken, dat het antwoord op deze vraag ontkennend moet luiden. *Als men werkelijk Wiskunde en Natuurkunde wil onderwijzen en leren, moet het uitgangspunt gekozen worden in de stof en niet in de levenservaring(en) van het kind.*

Deze laatste is daarvoor niet voldoende!

Ook de sfeer in de klas is veel actiever, het is een sfeer van samenwerken en samen discussiëren. Wij, althans ik, praten veel te veel in onze lessen, dáár praten en denken de leerlingen veel meer mee. Ik denk aan die les in Chicago, waar de lerares met de overige leerlingen in een grote kring om de leerling-leider (bij toerbeurt) geschaard zaten. Om de beurt kwam een leerling voor het bord om een (huiswerk)-som uit te leggen en vragen (niet van de lerares, maar van de medeleerlingen) te beantwoorden. De grote moeilijkheid is hier natuurlijk een juist evenwicht tussen vrijheid laten en leiding geven te bereiken!

Gedeelten van een voordracht door Dr. G. Wielenga, voor onder andere de wiskundewerkgroep van de W.V.O., op 10 december 1949.

Uit: Euclides, jaargang 26, nummer 3, november 1950.

'Wiskunde in vervolgopleidingen'

► Sparen via een levensverzekering

Prof. Dr. H. Wolthuis, Drs. B. Kling

Levenszekeringen

Er zijn diverse vormen van levensverzekering, bijvoorbeeld een verzekering bij overlijden, een pensioenverzekering, een erfrenteverzekering en een gemengde verzekering. Vrijwel altijd is een levensverzekering door de lange termijn van de verzekeringscontracten een combinatie van risicodekking en sparen. Een levensverzekering kan worden afgesloten tegen betaling van een eenmalige betaling, koopsom genoemd, of een periodieke premiebetaling bij in leven zijn van de verzekerde gedurende een reeks van jaren.

Dit artikel beoogt inzicht te geven in het sparen via een levensverzekering door middel van een nader te omschrijven verzekering met spaarelement genaamd gemengde verzekering; ter wille van de eenvoud van behandeling is gekozen voor een verzekering met koopsombetaling.

Sparen kan overigens op verschillende manieren gebeuren, bijvoorbeeld bij een spaarbank, door rechtstreekse belegging, of zoals gezegd via een levensverzekering. Dekking van overlijdensrisico is in het algemeen slechts mogelijk via een levensverzekering.

Een levensverzekering met koopsom

Een man met een leeftijd van 35 jaar betaalt aan een levensverzekeringsbedrijf voor een levensverzekeringscontract een éénmalig bedrag, koopsom genaamd. Het is een levensverzekeringscontract met spaarelement; het contract heeft een looptijd van dertig jaar. De verzekering garandeert (exclusief winstdeling) een uitkering over dertig jaar van een vast bedrag, het verzekerd kapitaal, als de verzekerde dan in leven is, of hetzelfde bedrag bij overlijden van de verzekerde als dit eerder plaats vindt.

De koopsom van de verzekering kan gesplitst worden in drie onderdelen, te weten: een spaarbedrag, een bedrag voor de dekking van het overlijdensrisico gedurende de gehele verzekeringsduur en een bedrag voor de dekking van de kosten van de verzekeraar.

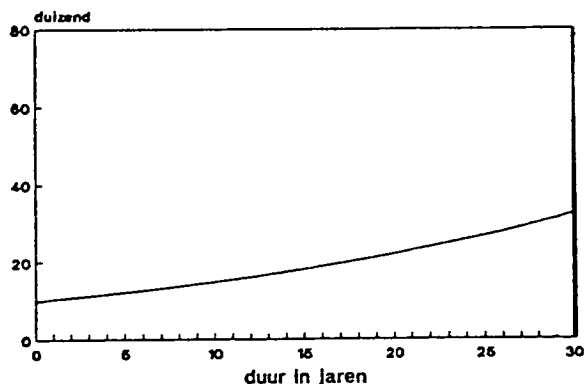
De verzekeringnemer betaalt een koopsom inclusief kosten ter grootte van $1,2 * (fX,- + f10.000,-)$ voor de bovengenoemde levensverzekering met nader te bepalen verzekerd kapitaal. De koopsom bestaat dan uit drie delen, een netto spaarbedrag van $f10.000,-$, ook wel de spaarkoopsom genoemd, een nader vast te stellen netto bedrag van $fX,-$ voor de dekking door de verzekeraar van het overlijdensrisico, de risicokoopsom, en een kostenopslag van 20%. De totale kostenopslag bestaat in dit voorbeeld uit twee afzonderlijke kostenposten, te weten, $f2.000,-$ voor het spaardeel en $0,2 * fX,-$ voor het risicodeel van de verzekering. De kosten zijn onder andere opgebouwd uit de kosten voor een eventuele gezondheidskeuring, een aandeel in de administratiekosten (computer- en personeelskosten), reclamekosten, een aandeel in de kosten voor de actuaris (= verzekeringswiskundige) en de kosten voor de tussenpersonen (afsluitprovisie) en de inspecteurs. De kostenopslag betreft in dit geval een verzekering met een duur van 30 jaar; voor kortere duren zal de kostenopslag verhoudingsgewijs lager zijn.

Verder vergoedt de verzekeraar, zoals gebruikelijk is, over het netto spaarbedrag in ieder geval een gegarandeerde minimum rente gedurende de hele looptijd. In dit voorbeeld zal deze gegarandeerde rente 4% per jaar zijn, welk rentepercentage de verzekeraars historisch gezien veilig achten.

Het spaardeel

We bekijken eerst het spaardeel van de verzekering. In dit voorbeeld waarbij de verzekeraar jaarlijks een rente van 4% vergoedt, zal het spaarbedrag van $f10.000,-$ na een jaar tot $(1,04) * f10.000,-$ aangegroeid zijn; over dit gehele bedrag wordt door de verzekeraar weer 4% vergoed, hetgeen aan het eind van het tweede jaar dan een bedrag gelijk aan $(1,04) * (1,04) * f10.000,-$ oplevert. Aan het eind van de verzekeringsduur is dan bij in leven zijn van de verzekerde een bedrag gelijk aan $(1,04)^{30} * f10.000,- = f32.434,-$ beschikbaar. Dit bedrag is dus het verzekerd kapitaal van de verzekering.

Indien we er van uitgaan dat niet slechts eenmaal per jaar maar op ieder moment rente wordt bijgeschreven, dan is het spaarbedrag van $f10.000,-$ op een willekeurig tijdstip t tijdens de verzekeringsduur aangegroeid tot $(1,04)^t * f10.000,-$. Het verloop van de aldus opgerente waarde van het spaarbedrag kunt u vinden in grafiek I. Horizontaal staat de duur in jaren verstreken sinds de aanvang van de verzekering vermeld, verticaal staat de opgerente waarde in duizenden guldens.

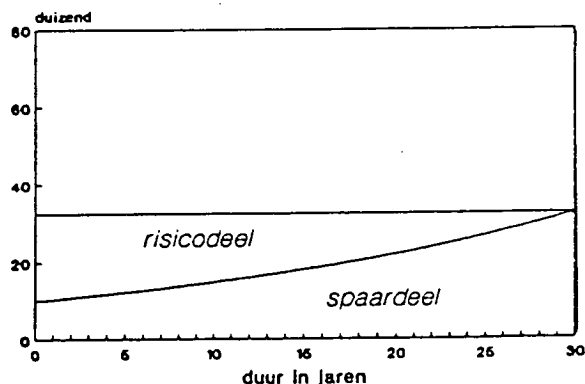


Grafiek I; opgerente waarde spaarbedrag bij 4% rente

Het risicodeel

Voor het risicodeel van de verzekering wordt een

koopsom ter grootte van $f X,-$ betaald voor de dekking van het overlijdensrisico. Het verzekerd kapitaal van de verzekering is het eerder vermelde bedrag $(1,04)^{30} * f10.000,- = f32.434,-$. Dit bedrag moet in dit voorbeeld ook uitgekeerd worden als de verzekerde overlijdt voor het einde van de verzekeringsduur. Het bedrag $f X,-$ is dan nodig om het verschil tussen het verzekerd kapitaal en de op 4% opgerente waarde van het spaarbedrag te verzekeren. Dit uit te keren verschil bij overlijden van de verzekerde is op tijdstip $(0 \leq t < 30)$ gelijk aan $((1,04)^{30} - (1,04)^t) * f10.000,-$. Dit bedrag wordt ook wel het risicokapitaal genoemd; het is duidelijk dat dit risicokapitaal langzaam naar nul daalt naarmate de verzekeringsduur verstrijkt. Het risicokapitaal is dus zodanig gedefinieerd dat de som van de opgerente waarde van het spaarbedrag op tijdstip t en het risicokapitaal gelijk is aan het verzekerd kapitaal van de verzekering $(1,04)^{30} * f10.000,- = f32.434,-$. Dit kunt u terugvinden in grafiek II, waar zowel de opgerente waarde van het spaarbedrag als het verzekerd kapitaal zijn weergegeven.



Grafiek II; uitkering spaar- en risicodeel

De hoogte van het bedrag $f X,-$ kan bij gegeven leeftijd en duur worden bepaald met behulp van overlevings- en sterftekansen van de verzekerde en een onderstelling over het rentepercentage. In dit geval is de hoogte van de koopsom voor het risicodeel gelijk aan $f X,- = f998,90$. Deze koopsom is berekend op basis van de Nederlandse sterftetafel GBM 1971-1975, afgerond volgens Makeham,

(GBM = Gehele Bevolking Mannen) en een rentepercentage van 4%. De keuze voor de tafel GBM 1971-1975 is niet essentieel. Voor de tafel GBM 1981-1985 volgt, met soortgelijke overwegingen, een zeker koopsombedrag voor het risicodeel (te weten f839,50).

Wat doet de verzekeraar?

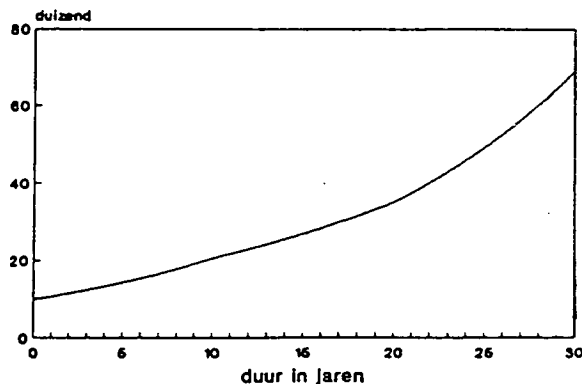
De verzekeraar belegt het oorspronkelijke spaarbedrag f10.000,- tezamen met spaarbedragen van andere verzekeringen in reële beleggingen, in dit voorbeeld in staatsleningen met een duur van 10 jaar. De verzekeraar ontvangt zelf bijvoorbeeld gedurende de eerste tien jaar 8,5%, en in de volgende tienjarige perioden 6,5%, respectievelijk 8% rente.

De verzekeraar heeft dus in dit geval een ruime marge om een hogere rente te vergoeden aan de verzekeringnemer dan eerder genoemde 4%; hij kan dus een groot deel van deze rente in de vorm van rentewinstdeling tegoed schrijven aan de verzekeringnemer. Deze vorm van winstdeling wordt in het verzekeringscontract omschreven en wordt daarom wel contractuele overrentedeling genoemd. Vrijwel alle verzekeringen met spaarelement zijn tegenwoordig rentewinstdelend.

Als de verzekeraar zelf een rentemarge van 1% houdt voor zijn bedrijfsvoering (voor de beleggingskosten e.d.), dan kan hij over de spaarbedragen gedurende de respectievelijke perioden van 10 jaar op jaarbasis de volgende rente vergoeden: 7,5%, 5,5% en 7%. Soms geeft de verzekeraar winstgaranties af voor een rentepercentage dat gerekend over de gehele duur van de verzekering hoger is dan 4%, waardoor hij zelf het risico loopt dat hij de vrijvallende bedragen niet tegen een hoog genoeg rentepercentage kan herbeleggen. Als hij bijvoorbeeld een winstgarantie zou baseren op een gemiddelde rente van 7%, dan komt hij op een gegeven moment tekort in de tweede beleggingsperiode.

De vermelde rentevergoedingen 7,5%, 5,5% en 7% leiden bij continue bijschrijving van de rente tot de in grafiek III vermelde opgerente waarden voor willekeurige tijdstippen tijdens de verzekeringsduur. Voor een tijdstip t gedurende de tweede

periode van 10 jaar is de opgerente waarde dus $(1,075)^{10} * (1,055)^{t-10} * f10.000,-$, en op de einddatum van de verzekering kan inclusief de rentewinstdeling een bedrag gelijk aan $(1,075)^{10} * (1,055)^{10} * (1,07)^{10} * f10.000,- = f69.254,-$ worden uitgekeerd.



Grafiek III: opgerente waarde spaarbedrag inclusief rentewinst

Rendementen

Men zou net als bij een spaarrekening het gemiddelde rendement R over het oorspronkelijke spaarbedrag van de verzekeringnemer over de dertigjarige periode kunnen berekenen op basis van de vergelijking

$$(1,075)^{10} * (1,055)^{10} * (1,07)^{10} * f10.000,- = (1 + R)^{30} * f10.000,-.$$

Berekening op basis van bovenstaande vergelijking houdt evenwel geen rekening met de kostenopslag van f2000,- voor het spaardeel, hetgeen in vergelijking met andere spaarvormen niet juist is.

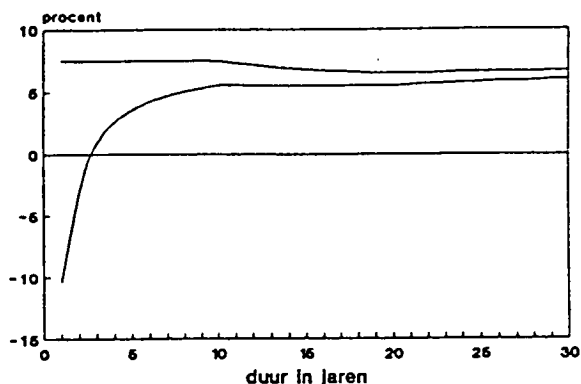
Indien iemand in plaats van het afsluiten van een gemengde verzekering gaat sparen bij een spaarbank (en eventueel daarnaast een aparte overlijdensverzekering afsluit), dan kan in dit geval een bedrag van f12.000,- worden ingelegd op bijvoorbeeld een spaarrekening. De rentevergoeding op de spaarrekening zal lager zijn dan die de verzekeraar bijschrijft over het bedrag f10.000,-, omdat de bank namelijk zijn kosten verwerkt in het rentepercentage. Bij vergelijking tussen banksparen en spa-

ren via een levensverzekering zijn fiscale aspecten, waaraan hier wordt voorbijgegaan, vaak van doorslaggevende betekenis.

Als we wel rekening houden met de kostenopslag van f2000,- voor het spaardeel, moet het gemiddeld rendement voor het spaardeel over de dertigjarige periode berekend worden uit:

$$(1,075)^{10} * (1,055)^{10} * (1,07)^{10} * f10.000,- = (1 + R)^{30} * f12.000,-.$$

Op overeenkomstige wijze als boven kan een dergelijk rendement ook berekend worden over kortere perioden. In grafiek IV staan de rendementen, berekend volgens de twee methoden, getekend; horizontaal staat weer de verstreken duur vermeld, verticaal het rendementspercentage. Duidelijk zichtbaar is het grote effect van de kosten op het rendement in de eerste verzekeringsjaren, waarbij in de eerste twee jaar zelfs een negatief rendement resulteert.



Grafiek IV; rendement gedurende looptijd

Naarmate de duur verstrijkt nadert het rendement met de vermelde kosten steeds dichterbij het rendement zonder deze kosten. Het optreden van negatieve en zeer lage rendementen in de beginperiode voor verzekeringen met spaarelement, zoals die ook optreden in het gegeven voorbeeld, heeft in het verleden jarenlang geleid tot klachten van een groep verzekerden die reeds enkele jaren na aan-

vang hun verzekeringscontract voortijdig beëindigden. Deze klachten kwamen terecht bij de levensverzekeraars, de Consumentenbond en de Ombudsman Levensverzekering. Belangrijke oorzaak van het lage rendement zijn de hoge kosten bij aanvang van de verzekering, te denken valt aan keuringskosten en aan de afsluitprovisie van tussenpersonen en inspecteurs. Een aantal jaren geleden is in overleg tussen de Nederlandse organisaties van verzekeraars, tussenpersonen en de Ombudsman Levensverzekering getracht het rendementsprobleem aan te pakken. De oplossing die hierbij uit de bus kwam was de terugbetaling van een deel van de betaalde provisie door tussenpersonen en inspecteurs aan de verzekeraar, die dit bedrag tezamen met een aanvulling van hemzelf verwerkt in de uitkering. De hoogte van de terugbetaling is afhankelijk gesteld van de verstreken duur van het verzekeringscontract: de afsluitprovisie wordt door de verzekeraars betaald aan tussenpersonen en inspecteurs bij de onderstelling dat het contract in principe tot einddatum of tot eerder overlijden in stand blijft. (Door de terugbetaling van een deel van de provisie en de aanvulling van de verzekeraar zal in de praktijk een wat hoger rendement resulteren voor de verzekerde bij beëindiging van het verzekeringscontract in de beginjaren van de verzekering.)

Complicatie: de veranderende rentevoet

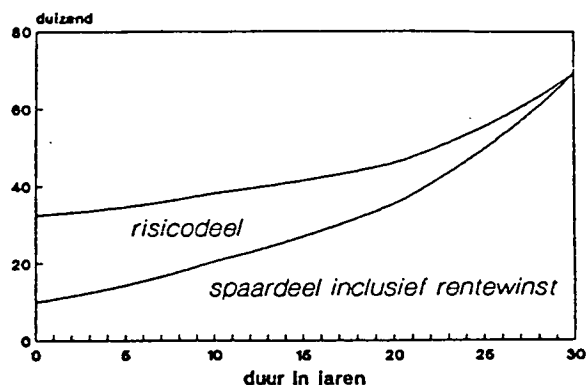
Een complicatie die bij de rendementsberekening niet is verwerkt, wordt veroorzaakt door het feit dat de waarde van de beleggingen (in dit geval de staatsleningen) afhangt van de steeds veranderende rentevoet op de kapitaalmarkt. Zo zal bijvoorbeeld op de kapitaalmarkt bij rentestijging de waarde van een reeds bestaande staatslening met een vastliggend rentepercentage dalen. Stel dat bijvoorbeeld de verzekering na 19 jaar beëindigd wordt op een moment waarop de marktrente voor staatsleningen met een restantduur van een jaar gelijk is aan 9%. De hoogte van het beschikbare spaarbedrag, inclusief rentewinst, is op het tijdstip 19 gelijk aan $(1,075)^{10} * (1,055)^9 * f10.000,-$, zoals eerder vermeld is. De verzekeraar zal dan evenwel een lager bedrag uitkeren, ter compensatie van het verlies bij

plotselinge afstoting van de beleggingen. Omdat eerst op het tijdstip 20 de staatslening wordt afgelost is in de teller van onderstaande formule de rentewinst over de twintig- in plaats van de negentienjarige periode betrokken. Dit bedrag wordt dan voor een periode van één jaar verdisconteerd tegen 9%, de markrente voor deze staatslening op dat moment (disconteren is de tegenovergestelde bewerking van oprenten). Hierdoor wordt in feite een 'gecorrigeerde' rentewinst verkregen voor een periode van 19 jaar. Naast het gegarandeerde bedrag van $(1,04)^{19} * f10.000,-$, zal de verzekeraar in dit geval een bedrag ter grootte van $((1,075)^{10} * (1,055)^{10} - (1,04)^{20}) * f10.000,- / 1,09$ uitkeren. Bij de bepaling van de in de grafiek vermelde rendementen is met dit aspect nog geen rekening gehouden. Bij voortijdige beëindiging van de verzekering wordt eveneens een deel van de betaalde risicokoopsom (en samenhangende kostenopslag) geretourneerd, voor het nog niet gelopen overlijdensrisico voor de periode vanaf het tijdstip van beëindiging tot de reguliere einddatum van de verzekering.

De uitkering

Als laatste gaan we in op de werkelijke hoogte van de uitkering bij overlijden op tijdstip t voor de gehele verzekering. Als de verzekerde komt te overlijden voor het einde van de verzekeringsduur, dan wordt in ieder geval de waarde van het spaarbedrag exclusief rentewinst op dat tijdstip, $(1,04)^t * f10.000,-$, uitgekeerd. Bovendien wordt dit bedrag aangevuld met het risicokapitaal op tijdstip t , $((1,04)^{30} - (1,04)^t) * f10.000,-$ en resulteert het bedrag $(1,04)^{30} * f10.000,-$. Tengevolge van de rentewinstdeling wordt eveneens het verschil tussen de opgerente waarde van het spaarbedrag inclusief rentewinst en de opgerente waarde van het spaarbedrag exclusief rentewinst uitgekeerd, waarbij dan een eventuele waardedaling of stijging van de met de verzekering samenhangende beleggingen buiten beschouwing blijft. Het uit te keren bedrag bij overlijden is dan hoger dan het oorspronkelijk verzekerd kapitaal. Het totaal uit te keren kapitaal bij overlijden is per saldo gelijk aan de som van de opgerente waarde van het spaarbedrag inclusief

rentewinst en het ongewijzigde risicokapitaal. Het verloop van de opgerente waarde van het spaarbedrag inclusief rentewinst en het totaal uit te keren kapitaal bij overlijden kunt u vinden in grafiek V.



Grafiek V; uitkeringen inclusief rentewinst

Slot

Het sparen via een levensverzekering is in bovenstaande geïllustreerd aan de hand van een verzekering die gesloten is tegen koopsombetaling, een éénmalige betaling dus. Het sparen via een levensverzekering, gesloten tegen premiebetaling, betaling van een reeks periodieke bedragen afhankelijk van het in leven zijn van de verzekerde, verloopt op gelijke wijze. Iedere premie, inclusief kosten, kan worden gesplitst in:

- een spaarpremie, een netto premie voor het spaarelement van de verzekering,
- een risicopremie, een netto premie voor de dekking van het overlijdensrisico voor de periode tot de eerst volgende premiebetaling, respectievelijk tot het einde van de verzekeringsduur,
- een kostenopslag voor het spaar- en risicodeel te samen.

De wiskundige behandeling van sparen, risicodekking enzovoorts in combinatie met premiebetaling geschiedt grotendeels als in bovenstaande is uiteengezet voor de verzekering tegen koopsombetaling.

'De zakrekenmachine'

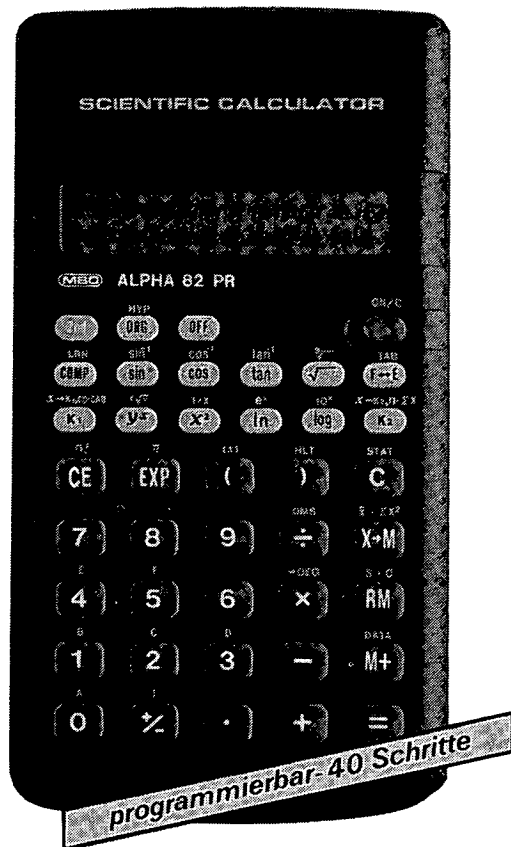
► Mijn nieuwste ZRM kan nog meer

Over een programmeerbare ZRM voor f27,50!

Leen Bozuwa

In een eerder artikel in deze serie (zie Euclides, jaargang 65, 1989/90, blz. 13 e.v.) schreef ik over de mogelijkheden om de ZRM te gebruiken als didactisch hulpmiddel. Ik had het toen over een gewoon zakrekenmachientje met de normale wiskundige functies. Met een programmeerbaar machientje zou je voor wat betreft het variabelen- en functiebegrip heel wat meer mogelijkheden hebben. Dat wist ik wel, maar die dingen zijn veel te duur, dacht ik. Bij mij op school schaffen we voor de leerlingen van de tweede klas centraal een rekenmachientje aan. Elk jaar kijken we wat er op de markt te koop is.

Dit jaar was er bij de aanbiedingen een machientje van Duits fabrikaat, de ALPHA 82 PR, dat volgens de handleiding programmeerbaar was tot 40 stappen en waarvoor de Nederlandse importeur f27,50 rekende. Het is het goedkoopste rekenmachientje dat we ooit uitgekozen hebben en het heeft ook de meeste mogelijkheden. Behalve dat het programmeerbaar is, heeft het naast het gewone geheugen ook nog twee geheugens voor constante factoren, waar handige dingen mee te doen zijn. Bij het programmeren bestaat de mogelijkheid tussentijds variabelen in te voeren en tussenresultaten te bekijken.



Gebruik in de klas

In mijn mavo-2 en havo-2-klas kon er meteen gebruik gemaakt worden van de nieuwe mogelijkheden. We werken met Moderne Wiskunde; functies worden daarin voorgesteld als machientjes waarmee je getallenparen kunt maken. Je stopt een getal in het machientje, van binnen gebeurt er wat en er komt een ander getal uit. De nieuwe ZRM bewees goede diensten, want na geprogrammeerd te zijn, werkte hij precies zo. Het programmeren gaat vrij eenvoudig: je zet het apparaatje in de 'LRN-mode' en slaat dan dezelfde toetsen aan die je bij het eenmalig berekenen van een uitkomst ook zou gebruiken.

Door de toetscombinatie 2nd COMP komt het apparaat in de 'LRN-mode'. Elke toetsaanslag komt dan in het programmeergeheugen. Door de-

zelfde toetscombinatie kom je weer uit de programmeermode.

Voorbeeld 1: Gegeven de functie $f: x \rightarrow 3x - 4$
Toets achtereenvolgens in:

2nd COMP * 3 - 4 = 2nd COMP

De formule is nu geprogrammeerd. Bij elk getal dat je daarna intoetst, gevolgd door het indrukken van de 'COMP'-toets, geeft de ZRM het beeld.

Een kwadratische functie is iets moeilijker, omdat het origineel tweemaal in de formule gebruikt moet worden. Daarom moet het eerst in het geheugen geplaatst worden. Dat kan ook in het programma.

Voorbeeld 2: Gegeven de functie

$$f: x \rightarrow x^2 + 3x - 4$$

Intoetsen:

2nd COMP x - > M x² + 3 * RM - 4

= 2nd COMP

Het tekenen van grafieken, ook andere dan rechte lijnen, kan zo gemakkelijk beoefend worden. Daardoor ervaren leerlingen dat bij iedere formule een plaatje te tekenen is. Een plezierige bijkomstigheid is dat, zeker in het begin, de leerlingen bijzonder gemotiveerd zijn. Het rekenmachientje is nieuw, of in ieder geval zijn sommige toetsen nieuw. Het kost niet zoveel overtuigingskracht om ze er toe te bewegen een groot aantal grafieken te tekenen, uitgaande van een functievoorschrift. Daardoor wordt het functiebegrip op het eenvoudigste niveau goed ontwikkeld, een noodzakelijke voorwaarde om er later op te kunnen voortbouwen.

Het spelletje 'Raad mijn regel' geeft weer andere mogelijkheden. De leerlingen zetten een formule in hun machientje en ruilen dan met hun buurman/-vrouw. Allerlei oplossingsstrategieën worden beproefd: originelen en beelden naast elkaar zetten en zo de regelmaat trachten te ontdekken. Of een aantal punten van de grafiek tekenen en kijken wat het wordt. Aanvankelijk zou je kunnen afspreken dat alleen eerstegraads functies mogen, of alleen kwadratische. Als je functies invoert waarbij niet

alle getallen als origineel gebruikt kunnen worden, komt vanzelf het begrip domein aan de orde. Evenzo stuit je op het begrip bereik bij functies met uiterste waarden.

Al proberend doen de leerlingen een schat aan ervaring met functies op. Daar kun je later heel veel plezier van hebben.

► Bij de serie over de ZRM

Na ruim een jaar komt er een einde aan de serie over de zakrekenmachine. Het zal echter niet voor het laatst zijn, dat er over de zakrekenmachine wordt geschreven. De aanzet die de Didactiekcommissie met het opzetten van deze serie heeft gegeven is een goede geweest.

Duidelijk is, dat de aanwezigheid van de zakrekenmachine gevolgen heeft voor ons wiskundeonderwijs, of we dat nu leuk vinden of niet. Trouwens: wie verlangt er terug naar de vele, vele lessen die moesten worden besteed aan het werken met de tabellen voor de goniometrische verhoudingen en de logaritmen met grondtal 10?

Een andere zaak is, dat we de in gang zijnde veranderingen – er gaat nog veel meer veranderen als ook de grafische rekenmachine voor alle leerlingen beschikbaar komt – goed zullen moeten volgen. Het is inmiddels duidelijk, dat het 'gewone' rekenen, het begrijpen van de bewerkingen, het kunnen omgaan met verhoudingen, het doorzien van exponentiële formules, enzovoorts, zijn belang houdt.

We moeten daarom uitkijken bij wat we weglaten. Wie schrijft eens een mooi, didactisch onderbouwd verhaal over de toekomst van rekenen en algebra MET geavanceerde rekenmachines? Of: wie zorgt voor een voorzet daartoe?

Wij zijn benieuwd.

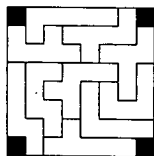
De redactie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

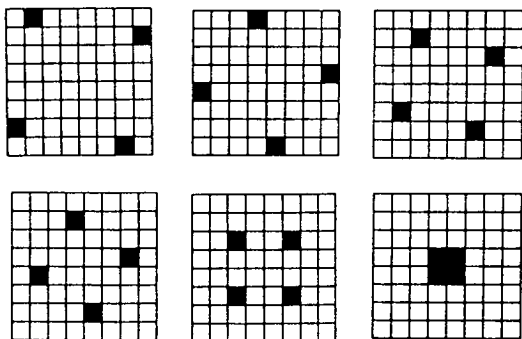
► Opdracht 622

Als opdracht voor deze maand koos ik 'The Cornucopia Puzzle' uit het onlangs in de serie 'Recreations in Mathematics' door Oxford University Press uitgegeven boek van Stewart T. Coffin: 'The Puzzling World of Polyhedral Dissections'.

Als we 6 vierkantjes op allerlei manieren aan elkaar plakken, dan krijgen we de 35 hexomino's. Op advies van Mike Beeler heeft Coffin de 10 hexomino's uit de volgende figuur genomen. Samen met 4 monomino's bedekken ze precies een schaakbord.

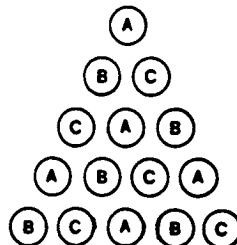


Het verrassende van de Cornucopia is dat de 6 borden uit de onderstaande figuur ieder op één unieke manier (afgezien van draaiing of spiegeling) te bedekken zijn met deze 10 stukjes. De zwarte vierkantjes zijn monomino's.



Aangezien de puzzelladder topzwaar is verdeel ik de punten als volgt: voor de eerste oplossing 5 punten en voor elke volgende oplossing 1 punt. De inzendtermijn is 1 maand.

Het spel 'Your IQ test' bestaat uit een driehoekig solitaire-bord met zijde 5. Om de zetten te noteren nummeren we de gaatjes van boven naar beneden en van links naar rechts met 1 t.e.m. 15. Verder kunnen we er de letters A, B en C op zetten volgens de tekening.



Stel dat veld 2 leeg is, dan hebben we 5 A-pionnen, 4 B-pionnen en 5 C-pionnen (dus oneven-even-oneven). Bij elke zet verandert deze situatie!

Stel dat ik de zet 7-2 doe. Pion 4 wordt dus weggehaald. We hebben nu 4 A-pionnen, 5 B-pionnen en 4 C-pionnen (even-oneven-even). Als de laatste pion in 13 komt hebben we 1 A-pion, 0 B-pionnen en 0 C-pionnen en dat is oneven-even-EVEN en dus ONMOGELIJK!

Conclusie: we kunnen alleen van een A-veld naar een A-veld (idem voor B en C). Alleen de volgende 5 spelletjes met eindpion in 13 zijn daardoor mogelijk:

(Met dank aan Dick Buijs uit Kerk-Avezaath voor het PQ-principe).

Stel P = 10-3, 13-6-1, 15-13

en Q = 7-2, 12-14, 1-4-13, 14-12, 11-13.

Van 1 naar 13: 4-1, 6-4, 1-6, P, Q.

Van 5 naar 13: 12-5, 14-12, 6-13, 15-6, 2-9, 3-10-8, Q.

Van 7 naar 13: 2-7, 6-4, 1-6, P, Q.

Van 10 naar 13: 3-10, 4-6, 1-4, P, Q.

Van 13 naar 13: 11-13, 14-12, 4-13, 12-14, 1-4, 7-2, 3-8, 10-3, 15-13-4-1-6-13.

Deze laatste oplossing in 9 zetten is het minimum aantal om het hele bord, op 1 na, leeg te slaan.

De meeste inzenders zonden trouwens een oplossing van 13 naar 13 in.

Ook op vakantie is er flink gepuzzeld getuige de ansichtkaart van Anne van Bemmelen en Frank Hoentjen uit Westervoort vanuit de Franse vakantieplaats Cordes.

De ABC-methode garandeert helaas niet dat er ook werkelijk een oplossing bestaat. Zo is van 5 naar 5 onoplosbaar.

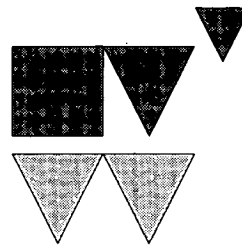
Het bewijs hiervan staat in 'Journal of Recreational Mathematics', Volume 16, Number 2 en het vervolg in Volume 18, Number 4.

Na loting is A. Boons, Luchthavenlaan 22, 5042 TD Tilburg winnaar geworden van de boekenbon van f25,-.

Van harte gefeliciteerd!

rood

groen



Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

► Van de bestuurstafel

Freek Mahieu

Deze rubriek heeft u misschien in enkele nummers gemist. De reden daarvan is dat veel van de in de laatste tijd in het bestuur besproken onderwerpen verwerkt zijn in het verenigingsnieuws of in specifieke artikelen. En doublures kunnen we in het altijd met ruimtegebrek kampende Euclides niet gebruiken. Nu dan een aantal onderwerpen die we voor u hebben opgespaard.

Het is alweer bijna drie jaar geleden dat in de PR-commissie het idee ontstond een logo te vinden als eigen beeldmerk van onze Vereniging.

Vanuit deze rubriek vroegen wij onze leden om ideeën. De weinigen die hierop reageerden danken we van harte voor hun inbreng.

Een gemeenschappelijke gedachte bij alle samengebrachte ideeën was dat het logo een vanuit de wiskunde herkenbare vormgeving moest hebben.

Hiermee werd dan tenslotte een ontwerper aan 't werk gezet. Het resultaat ziet u elders op deze bladzijde.

Vorig jaar moesten we in deze rubriek melding maken van de, in vergelijking met vorige jaren, geringe belangstelling voor de besprekingen van het lbo/mavo-examen 1989 (Euclides 65,3). In verband hiermee werd in slechts 8 plaatsen (in vorige jaren 16) een bespreking georganiseerd van het examen 1990. De goede opkomst van dit jaar (bijna 250 deelnemers) is voor een deel te danken aan de

verbeterde structuur van het examenwerk: 50% meerkeuze- en 50% open vragen.

Hoewel de bijeenkomsten op de eerste plaats bedoeld zijn om de normering van de open vragen te bespreken, bieden ze ook een goede gelegenheid om over de kwaliteit van het gehele examen van gedachten te wisselen. De verzamelde informatie wordt via het door onze Vereniging afgevaardigde CEVO-lid aan de ACD (de commissie die het examen ontwerpt) en de CEVO-vaksectie (die het examen vaststelt) doorgegeven.

De belangstelling voor de besprekingen van de examens havo en vwo was redelijk: havo (4 plaatsen) 125 deelnemers, vwo-A (9 plaatsen) 190 en vwo-B (5 plaatsen) 100.

Het door ons gelanceerde voorbeeldexamen ter voorbereiding op het examen lbo/mavo in mei j.l. oogstte veel waardering.

Toen vaststond dat de CEVO alleen zou volstaan met mededelingen in 'Uitleg' over de gewijzigde examenvorm, achtten wij het noodzakelijk om voor docenten en leerlingen de veranderingen gestalte te geven in een voorbeeldexamen. We kozen voor een C-examen waarbij duidelijk tot uiting kwam hoe de nieuwe 50-50-constructie (met als gevolg een andere tijndeling) en de bijlage (die moest worden ingeleverd) functioneerden.

Het feit dat tientallen docenten naar aanleiding van deze activiteit besloten om lid te worden van de Vereniging heeft ons het tevreden gevoel gegeven dat het omvangrijke werk van het construeren van dit voorbeeld en het verzenden naar 1759 scholen, ervaren is als een welkome hulp.

In februari 1989 werden drie HAWEX-bijeenkomsten georganiseerd voor havo-docenten; aantal deelnemers 304. In februari 1990 trokken twee zulke bijeenkomsten nog 76 bezoekers.

Voor docenten bij het mavo en lbo organiseerden we in november 1989 op 12 plaatsen in het land HAWEX-bijeenkomsten om hen te informeren over het HAWEX-programma en de vertaling hiervan in de bovenbouw-havoklas. Deze docenten kregen zo een beeld van de wiskunde waarin een aantal van hun leerlingen in havo-4 en -5 zal worden onderwezen. Het aantal deelnemers (716) verdraagt dat deze bijeenkomsten, die overigens alleen konden slagen dankzij de inzet van de experimenterende havodocenten en leden van het HAWEX-team, in een behoefte hebben voorzien!

Op 13 juni j.l. woonden de inspecteurs W. Kleijne en C. Nijenhuis de bestuursvergadering bij. Het doel van deze jaarlijkse gebeurtenis is het uitwisselen van informatie en het bespreken van vormen van samenwerking tussen Bestuur en Inspectie.

De volgende onderwerpen werden besproken:

- informatica in het Nederlandse wiskunde-onderwijs;
- statistiek in het vwo; de Vereniging schrijft een brief aan het Ministerie met het verzoek om een direct gesprek over de gesignaleerde problematiek;
- de eindexamens 1990; opvallend hierbij was dat er geen sluitende verklaring gevonden kon worden voor de matige resultaten die behaald werden bij het examen vwo-B;
- de experimentele examens COW/12-16;
- ‘bezem’-leerlingen bij het eindexamen havo;
- enkele minder omvangrijke onderwerpen (omrekening D-cijfers naar C-cijfers, aanwijzen van scholen voor de voorlichtingsbijeenkomsten over COW/12-16, de doorstroming van leerlingen van mavo naar havo en mbo).

Zoals we in deze rubriek wel eens vaker doen, roepen we **uw hulp** in. Dit keer voor het vinden van oorzaken voor de lage scores bij het examen vwo-B (zie derde gedachtenstreepje). Reacties kunt u kwijt bij de secretaris van de NVvW.

Mededeling

ICTMA 5

ICTMA 5 zal worden gehouden in Noordwijkerhout, van 9 tot en met 13 september 1991. ICTMA staat voor *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications*. Organisator van deze conferentie is de vakgroep OW&OC van de faculteit wiskunde en informatica van de Rijksuniversiteit Utrecht. Het is de vijfde ICTMA, de vorige werden gehouden in Exeter (Engeland, 1983 en 1985), Kassel (1987) en Roskilde (Denemarken, 1989).

Het belangrijkste doel van deze conferentie is om een forum te bieden voor uitwisseling van ervaringen, meningen en ideeën over wiskundige modelvorming en toepassingen, tussen onderzoekers en leraren in het basis-, voortgezet en hoger wiskunde-onderwijs. De aandacht voor het basisonderwijs is een verbreding ten opzichte van de vorige ICTMA-conferenties. De nadruk zal liggen op het leren van wiskunde vanuit toepassingen.

Er zullen plenaire en parallelle lezingen, workshops, presentaties en demonstraties zijn. Bij de presentaties en demonstraties wordt lesmateriaal, software en videomateriaal getoond. Er zal voldoende gelegenheid zijn om formeel en informeel van gedachten te wisselen. Naast het inhoudelijke programma zal voor de nodige ontspanning worden gezorgd.

Eind 1990 zal de tweede aankondiging met aanmeldingsformulier verstuurd worden. Als u ook een exemplaar wilt ontvangen, bestelt u deze door een bericht naar:

ICTMA 5, OW&OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht
(fax: 030-660430, telefoon: 030-611611).

Kalender

14 november 1990: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

12 december 1990: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

14 of 15 december 1990: Op de scholen voor vwo, voorronde Wiskunde A -lympiade.

5 januari 1991: Amersfoort, Wintersymposium Wiskundig Genootschap. Zie de mededeling op blz. 70 van dit nummer.

9 januari 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

8 en 9 februari 1991: Garderen, Wiskunde A -lympiade.

1 maart 1991: Op de scholen voor havo en vwo, eerste ronde Wiskunde Olympiade.



Uit het voorwoord:

Als je dan ook nog vindt - en wij vinden dat - dat het *leerproces* dat een leerling doormaakt belangrijker is dan het blindelings toepassen van algoritmen, dan is er maar één conclusie:

Het is niet mogelijk een wiskunde-methode te schrijven die zowel voor mavo- als voor vwo-leerlingen echt geschikt is.

de Wageningse Methode

een wiskundemethode voor mavo (1 en 2), havo (1, 2 en 3) en vwo (1 t/m 6, A en B) met ondersteunende software.

Informatie:

onderbouw: Wim Kremers (08373-18206)

bovenbouw: Leon v.d. Broek (080-788604)

software : Jan Breeman (01828-16063)

Verkoopadres:

Meijer & Siegers bv

Postbus 105

6860 AC Oosterbeek

Tel.: 085-341045 (Jacqueline)

Inhoud

Inhoud 65

G. Y. Nieuwland: De toekomst van de
wiskunde 66

Mededeling 70

H. J. Smid: Twee stenen in de vijver 71

Nawoord van het bestuur 73

Swier Garst: Opa's meetkunde 74

Ger Limpens: Naar China? 75

F. Smid: Interpretatie van notaties 75

Mededeling 76

J. M. Buhrman: Pythagorische drietallen
en matrices 76

Mededeling 78

Truus Dekker: Het examen Ibo/mavo C/D
1990, experimenteel (3) 79

Werkbladen 80

Jan Breeman: Het rekenwerk bij Correla-
tie en Regressie 82

40 jaar geleden 86

Prof. dr. H. Wolthuis, Drs. B. Kling: Spa-
ren via een levensverzekering 87

Leen Bozuwa: Mijn nieuwste ZRM kan
nog meer 92

Recreatie 94

Freek Mahieu: Van de bestuurstafel 95

Mededeling 96

Kalender 96