

Wolters-Noordhoff

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Vakblad voor de wiskundeleraar

Euclides

816
357
492

jaargang 65 1989 | 1990 juni

Redactie

Drs H. Bakker
Drs R. Bosch
G. Bulthuis
Drs J. H. de Geus
Drs M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
N. T. Lakeman (beeldredacteur)
Drs A. B. Oosten (voorzitter)
P. E. de Roest (secretaris)
Ir. V. E. Schmidt (penningmeester)
Mw. Drs A. Verweij (eindredacteur)
A. van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,
8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f55,- per verenigingsjaar;
studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de
V.V.W.L. f37,50; contributie zonder Euclides f30,-.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met
vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de
leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan
F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij
drs M. C. van Hoorn, Noordersingel 12,
9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te
zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos
5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is
opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f55,00. Een collectief
abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f35,00.

Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie,
Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86.
Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen
tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend
nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag
leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde
van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f9,- (alleen verkrijgbaar na vooruit-
betaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 63 79. Telefaxnr. 01720-9 32 70.

Bijdrage 274

Henk Mulder *Het tijddal, integreren met zand*
Een trechter met zand, opgehangen aan een draad, maakt een slingerbeweging. Wiskundige beschouwingen bij de zandhoop die ontstaat.

Serie 'De zakrekenmachine' 278

Hans ter Heege *Op het grensvlak van basisschool en brugklas*
Welke rol speelt de zakrekenmachine in het moderne reken-wiskundeonderwijs van de hoogste klassen van de basisschool?

Serie 'Wiskundeonderwijs aan ...' 282

Prof. dr. E. T. Ruseffendi *Wiskundeonderwijs in Indonesië*
De ontwikkelingen in het Indonesische wiskundeonderwijs van de laatste twintig jaar beschreven en van commentaar voorzien.

Mededeling 285

Recreatie 286

Verenigingsnieuws 287

Jaarvergadering/Studiedag 1990

Oproep 288

Kalender 288

Actualiteit 250

George Schoemaker *Kolom 18 W12/16*

Postzegels 250

Machinaal rekenen

Actualiteit 251

Bram van der Wal *Wiskunde is spannend en nuttig*

De stand van zaken in de modernisering van de wiskunde in de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Gehoord en gezien op een VALO-conferentie voor ibo-, lbo en mavodocenten.

Verschenen 254

Bijdrage 255

Henk J. M. Bos *Wiskunde en maatschappij – Een discussie in de leraarskamer, met historische episodes*

Verhalen van een historicus als reactie op gangbare meningen omtrent de maatschappelijke context van de wiskunde. Over toepassingen van de wiskunde, 'echte' wiskunde met eeuwige waarheden, wiskunde en cultuur.

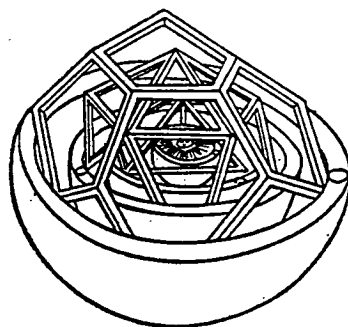
Werkbladen 268

Viertallen en Driehoeken

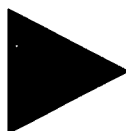
Bijdrage 270

Frank Laforce *De stelling van Zün Shan*

Een vervolg op een Recreatie-opgave uit Euclides van twee jaar geleden. Het bewijs komt uit Eindhoven en China.



... harmonie in de structuur van het heelal.



► Kolom 18



George Schoemaker

Op 26 en 27 april was er een kaderconferentie nascholing. De deelnemers – bij elkaar zo'n veertig – werden geïnformeerd over het werk van W 12-16 en bereidden zich voor op toekomstige nascholing en op korte termijn op de regionale bijeenkomsten in oktober en november 1990. Een belangrijke basis voor de regionale bijeenkomsten is de Wiskrant-special die in september naar alle wiskundesecties gaat.

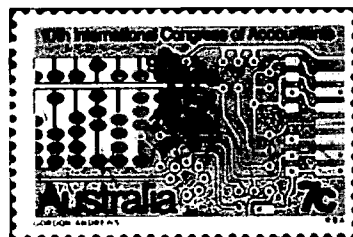
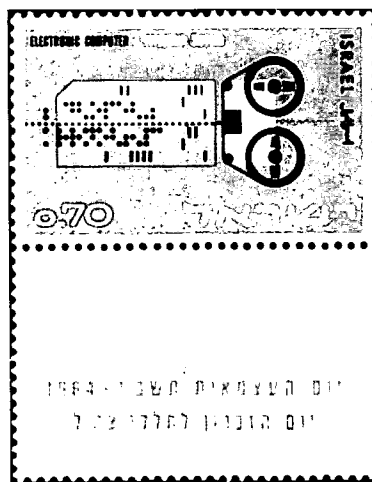
Het is de bedoeling dat op een tiental plaatsen in Nederland wiskundedocenten bij elkaar komen. De NVvW organiseert deze bijeenkomsten. Het team W 12-16 is verantwoordelijk voor de inhoud. De deelnemers krijgen een wiskundeprogramma te zien voor klas 1 en 2, een globale opzet voor het CD programma in klas 3 en 4 en leerlingenmaterialen. Het is de bedoeling dat dezelfde groep docenten op dezelfde plaats zes weken later terugkomt en wat meer gedegen kan reageren nadat men bij voorbeeld in de klas wat geprobeerd heeft, met collega's gesproken, kritiek op een rijtje heeft gezet.

De regionale bijeenkomsten worden geleid door een tweetal docenten: een lerarenopleider en een wiskundedocent. Deze opzet is hopelijk een voorafspiegeling van de toekomstige nascholing die onder verantwoordelijkheid van de lerarenopleidingen wordt gegeven.

Ik verwacht veel belangstelling. De oproep van Anne van Streun in het paasnummer van Euclides is daar garant voor. Of is dat wishful thinking?

Machinaal rekenen

Als uitsmijter van deze jaargang iets over de ontwikkeling van de rekenapparatuur. Op postzegels uit Israël en Australië zijn ponskaarten en magneetbanden te zien, respectievelijk een ouderwetse abacus in een stukje computeringewand.



Postzegels als deze zijn zeer gedateerd. Hardware- en software-vernieuwing gaan steeds maar door. De PTT's moeten zich inspannen om bij te blijven!

► Wiskunde is spannend en nuttig

Bram van der Wal

Op 15 en 16 maart vond onder bovengenoemde titel in Beekbergen een VALO-conferentie¹ plaats. Onder de deelnemers bevonden zich, naast degenen die zich beroepsmatig met vernieuwingen binnen het wiskundeonderwijs bezighouden, opmerkelijk veel docenten uit het ibo, lbo en mavo. De agenda, die veel activiteiten vermeldde geschikt voor met name ibo-leerlingen, zal wel de voornaamste reden geweest zijn voor de grote belangstelling uit deze hoek van het onderwijs.

Het programma vermeldde ook een groot aantal verschillende zaken, uiteenlopend van lezingen tot het beoordelen van uitgewerkt lesmateriaal. Omwille van de beschikbare ruimte zal in dit artikel op een beperkt aantal dingen uitvoerig worden ingegaan. Hopelijk geeft datgene dat in dit artikel aan de orde komt een evenwichtig beeld van de stand van zaken in de modernisering van de wiskunde in de onderbouw van het voortgezet onderwijs.

Bij nader inzien

George Schoemaker, coördinator van de werkgroep 12-16, blikte terug in het nog prille bestaan van de werkgroep. Veel bleek anders gelopen dan gehoopt. Enigszins teleurgesteld stelde hij vast dat van de onstuimige start niet veel meer is overgeble-

ven. 'We waren nog jong', stelde hij nuchter vast. Ondertussen zijn allerlei obstakels op de weg verschenen die de snelheid danig remmen en het zicht behoorlijk verminderen. Zo haalde het eerste advies over de eindtermen basisvorming (1988) het niet en ligt het tweede advies nog in een bureaula op het departement. Verder laat het wetsvoorstel voor de basisvorming alsmaar op zich wachten, waren er problemen bij de invoering op de A- en B-scholen.² Van de oorspronkelijk 40 geplande C- en D-scholen kunnen er maar vijf daadwerkelijk aan de slag en dan nog slechts onder volledig andere condities dan oorspronkelijk bedoeld. De benodigde steun aan deze laatste scholen moet van de lerarenopleidingen en de Landelijke Pedagogische Centra komen.

Het einde van de activiteiten van COW is in 1992. Omstreeks die datum moet het nieuwe programma gereed zijn. Voor het schrijven van nieuwe methoden blijft dan nog ongeveer een jaar tijd over. Op dit moment is de werkgroep 12-16 met name bezig leerstof te ontwikkelen voor leerlingen op A-niveau en B-niveau. Ruime aandacht wordt verder gegeven aan de specifieke problemen die allochtonen ondervinden, aan ruimtemeetkunde en toepasbare algebra.

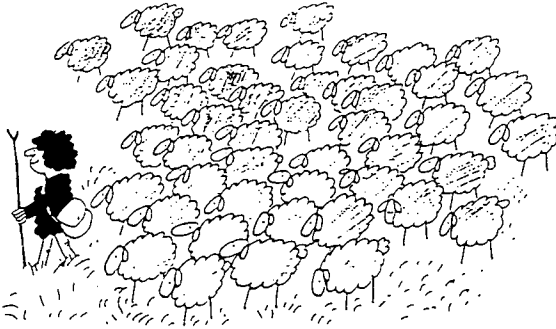
Tellen

Teneinde een beetje idee te krijgen waar het bij de vernieuwing van het wiskundeonderwijs voor de A- en B-leerling om gaat, volgt hier een gedeelte uit het lespakketje over tellen, ontwikkeld door het team Ontwikkeling Wiskunde IBO van de SLO. In het pakketje komen telervaringen, telstructuren en telmiddelen aan de orde. Omdat de meeste telproblemen in dit pakket op meerdere manieren opgelost kunnen worden is er voor leerlingen de mogelijkheid om, door vergelijking van de eigen oplossingsstrategie met die van andere leerlingen, tot een hoger niveau te komen. Dat hierbij door leerlingen veel samengewerkt moet worden is duidelijk.

Het gaat om twee pagina's uit het pakketje (Figuur 1 en 2). In het eerste geval gaat het om de 'historische ontwikkeling' van het tellen. Er blijken nogal wat manieren te zijn om grote hoeveelheden te tellen.

De schapen van Jacob

Jacob en zijn schapen leefden lang geleden.
Er waren toen nog geen getallen.



Jacob wilde iedere dag weten of hij al zijn schapen nog had.
Hoe zou hij dat kunnen doen?

Schat eens hoeveel spreeuwen



Schat eens hoeveel spreeuwen er vliegen.
Hoe heb je het gedaan?

Figuur 1 en 2

Het werkblad waarbij de spreeuwen geteld moeten worden geeft aanleiding tot nadenken over het tellen van zeer grote hoeveelheden. In het dagelijks leven zijn voldoende vergelijkbare voorbeelden te vinden waarbij grote aantallen geteld moeten worden. Denk maar aan een sprinkhanenplaag in Afrika, deelnemers aan demonstraties en toeschouwers in een stadion. Hoe pak je zo'n vraagstuk nou aan? In de praktijk blijkt dat leerlingen tot erg creatieve oplossingen kunnen komen.

Beroepsinkleurig

In de beroepsgerichte vakken, die met name bij het lbo en ibo voorkomen, wordt veel gebruik gemaakt van wiskunde. Tijdens de lessen wiskunde kan het niet slechts motiverend werken om beroepsgerichte contexten te introduceren, het stelt de leerling ook in staat wiskundige problemen op zijn vakgebied op te lossen. De werkgroep 12-16 toonde enkele experimentele werkbladen waaruit de opzet blijkt. Op een van de werkbladen, waarvan hier een deel is afgedrukt, gaat het om het mengen van betonspecie (Figuur 3). Daarbij komt het onderwerp verhoudingen aan de orde. Merkwaardig genoeg blijkt deze problematiek in diverse vakgebieden voor te komen. Bij het bereiden van beslag voor een taart, bij het verdunnen van zuren, bij het toevoegen van smeermiddel aan brandstof en het mengen van lucht en bezine tot een brandbaar mengsel gaat het om dezelfde vragen.

Blikjes

Het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum toonde een bundel opgaven waarvan er een is opgenomen (Figuur 4). Kenmerkend voor de aanpak van het APS in deze bundel is dat men tracht vraagstukken te componeren die de leerling uitnodigen tot een eigen manier van oplossen. Bij het vraagstuk van de blikjes blijken de leerlingen tot de meest uiteenlopende oplossingsmethoden te komen, variërend van het (proberen) tekenen van de stapel en daarna tellen tot het vinden van een rekenregelmaat zoals de som van rij 1 + rij n = som rij 2 + rij $(n - 1)$ enz. bij n -rijen blikjes.

tabel voor betonspecie

kg cement	0,3	
kg zand	0,7	
kg grind	1,2	

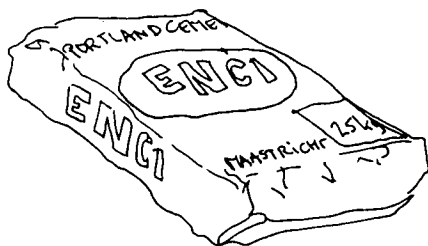
De berekeningen kun je ook maken met behulp van deze tabel. Het is een samengestelde verhoudingstabel. De tabel is ontstaan uit twee verhoudingstabellen. Dit is er één van:

kg zand	0,7	
kg grind	1,2	

Kun jij een andere vinden?

Je hebt 1 kg cement. Hoeveel zand en grind moet je erbij doen? (gebruik de verhoudingstabel!)

Hoeveel zand en grind heb je nodig als je een zak cement van 25 kg neemt?

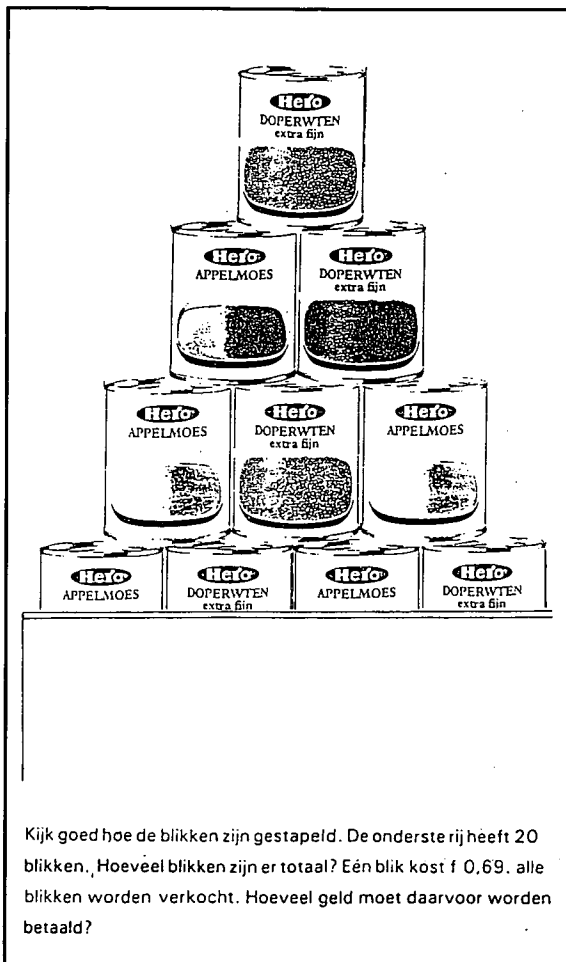


Figuur 3

De aanpak van het APS lukt uiteraard alleen als de docent bereid is de leerlingen de ruimte te geven tot experimenteren. Daarbij is wel geloof nodig in het bereiken van resultaten op langere termijn.

Spannend en nuttig

Het motto van de conferentie is op de conferentie zeker waar gebleken. Veel van het materiaal dat op tafel kwam zal met name de ibo-, maar ook de lbo-leerlingen aanspreken. Veel hangt evenwel af van de bereidheid van de docent om op de juiste wijze met het materiaal om te gaan.



Kijk goed hoe de blikken zijn gestapeld. De onderste rij heeft 20 blikken. Hoeveel blikken zijn er totaal? Eén blik kost f 0,69. alle blikken worden verkocht. Hoeveel geld moet daarvoor worden betaald?

Figuur 4

Helaas werd op de conferentie onvoldoende gebruik gemaakt van de aanwezige ervaring van de deelnemers. Het feit dat zo'n grote groep ibo- en lbo-docenten bij elkaar was hadden de organisatoren beter moeten uitbuiten. Waarom heeft men niet geprobeerd de grenzen te ontdekken van wat ibo-leerlingen nog wel en niet meer aan kunnen? Welke teksten zijn leesbaar, welke zijn te lang? Welke onderwerpen vragen om beroepsinkleuring en welke eisen stelt men aan dergelijk materiaal? Het beoordelen van een aantal lespakketten rechtvaardigt geen conferentie.

Naast deze kritische vragen op micro-niveau zijn er

aan het einde van de conferentie ook een groot aantal vragen op meso-niveau te stellen.

In 1987 ging de commissie COW aan de slag om te komen tot een nieuw wiskundeprogramma voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Daarbij wordt aan leerlingen van 12-16 jaar gedacht. Op de achtergrond en soms op de voorgrond stond daarbij de vrijwel parallel lopende discussie over de basisvorming voor de eerste drie (of vier of twee?) leerjaren van het voortgezet onderwijs. Nog steeds heeft de politiek geen kans gezien klare wijn te schenken, ondanks een rijpingsproces van vele jaren. Het is tekenend voor de situatie dat de voorgestelde eindtermen in een aangepaste tweede versie niet verder gekomen zijn dan een bureaula op het departement. In dit klimaat moet een ontwikkelteam plannen maken voor een nieuw programma. De teleurstelling die uit de woorden van George Schoemaker viel te halen is begrijpelijk, zeker in combinatie met het gedecimeerde aantal volgscholen.

Het ontwikkelteam W 12-16, de SLO en auteursgroepen hebben de afgelopen jaren veel nieuwe ideeën aangedragen en bijbehorend materiaal ontwikkeld. Toch lijkt er nu een einde te komen aan het schrijven en uitproberen van lespakketjes, zeker als *een duidelijke visie of lijn ontbreekt*.

Als voorbeeld kan genoemd worden een lespakketje, ontwikkeld door de werkgroep 12-16, in het kader van beroepskleuring. In het eerder genoemde pakketje over mengverhoudingen wordt op geen enkele manier duidelijk gemaakt of het een op zich zelf staande les is over het mengen van beton of beslag voor een brood, of dat het een aanzet is voor een lessenserie over verhoudingen, procenten of misschien goniometrie. Of anders gezegd: is het de bedoeling dat de leerling slechts leert hoe in de praktijk beton te maken of dient de les een hoger doel?

Als ontwikkelteams, die zich best mogen beroepen op de afwezigheid van een kader, niet verder komen dan deze lessen is het zonde van het geld. Er zijn tenslotte al voldoende boeken in gebruik bij het

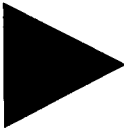
ibo-lbo en Streekscholen waar de onderhavige leerstof is uitgewerkt en zeker niet minder goed: in een aantal gevallen zelfs beter.

De uitgesproken vrees dat voor auteursteams slechts een korte tijd beschikbaar zal zijn voor het schrijven van nieuwe methoden bij het definitief doorgaan van de basisvorming wordt tegelijkertijd grotendeels weggenomen door de verwachting dat in het vak doorknede mensen bruikbaar materiaal zullen leveren.

Te vermoeden is slechts dat, bij voortdurende onduidelijkheid, het veld, waaronder scholen, vervolgopleidingen en bedrijven een remmende invloed zullen hebben op de vernieuwingen. Waarbij moet worden aangetekend dat voor sommigen niet hard genoeg aan de noodrem getrokken kan worden.

Noten

- 1 VALO = VeldAdviescommissie LeerplanOntwikkeling.
- 2 A-scholen werken vanaf 1987 met experimenteel materiaal, B-scholen werken vanaf 1988 met gelijkwaardig materiaal.



Verschenen

Kostikin, A.I./Manin, Y.I.: *Linear Algebra and Geometry*; Gordon and Breach; \$ 70.00; 309 blz.

Dit boek, waarin sterk de nadruk ligt op het gebruik van Lineaire Algebra in Meetkunde, is verdeeld in een viertal hoofdstukken: Lineaire Algebra; Meetkunde van Inproduktruimten; Affiene en Projectieve ruimten; Multilineaire Algebra. Onder meetkunde wordt ook verstaan: Minkowski-ruimten, Symplectische meetkunde en Quantummechanica. Het boek bevat geen opgaven.

D.N. Dikranjan e.a.: *Topological Groups*; Marcel Dekker; \$ 119.50; 312 blz.

Gebruik makend van elementen uit de functionaalanalyse, alle behorend tot de algemene topologie, concentreert dit boek zich op de theorie van topologische groepen. In het bijzonder wordt aandacht besteed aan Karakters, Dualiteiten en Minimale Groep Topologieën.

► Wiskunde en maatschappij – Een discussie in de leraarskamer, met historische episodes¹

Henk J. M. Bos

1 Inleiding

Het idee voor deze lezing ontstond in een gesprek met Ivan Tafteberg Jakobson, een van de organisatoren van deze conferentie. Hij suggereerde dat ik zou spreken over het gebruik van wiskunde in de maatschappij, en over maatschappelijke invloeden op de wiskunde. Hij noemde ook een aantal vragen die vaak opkomen als deze onderwerpen onder leraren besproken worden. Over die vragen denkende, besloot ik dat de beste manier om het onderwerp te benaderen was om een overzicht te geven van gangbare meningen en argumenten omtrent de maatschappelijke context van wiskunde, en om een aantal episodes uit de geschiedenis van de wiskunde te vertellen die relevant zijn voor deze opinies en argumenten.

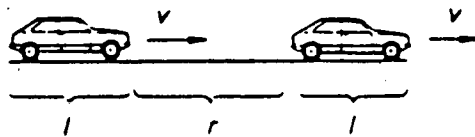
Dat plan vroeg in zekere zin om een rolverdeling: ikzelf zou de episodes kunnen vertellen, maar wie moest de opinies en argumenten brengen? Ik besloot mijn verhaal te laten spelen in een denkbeeldige school met denkbeeldige leraren. Ik moet direct

zeggen dat ik geen leraar ben, zodat de omgeving waarin ik het verhaal laat spelen deels op fantasie berust. Maar ik hoop dat de situatie en de gesprekken toch wat herkenbaars hebben.

2 De les

In een van de lokalen van de school wordt wiskunde gegeven. De leraar legt uit hoe je met differentiëren uiterste waarden kunt bepalen. Na enige tijd vraagt een leerling: 'Maar waar is dat allemaal voor nodig?'

'Ah', zegt de leraar, 'wat ik hier vertel is heel nuttig, in de natuurkunde, in de economie en voor ingenieurs. Ik zal een voorbeeld geven, dat gaat over autoverkeer en files. Er is bijvoorbeeld een wegversmalling waar veel auto's door moeten. Dan zou je willen weten wat de beste snelheid is voor die auto's. Met andere woorden, met welke snelheid moeten de auto's rijden opdat er zo veel mogelijk langs de wegversmalling kunnen? Misschien een zo hoog mogelijke snelheid? Nee, want bij hogere snelheid moeten de bestuurders ook grotere afstand tot elkaar houden, anders is het gevaar voor een botsing als iemand remmen moet te groot. Laten we de afstand tussen de auto's r noemen, de lengte van de auto's l , de snelheid v en het aantal passerende auto's per seconde f (zie Figuur 1). De politie vertelt ons dat r evenredig moet zijn met het kwadraat van de snelheid, $r \sim v^2 \dots$ '

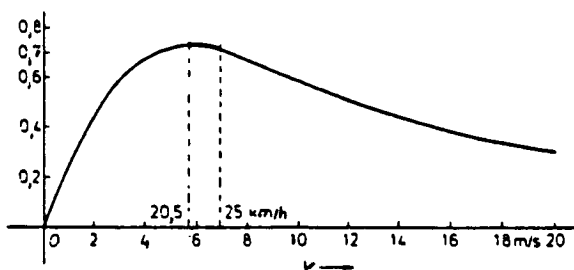


Figuur 1

En zo wordt het model opgezet, de waarden voor de constanten worden ingevuld en de leraar leidt een formule voor f af:

$$f = \frac{8v}{32 + v^2},$$

en tekent de grafiek (zie Figuur 2).



Figuur 2

De optimale snelheid kan nu bepaald worden door te differentiëren, de uitkomst blijkt ongeveer 20 km/uur te zijn. Op dat moment gaat de bel, het is pauze, de leraar verlaat het lokaal.

3 In de gang

De leraar – ik zal hem of haar A noemen want er zullen straks nog meer leraren verschijnen – is wel tevreden. Het was een leuk voorbeeld. En A weet dat er veel meer zulke leuke en goede voorbeelden zijn, hele boeken vol, geschreven door bijvoorbeeld Noble, Sharron, Bell en Steur² (het voorbeeld van de wegversmalling komt uit Steurs boek). Een aantal van die boeken heeft weer uitgebreide bibliografieën zodat je werkelijk een groot aantal voorbeelden van gemakkelijk te begrijpen toepassingen kunt verzamelen om leerlingen te overtuigen dat wiskunde inderdaad ergens voor nodig is.

Maar halverwege de leraarskamer begint A te twijfelen; hij realiseert zich dat al die voorbeelden betrekking hebben op tamelijk gespecialiseerd werk. De man die het optimum van de snelheid in de file berekent is geen gewone politieagent. Hoeveel leerlingen zullen banen krijgen waarin ze met zulke toepassingen te maken hebben? Welke wiskunde zal de gemiddelde leerling later echt nodig hebben? Op dat moment ontmoet A een collega, B, en vertelt waar hij over aan het denken is. 'Ja', zegt B, 'dat heb ik me ook vaak afgevraagd en ik heb gemerkt dat er eigenlijk heel weinig over bekend is.'

Hij vertelt dat hij onlangs het Cockroft rapport³ uit 1982 heeft gelezen. Hij vindt dat in dat rapport voor het eerst resultaten van serieus onderzoek worden geleverd over de vraag welke wiskunde nu werkelijk gebruikt wordt in 'het dagelijks leven'. Het rapport heeft een hoofdstuk over 'wiskundige behoefte van volwassenen', daarin staat een lijst van die behoeften:

- getallen lezen en tellen
- klok kijken
- betalen van aankopen en wisselgeld geven
- gewichten en maten begrijpen
- dienstregelingen en eenvoudige grafieken begrijpen en de daarbij horende berekeningen uitvoeren
- enige vaardigheid in schatten en benaderen
- zelfvertrouwen dat men deze dingen ook kan.

Dat is niet veel, zou je zeggen, maar het rapport is toch nog pessimistisch over het succes van het wiskundeonderwijs in het aanleren van deze vaardigheden.

4 In de leraarskamer

Wat B zegt, maakt A nog meer aan het twijfelen. Ze komen de leraarskamer binnen en vertellen hun collega's waar ze het over hadden. Ze krijgen zeer gemengde reacties.

Collega C zegt: 'Wie zegt dat toepassingen belangrijk zijn? Wiskunde is een wetenschap; waar mensen het voor gebruiken doet er niet toe. Wiskunde is onafhankelijk van de maatschappij, het is eeuwige waarheid. Op school moeten kinderen echte wiskunde leren, dat is goed voor ze. Ik houd het bij Hardy's apologie van de wiskunde: echte wiskunde is vrijwel volledig nutteloos; het werk van een echte wiskundige kun je nooit rechtvaardigen op grond van utiliteit.'⁴

D, leraar klassieke talen en geschiedenis reageert. Hij zegt: 'waar ik niet tegen kan bij die "echte" wiskundigen is dat ze zo verslaafd zijn aan hun mooie wiskunde dat ze geen enkel verband meer zien met de wereld er om heen. Ik weet niet of toepassingen belangrijk zijn of niet, maar er zijn toch op zijn minst verbanden met cultuur. Als ik wil

dat de kinderen iets leren over wetenschap en wiskunde in de Griekse en Romeinse cultuur dan kan ik C vragen een les te geven over Griekse wiskunde. En dan krijgen ze van alles te horen over de *Elementen* van Euclides en het werk van Archimedes, maar niks over wat wiskunde te maken had met de rest van de Griekse cultuur. En wat moeten de kinderen daarmee? Die denken dan dat wiskunde altijd vreemd, moeilijk en irrelevant is geweest!'.

E, weer een wiskundeleraar, is het ook niet met C eens. 'Dat is nonsens', zegt hij, 'wiskunde heeft alles te maken met de maatschappij. Kijk, als de maatschappij in het oude Griekenland niet gedraaid had op slavenarbeid, was er nooit "mooie" Griekse wiskunde geweest, geen Euclides, geen Archimedes, geen axiomatische Euclidische meetkunde met stellingen en bewijzen enzovoort. De Grieken waren in staat die dingen uit te werken omdat ze het gewone werk aan slaven konden overlaten.' (Hij overdrijft en simplificeert hier een argument dat door sommige historici⁵ gebruikt is om de opkomst in Griekenland te verklaren van een wiskundige wetenschap die bewijs en deductieve structuur centraal stelde.)

Dat is te veel voor C; hij zegt: 'Dat noem ik nou nonsens! Luister! Zeven is een priemgetal, niet waar? En de Grieken wisten dat en zij hielden slaven. En nu hebben we Westerse democratie en zeven is nog steeds een priemgetal. En als je naar Rusland gaat heb je een ander sociaal systeem maar bij hen is zeven ook een priemgetal. Wiskunde gaat over waarheden die totaal onafhankelijk zijn van de maatschappij!' (Het is duidelijk dat C en E elkaar irriteren.)

Tenslotte is er F, ook een wiskundeleraar. Hij brengt een nieuw punt naar voren: 'Ik ben niet zo zeker over die afhankelijkheid van de maatschappij, maar ik weet wel dat praten over gebruik of toepassingen niet genoeg is. De echte vraag is: zijn die toepassingen *goed*? Die boeken waar A zijn voorbeelden uit haalt, die heb ik ook bekeken, en daar worden onderwerpen overal vandaan gehaald: het leger, het milieu, economie, medicijnen, enzovoort. Maar wat ze nooit bespreken is of die toepassingen ook maatschappelijk *aanvaardbaar*

zijn. Ik vind dat wiskundigen ervoor verantwoordelijk zijn dat hun vak goed gebruikt wordt. De echte vraag is dus: hoe zit het met *maatschappelijke verantwoordelijkheid* bij het gebruik van wiskunde?'

5 De gast

Hier stokt de discussie en men kijkt naar een gast die in de leraarskamer is. Die gast is een historicus van de wiskunde, hij is dus een verteller van verhalen. Hij zegt: 'Wel, hm, ik denk niet dat ik echt iets zeggen kan over al die moeilijke vragen, maar ik kan wel een verhaal vertellen dat een beetje aansluit bij wat D en E net zeiden over wiskunde bij de Grieken.' En hij vertelt:

6 Eerste Episode: harmonie

Het argument over slavernij in Griekenland is controversieel, maar het bedrijven van wiskunde had in Griekenland wel iets te maken met maatschappelijke status en ook met ideologie en filosofie. Daar liggen dus inderdaad verbanden met de rest van de Griekse cultuur. Zoals overal elders waren in Griekenland filosofie en ideologie nauw met elkaar verbonden. Het ging om grote vragen zoals: wat is goed? Wat is moreel juist gedrag? Wat is een goed heerser? Filosofie, geordend denken over vragen zoals deze, werd gezien als een geschikte training voor jonge mannen uit de heersende klasse. Dus was er een markt voor filosofie; filosofen konden scholen opzetten. Een filosoof die dat deed was Plato. Hij stichtte omstreeks 380 voor Christus een school die later de *Akademie* kwam te heten; de naam ontstond omdat de tuinen waar Plato zijn bijeenkomsten hield gewijd waren aan de halfgod Akademos. Volgens de overlevering was boven de ingang van de akademie geschreven: 'Laat niemand zonder kennis van meetkunde hier binnen treden'. Of dit nu waar was of niet, het duidt wel op het belang van meetkunde, en dus van wiskunde, in Plato's filosofie en in zijn onderwijs. Waarom was wiskunde belangrijk? Omdat, zo meenden Plato en zijn volgelingen, de studie van abstracte wiskunde de beste training was om de

mens in verbinding te brengen met 'de ware werkelijkheid'. Die ware werkelijkheid betrof niet de wereld van de direct waarneembare dingen, die bewegen en veranderen, maar de wereld van immateriële, eeuwige ideeën en vormen; het hoogste idee was dat van het goede.

Ook geometrische vormen waren van belang in Plato's filosofie. De vijf regelmatige veelvlakken, bijvoorbeeld, waren verbonden met de elementen waaruit God het heelal volgens Plato gemaakt had. De piramide was de vorm van het element vuur, de octaëder die van lucht, de icosaeëder die van water en de kubus die van aarde. Over het vijfde veelvlak, de dodecaëder, zegt Plato alleen: 'Nog bleef er één samenstel, een vijfde. En dat heeft God dan benut voor het Heelal, toen Hij dit met allerlei figuren beschilderde'⁶. Latere Griekse denkers veronderstelden het bestaan van een vijfde element, de ether, waaruit de hemellichamen gemaakt waren; dit element correspondeerde dan met de dodecaëder.

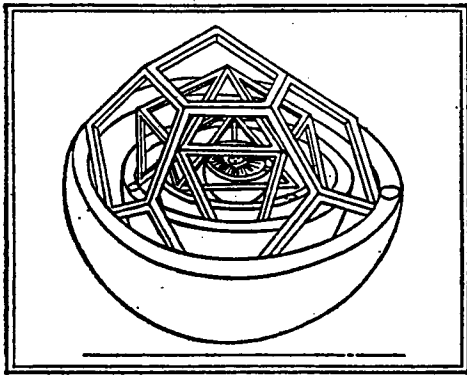
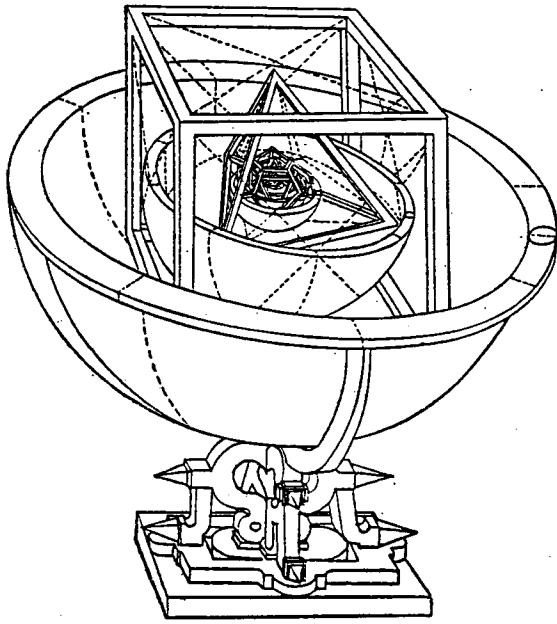
De wiskundige theorie van deze vijf veelvlakken was al goed ontwikkeld in Plato's tijd. In het dertiende en laatste boek van de *Elementen* van Euclides (ca. 300 voor Christus) wordt die theorie uiteengezet. Er zijn geen teksten bewaard gebleven waarin Euclides zelf uitlegt waarom hij de *Elementen* structureerde zoals hij deed, maar sommige latere Griekse schrijvers meenden dat alle theorieën in dat boek beschouwd moesten worden als bouwstenen voor het begrip van de vijf Platonische lichamen. Deze opvatting werd vooral verdedigd door Proclus (410-485 na Christus), een van de belangrijkste commentatoren van de *Elementen*. Proclus behoorde tot de filosofische stroming die Neo-Platonisme wordt genoemd, een mengsel van Plato's filosofie, religie, mystiek en een heel heldere en precieze manier van argumenteren.

Volgens de Neo-Platonistische opvatting bestudeert de wiskunde dingen (getallen, meetkundige figuren) die zelf niet de hoogste vorm van werkelijkheid, geen ware ideeën of vormen zijn, maar die daar wel dicht bij komen. Proclus zegt het zo:

wiskunde is het 'voorportaal van de ware vormen'⁷. Zo levert de wiskunde de beste oefening in contemplatie van de ware vormen; wiskunde is onderdeel van een praktijk om te komen tot een helder en direct inzicht in waarheid.

Proclus' ideeën, en het Neo-Platonisme in het algemeen hadden een belangrijke invloed op de ontwikkeling van de natuurwetenschap in de Renaissance en de zeventiende eeuw. Er waren in die periode drie tradities die ieder op hun manier bijdroegen aan de 'Wetenschappelijke Revolutie', het ontstaan van de natuurwetenschap zoals wij die nu kennen. Een was de mechanische traditie die de wereld opvatte als een machine en die natuurprocessen probeerde te begrijpen als zijnde veroorzaakt door zeer gecompliceerde mechanieken. De tweede was de organische traditie die de wereld zag als een groot organisme en de natuur als samengesteld uit vele afzonderlijke organismen, elk met zijn eigen doel en functie. De derde was de magische traditie, waarvoor de wereld een kunstwerk was, geschapen naar verborgen wetten van harmonie en schoonheid. Die wetten waren wiskundig van aard en daarom werd wiskunde in deze traditie gezien als de sleutel tot het verstaan van het heelal.⁸ Neo-Platonisme, met zijn nadruk op wiskunde, paste goed in deze magische traditie en de grote verwachtingen die de Neo-Platonisten van de wiskunde hadden leidden niet alleen tot een levendige interesse in zulke zaken als getalmystiek, numerologie en cryptografie, maar ook tot theorieën over harmonie en verhoudingen in muziek en astronomie.

Veel wiskundigen putten inspiratie uit deze ideeën. Een bijzonder duidelijk voorbeeld daarvan is Johann Kepler (1571-1631). Zijn wiskunde is vooral gemotiveerd door het zoeken naar harmonie, harmonie in de wiskunde (zoals bij de Platonische lichamen), harmonie in muziek en harmonie in de structuur van het heelal. Zijn Neo-Platonistische aanpak komt heel sterk naar voren in zijn beroemde hypothese over de afstanden van de planeten tot de zon. Overtuigd dat er een verborgen harmonie moest zijn in deze schijnbaar willekeurige afstanden, beschouwde hij een inenschakeling van bollen en regelmatige veelvlakken (zie Figuur 3). De banen van de planeten liggen op concentrische bollen (de sferen van de planeten). Tussen elke



Figuur 3

twee opeenvolgende bollen is een Platonisch lichaam geplaatst waarvan de vlakken raken aan de binnenste bol en de hoekpunten liggen op de buitenste bol. Kepler vond dat als hij de volgorde zo koos: Bol van Mercurius – octaëder – Venus – icosaeëder – Aarde – dodecaëder – Mars – tetraëder – Jupiter – kubus – Saturnus, de afstanden in goede benadering overeenkomen met de toen bekende verhoudingen.⁹

Ook andere wiskundigen stonden onder invloed van deze ideeën. We hebben hier dus een voorbeeld

van een verband tussen wiskunde en de grote stromingen in de geschiedenis van de filosofie en van het denken. In het geval van het neo-Platonisme en de magische traditie had deze verbinding een aanmerkelijke invloed op de ontwikkeling van de wiskunde. Van wiskunde werd veel verwacht; deze verwachting suggereerde nieuwe richtingen van onderzoek en leverde het vak ook een groot prestige.

7 Reactie: de economische context

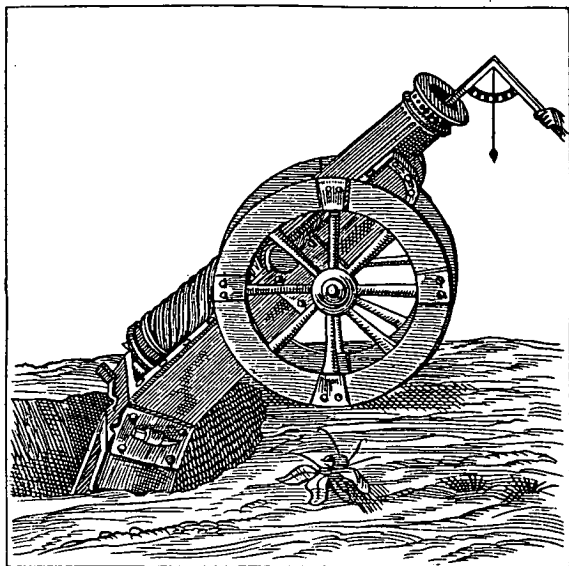
Hier besluit de gast zijn eerste verhaal. Er komt onmiddellijk reactie van E, die zegt: 'Dat is helemaal niet wat ik bedoelde. Het essentiële is de economische context, de produktiewijze. Allé culturele en filosofische stromingen en alle ideologieën zijn afgeleiden van de economische context en kunnen alleen maar begrepen worden in termen van veranderingen in het productieproces. Neem bijvoorbeeld de Wetenschappelijke Revolutie waar je het over had...'

En E legt uit dat in de zestiende en zeventiende eeuw het handelskapitalisme opkwam en dat dat het ontstaan van de moderne wetenschap verklaart. Wat waren de problemen van het vroege handelskapitalisme? Dat waren: transport, in het bijzonder per schip, over kanalen, rivieren en de zee, en verder industrie, in het bijzonder mijnbouw, en oorlog. Daarmee nauw verbonden waren er wetenschappelijke problemen: in de hydrostatica de stabiliteit van drijvende lichamen (schepen), de werking van sluizen en van pompen om water uit de mijnen te houden, in de hydrodynamica de weerstand van schepen die door water bewegen, in de astronomie en navigatie het probleem van plaatsbepaling op zee (in het bijzonder de geografische lengte), in de mechanica de werking van machines en de banen van projectielen afgeschoten uit kanonnen, in de aërodynamica de luchtweerstand ondervonden door projectielen en luchtstromingen in mijnschachten. E wijst er op dat alle onderwerpen die Newton behandelt in zijn *Principia* van 1687, het boek dat om zo te zeggen de resultaten van de wetenschappelijke revolutie op het gebied der mechanica consolideerde, te maken hebben met deze problemen. Newton behandelt dan ook mechanica, hemelmechanica en beweging in een medi-

um met weerstand. Het feit dat Newtons *Principia* zo duidelijk geworteld was in maatschappij en economie – zo zegt E tenslotte – bewijst dat wetenschap, en dus ook wiskunde, sterk bepaald is door economische factoren. (E parafraseert hier de argumenten van B. Hessen in een beroemd artikel ‘The social and economic roots of Newton’s *Principia*’¹⁰. Hessen was een van de Sovjet-afgevaardigden bij het tweede internationale congres over wetenschapsgeschiedenis in Londen 1931; daar presenteerde hij deze tekst. Sindsdien is het steeds een bron van inspiratie, controverse en debat geweest.)

8 Tweede episode: ballistiek

‘Je noemde projectielbanen’, zegt de gast na E’s reactie. ‘Dat is een onderdeel van de ballistiek en ik denk dat de geschiedenis van de ballistiek relevant is in verband met de vragen die je noemde.’ En hij vertelt het tweede verhaal.



Figuur 4 Uit ‘Il Primo Libro delli Quesiti, et Inventioni diverse’ door Nicolo Tartaglia, Venetië, 1546

De eerste studies over de baan van kanonskogels dateren uit de zestiende eeuw, maar men kan zeggen dat ballistiek (waarmee hier bedoeld is externe ballistiek, dus wat er gebeurt met het projectiel nadat het het geschut heeft verlaten) pas een werkelijke wetenschap werd na Galilei’s ontdekking (gepubliceerd in 1638) dat projectielen parabolen beschrijven. De theorie werd verder uitgewerkt en met behulp ervan werden tabellen opgesteld en instrumenten ontworpen waarmee het bereik van het projectiel berekend kon worden uit de richtingshoek van de loop en het bereik van één proefschot. Deze ‘parabolische ballistiek’ werd in de zeventiende en achttiende eeuw aan militaire scholen onderwezen. Al die tijd was de theorie vrijwel nutteloos voor de praktijk van de artillerie en alle artilleristen wisten dat ook. De reden was duidelijk: er werd geen rekening gehouden met luchtweerstand en er werd voorondersteld dat in een reeks schoten uit een zelfde geschut de beginsnelheid van de projectielen constant was. De praktijksituatie was totaal anders.

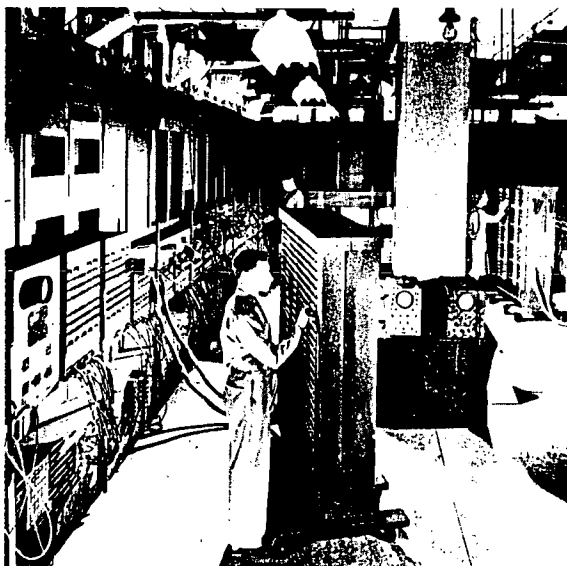
Al in de zeventiende eeuw bestudeerden sommige wetenschappers de invloed van luchtweerstand op projectielbanen. Huygens, Newton en anderen leidden differentiaalvergelijkingen af voor de banen uitgaande van verschillende veronderstellingen over de relatie tussen de weerstand en de snelheid van het projectiel. De vruchtbaarste veronderstelling (die namelijk leidde tot oplosbare en interessante differentiaalvergelijkingen) was dat de weerstand evenredig was met het kwadraat van de snelheid. Zo ontstond een nieuwe theorie, de ‘kwadratische ballistiek’; tegen het eind der achttiende eeuw werd die theorie onderwezen aan artillerieofficieren en ingenieurs. De theorie leverde ook tabellen. Toch was hij nauwelijks bruikbaar in de praktijk omdat de kanonnen, de projectielen en het kruit zo weinig gestandaardiseerd waren dat de beginsnelheid van projectielen bij een serie schoten verre van constant was. Omstreeks deze tijd, ca. 1800, verloren de topwiskundigen interesse in de ballistiek; de verdere uitwerking van de theorie geschiedde binnen het leger zelf door artillerieingenieurs.

In de negentiende eeuw werd de theorie langzamer-

hand bruikbaar voor de artillerie te velde. Dat werd mogelijk gemaakt door een aantal ontwikkelingen. Allereerst werden spits toelopende projectielen ingevoerd (in plaats van de eerder gebruikelijke bolvormige) en de lopen werden voorzien van spiraalgroeven. Daardoor was de beweging van de projectielen veel stabiel en dus meer voorspelbaar. Bovendien werden de kanonnen en de kruithoeveelheden gestandaardiseerd, zodat de beginsnelheid van projectielen vrij redelijk constant werd. Het is opmerkelijk dat dit proces van standaardisatie (men zou het de mathematisering van het materiaal kunnen noemen) nodig was zowel voor de verbetering van de theorie als voor het succes van de toepassing ervan. Experimenteel onderzoek leverde een beter begrip op van de weerstand als functie van de snelheid. Zo konden meer accurate differentiaalvergelijkingen opgesteld worden en die bleken ook integreerbaar te zijn. Tegen het einde van de negentiende eeuw waren de zo berekende ballistische tabellen tamelijk betrouwbaar, ten minste voor het geval dat de projectielen een vrij vlakke baan hadden.

De eerste wereldoorlog stelde nieuwe eisen aan de ballistiek; er kwam lange-afstandsgeschut (met zeer hoge kromme banen) en luchtdoelartillerie. In beide gevallen kon de luchtdichtheid niet meer constant verondersteld worden (wat eerder wel gedaan werd). Dit leidde tot veranderingen in de differentiaalvergelijkingen waardoor deze niet meer rechtstreeks oplosbaar waren. Voor het berekenen van tabellen moest men nu zijn toevlucht nemen tot numerieke integratie. Deze methode was in de astronomie ontwikkeld om anderszins onbehandelbare differentiaalvergelijkingen op te lossen. De methode kostte veel tijd, maar er was geen andere en dus werden in de periode tussen de twee wereldoorlogen ballistische tabellen geproduceerd in een soort rekenlaboratoria, waar grote groepen rekenaars, voorzien van eenvoudige optel- en vermenigvuldigmachines, de getallen voor de tabellen produceerden. De behoefte aan mechanisering van dit rekenproces was duidelijk en dit leidde tot de elektronische computers. Inderdaad waren de twee belangrijkste motieven voor de ontwikkeling van computers in de Verenigde Staten gedurende de Tweede Wereldoorlog de noodzaak om ballistische

berekeningen te automatiseren en de noodzaak om op korte termijn de gecompliceerde berekeningen voor het ontwerpen van de atoombom uit te voeren.



Figuur 5 De eerste elektronische computer: de ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Calculator)

Tot zover de ballistiek-episode, die een duidelijk voorbeeld levert van de manier waarop wiskunde verweven is met (althans een deel van) de maatschappij. Er is zeker sprake van invloed, maar in welke richting? In de eerste fase werden wiskundigen geïnspireerd door de artilleriepraktijk om hun theorieën te ontwikkelen. Maar in de andere richting was er nauwelijks invloed: de theorieën waren in de praktijk onbruikbaar. Dat was eigenlijk een algemeen verschijnsel wat betreft mathematische fysica in de zeventiende en achttiende eeuw: hoe briljant, diep en theoretisch vruchtbaar ook, de theorieën (zoals mechanica, hydromechanica, hemelmechanica etc.) waren onbruikbaar in de praktijk. Dit is een van de grootste bezwaren tegen Hessens weergave van de ontwikkeling der wetenschap: het lijkt onbevredigend om alleen met economische verklaringen te werken in een situatie waar wetenschap zich zo lang kon ontwikkelen zonder duidelijke praktische resultaten.

De episode mag dienen als bewijs dat relaties tussen

theorie en praktijk, tussen zuivere wiskunde en toepassingen, tussen wetenschappelijke ontwikkelingen en maatschappelijk nut, zeer complex en veelzijdig kunnen zijn.¹¹

9 Reactie: irrelevant voor kernwiskunde

Leraar E reageert niet onmiddellijk op deze episode, maar F is verontwaardigd en zegt tegen de gast: 'Nu doe jij precies net zo als die schrijvers van die boeken over toepassingen, je vermijdt het belangrijkste onderwerp. Ballistiek, oorlog, atoombom, en alles wat je zegt is dat interrelaties complex zijn! Hoe zit het met de verantwoordelijkheid van de wetenschappers die er bij betrokken zijn? Daar zou ik het over willen hebben!'

F's reactie wordt echter terzijde geschoven door C die zegt dat de episode hem in het geheel niet overtuigd heeft dat wiskunde iets met de maatschappij te maken heeft: 'Je hebt het gehad over bepaalde gevallen van gebruik van wiskunde, niet over wiskunde zelf, kernwiskunde, wiskunde als wetenschap. Ik zie nog steeds niet wat het voor verschil uitmaakt of je integratie gebruikt voor ballistiek, astronomie of analytische getaltheorie. In al die gevallen is het dezelfde integratie, een zuiver wiskundige operatie, onafhankelijk van waarvoor je hem gebruikt, en wij wiskundigen zouden ons moeten beperken tot wiskunde.'

10 Derde episode: zuivere wiskunde in de negentiende eeuw

De gast zegt: 'Ik neem aan dat je de Riemann-integraal bedoelt, of the Lebesgue-integraal, netjes gedefinieerd met ε - δ -precisie; integratie als onderdeel van de zuivere analyse waarbij de reële getallen $\mathbb{R}$ arithmetisch worden ingevoerd vanuit de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$, via de gehele getallen $\mathbb{Z}$ en de rationale getallen $\mathbb{Q}$, door middel van verzamelingen, equivalentierelaties en Cauchy-rijtjes of Dedekind-snedes.' C zegt dat dat klopt en de gast merkt op dat die stijl van analyse ontstond in de negen-

tiende eeuw en dat er over die ontwikkeling een verhaal te vertellen valt dat relevant is voor de discussie. Dedekind beschreef de constructie van de reële getallen via de later naar hem genoemde 'snedes' in een boekje *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* dat in 1872 verscheen. Het idee om de reële getallen zo in te voeren had hij al in 1858 ontwikkeld en in de inleiding¹² van het boekje legt hij uit waarom hij dat had gedaan. De directe aanleiding was een didactische: Dedekind moest als hoogleeraar in Zürich analyse geven en die situatie dwong hem de grondslagen van het vak precies uiteen te zetten. Hij bemerkte dat hij zich bij het bewijzen van zekere basisstellingen moest beroepen op wat hij noemde 'meetkundige aanschouwelijkheid', dat wil zeggen, hij moest uiteindelijk zijn gehoor overtuigen met plaatjes. Dat vond hij zeer onbevredigend omdat hij overtuigd was dat wiskunde wetenschappelijk, 'wissenschaftlich' onderwezen moest worden en dat zo'n beroep op aanschouwelijkheid onvoldoende wetenschappelijk was.

We zien hier twee aspecten die ook in het algemeen van belang zijn geweest in de negentiende-eeuwse 'rigorisering' van de analyse die ons Cauchy-rijtjes, Dedekind-snedes en epsilon-tiek heeft opgeleverd: de didactische situatie en de eis van wetenschappelijkheid. Beide aspecten staan in verband met maatschappelijke ontwikkelingen.

Omstreeks 1800 werd de analyse (differentiaal- en integraalrekening, differentiaalvergelijkingen) leerstof voor tamelijk grote groepen studenten aan universiteiten en technische hogescholen. Dedekind beschrijft een ervaring die anderen in die tijd ook hadden bij het geven van analyse: de onderwijssituatie dwong ertoe de grondslagen van het vak precies te formuleren. Daarbij bemerkte men onvolkomenheden en herstelde die door strengere opbouw en bewijsvoering. Cauchy, die de rigorisering inleidde door het begrip limiet centraal te stellen, deed dat in leerboeken voor studenten aan de Parijse *Ecole Polytechnique*. Ook de verdere ontwikkeling naar meer strengheid in de analyse speelde zich vooral af in leerboeken voor universitaire colleges. Het blijkt dus dat een nieuwe maatschappelijke situatie, in dit geval de onderwijssituatie, aanmerkelijke invloed kan hebben op be-

grippen en stijl van een wiskundig onderwerp.

En dan de wetenschappelijkheid. Dedekind benadrukt dat wiskunde op wetenschappelijke wijze bedreven moet worden. Dat betekent dat het vak bestudeerd moet worden als een zuivere, autonome wetenschap, een zoeken naar kennis per se, niet vanwege nut of bruikbaarheid. De uiteindelijke criteria zijn waarheid, elegantie en algemeenheid. Bewijzen die teruggrijpen op meetkundige aanschouwelijkheid zijn niet strikt overtuigend, zij moeten dus vervangen worden door onaanvechtbare wiskundige bewijzen.

Voor Dedekind, en voor de meeste Duitse wiskundigen uit zijn tijd, was het vanzelfsprekend dat wiskunde aan universiteiten op die wetenschappelijke wijze onderwezen en bestudeerd moest worden. Maar historisch gezien was dat een recente overtuiging, die ontstaan was in Duitsland in de eerste helft van de negentiende eeuw. Waarom moest onderwijs aan universiteiten 'wetenschappelijk' zijn? Wel, in Duitsland was er in de eerste helft der negentiende eeuw een combinatie van sociale en economische factoren aanwezig, die zeer gunstig werkte voor het ontstaan van een wetenschappelijke stijl aan de universiteiten. Dat is een fascinerend hoofdstuk uit de sociale geschiedenis van de wetenschap en in heel grove lijnen geschetst was er het volgende aan de hand.

De periode rond 1800 bracht de Franse revolutie en het begin van de industriële revolutie. Beide revoluties veroorzaakten speciale ontwikkelingen in Duitsland. De oorlogen tegen Frankrijk en in het bijzonder de Duitse nederlaag tegen Napoleon wakkerden een nationaal gevoel en een trots op eigen cultuurbezit aan. Deze ideeën kregen vorm in het Neo-Humanisme ('Neu Humanismus'), een stroming die de waarde benadrukte van filosofie, humanistische studies en 'Wissenschaft'. Een vrije en zelfstandige beoefening van wetenschap werd beschouwd als de beste manier om de geest te vormen en de persoonlijkheid te ontwikkelen.

Tegelijkertijd veranderde de beginnende industrialisering de machtsstructuur en het politieke denken in Duitsland. De opkomende klasse, de liberale

bourgeoisie, stond het vrije ondernemerschap voor en zag als taak van de staat om goede technische opleidingen te verzorgen voor de groeiende industrie.

Zo werden er van neo-humanistische en van liberale zijde verschillende verlangens naar voren gebracht, enerzijds zuiver wetenschappelijk onderwijs, anderzijds utilitaristische technische opleidingen. In Duitsland groeide nu een onderwijssysteem dat verdeeld was volgens deze verschillende wensen. Het middelbaar en hoger technisch onderwijs leverde utilitaristisch onderricht en leidde technici en ingenieurs op. De gymnasia en universiteiten onderwezen zuivere wetenschap en leverden zo een type onderricht in neo-humanistische stijl. De overheid voerde een actief beleid om de universiteiten om te vormen tot instellingen van zuiver wetenschappelijk onderzoek en onderwijs, soms zelfs tegen de wil van die universiteiten zelf in.

De nieuwe universiteiten vormden een omgeving die zeer gunstig was voor het ontstaan van de zuivere stijl van wiskunde bedrijven die ons nu zo vertrouwd is: analyse in strenge ϵ - δ -stijl, en algebra als een axiomatische studie van structuren. Dit is zeker kern-wiskunde, zuivere wiskunde, maar de episode toont dat er zelfs voor dit type wiskunde een sociale context is geweest die de ontwikkeling ervan heeft beïnvloed.

11 Reactie: de wiskundige begrippen zelf

C is niet overtuigd. 'Je hebt het alleen maar over de omstandigheden gehad', zegt hij, 'maar dat zegt niet veel. Natuurlijk, als je meer posities creëert voor zuivere wiskunde krijg je ook meer zuivere wiskunde. Natuurlijk, in gunstige omstandigheden duurt het minder lang voordat de ware grondslagen van de analyse of het ware begrip integraal ontwikkeld worden; als de omstandigheden ongunstig zijn duurt dat langer. Maar daar gaat het niet om. Uiteindelijk zullen dezelfde grondslagen en hetzelfde begrip integraal gevonden worden, die zijn namelijk niet afhankelijk van omstandigheden, sociale of andere.'

12 Vierde episode: correlatie

De gast zegt: 'Ja, nu noem je een van de dieptste vragen: zijn de wiskundige begrippen zelf beïnvloed door maatschappelijke factoren? Die vraag is enige tijd geleden expliciet aan de orde gesteld door een historicus van de wiskunde en als vierde verhaal kan ik dus iets vertellen over zijn argument.' De gast legt uit dat hij recent werk bedoelt van Donald MacKenzie van de universiteit van Edinburgh¹³. MacKenzie heeft het ontstaan van de mathematische statistiek in de periode rond 1900 bestudeerd.

Mathematische statistiek is de nu wat ouderwetse naam voor de soort statistiek die meer inhoudt dan alleen maar getallen verzamelen en percentages en gemiddelden berekenen. Met mathematische statistiek kunnen ook zulke dingen als regressie en correlatie tussen statistische variabelen berekend worden, en men kan conclusies formuleren over grote populaties op basis van steekproeven. De daarvoor nodige wiskundige theorie werd rond 1900 in Engeland ontwikkeld; daarbij werd een verbinding gelegd tussen de oudere verzamelende statistiek en de methoden der waarschijnlijkheidsrekening.

De grote namen in de beginfase van de wiskundige statistiek waren Francis Galton (1822-1911), Karl Pearson (1857-1936) en Ronald A. Fisher (1890-1962). Hun belangstelling voor de statistiek was nauw verbonden met hun interesse in wat genoemd werd 'Eugenics', Eugenetica. Darwin had de ordening van de levende natuur en de evolutie van de soorten verklaard door natuurlijke selectie en 'survival of the fittest'. Sommige mensen meenden dat die processen ook in de menselijke maatschappij speelden. Zulke zogenaamde 'sociaal Darwinistische' ideeën werden vooral gepropageerd met de wens om de Britse maatschappij sterk en stabiel te houden. Engeland was een rijk, industrieel en imperialistisch land, met een relatief kleine heersende klasse en een grote arbeidersklasse die in zeer behoeftige omstandigheden leefde. De heersende klasse bestond uit grootgrondbezitters en beroeps-

groepen zoals doctoren en juristen die een hogere professionele opleiding hadden genoten. Aanhangers van het sociaal Darwinisme meenden dat de kracht en de stabiliteit van het Britse rijk het best beschermd konden worden door er voor te zorgen dat de maatschappelijk sterken (dus de heersende klasse) de eigenschappen behielden die ze tot maatschappelijk sterk (en dus heersend) maakten. Deze eigenschappen zouden bewaard kunnen blijven door de natuurlijke erfelijkheid ervan in banen te leiden. Eugenetica was de term die gebruikt werd voor genetisch/politieke maatregelen met dat doel. Velerlei maatregelen werden voorgesteld, van belastingregelingen die het voor de heersende klasse voordelig en voor de arbeidersklasse onvoordelig maakte veel kinderen te hebben, tot gedwongen sterilisatie van de maatschappelijk 'ongeschikte' individuen. Er was een Eugenetische beweging die van ca. 1880 tot ca. 1940 vrij grote invloed had op het maatschappelijk denken, vooral in het begin van die periode.

Galton voerde zelf de term 'Eugenetica' in. Hij was dan ook vast overtuigd van de grondbeginselen van de Eugenetica. Maar hij was ook een uitgesproken positivistisch denkende wetenschapper en hij meende daarom dat de argumenten voor eugenetica wetenschappelijk bewezen moesten worden met experimenten en metingen. Hij begon daarom een uitvoerig onderzoeksprogramma met als doel de erfelijkheid van eigenschappen aan te tonen en te meten. Hij verzamelde massa's gegevens over allerlei eigenschappen van ouders en hun kinderen. De vraag die hij nu moest beantwoorden was hoe sterk het voorkomen van bepaalde eigenschappen bij de kinderen gelieerd, gecorreleerd was met het voorkomen van die eigenschappen bij de ouders. Dat was een nieuw probleem; er was nog geen wiskundige theorie van correlatie van eigenschappen ontwikkeld. Galton werkte zo'n theorie uit, stelde een formule op voor de 'correlatiecoëfficiënt' en paste die toe in zijn onderzoek. Hij publiceerde zijn nieuwe theorie over correlatie en regressie in zijn boek *Natural Inheritance* in 1899.

Pearson nam Galtons benadering over en werkte hem verder uit; door zijn onderwijs en publikaties werd de theorie algemeen bekend. Evenals Galton

beschouwde Pearson zijn bijdragen tot de statistiek steeds als essentieel onderdeel van de studie van erfelijkheid en evolutie.

Zo ontstonden het begrip correlatie en de bijbehorende wiskundige theorie binnen een zeer complex samenspel van sociale theorieën, wetenschappelijk onderzoek en wiskundige theorievorming. MacKenzie heeft deze ontwikkeling zorgvuldig beschreven en hij gebruikt die als voorbeeld om aan te tonen dat wiskundige begrippen en technieken zelf beïnvloed kunnen zijn door maatschappelijke factoren en dat die begrippen en technieken dus niet ideologisch neutraal zijn. Zijn argument verloopt als volgt: Galton koos een zekere wiskundige formule voor de correlatiecoëfficiënt; daarmee legde hij het begrip correlatie op een speciale manier wiskundig vast. Zijn keuze van formule is voor de hand liggend in de context van de erfelijkheidsproblematiek. De keuze ligt niet zo erg voor de hand in andere gevallen waar correlatie optreedt; daar zouden andere formules de voorkeur hebben. Zulke andere formules werden inderdaad ook opgesteld, maar tenslotte was het toch Galtons formule die algemeen aanvaard werd. De statistische theorie canoniseerde, om zo te zeggen, het begrip correlatie dat die formule uitdrukte. MacKenzie stelt dat deze gang van zaken 'de invloed bewijst van eugenetica op de ontwikkeling van de statistische theorie als kennissysteem.'¹⁴ Met andere woorden, hij stelt dat maatschappelijke invloeden op de wiskunde dieper ingrijpen dan het niveau van toepassingen of van snelheid van ontwikkeling, en dat ze de kern zelf van de wiskunde als kennissysteem kunnen raken. MacKenzie's werk maakt duidelijk dat de vraag die C stelde door sommige historici serieus genomen wordt en dat er, hoewel het antwoord zeker niet definitief geleverd is, enige aanwijzingen zijn voor een beantwoording in positieve zin.

13 Afscheid

Weer gaat de bel, de leerlingen wachten, er is geen tijd voor verdere discussie. C zegt nog dat de laatste episode hem niet overtuigd heeft. D – wat D denkt weet ik niet, waarschijnlijk verbaast hij zich nog steeds over wiskundigen. E blijft overtuigd van zijn

eigen standpunt. F is teleurgesteld: waarom is er niets gezegd over verantwoordelijkheid? De gast heeft maar een zwak excuus: er was geen tijd. Geen tijd omdat de discussie zich toespitste op één speciaal probleem, namelijk de vraag naar de invloed van de maatschappij op de wiskunde. Alle episodes gingen daarover. Het waren voorbeelden van invloed van de maatschappelijke omgeving op de wiskunde, invloed op de richting van onderzoek (het onderzoek van de Platonische lichamen, de ontwikkeling van de computer), op de stijl (de rigorisering in de negentiende-eeuwse zuivere wiskunde) en op de wiskundige begrippen zelf (MacKenzie's argument). Dat was al stof genoeg voor een lang gesprek in de leraarskamer. Maar er valt natuurlijk veel meer te zeggen over de maatschappelijke aspecten van de wiskunde. Om dat te illustreren produceert de gast een lijst van boeken en artikelen over de maatschappelijke functie van de wiskunde¹⁵ en hij wijst F op een aantal titels die van belang zijn in verband met de kwestie van verantwoordelijkheid, in het bijzonder Heims' dubbelbiografie van Von Neumann en Wiener, twee wiskundigen die in hun carrière intens geconfronteerd werden met vragen van verantwoordelijkheid.

Terwijl hij de kamer verlaat stelt A een laatste vraag aan de gast. Hij zegt: 'Je hebt alleen maar verhalen verteld. Maar is geschiedenis niet meer dan een collectie verhalen? Is het niet een wetenschap? Vinden historici geen antwoorden op de vragen waar we het over hadden? Vinden ze geen *wetten* over de ontwikkeling van de wiskunde?'

En zo wordt de gast verjaagd uit zijn veilige positie van verteller van verhalen. En hier denk ik dat ik zelf ook mijn veilige positie met de denkbeeldige school en de denkbeeldige leraren moet verlaten en die vraag rechtstreeks moet beantwoorden. Mijn antwoord is: nee, geschiedenis levert geen wetten. Sommige historici schrijven soms wel eens wetten op die ze menen te onderkennen, maar die zijn altijd aanvechtbaar (voor zover ze niet zinledig of triviaal zijn). De reden dat geschiedenis geen wetten levert is dat de vragen waarop die wetten het antwoord zouden moeten leveren te ingewikkeld zijn. Het zijn vragen zoals die besproken werden in de leraarskamer. Dan zou je dus kunnen zeggen: welk

nut heeft het om die vragen te stellen als ze niet beantwoord kunnen worden?

Ik denk dat het heel nuttige vragen zijn; ze inspireren, ze geven richting aan historisch onderzoek (ze geven aanwijzingen waar je zou kunnen zoeken naar verhalen) en ze verbinden het werk van de historicus van de wiskunde met een belangrijke discussie, namelijk die over de maatschappelijke functie van de wiskunde. Die discussie speelt ook onder leerlingen (misschien is de vraag 'waar is dat nu voor nodig?' vaak onbeantwoordbaar, maar hij is wel heel belangrijk) en onder leraren. Ik denk dat het een heel waardevolle discussie is. En in dit verhaal heb ik geprobeerd te laten zien hoe geschiedenis van de wiskunde kan helpen om daarbij een eigen positie te bepalen.

14 Appendix

Enige boeken en artikelen over de maatschappelijke functie van wiskunde

A Boeken

ALBERTS, G. e.a., *Zij mogen daarbij uiteraard de Zuivere Wiskunde niet Verwaarlozen*, Amsterdam 1987 [verslag van een congres over het Mathematisch Centrum en de wiskundebeoefening in Nederland na 1945].

BOOSS, B. & HØYRUP, J., *Von Mathematik und Krieg – über die Bedeutung der Rüstung und Militärische Anforderungen für die Entwicklung der Mathematik in Geschichte und Gegenwart*, Marburg 1984.

BOOSS, B. & KRICKEBERG, H. (eds), *Mathematisierung der Einzelwissenschaften*, Basel 1976 [artikelen over het gebruik van wiskunde in natuurwetenschappen en sociale wetenschappen, bevat een uitgebreide bibliografie].

DAVIS, P. J. & HERSH, R., *The Mathematical Experience*, Boston 1981 [zeer leesbaar overzicht van vele 'externe' aspecten van wiskunde].

ELTON, M. (ed), *Mathematics Development in the Third World Countries*, Amsterdam 1979 [congresverslag].

FORESTER, T. (ed), *The microelectronics revolution*, Oxford 1980 [artikelen over micro-elektronica en de economische en sociale gevolgen daarvan].

FOX, L. H. e.a. (eds), *Women and the Mathematical Mystique*, Baltimore 1980 [voordrachten gehouden tijdens een conferentie over vrouwen en wiskunde].

GÖTZE, H. & WILLE, R. (eds), *Musik und Mathematik; Salzburger Musikgespräch 1984 unter Vorsitz von Herbert von Karajan*, Berlin 1985.

HARDY, G. H., *A Mathematician's Apology* (with foreword by C. P. Snow), Cambridge 1967 (eerste editie 1940) [misschien wel de beroemdste verwoording van de visie van een zuiver wiskundige op zijn vak].

HEIMS, S. J., *John von Neumann and Norbert Wiener, from Mathematics to the Technologies of Life and Death*, Cambridge (Mass.) 1980 [biografie van Von Neumann en Wiener, beide nauw betrokken bij wiskundige ontwikkelingen die grote invloed hadden op de maatschappij].

IRVINE, J. e.a. (eds), *Demystifying Social Statistics* London 1979 [kritische artikelen over maatschappelijk gebruik van statistiek].

OTTE, M. (ed), *Mathematiker über die Mathematik*, Berlin 1974 [essays door wiskundigen over wiskunde].

STEEN, L. A., (ed), *Mathematics Today, Twelve Informal Essays*, Berlin 1978 [de essays gaan over recente belangrijke ontwikkelingen in de wiskunde].

STEEN, L. A., *Undergraduate Mathematics Education in the People's Republic of China*, Washington (Math. Assoc. of America) 1984 [rapport van een bezoek aan China van een Noord-amerikaanse delegatie in 1983].

B Artikelen

STRUİK, D. J., 'On the Sociology of Mathematics', *Science and Society*, 6 (1942), pp. 58-70 [kort historisch overzicht van maatschappelijke factoren die van invloed zijn geweest op wiskunde].

BOS, H. J. M. & MEHRTENS, H., 'The Interactions of Mathematics and Society in History; some Exploratory Remarks', *Historia Mathematica*, 4 (1977) pp. 7-30 [overzicht, bespreekt verschillende maatschappelijke vormen van wiskunde, bevat uitgebreide bibliografie].

MATTHEIJ, R. M. & MOLENAAR, J., 'Mathematics and Industry: contamination or fertilization?', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (4) 4 (1986) pp. 245-254.

MEEDER, M. & MEESTER, F., *Vrouwiskundig, Meisjes in het Wiskundeonderwijs*, Amsterdam 1984.

SCHNEIDER, I., 'Der Einfluss der Praxis auf die Entwicklung der Mathematik vom 17. bis 19. Jahrhundert', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 9 (1977) pp. 195-205 [uitvoerig overzicht van ontwikkelingen in de wiskunde die te maken hadden met verwachtingen vanuit de praktijk].

Noten

1 Dit is de vertaalde en enigszins omgewerkte tekst van een lezing die ik gehouden heb tijdens een congres voor leraren over het gebruik van historische onderwerpen in het wiskundeonderwijs. Het congres had plaats in Vingsted (Denemarken), Januari 1983.

De Engelse tekst is gepubliceerd: 'Mathematics and its social context: a dialogue in the staffroom, with historical episodes', *For the learning of Mathematics* 4 (1984) issue 3, pp 2-9; een Deense vertaling: 'Matematikken og dens sociale sammenhænge, en samtale på et lærerværelse-med historiske episoder', *Nordisk Matematisk Tidsskrift* 32 1984, pp. 149-166 (vertaald door K. Andersen).

2 De boeken over toepassingen in het wiskunde-onderwijs waar A op doelt zijn: NOBLE, B., *Application of Undergraduate Mathematics in Engineering*, (Mathematical Association of America), n.p. 1976; SHARRON, S. & REYS, R., *Applications in School Mathematics, 1979 Yearbook*, (National Council of Teachers of Mathematics), Reston (Virginia) 1979 [hierin staat een uitgebreide bibliografie]; BELL, M. e.a., *A Source-book of Applications of School Mathematics*, (N.C.T.M.), Reston (Virginia) 1980; STEUR, H., *Levende Wiskunde, Toepassingen Geordend naar Wiskundig Onderwerp*, Culemborg 1980. Het verkeersvoorbeeld komt uit Steurs boek, pp. 184-185. Vergelijk ook: GRIFFITH, H.B. & HOWSON, A.G., *Mathematics, Society and Curricula*, Cambridge 1974.

3 [Cockroft, W.H.], *Mathematics Counts, Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools, under the chairmanship of Dr. W.H. Cockroft*, London (H.M.S.O.) 1982; zie in het bijzonder het hoofdstuk over de 'mathematical needs of adult life', pp. 5-11.

4 HARDY, G.H., *A Mathematician's Apology* (foreword by C.P. Snow), Cambridge 1967 (eerste editie 1940); leraar C heeft de volgende passage in gedachten:

'The "real" mathematics of the "real" mathematician, the mathematics of Fermat and Euler and Gauss and Abel and Riemann, is almost wholly "useless" ... It is not possible to justify the life of any genuine professional mathematician on the ground of the "utility" of his work.' (pp. 119-120).

5 Vergelijk bijvoorbeeld WUSSING, H., *Mathematik in der Antike, Mathematik in der Periode der Sklavenhaltergesellschaft*, Leipzig 1962, pp. 53-56.

6 PLATO, *Timaeus*, in *Verzameld Werk* (vert. X. de Win, Antwerpen ³1980), 5 pp. 191-307; het betreft *Timaeus* 55c, p. 243. Er wordt hierbij wel verband gelegd met de twaalf tekens van de dierenriem, maar de tekst is zeer omstreven.

7 PROCLUS, *A Commentary on the first Book of Euclid's Elements* (tr. intr. G.R. Morrow), Princeton 1970, p. 4: 'in the entrance hall of the true forms'.

8 Vergelijk over deze drie tradities bijvoorbeeld Kearney, H., *Science and Change 1500-1700*, London 1971.

9 Kepler publiceerde zijn vondsten in *Mysterium Cosmographicum* (1596), daaruit komt het plaatje van de geneste bollen en lichamen (Figuur 3); die figuur wordt veel afgedrukt in boeken over de geschiedenis der natuurwetenschappen.

10 HESSEN, B., 'The Social and Economic Roots of Newton's "Principia"', in *Science at the Crossroads* (ed. P.G. Werskey, London 1971 (eerste editie 1931)), pp. 149-212.

11 Over ballistiek en praktische wiskunde in het algemeen zie: BOS, H.J.M., 'Was Lehren uns Historische Beispiele über Mathematik und Gesellschaft?', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 10 (1978), pp. 69-75, en SCHNEIDER, I., 'Die Mathematischen Praktiker im See-, Vermessungs- und Wehrwesen vom 15. bis 19. Jahrhundert', *Technikgeschichte* 37 (1970), pp. 210-242.

12 DEDEKIND, R., *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* Braunschweig 1872; in *Gesammelte Werke* (eds H. Fricke e.a., Braunschweig 1930-1932) vol. 3 pp. 315-334. De bedoelde passage uit de inleiding luidt als volgt:

'Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vorzutragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik. Bei dem Begriffen der Annäherung einer veränderlichen Grösse an einen festen Grenzwert und namentlich bei dem Beweis des Satzes, dass jede Grösse, welche beständig über alle Grenzen wächst, sich gewiss einem Grenzwert nähern muss, nahm ich meine Zuflucht zu geometrischen Evidenzen. Auch jetzt halte ich ein solches Heranziehen geometrischer Anschauung bei dem ersten Unterricht in der Differentialrechnung vom didaktischen Standpunkte aus für ausserordentlich nützlich, ja unentbehrlich, wenn man nicht gar zu viel Zeit verlieren will. Aber dass diese Art der Einführung in die Differentialrechnung keinen Anspruch auf Wissenschaftlichkeit machen kann, wird wohl niemand leugnen' (*Ges. W.* 3 pp. 315-316).

De stelling waar Dedekind naar verwijst wordt tegenwoordig meestal in termen van functies geformuleerd: een begrensde stijgende functie heeft een limiet.

13 MACKENZIE, D., 'Eugenics and the Rise of Mathematical Statistics in Britain', in: *Demystifying Social Statistics* (IRVINE, J. e.a. (eds), London 1979), pp. 39-50; en MACKENZIE, D., *Statistics in Britain 1865-1930, the Social Construction of Scientific Knowledge*, Edinburgh 1981.

14 MacKenzie 'Eugenics ...' (zie vorige noot), p. 47.

15 Zie de Appendix.

► Viertallen

Schrijf vier natuurlijke getallen naast elkaar (zoals 15 7 11 29)

Schrijf er een viertal onder, als volgt:

schrijf onder elk getal het verschil met het volgende getal, positief gerekend, onder het vierde getal het verschil met het eerste getal

(dus 8 4 18 14)

Herhaal dit proces enige malen, totdat je iets bijzonders opmerkt

(dus 4 14 4 6
..)

Wat voor bijzonders merk je op?

Probeer vervolgens hetzelfde, uitgaande van een ander viertal.

Gebeurt er altijd hetzelfde?

Ga tenslotte na, of er hetzelfde gebeurt als je met drietallen begint.

Fun with mathematics, no. 50 (1981)
c/o Mary Stager, Ontario, Canada

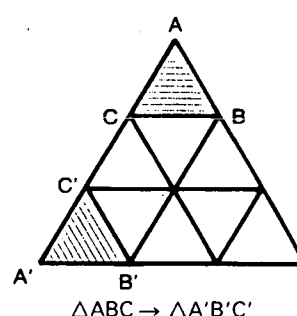
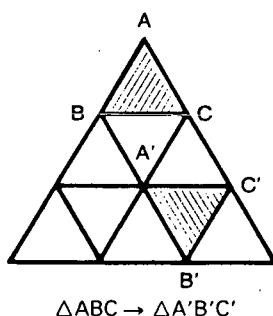
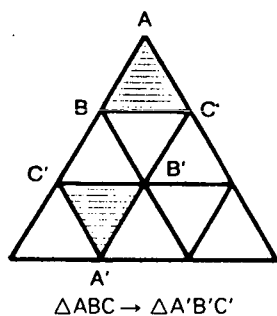
Fun with mathematics, no. 50 (1981)
c/o Mary Stager, Ontario, Canada

► Driehoeken

In elk van de volgende gevallen wordt driehoek ABC afgebeeld op driehoek $A'B'C'$. Dit gebeurt met behulp van een verschuiving (translatie), een draaiing (rotatie) of een spiegeling, of met behulp van een combinatie van zulke afbeeldingen. Al de driehoeken zijn gelijkzijdig.

Geef in de drie onderstaande gevallen aan welke afbeeldingen er gebruikt zijn:

- als er een verschuiving is gebruikt, geef dan de richting en de afstand;
- als er een draaiing is gebruikt, geef dan draaicentrum en draaihoek;
- als er een spiegeling is gebruikt, geef dan de spiegelas.



In de rubriek Recreatie van Euclides, 63ste jaargang, nummer 6, maart '88, stelde dr. P. G. J. Vreduin het volgende probleem voor:

Bepaal het kleinste getal n zodat als er in een straat n mensen wonen er daaronder zeker 11 te vinden zijn waarvoor de som der leeftijden een veelvoud is van 11. (opgave nr. 587.)

In nummer 9 heeft de steller van het probleem dit grondig uitgeplozen en komt tot de vaststelling dat $2 \cdot 11 - 1 = 21$ volstaat.

Eén van de lezers heeft hem medegedeeld dat er een stelling zou bestaan die algemeen als volgt luidt:

Voor elk stel van $2n - 1$ natuurlijke getallen zijn er altijd daaronder n te vinden, waarvoor de som een n -voud is.

Bij navraag door mij, waar die stelling gepubliceerd was, bezorgde dr. Karel Post van de Technische Universiteit Eindhoven me *eerst* een uittreksel uit het Zentralblatt van augustus '88, waarin vermeld wordt: Een *eerste* artikel van Zun Shan in Adv. Math. Bejing 12, 299- 301 (1983) in het Chinees, en een *tweede* artikel van Gao Weidong in J. North-east NorM Univ. Nat. Sci. Ed. 1985, no. 4, 15-17 (1985), ook in het Chinees gesteld.

Enige tijd later ontving ik van dr. Karel Post de *eerste* Chinese tekst, maar zonder vertaling. Die kreeg ik later door bemiddeling van prof. dr. R. Piessens van de K.U.L., waar een Chinese student voor de vertaling zorgde.

Maar dr. Karel Post bezorgde me ook een *ander* bewijs van de stelling, zoals dat in Eindhoven gevonden werd door dr. A. Blokhuis, dr. H. Wilbrink en dr. Karel Post. En dat is korter en m.i. helderder dan het *eerste* Chinese bewijs.

De tekst en de vertaling van het *tweede* Chinese bewijs heb ik nog niet gekregen.

2 Het eerste Chinese bewijs van Zun Shan

Als er drie natuurlijke getallen at random gekozen worden, zijn er altijd twee waarvan de som even is. Voor vijf getallen zijn er altijd drie waarvan de som een drievoud is.

► De stelling van Zun Shan

Frank Laforce

0 Inleiding van de redactie

In het welbekende gezelschapsspel Risk kunnen de spelers per beurt een kaartje bemachtigen. Op de kaartjes komen drie verschillende plaatjes voor, en wie drie kaartjes heeft met of drie gelijke, of drie verschillende plaatjes erop, wordt daarvoor beloond. Het maximale aantal benodigde kaartjes is nu 5.

Men kan deze gang van zaken weergeven met behulp van getallen: stel dat er drie soorten kaartjes zijn, met respectievelijk een 1, een 2, of een 3 erop; drie gelijke getallen wil zeggen: $1 + 1 + 1 = 3$, $2 + 2 + 2 = 6$ of $3 + 3 + 3 = 9$; drie verschillende getallen wil zeggen: $1 + 2 + 3 = 6$.

Dit zijn juist alle gevallen waarin de som van de getallen op drie kaartjes deelbaar is door 3, en het is zeker dat er uit een set van vijf kaartjes altijd wel drie genomen kunnen worden waarmee dat lukt.

Frank Laforce beschrijft in het bijgaande artikel een uitbreiding van het voornoemde. Hoe het uitgebreide Risk-spel er uit gaat zien, dat wordt aan de verbeelding van de lezers overgelaten!

Ko Shao en Sun Qi bewezen dat voor zeven getallen er altijd vier te vinden waarvan de som deelbaar is door vier.

Zij uitten het vermoeden dat onder $2n - 1$ natuurlijke getallen, er altijd n kunnen gevonden worden waarvan de som deelbaar is door n .

Shan geeft *eerst* een drietal lemma's waarvan het eerste niet bewezen wordt, vermits hij verwijst naar een Chinese publicatie van Han Luogeng, Additive Theory of Prime Numbers, Scientific Press, 1957.

Het bewijs wordt dan geleverd voor n priem. Het *tweede* deel van het bewijs toont aan dat als de stelling geldt voor a en b , ze ook geldt voor ab .

Voor het *eerste* deel geven we de voorkeur aan het bewijs uit Eindhoven. Het *tweede* deel is voor beide gelijklopend.

We zullen echter eerst wat materiaal moeten aanvoeren: de stellingen van Gauss en Fermat, enkele eigenschappen van de combinatieleer en van de coëfficiënten van de termen bij de machten van veeltermen.

3 De stellingen van Gauss en Fermat

3.1. De stelling van Gauss

Zij p een priemgetal en a een natuurlijk getal, ondeelbaar door p .

Dan leveren de produkten $1a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ bij deling door p de resten, afgezien van de volgorde, $1, 2, 3, \dots, p-1$.

Voorbeeld: Stel $a = 10$ en $p = 7$, dan leveren de getallen 10, 20, 30, 40, 50, 60 bij deling door 7 de resten: 3, 6, 2, 5, 1, 4 op.

Bewijs van de stelling:

Er is geen rest 0.

Inderdaad: $ka = qp$ zou impliceren dat p een deler is van k , maar k is kleiner dan p .

Er zijn geen twee gelijke resten.

$ka = sp + x$ en $ma = tp + x$ (veronderstel $k > m$) zou geven:

$$(k - m)a = (s - t)p$$

en vermits k en m kleiner zijn dan p , is $k - m$ niet deelbaar door p , wat een tegenstrijdigheid oplevert. Dus alle $p - 1$ resten zijn verschillend en geen ervan is nul.

3.2 De stelling van Fermat

Schrijven we de $p - 1$ gelijkheden:

$$1a = q_1p + r_1$$

$$2a = q_2p + r_2$$

$$(p-1)a = q_{p-1}p + r_{p-1}$$

$$\text{met } \{r_1, r_2, \dots, r_{p-1}\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$$

en vermenigvuldigen we deze met elkaar dan vinden we links $(p-1)! a^{p-1}$ en rechts een aantal termen die één of meer factoren p bevatten plus de term die geen factor p bevat: het produkt

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{p-1} = (p-1)!$$

Met andere woorden:

$$(p-1)! a^{p-1} = Qp + (p-1)!$$

$$(p-1)!(a^{p-1} - 1) = Qp = 0 \pmod{p} \text{ en vermits } (p-1)! \text{ ondeelbaar is door } p, \text{ priem:}$$

$$(a^{p-1} - 1) = 0 \pmod{p}.$$

Als p priem is en a en p onderling ondeelbaar zijn dan geldt het bovenstaande.

Dit is de 'kleine stelling van Fermat'.

Voorbeeld: stel $a = 10$ en $p = 7$, dan is $10^6 - 1 = 999999$ deelbaar door 7; om precies te zijn: $999999 = 142857 \cdot 7$.

4 Enkele eigenschappen uit de combinatieleer

4.1.

Het aantal manieren waarop je uit $2p - 1$ getallen er p kan kiezen is $\binom{2p-1}{p} = (2p-1)!/(p!(p-1)!)$.

Als p priem is, dan is $\binom{2p-1}{p}$ geen p -voud.

Inderdaad:

$$\binom{2p-1}{p} = ((2p-1)(2p-2)\dots(p+1))/(p-1)!$$

bevat geen priemfactor p . Inderdaad: anders moet p een deler zijn van een getal $2p - i$, met $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, dus een deler zijn van $p - i$, welk getal kleiner is dan p .

We kunnen bewijzen dat voor p priem, $\binom{2p-1}{p} = p\text{-voud} + 1$.

Stel: $\binom{2p-1}{p} = p\text{-voud} + m$ met $m \in \{1, 2, \dots, p-1\}$.

Na vereenvoudiging en vermenigvuldiging met $(p-1)!$ geeft dat $(2p-1)(2p-2)\dots(p+1) = p$ -voud + $m \cdot (p-1)!$

Maar het eerste lid kunnen we herschrijven:

$(2p-1)(2p-2)\dots(2p-(p-1)) =$ een aantal termen die één of meerdere factoren p bevatten (dus een p -voud) en, afgezien van het teken, het produkt $(p-1)!$.

Er is als $p > 2$ een even aantal mintekens. Dus besluiten we: het eerste lid is een p -voud + $(p-1)!$,

en dus geldt $m = 1$. Voor $p = 2$ hebben we $\binom{3}{2}$

$= 3 = 2$ -voud + 1; de bewering geldt dus ook voor $p = 2$.

Voorbeeld: $p = 5$. $\binom{9}{5} = 126 = 1 \pmod{5}$.

p moet priem zijn, want voor $p = 4$ is $\binom{7}{4}$

$= 35 = 8 \cdot 4 + 3$.

4.2

De coëfficiënt van $a^r \cdot b^s \cdot c^t$ in $(a + b + c + \dots)^{p-1}$ met $r + s + t = p - 1$ is

$$\binom{p-1}{r, s, t} = (p-1)! / (r!s!t!).$$

en als p priem is dan is de algemene multinomiaal-coëfficiënt $\binom{p-1}{r, s, t}$ geen p -voud.

4.3

Als onder $2p-1$ getallen er $p-k$ vast gekozen zijn, en k vrij te kiezen zijn, met p priem en $p > k \geq 1$, dan kan men deze k op

$$v = \binom{2p-1-(p-k)}{k} \text{ manieren kiezen.}$$

$v = (p+k-1)! / (k!(p-1)!)$ en dit is dan een p -voud, want

$v = ((p+k-1)(p+k-2)\dots(p+1)p)/k!$ en p , priem, valt niet weg.

5 Bewijs van de stelling als $n = p$ priem

Bewijs uit het ongerijmd!

Noem de $2p-1$ getallen: $x_1, x_2, \dots, x_{2p-1}$.

Stel dat geen enkele van de $\binom{2p-1}{p}$ sommen van p getallen, gekozen uit de $2p-1$ gegeven waarden, een p -voud oplevert. Dan is krachtens de stelling van Fermat de $(p-1)$ -de macht van elk van die sommen gelijk aan 1 modulo p .

Dus is de som S van al de $(p-1)$ -de machten van deze sommen precies $\binom{2p-1}{p}$ (modulo p) en dit is,

zoals hoger aangetoond, verschillend van nul (modulo p). (1)

Bereken het aantal keren dat de term

$$x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_{2p-1}^{a_{2p-1}},$$

waarbij

$a_1 + a_2 + \dots + a_{2p-1} = p-1$, afgezien van zijn vaste multinomiaalcoëfficiënt, in S voorkomt.

Vermits we $2p-1$ positieve* gehele exponenten hebben en de som daarvan $p-1$ is, moet er een aantal 0 zijn; stel: l van deze exponenten zijn 0. Hierin is $l \geq p$.

We hebben dan in een som van p getallen reeds $(2p-1) - l$ getallen x_i vast gekozen en we moeten die nog aanvullen met $p - (2p-1-l) = l - p + 1$ getallen, te kiezen uit de l resterende getallen. Hierin is $1 \leq l - p + 1 \leq p$.

Krachtens 4.3, met $k = l - p + 1$, zijn er zo v termen en v is deelbaar door p .

Voorbeeld: Zij $p = 7$, $2p-1 = 13$, $l = 11$, $p-l = 2$. De $2p-1$ getallen zijn: $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m$; een som van één van de termen uit S is $(a + b + c + d + e + f + g)^6$.

$a^4 b^2$ heeft daarin als coëfficiënt: $\binom{6}{4,2} = 15$, geen 7-voud.

Maar ook bij $(a + b + c + d + e + f + h)^6$ komt die term voor.

Hoeveel sommen van 7 getallen zijn er die a en b bevatten? Uit 13 kozen we al a en b . Blijven er nog 5 getallen te kiezen uit 11. En dat geeft op $\binom{11}{5}$

$= 11 \cdot 7 \cdot 6$ manieren. Dus de coëfficiënt van $a^4 b^2$ in S is $15 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 6$ en dat is een 7-voud.

Uit 4.3 weten we nu derhalve dat elke term van de vorm $x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_{2p-1}^{a_{2p-1}}$ in S een coëfficiënt heeft die deelbaar is door p , dus is S deelbaar door p . Wat in contradictie is met hetgeen hoger gevonden is. (1)

Dus is er wel een p -tal getallen te vinden waarvan de som een p -voud is.

6 Bewijs van de stelling als n niet priem is

We gaan bewijzen dat, als de stelling waar is voor $n = a$ en $n = b$, ze dan ook geldig is voor $n = ab$.

Schrijf $x_1, x_2, \dots, x_{2a-1}, x_{2a}, \dots, x_{2ab-1}$.

Hieronder komen er a voor die een som hebben die een veelvoud is van a .

Zet die vooraan en bekijk de $2ab - a - 1$ resterende x .

Onder de eerste $2a - 1$ hiervan zit weer een a -tal met som gelijk aan een veelvoud van a , enz. . .

We kunnen k groepjes afzonderen mits

$$ka \leq 2ab - 1, \text{ dus } k \leq 2b - \frac{1}{a}, \text{ d.w.z.: } k = 2b - 1$$

is juist haalbaar.

We hebben dus $2b - 1$ sommen, die alle deelbaar zijn door a . Noem ze $ay_1, ay_2, \dots, ay_{2b-1}$.

Uit de $2b - 1$ getallen y_i kunnen we er b kiezen waarvan de som deelbaar is door b .

We kunnen dus uiteindelijk ab getallen kiezen waarvan de som deelbaar is door ab .

Hiermee is het bewijs geleverd voor alle n .

Inderdaad als n priem is, was dat al bewezen.

Als $m = pq$, met p en q priem, geldt het ook voor die m . Voor $n = pqr = (pq)r = mr$, met p, q, r priem geldt het ook. En zo voorts. . .

Voorbeeld: Zij $a = 2$ en $b = 3$. Dus $n = 6$, en $2n - 1 = 11$. Kiezen we: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

2, 3, 4 geeft ons $2 + 4 = 3 \cdot 2$. Blijft: 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

3, 5, 6 geeft ons $3 + 5 = 4 \cdot 2$. Blijft: 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

6, 7, 8 geeft ons $6 + 8 = 7 \cdot 2$. Blijft: 7, 9, 10, 11, 12.

7, 9, 10 geeft ons $7 + 9 = 8 \cdot 2$. Blijft: 10, 11, 12.

10, 11, 12 geeft ons $10 + 12 = 11 \cdot 2$.

We hebben dus als getallen y_i : 3, 4, 7, 8, 11.

Bekijken we 3, 4, 7, 8, 11 dan is $3 + 4 + 8$ of $3 + 7 + 8$ of $3 + 4 + 11$ of $3 + 7 + 11$ een 3-voud.
 $3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 2 =$

$$(2 + 4) + (3 + 5) + (7 + 9) = 30 = 0 \text{ (modulo 6).}$$

Bibliografie

G. Bosteels, *Leerboek der Rekenkunde*, Ad. Wesmael-Charlier, Namen 1950.

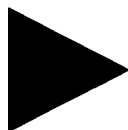
L. Comtet, *Analyse combinatoire I, II*, Collection SUP, Le Mathématicien, Presses Universitaires de France, Paris 1970.

J. Deprez en D. Janssens, *Getaltheorie in het S.O.*, ACCO, Leuven 1986.

Th. Gos, *Leerboek der Rekenkunde*, Het Prisma, Tongeren, 1956.

I. Verbruggen, e.a., *Wiskundig Leerpakket, Combinatieleer en Kanstheorie*, Standaard Educatieve Uitgeverij, Antwerpen, 1985.

* Noot van de redactie: in Vlaanderen heet het getal 0 positief.



Boekbespreking

Friedhelm Padberg: *Didaktik der Arithmetik*; 253 blz.; DM 36.-; Band 7 van de serie Lehrbücher und Monographien der Mathematik; B.I. Mannheim, Wien, Zürich; ISBN 3-411-03147-6.

In zijn voorwoord noemt de schrijver het rekenen het kernstuk van de wiskunde van de eerste vier schooljaren (groep 3 t.m. 7 basisschool). Dit rekenen in de eerste vier schooljaren wordt grondig en uitvoerig behandeld. Naast elkaar bestaande systemen, methoden en opvattingen worden vergeleken en van een oordeel voorzien. Hierbij distancieert de schrijver zich van een introductie van rekenonderwijs op basis van de verzamelingenleer, maar wijst hij op het grote belang van het gebruik maken van reeds bij het kind aanwezige voorkennis van getallen en rekenen. Het schriftelijk rekenen wordt apart van het niet-schriftelijk rekenen behandeld. Per bewerking wordt ingegaan op leerlingfouten, oorzaken en remedies. Een enkele paragraaf is gewijd aan de zakrekenmachine en de computer en wel in hoofdzaak om te beargumenteren dat een grondige rekenkennis en -vaardigheid noodzakelijker dan ooit is bij het gebruik van deze apparatuur. Het bronnenmateriaal komt uit de Duitse en Anglo-Amerikaanse literatuur. Uit Nederland worden Treffers en Ter Heege genoemd door een enkele verwijzing naar een tijdschriftartikel. Het boek gaat over rekenen en rekenonderwijs, maar niet over kinderen die leren rekenen. Conclusie: wie in Boertange over de grens gaat, komt in een andere rekenonderwijswereld.

J.J. Sloff

► **Het tijddal, integreren met zand**

Henk Mulder

Een zandloper is een klok; de hoogte van de zandberg is een maat voor de tijd die verlopen is. Je zou zo iets een tijdberg kunnen noemen. We maken nu een variatie op de vertrouwde zandloper: de zandslinger.

We vullen een trechter met zand, hangen die op aan een lange draad en geven de trechter een zet. Er begint een slingerbeweging waarbij tegelijkertijd zand uitstroomt. We laten het zand vallen op een strook papier en zien hoe aan de einden het zand hoger komt dan in het midden; de zandhoop vormt een *tijddal*.

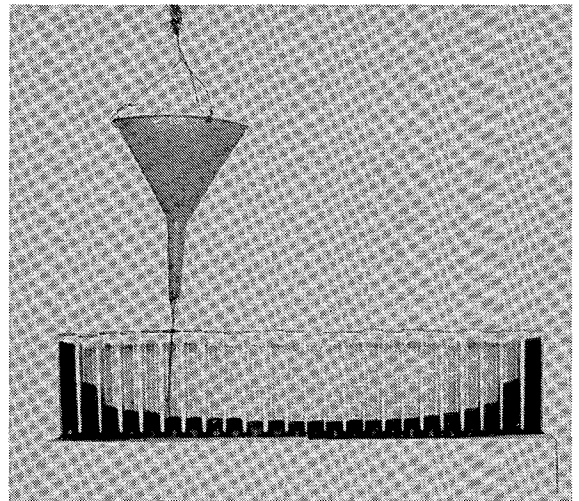
Op de einden blijft meer zand achter, omdat bij een slingerbeweging de snelheid bij het passeren van de middenpositie het grootst is en in de beide uiterste standen even nul.

De vraag is: tot welke hoogte komt het zand, van punt tot punt, te liggen, of, anders gezegd: wat is de theoretisch exacte vorm van het tijddal?

Experiment

Allereerst moeten we een praktische moeilijkheid oplossen. Het neervallende zand vertoont de neiging om zijwaarts weg te stromen. Door schotjes te zetten zouden we dat kunnen beletten. Daartoe voeren we het experiment uit boven een set van

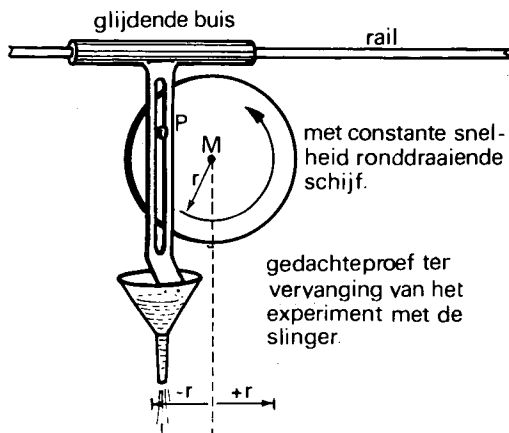
bijvoorbeeld 24 reageerbuisjes (figuur 1). We zorgen er voor, dat de trechterpunt vlak langs de bovenkant van de buisjes scheert, zodat we geen last krijgen met de impuls van het uitstromende zand. We starten vanuit de linker positie en noemen dat tijdstip $t = 0$. Door wat te blazen proberen we de trechter aan het slingeren te houden. Zo wordt na een aantal slingeren de gezochte kromme in eerste aanleg zichtbaar. Natuurlijk is de figuur symmetrisch ten opzichte van de centrale lijn. Er is een vrij breed middendeel en aan de einden loopt het zand sterk op. Het tijddal is vrij vlak, met pieken aan de einden.



Figuur 1 Experiment met 24 reageerbuisjes ter demonstratie van het tijddal

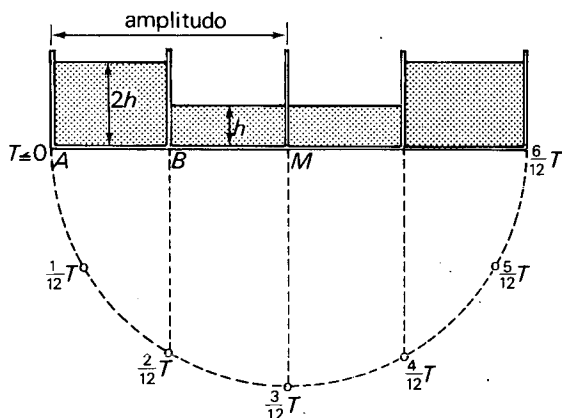
Variatie

Omdat bij een slingering de uitwijking sinusoidaal verloopt met de tijd en een sinusoida op te vatten is als de projectie van een punt dat met constante snelheid een cirkel doorloopt, kunnen we nu een aardige variatie verzinnen. We vervangen de slingerbeweging van onze trechter door een beweging zoals aangegeven is in figuur 2. Een ronddraaiende schijf doet een bus heen en weer schuiven langs een rail, waardoor we de slingering van zoëven nagebootst hebben en niet meer behoeven te blazen.



Figuur 2 Een draaiende schijf drijft de trechter aan, die langs een rail schuift

Als we de tijdsduur voor één volledige heen- en weergaande beweging T stellen, is bijvoorbeeld de tijdsduur van het uiterste punt A (zie figuur 3) tot het centrum gelijk aan $\frac{3}{12}T$.



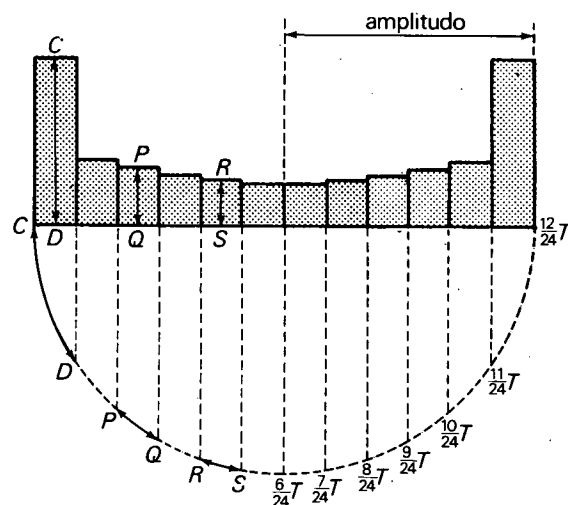
Figuur 3 Het tijddal, opgebouwd uit vier delen

Verdeling in vier of meer vakjes

We kunnen stellen dat de zandhoogte steeds evenredig is met de tijdsduur die nodig is om het betreffende buisje te vullen. Zo'n tijdsduur is dan weer evenredig met de lengte van het bij het buisje beho-

rende cirkelboogje. Als we de zandhoogte gelijk zouden stellen aan de lengte van zo'n boogje, zitten we wat de vorm van de gezochte kromme betreft dus al aardig op de goede weg. De zandhoogte CD (figuur 4) maken we gelijk aan booglengte CD , zandhoogte PQ maken we gelijk aan booglengte PQ en zo verder.

Later moeten we deze blokjesgrafiek in zijn geheel verhogen door middel van een lijnvermenigvuldiging ten opzichte van de x -as. De vermenigvuldigingsfactor wordt mede bepaald door het aantal keren dat de trechter voorbij is gekomen.



Figuur 4 Tijddal met 12 bakjes

De situatie van figuur 1 was alweer een betere benadering; aldaar immers hadden we 24 vakjes. Dit proces van steeds fijnere verdeling zouden we steeds verder moeten voortzetten. Maar op den duur laat het experiment ons in de steek. Wat 'in natura' niet lukt, proberen we nu wiskundig te klaren!

De tijddalkromme, theoretisch

Bij figuur 4 hebben we gesteld dat we de kromme te pakken kunnen krijgen door een zekere lijnvermenigvuldiging toe te passen op de figuur die ontstaat

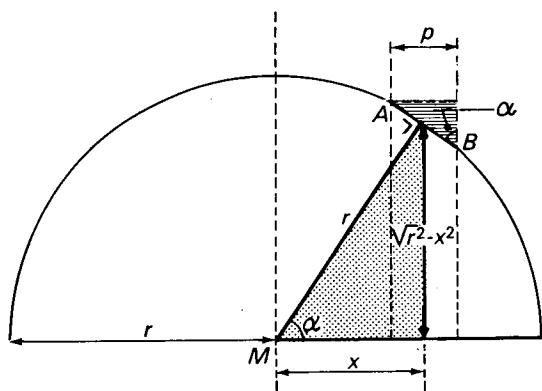
als we kolomhoogte CD gelijk maken aan booglengte CD , kolomhoogte PQ gelijk aan booglengte PQ en zo verder. Bij het zoeken van de echte kromme moeten we dan nog de intervallen (vakjes-breedten) tot nul laten naderen.

In figuur 5 is nu af te lezen:

$$\frac{AB}{p} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sqrt{(r^2 - x^2)}},$$

of, als we boog AB gelijk stellen aan lijnstuk AB :

$$\text{boog } AB = \frac{pr}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}.$$



Figuur 5 De trechter passeert een bakje met breedte p

De bijbehorende zandhoogte is hiermee evenredig,

dus: $h(x) = \frac{cpr}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$ en daarmee is de relatie

tussen zandhoogte en uitwijking gevonden. We zouden de constante c nog kunnen bepalen. Stellen we de hoogte in het midden (dus voor $x = 0$) gelijk aan $h(0)$, dan vinden we door $x = 0$ in te vullen: $h(0) = cp$. En hiermee is een vergelijking van de tijddalkromme gevonden. Deze vergelijking wordt:

$$h(x) = h(0) \cdot \frac{r}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}, \text{ voor } -r < x < r.$$

Om figuur 6 te tekenen hebben we wat coördinaten uitgerekend; hier is alleen de rechterhelft geschetst.

Het middendeel van de tijddalkromme is opvallend vlak. De kromme heeft *asymptoten* voor $x = -r$ en $x = r$. Dit laatste betekent dat de theoretisch gevonden kromme *niet* de werkelijkheid weergeeft. Het zand kan natuurlijk nooit hoger dan de punt van de trechter komen, zodat een verticale asymptoot ondenkbaar is. Het is gelukkig wel zo, dat de kromme beter wordt benaderd, naarmate de buisjes smaller zijn. En we kunnen ook bewijzen dat, hoewel de theoretisch gevonden kromme aan de einden *oneindig* hoog oploopt, de *oppervlakte* onder de kromme voor een bepaald interval (óók aan de grenzen!) toch *eindig* is. Zouden we dus het zand, behorend bij zo'n oneindig hoog oplopende piek in het betreffende reageerbuisje laten zakken, dan zal het zand daarin toch tot een eindige hoogte komen. In figuur 6 is dat ingetekend.

Het is maar goed dat we met reageerbuisjes (of bakjes) hebben gewerkt!

Ten slotte

Dat bij een slingerbeweging de uitwijking als functie van de tijd volgens een sinus verloopt, berust op fysische overwegingen. Dat wordt behandeld in de natuurkundeles. In de wiskundige beschouwing bij de zandstrooier komen evenredigheid, lijnvermenigvuldiging, sinusfunctie als belangrijkste begrippen voor.

Wat hier 'hokjesbreedte' heet, geven we veelal aan met Δx . We zien hoe, als de hokjesbreedte tot nul nadert, de blokjesgrafiek tot een mooie, 'gladde' kromme nadert.

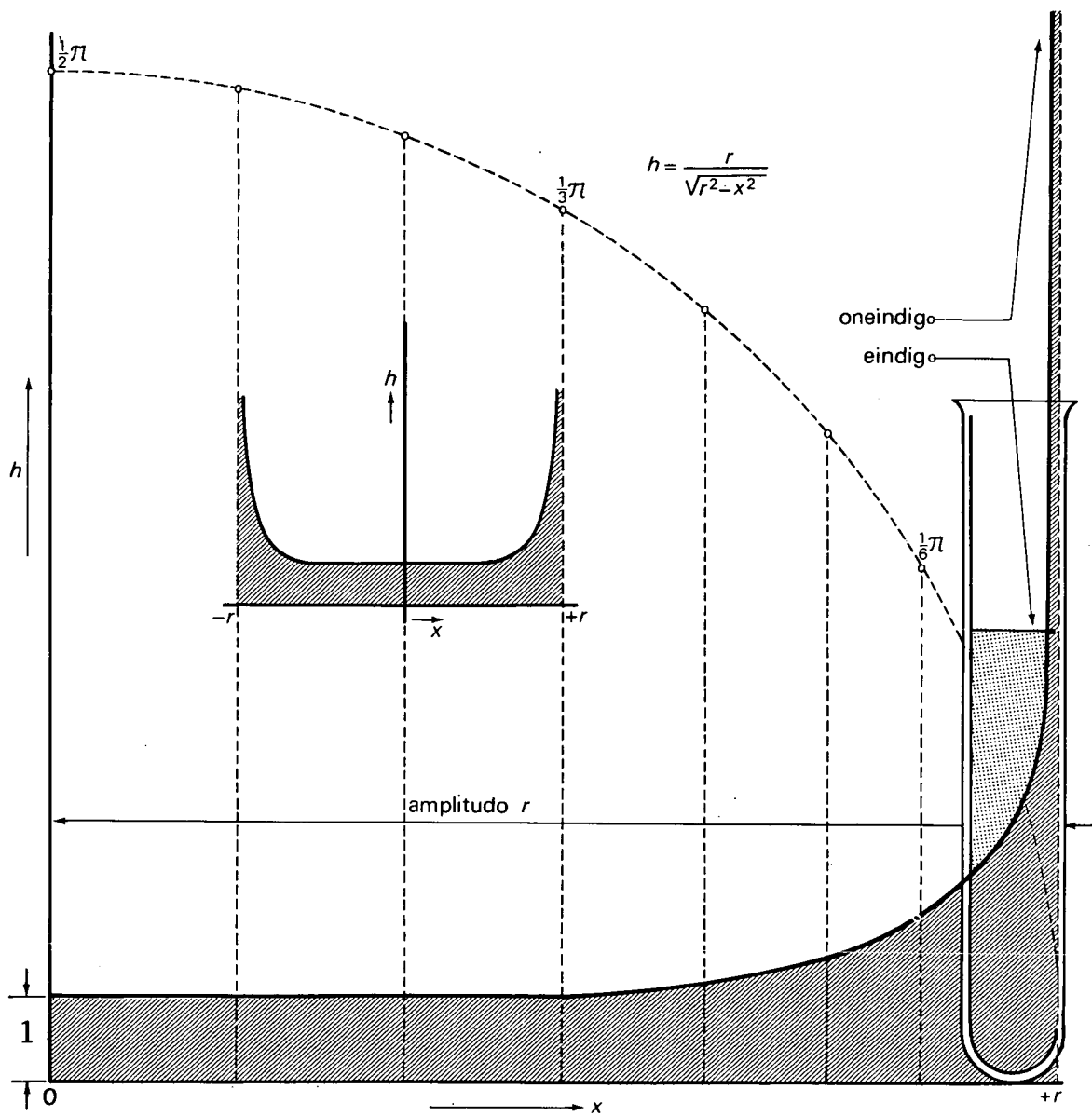
De oppervlakte onder een kromme wordt gevonden door optelling van rechthoeken met breedte Δx . Als Δx tot nul nadert, heet deze optelling: integratie.

Ter controle nog het volgende:

– bij figuur 3 zagen we dat de hoeveelheid zand in een buitenste bakje precies tweemaal zo groot is als in een binnenste, volgend uit $AB = BM$; probeert u dit eens door integreren aan te tonen!

– berekent u ook eens de totale oppervlakte onder de kromme (dus $-r < x < r$)!

(Uitkomst: $\frac{1}{2}\pi$ keer de oppervlakte van de rechthoek met basis $2r$ en hoogte $h(0)$.)



Figuur 6 Constructie van de tijddalkromme

'De zakrekenmachine'

► Op het grensvlak van basischool en brugklas

Hans ter Heege

Als de vernieuwing die zich sinds een tien- à vijftiental jaren in het reken/wiskundeonderwijs van de basisschool manifesteert, doorzet – weinigen twijfelen daaraan –, kunnen we in de nabije toekomst in het voortgezet onderwijs leerlingen verwachten die op de basisschool met andere leerstof dan vroeger in aanraking zijn gekomen. Deze leerlingen zullen de rekenleerstof bovendien op een andere wijze dan vroeger hebben geleerd en de inbreng van kinderen zelf in het leerproces wordt positief gewaardeerd.

Aan de basisvaardigheden wordt in het nieuwe programma meer aandacht besteed. Het hoofdrekenen krijgt eveneens meer accent, terwijl het geïsoleerde cijferwerk teruggedrongen zal worden. Het streven is er op gericht kinderen meer dan voorheen in staat te stellen de basisschoolwiskunde te exploreren. Het ziet er, kort gezegd, naar uit dat daarmee ons basisschoolprogramma over een aantal jaren meer zal voldoen aan de eisen die we er in de moderne tijd aan mogen stellen.

De vraag die in dit artikel aan de orde wordt gesteld, is welke rol de zakrekenmachine in dit moderne, realistisch genoemde basisschoolprogramma speelt. Deze kwestie is weliswaar nog in discussie, maar de richting waarin het onderwijs zich zal ontwikkelen, tekent zich steeds duidelijker af.

In de Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, een artikelenserie van A. Treffers, E. de Moor en E. Feijs in het Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-Wiskundeonderwijs, gaan de schrijvers in op de rol van de zakrekenmachine in het vernieuwde onderwijs. Ze schrijven als doelstelling:

'De leerlingen kunnen indien nodig doelmatig de zakrekenmachine gebruiken.'

en lichten dit uitvoerig toe, zich daarbij baserend op resultaten van onderzoek en ontwikkelwerk in binnen- en buitenland. Zij verklaren zich voorstander van de introductie van de zakrekenmachine 'op z'n vroegst eind groep zes'. De nadruk in het gebruik van de zakrekenmachine zal liggen op de bewustmaking van de structuur van getallen en de eigenschappen van bewerkingen. En schattend rekenen krijgt veel aandacht. De laatste zin van het artikel geeft het motto aan:

'Zakrekenmachines prima, maar houdt je hoofd erbij.'

Wat vooral opvalt in het stuk is dat de schrijvers voorstanders zijn van een 'ingetogen invoering' van de zakrekenmachine. Ze zijn zich van deze stellingname bewust en geven ook met zoveel woorden aan, dat de zakrekenmachine allerm minst gezien mag worden als oplossing van alle problemen die er in het reken-wiskundeonderwijs van de basisschool spelen. Zij spreken van 'een efficiënt gebruik van de zakrekenmachine' door de leerlingen; ze wijzen daarmee een gebruik van de zakrekenmachine te pas en te onpas van de hand.

Maar, zoals gezegd is de kwestie van de invoering nog in discussie. In de toekomst zullen er naar verwacht mag worden, nog verdere nuanceringen in de standpunten worden aangebracht. Het onderwijs staat soms nog huiverig tegenover de invoering van de zakrekenmachine, wat een reden temeer is om deze zaak zorgvuldig te begeleiden. Want uit onderzoek blijkt dat de zakrekenmachine momenteel in de basisschool vrij weinig wordt gebruikt. We mogen echter verwachten dat dit binnen enige tijd zal veranderen. In de moderne, realistische basisschoolboeken wordt in de hogere klassen al veel aandacht besteed aan rekenonderwijs met de zakrekenmachine, maar de activiteiten zijn niet in

de rest van het reken-wiskundeonderwijs geïntegreerd. Ze worden daarom door leraren veelal overgeslagen.

Dat kinderen in hun dagelijkse leven buiten school al vaak de beschikking hebben over een zakrekenmachine en er ook mee rekenen, is het meest gehoorde argument voor de invoering van de zakrekenmachine in het basisschoolprogramma geweest. In het dagelijks leven ziet men immers steeds meer mensen zakrekenmachientjes gebruiken. De school kan daarom, vindt men, de ontwikkelingen in de maatschappij niet langer negeren. Er is daarentegen ook een didactisch argument voor de invoering van de zakrekenmachine. In dit artikel zullen we trachten dit argument te verduidelijken.

Er zijn aan de invoering van de zakrekenmachine in het onderwijs voordelen verbonden, maar dat betekent niet dat dit geen didactische problemen met zich mee zou brengen. Aan het eind van de jaren zeventig is enig onderwijsontwikkelwerk, gericht op het gebruik van de zakrekenmachine in het onderwijs, verricht. Er heeft sindsdien ook enig onderzoek met kinderen en in klassen plaatsgevonden. Mede hierdoor namen schrijvers van leerlingmateriaal lessen met de zakrekenmachine in moderne reken-wiskundemethoden op, veelal zonder deze lessen echter in het programma te integreren.

Door de opkomst van de computer in het onderwijs verflauwde de aandacht voor de zakrekenmachine aanvankelijk en het onderwijsontwikkelwerk kwam enige tijd op een laag pitje te staan. In de tweede helft van de tachtiger jaren hernieuwde de belangstelling zich echter. Momenteel zijn diverse onderzoekers en ontwikkelaars met de problematiek van de zakrekenmachine in het basisonderwijs bezig.

Op welke wijze zullen basisschoolleerlingen in aanraking komen met de zakrekenmachine? Centraal staat de gedachte dat de zakrekenmachine in het basisschoolprogramma geïntegreerd wordt. Dit betekent ondermeer dat het excessieve cijferen minder aandacht krijgt en daarvoor in de plaats enerzijds het hoofdrekenen en anderzijds het rekenen met de zakrekenmachine komt. De zakrekenma-

chine voor de basisschool die wordt gekozen is in principe het meest eenvoudige apparaat, uitgerust met de vier hoofdbewerkingen, met een geheugen, een zogenoemde constante factor en met eventueel een wortelknop en een procentknop. Leerlingen hebben de taal van een dergelijke zakrekenmachine geleerd. Dat wil zeggen dat ze de zakrekenmachine kunnen bedienen en dat ze de reactie van de machine begrijpen. Soms zijn die reacties eigenaardig en stellen ze de kinderen voor problemen. Eigenaardigheden zoals $3 \times 4 - 3 \times 4 = 36$, die vele kinderen en volwassenen misschien aanvankelijk onbegrijpelijk voorkomen. We leerden immers op de basisschool dat er volgens de Meneer-Van-Dale-regel gerekend behoort te worden. Dezelfde eigenaardigheid zorgt ervoor dat de machine bij de opgave $6 \times 6 : 6 \times 6$ het antwoord 36 geeft en niet 1, zoals men zou verwachten. De zakrekenmachine rekent anders. Steeds zal wat anders is aan het rekenen met de zakrekenmachine verkend moeten worden. Het biedt de mogelijkheid om op eerder verworven kennis te reflecteren, met gunstige gevolgen voor het inzicht in de leerstof.

Er is dus sprake van een specifieke 'taal' in de omgang met de zakrekenmachine. Deze taal is soms niet in overeenstemming met de in lagere leerjaren verworven rekentaal. Als de leerlingen de zakrekenmachine met inzicht willen leren gebruiken, moet deze taal dus geleerd worden. Dit heeft wonderlijk genoeg gunstige gevolgen voor het rekenen van de leerling, want door de taal van de machine te gebruiken komen de verschillen met de gewone rekentaal aan het licht. Waarschijnlijk moet hierin de verklaring worden gezocht van de onderzoeksresultaten die zeggen dat de zakrekenmachine een gunstig effect heeft op de rekenvaardigheid van leerlingen. Een conclusie die verrassend genoemd mag worden. Want, laten we wel wezen, velen van ons hebben de neiging juist het omgekeerde te beweren.

De taal van de zakrekenmachine kennen betekent vervolgens dat de leerling de machine kan hantieren. Dat houdt in dat de leerling de zakrekenmachine opdrachten kan geven die ertoe leiden dat de zakrekenmachine gaat werken zoals de leerling bedoeld heeft. Anders gezegd: de leerling moet de

zakrekenmachine leren programmeren. De zakrekenmachine is dan een hulpmiddel geworden dat in minstens drie verschillende situaties kan worden ingezet:

1 de zakrekenmachine helpt je bij het rekenen in problemen van het dagelijks leven, wat natuurlijk ook opgaat als die de school worden binnengehaald,

2 de zakrekenmachine biedt steun bij het leren van de schoolwiskunde. Reken-wiskundige begrippen verhelderen en rekenvaardigheden worden uitgebouwd,

3 de zakrekenmachine geeft aanleiding tot onderzoekjes op het rijke gebied van de calculator-wiskunde.

Uiteraard zijn deze zaken in een aantal gevallen aan elkaar gerelateerd. Als je bijvoorbeeld de 'taal' niet kent waarin je met de zakrekenmachine moet 'communiceren' (een aspect van punt 3), kun je ook geen alledaagse rekenproblemen met behulp van de zakrekenmachine oplossen.

We moeten ons ervan bewust zijn dat hierboven niet wordt beweerd dat kinderen met de zakrekenmachines kunnen leren rekenen. De suggestie dat de zakrekenmachine een vervangend hulpmiddel is, zal men van ons niet kunnen vernemen. Het is het schrikbeeld van menig basisschoolleraar dat de zakrekenmachine de leerling in de weg zou staan bij het leren rekenen. Helemaal onterecht is dit schrikbeeld niet, want als de integratie van de zakrekenmachine in het basisschoolcurriculum ertoe zou leiden dat kinderen ook eenvoudige opgaven op de zakrekenmachine zouden gaan uitrekenen, zijn we op de verkeerde weg. Het is bijvoorbeeld gewenst dat kinderen een opgave als $4 \times 15 = 60$ uit het hoofd kunnen berekenen. Kinderen moeten de basisvaardigheden goed leren en deze kennis kunnen inzetten bij het schattend rekenen en het hoofdrekenen. Een opgave als het optellen van drie geldbedragen, $f3000$, $f8000$ en $f6000$, moet uiteraard uit het hoofd gedaan kunnen worden: $3 + 8 + 6 = 17$, met drie nullen erachter. Dit is op zich geen opgave in het gebied van de basisvaardigheden, maar vloeit er wel direct uit voort.

Van de andere kant zijn er ook met eenvoudige opgaven interessante mogelijkheden op de zakrekenmachine, die kinderen steunen bij het verwerven van inzichten in het rekenen. In de bovenbouw van de basisschool kan het volgende met de zakrekenmachine aan de orde komen: $1 : 6 \times 6 = 0,9999999$. Dit is een verraderlijk-eenvoudige som, want er kan gerekend volgens de Van-Dale-regel ook $1 : 36 = 0,0277777$ uitkomen. Bovendien is de beperking van het aantal cijfers in het venster aanleiding om na te denken over de niet zichtbare cijfers achter het zichtbare gedeelte van het kommagetal. Waar zijn die gebleven? Zijn ze er nog, al zie je ze niet? Hoe los je dit probleem op? Wel, eigenlijk is dit in het voorgaande al gedaan: $36 \times 0,0277777 = 0,9999972$ en evenzo $6 \times 0,1666666 = 0,9999996$.

De zakrekenmachine kapt dus af, laat het onzichtbare gedeelte van de mantisse dus gewoon weg en rekt met het zichtbare gedeelte verder. Duidelijk een beperking van de zakrekenmachine (bij elk merk komen er problemen van deze soort). Maar meestal zullen we er geen problemen mee hebben. Sterker nog, vaak stellen we een dergelijke nauwkeurigheid niet eens op prijs en ronden een tussenantwoord zelfs in een bepaald stadium van een berekening af. Dat is bijvoorbeeld het geval als we met meetgetallen werken, die op zich al een zekere onnauwkeurigheid in zich kunnen hebben. Op een eenvoudig niveau is dit voorbeeld: 6 kleinkinderen verdelen $f100,-$ die ze van Oma hebben gekregen. Het antwoord van de zakrekenmachine is $16,666666$, dat in de geldcontext afgerond moet worden. Toen er nog centen in omloop waren, was een afronding van $f16,67$ betekenisvol, tegenwoordig moeten we afronden tot $f16,65$ of $f16,70$. In het natuurkundeonderwijs van het voortgezet onderwijs zal men veel voorbeelden kunnen vinden waarin betekenisvolle afrondingen een grote rol spelen. Niettemin zal in het wiskundeonderwijs ook aandacht moeten worden geschonken aan het moment in de rekenprocedure waarop afrondingen acceptabel zijn. Soms is dit pas als men eerst het eindantwoord in vele decimalen nauwkeurig heeft bepaald.

Bovenstaand voorbeeld betreft onderzoek van de zakrekenmachine, dat in dit artikel als een van de

drie didactische mogelijkheden werd genoemd. Er wordt in het voorbeeld een relatie gelegd met de begripsvorming rond kommagetallen in de basisschool, met implicaties voor het voortgezet onderwijs. We gaan daar in dit artikel niet verder op in. We zullen nu een probleem uit het dagelijks leven aan de orde stellen, waarin de zakrekenmachine een belangrijke rol vervult. Zonder zakrekenmachine beginnen we er niet eens aan. Laten we eens kijken wat iemand daarover opschreef.

‘Onlangs wilde ik een slaapkamer voorzien van nieuwe vloerbedekking. Ik ging op zoek naar losse tegels. Ik vond ze bij een groot-winkelbedrijf. De tegels waren 38 bij 38 centimeter; in een pak zaten er zeven. Men zegt: per pak 1 vierkante meter. Mijn eerste reactie is ‘dat zal wel’, maar ik vermoed dat $7 \times 0,38 \times 0,38 = 1$ niet juist zal zijn. (Bijvoorbeeld omdat het laatste cijfer een 8 moet zijn). Een ouderwetse onderwijzer zal deze opgave door zijn leerlingen willen laten berekenen met behulp van cijferprocedures, wat echter een hels karwei is. In de praktijk van het volle leven kiest men gewoonlijk voor een eenvoudiger middel: de zakrekenmachine. Dan blijkt in een wip dat $38 \times 38 = 1444$ en dat $7 \times 1444 = 10108$. Ik ben dan nog niet klaar. Omdat ik inzicht heb in kommagetallen, zie ik in dat het eigenlijk $7 \times 0,1444$ had moeten zijn en dat het door mij gezochte antwoord 1,0108 is. Natuurlijk had ik ook $0,38 \times 0,38$ op de zakrekenmachine kunnen programmeren. Waarom ik dat niet deed? Wel, ik zou misschien een intik-fout maken, bijvoorbeeld met de komma. Dit soort overwegingen horen erbij als we vaardig willen omgaan met de zakrekenmachine en moeten dus door ervaring geleerd worden.

De kamer waarin ik vloerbedekking moet leggen is 3,82 bij 4,19 meter. Maar er zit aan een van de wanden een inspringende schoorsteen in van 0,87 bij 0,89 meter. De ‘exacte’* oppervlakte van de kamer is $3,82 \times 4,19(M+) - 0,87 \times 0,89(M-)$ (MR), met het antwoord 15,2315 vierkante meter. Ik kan hieruit direct concluderen dat ik minstens 16 pakken vloerbedekking met elk zeven tegels nodig zal hebben, dus 112 tegels. Maar, zo realiseer ik me, hoe staat het met het ‘snijverlies’? Zal ik me laten verleiden tot kruimelwerk, tot het leggen van te

kleine stukjes om maar zo weinig mogelijk pakken te hoeven kopen?

Hoeveel hele tegels gaan er eigenlijk in de lengte en in de breedte van de kamer? Weer gebruik ik de zakrekenmachine: $4,19 : 0,38 = 11,026315$. Dat lijkt niet zo gunstig! Iets meer dan 11 tegels. En, voor het geval ik dit niet direct zou zien: $3,82 : 0,38 = 10,052631$, iets meer dan 10 tegels. Bij de schoorsteen spaar ik echter wat tegels uit: $0,89 : 0,38 = 2,3421052$. Minstens vier tegels dus. Ik zou dus hoogstens $12 \times 11 - 4 = 128$ tegels nodig hebben. Maar dit is wel een heel grove berekening. Natuurlijk houd ik zonder twijfel nog bruikbare stukken over, om hoekjes en dergelijk mee te beleggen.

In de praktijk, de controle van het een en ander achteraf, bleek me dat ik aan 16 pakken vloerbedekking niet voldoende had. Ik kocht er een pak bij, waarvan ik 2 tegels gebruikte en dus 5 tegels voor eventuele ‘ongelukjes’ over heb gehouden. In totaal gebruikte ik dus $7 \times 16 + 2 = 114$ tegels.’

Wat heeft dit voorbeeld uit de praktijk van alledag nu te maken met het rekenen van leerlingen van de hoogste klasse van de basisschool? Het geeft een voorbeeld van het gebruik van de zakrekenmachine in het dagelijks leven, waarbij de zakrekenmachine een belangrijke rol kan spelen. Je zou het rekenprobleem ook kunnen oplossen met potlood en papier, maar de hulp van de zakrekenmachine levert een grote besparing aan tijd en ergernis op. We zien dan nog af van de mogelijke cijferfouten die we kunnen maken. Er komen in de oplossing met de zakrekenmachine vele wiskundige vaardigheden aan de orde die van groot belang zijn, zoals het interpreteren van kommagetallen door een betekenisvolle afronding. Effectief rekenen met de zakrekenmachine blijkt mogelijk door op de juiste momenten gebruik te maken van de voorzieningen die het apparaat biedt, zoals het geheugen van de machine. Enzovoorts.

We willen kinderen in school graag leren de zakrekenmachine te gebruiken in situaties, zoals er hierboven een beschreven is. Dit vergroot hun greep op de wereld. Ze worden er meer ‘gecijferd’ door. Het is onze mening dat dit argument ook voor het wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs op-

gaat. Overigens, in het project Wiskunde 12-16 en in het OWI-project (Wiskundeonderwijs in het ibo) worden er onderwijsactiviteiten met de zakrekenmachine ontwikkeld.

Het is in het bovenstaande duidelijk geworden dat het in een deel van de besproken gevallen om het toepassen van rekenkennis gaat, waarbij de rekenkennis wordt aangescherpt door de zakrekenmachine. Anders gezegd, de kinderen kunnen rekenen, maar men leert met de zakrekenmachine sneller en wellicht op enkele punten ook beter rekenen.

Noot

* Vergelijk het begrip 'exact' zoals dat in deze context wordt gebruikt met het begrip in het artikel van Frans Bouman in Euclides van maart 1990. Meetgetallen zijn vaak niet precies, een bewerking met deze getallen heeft de mogelijkheid dat de nauwkeurigheid van de resultaten afneemt. Het hangt van de context af hoe precies we een antwoord willen hebben en tevens of we tot precieze antwoorden in staat zijn.

Literatuur

F. J. van den Brink: *Wetenschappelijke notaties op rekenmachines*; In: Nieuwe Wiskrant, jrg. 5, nr. 4 (1986), p. 51-56.
E. G. Harskamp en P. Edelenbos: *De zakrekenmachine in het rekenonderwijs van de basisschool*; In: Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs, Panama-Post, jrg. 7, nr. 2 (1988), p. 48-51.
Hans ter Heege: *De zakrekenmachine in de bovenbouw van de basisschool*, Enschede (SLO), 1985.
Ontwikkelgroep Zakrekenmachine: *De taal van de rekenmachine*, Tilburg, 1988 (Onderwijskundige Brochurenreeks 319).
M. J. J. Pronk-Groen (eindred.): *Vakdidactiek en computer* (module 5, De zakrekenmachine), Leiden, 1989.
A. Treffers, E. de Moor en E. Feijs: *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (5)*; In: Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs, Panama-Post, jrg. 7, nr. 1 (1988), p. 19-47.
W. Struik: *Enkele opmerkingen over de 'Proeve... (5)'*; In: Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs, Panama-Post, jrg. 7, nr. 2 (1988), p. 46-47.
W. Vermeulen: *De rekenmachine in het reken-wiskundeonderwijs*; In: Panama-Post, tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs, jrg. 7, nr. 2 (1988), p. 68-80.

● Serie ● ● ● ● ● ● ●

'Wiskunde onderwijs aan ...'

► Wiskundeonderwijs in Indonesië

Prof. dr. E. T. Ruseffendi

Het algemeen middelbaar onderwijs in Indonesië bestaat uit een 'middenschool', de SMP (12-15) en een 'bovenschool', de SMA (15-18). Dit artikel is een beknopt overzicht van het wiskundeonderwijs in Indonesië. Het zal vooral gaan over de lagere school, over de SMP/SMA en over de lerarenopleiding hiervoor. Naast SMP en SMA bestaan er vormen van beroepsgericht voortgezet onderwijs, die hier buiten beschouwing blijven.

Vóór 1970

Zowel op het niveau van de lagere en middelbare school als bij de lerarenopleiding in het hoger onderwijs was het wiskundeonderwijs vóór 1970 sterk traditioneel en werd het gewoonlijk onderwijs in Ilmu Pasti genoemd. Ilmu Pasti is een ouderwetse term, letterlijk 'wiskunde', in tegenstelling tot het moderne 'matematika'. Zoals wij het traditionele onderwijs kennen, zo was het ook in Indonesië: de leerstof was de oude beperkte wiskunde, het accent lag op de rekenvaardigheid. Veel symbolen, terminologie en notaties werden incorrect gebruikt en de interactie in de klas was meestal éénrichtingsverkeer van docent naar leerling of student. In die periode bestond het genoemde rekenonderwijs onder meer uit vraagstukken, zoals 'vormsom-

men'. Er werd alleen met positieve gehele getallen en breuken gewerkt en de basiskennis moest uit het hoofd worden geleerd, zonder verder begrip. De meetkunde bestond uit vlakke figuren en eenvoudige lichamen met het zwaarste accent op het uitrekenen van oppervlakten en inhouden. De leerboekjes bestonden uit verscheidene dunne deeltjes. De aansluiting op het wiskundeonderwijs op de SMP mocht zeker onduidelijk worden genoemd.

Voor de middelbare school gold hetzelfde als voor de lagere school. Zo bestond het wiskundeonderwijs (Ilmu Pasti) op de SMP uitsluitend uit algebra en vlakke meetkunde, op de SMA uit algebra, stereometrie, beschrijvende meetkunde (BM), en goniometrie. De vlakke meetkunde, die drie jaar lang gescheiden van de stereometrie werd gegeven, moest het ruimtelijk inzicht van de leerling wel nadelig beïnvloeden. De vlakke meetkunde, die streng deductief werd gegeven op de SMP, viel daar wellicht te vroeg, terwijl de BM, die evident gemakkelijker was, op de SMA werd gegeven.

Vraagstukken waren in het algemeen moeilijk en maakten vaak een gekunstelde indruk. Ziehier ongeveer de kenmerken van Ilmu Pasti op SMP en SMA vóór 1970.

Erfenis

Het is zonneklaar dat dit alles een erfenis vormde uit de Nederlandse tijd. (Oudere Indonesiërs weten nog de titels van de oude boeken te noemen, zoals die van Van Thijn en Alders. Op de boekenmarkten staan ze trouwens nog. In de begintijd van de onafhankelijkheid heeft men deze boekjes gewoon vertaald op herdrukt, zonder zich overigens erg om auteursrecht te bekommeren.

Het was dus een statische erfenis, want men volgde niet de ontwikkelingen van het onderwijs in Nederland. Ter vergelijking: In Nederland werd in 1963 de beschrijvende meetkunde uit het programma geschrapt.

Na 1970

In de jaren zeventig vinden fundamentele veranderingen plaats in het lager en voortgezet onderwijs.

Het is het curriculum 1975. De veranderingen zijn inderdaad rigoreus: bijna alles wordt overhoop gehaald. Bij het rekenen komt de nadruk te liggen op het begrip en niet meer op de techniek. Veel nieuwe onderwerpen doen hun intrede, vaak met een minder formele, meer inductieve benadering. De leerlingen verrichten meer leeractiviteiten. Een aantal oude onderwerpen wordt overboord gooid, het gebruik van symbolen en notaties wordt verbeterd. Aan de andere kant echter ondervinden de leraren geweldige moeilijkheden en de leerprestaties van de leerlingen hebben de neiging te dalen. Dit wordt mogelijk veroorzaakt door de uitgebreidheid van de te beheersen leerstof en de heterogeniteit van de leerlingen. De maatschappij is schoolminded: meer mensen gaan naar school en zowel zij als de staat hebben hun hoop gevestigd op het onderwijs.

De wiskundeboekjes voor de basisschool zijn een bewerking van de Entebbe Mathematics Series, afkomstig uit de Engels sprekende landen van Oost-Afrika. De serie bestaat uit 25 deeltjes, 12 leerlingenboekjes (2 per klas), 12 bijbehorende docentenhandleidingen en een algemene handleiding voor de docent.

Deze boekjes zijn voor bewerking uitgekozen omdat wat er in wordt aangeboden modern wiskundeonderwijs is. De leerstof en de gehanteerde begrippen omvatten onder meer: getalbegrip, getallenoperaties vanuit de verzamelingen, de verzamelingen zelf, rationale getallen, statistiek, waarschijnlijkheid, moderne meetkunde, aangeboden vanuit de topologie.

De boeken voor SMP en SMA zijn een bewerking van Modern Mathematics for Schools uit Schotland, welke serie ook in Nederland was uitgebracht onder de titel 'Moderne Wiskunde, bekend staand als de 'Schotse methode'. Uit de oorspronkelijke 9 boeken zijn 12 delen ontstaan: 6 voor SMP en 6 voor SMA. Ook deze boeken worden één op één ondersteund door docentenboeken. Bijna alle originele leerstof wordt gebruikt, met uitzondering van de stroomdiagrammen en de computer. Nieuwe onderwerpen (vergeleken met vroeger) zijn: kansrekening, statistiek, analyse. De meetkunde wordt als transformatiemeetkunde behandeld. Net als op de basisschool heet dit leerplan het curricu-

lum 1975. Uit de leerstofbeschrijving en de gebruikte boeken blijkt dat het sterke overeenkomsten vertoont met het leerplan van 1968 in Nederland.

Kritiek

Zoals in alle andere landen komt er kritiek op de veranderingen. Omdat in Indonesië een krachtige en stabiele regering zetelt, ondervindt Indonesië niet wat de *Back to Basics Movement* heet. Ondanks dit blijft er van die beweging, die ooit een kortstondig bestaan in de Verenigde Staten beschoren was, toch wel dit hangen: wat op de lagere school echt belangrijk is, is lezen, schrijven en rekenen. Die slogan wordt aangeheven, allicht, in een periode waarin de maatschappij hier in het algemeen niet kan lezen, schrijven en rekenen. Maar het punt wordt misverstaan en gebruikt (misbruikt) door hen, die in de jaren 70 tegen de vernieuwingen zijn. Dit komt bijvoorbeeld tot uitdrukking in de curriculum 1984, het nieuwste. Enerzijds komt de computer er in, anderzijds de zakrekenaar niet, althans niet op de basisschool. Ook komen weer onderwerpen terug die in de jaren 70 verdwenen waren, zoals meer formele wiskunde. Beschrijvende Meetkunde kan weer gegeven worden.

Het is evident dat in het curriculum en in de boeken in de naaste toekomst nog meer onderwerpen, behandelingswijzen en bewerkingen zullen voorkomen, die de geur van Back to Basics meedragen. Als het zo zal gaan zal dat naar mijn bescheiden mening een achteruitgang zijn. In het bijzonder zal de zakrekenaar nooit de basisschool binnenkomen, wat te betreuren is.

De lerarenopleiding

Sinds 1954 bestaan er al drie universitaire lerarenopleidingen, de zogenaamde PTPG (Perguruan Tinggi Pendidikan Guru). Aan het einde van de jaren vijftig worden dit lerarenfaculteiten (FKIP).

Los van de universiteiten ontstaan lerarenopleidingen, (IKIP: Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan, letterlijk: Instituut voor lerarenopleiding en onderwijskunde). Deze zijn geheel met de Nederlandse NLO's te vergelijken, met dit verschil dat ze ook voor de eerste graad opleiden en dat je er ook onderwijskunde alleen kunt studeren. Op dit moment zijn er in Indonesië 10 IKIP's en 18 FKIP's die wiskunde aanbieden. Verder hebben 9 universiteiten die geen lerarenfaculteit hebben momenteel een stoomcursus voor wiskundeleraren SMA.

Tot en met 1978 zijn de kenmerken van het curriculum voor aspirant-wiskundeleraren in het voortgezet onderwijs als volgt. Het vak als zodanig wordt steeds omvangrijker. De toepassing van onderwijskundige inzichten in het vak is afwezig of zeer gering. De stage (hospiteren of schoolpracticum) krijgt weinig aandacht, het slaagpercentage is laag. Er is weinig interactie in de klas of op college. De leerstof is uitgebreid en het meeste staat ver af van wat op de scholen wordt onderwezen, zodat de IKIP's zelfs spottend de naam van superuniversiteiten krijgen. In het curriculum beslaat pure vak-kennis ongeveer 140 SKS (zie kader).

De studielast voor de student wordt in Indonesië gemeten in SKS.

1 SKS = 1 wekelijkse semestercontactuur.

De totale studielast is 160 SKS. De student heeft 4 jaar, dus 8 semesters, van 20 contacturen per week ter beschikking.

Vergelijking met Nederland: Totale studielast 6800 uur. Vaak wordt 17 uur een studiepunt genoemd. Dit leidt tot 400 studiepunten, 100 per jaar.

Aldus komt 1 SKS in Indonesië overeen met 2,5 studiepunt in Nederland.

Na 1978

Met dit alles als achtergrond komt de idee boven om de IKIP's zich meer te laten richten op het veld, daarmee het lerarentekort bestrijdend, de principes van CBSA (student active learning) toe te passen en de nadruk van de pure kennis van het vak zoals dat



Het hoofdgebouw van het IKIP in Bandung.

uitstijgt boven de schoolwiskunde, te verplaatsen naar de beheersing van de wiskunde die moet worden onderwezen. Deze beweging mondt uit in het curriculum IKIP 1979. Anders dan hiervoor zijn nu kenmerken: veel toepassing van de didactiek bij het onderwijzen van het vak, gebaseerd op de systematisch ontwikkelde competentie. De opleidingsduur is vier jaar na de SMA. In het nieuwe programma is er nog 90 SKS voor het pure vak, inclusief een bijvak, een vermindering dus met 50 SKS.

In het jaar 1985 zijn de eindexamenresultaten van de SMA in de wiskunde en natuurwetenschappen in het algemeen slecht. Velen schrijven dit toe aan het nieuwe IKIP-programma. Deze verdenking acht ik niet juist, omdat er nog maar weinig leraren in functie zijn die volgens het nieuwe programma zijn opgeleid. Die enkelen beginnen nog maar net. Bovendien geldt de klacht niet alleen de exacte vakken.

Toch zal er in de nabije toekomst een nieuw curriculum verschijnen met weer meer nadruk op het vak. Dit zal goede invloed hebben op het niveau van de IKIP-docenten en goed zijn voor de intelligente leerlingen. Het curriculum van 1979 past echter beter bij heterogene klassen.

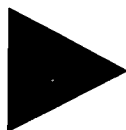
Iets anders dat vaak naar voren komt is dat het niveau van het IKIP laag zou zijn, omdat de studenten tweederangs of derderangs zouden zijn. Dit vooroordeel is volgens mij onjuist, zeker bij de niet-exacte vakken. De gemiddelde score voor de toelatingstest voor de exacte vakken ligt bij de gewone

universiteiten weliswaar hoger, maar dit geldt weer niet voor alle onderdelen. Bovendien gaat het bij de toegelaten studenten tot het hoger onderwijs in totaliteit nog altijd maar over de top 20% van de SMA.

Vertaling en bewerking: drs. F. J. Krips.

Over de auteur en de bewerker:

E. T. Ruseffendi is hoogleraar aan het IKIP te Bandung. F. J. Krips is voormalig directeur van de NLO Ubbo Emmius te Groningen/Leeuwarden en sinds 1988 tijdelijk docent in Bandung.



Mededeling

Vakantiecursus 1990

De vakantiecursus 1990 voor leraren in de exacte vakken en andere belangstellenden wordt in Eindhoven gegeven op 23 en 24 augustus en in Amsterdam op 31 augustus en 1 september. Het thema van de cursus is: **Getaltheorie en haar toepassingen**.

Eerste dag:

- A. W. Grootendorst: *Inleiding*
 H. J. A. Duparc: *De priemtoets van Lucas*
 F. van der Blij: *Analyse helpt getallentheorie*
 J. van de Craats: *Modulair worteltrekken en fraude-bestendige identiteitsdocumenten*

Tweede dag:

- R. Tijdeman: *Benaderingsbreuken*
 J. van de Lune: *Hoeveel roosterpunten liggen er binnen een cirkel? Praktische toepassingen*
 F. Beukers: *De vergelijking van Fermat*

In Eindhoven wordt de cursus gegeven in het Rekencentrum van de Technische Universiteit (aanvang op beide dagen: 10.00 uur). In Amsterdam wordt de cursus gegeven in het gebouw van de Stichting Mathematisch Centrum (aanvang vrijdag 31 augustus: 15.00 uur, zaterdag 1 september: 10.00 uur). Kosten voor deelname: f75,- exclusief maaltijden. Nadere inlichtingen: Mevrouw M. Bruné, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Postbus 4079, 1009 AB Amsterdam, tel. 020 - 5924175.

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 22563 EB Den Haag.

► Oplossing 616

Een anti-magisch vierkant van de cijfers 1 tot en met 9 heeft acht verschillende sommen. De heer *A. I. M. Kool* uit Sassenheim heeft een overzicht gemaakt van alle $9!/8 = 45360$ rangschikkingen van de cijfers 1 tot en met 9. Hij vindt dat er in totaal 3120 anti-magische vierkanten van 3 bij 3 bestaan.

De acht verschillende sommen kunnen geen opeenvolgende getallen zijn. Als één diagonaal niet meedoet, kunnen de overige zeven uitkomsten wel opeenvolgend zijn. Vier oplossingen zijn:

1 2 9	1 4 7	2 6 8	2 8 6
5 8 3	3 8 5	7 9 1	5 9 3
7 4 6	9 2 6	5 3 4	7 1 4

Volgens *Elias Buissant des Amorie* uit Amstelveen kunnen we het zoeken beperken doordat we voor de rijensom kunnen kiezen uit {12, 16, 17} en voor de kolomsum uit {13, 14, 18}. De diagonaalsom moet 15 zijn.

Verder voldoen nog de complementaire oplossingen (zoals o.a. *Gerrit de Jong* uit Middelburg opmerkte): vervang elk cijfer N door 10 – N. Draaiingen en spiegelingen tellen niet mee, dus in totaal zijn er acht verschillende oplossingen.

Sommige inzenders keken alleen naar de zeven verschillende uitkomsten en niet naar die ene diagonaal, die niet meedoet. Als deze diagonaal een som heeft die al voorkomt in een rij of kolom, dan hebben we een bijna-anti-magisch vierkant. Hier van zijn er vier met zeven opeenvolgende uitkomsten:

1 7 4	1 9 2
9 6 2	7 6 4
3 5 8	5 3 8

en de twee complementaire.

Een 4×4 anti-magisch vierkant met tien opeenvolgende uitkomsten is overigens wel mogelijk:

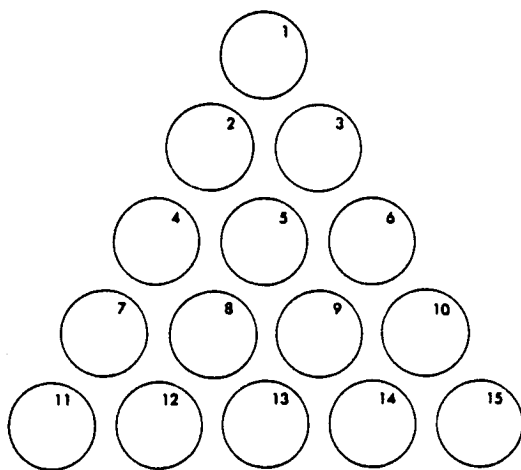
1	15	12	3
5	14	9	10
8	6	11	7
16	2	4	13

Na loting is winnaar geworden van de boekenbon van f25,-: *A. I. M. Kool*, Hoofdstraat 53, 2171 AR Sassenheim. Gefeliciteerd! Het lot is u gunstig gezind voor het grote onderzoek dat u verrichtte. Nogmaals dank daarvoor.

Als u goed oplet, dan zult u merken dat er nogal vaak fouten in de handleiding bij puzzeltjes of spelletjes staan. Op dit moment is dat weer eens het geval bij een solitaire spelletje, uitgebracht in een CD-doesje. Het is een driehoekig bord met zijde 7. Er worden 27 magneten neergelegd, waarbij het middelste rondje open blijft. Nu gaan we springen en wordt het bord leeggeslagen, op de laatste na. Deze laatste moet terecht komen op het middelste rondje. Helaas, dat is *onmogelijk*! Sterker nog, het is zelfs onmogelijk om er één over te houden.

Over nu naar de eigenlijke puzzel: een driehoekig bord met zijde 5. Het spel 'Your IQ test', van een aantal jaren geleden, heeft de volgende handleiding:

- Plaats de 14 pionnen in alle gaatjes op één na.
- Sla één voor één de pionnen en neem de geslagen pionnen weg.
- Ga door tot u er niet één meer kunt slaan.
- 3 pionnen over – redelijk – 10 punten
- 2 pionnen over – uitstekend – 25 punten
- 1 pion over – geniaal – 50 punten
- Indien u erin slaagt de laatste pion in het gat met de ring te krijgen (nummer 13) – 50 punten extra.



Mijn vragen:

- a) Het is simpel te bewijzen dat je niet vanuit elke beginstand kunt eindigen met 13. Met leeg begingat 2, bijvoorbeeld, kunnen we wel in 14 eindigen, maar nooit in 13 of 12. Welke spelletjes kunnen we spelen, d.w.z. welk gaatje moet in het begin vrij blijven, zodat de laatste pion in 13 komt?
- b) Geef van elk van deze spelletjes de zettenreeks aan. (Om u gerust te stellen: het zijn veel minder dan 10 spelletjes!)

In verband met de zomervakantie heeft u twee maanden de tijd om, samen met uw huisgenoten, dit driehoekig solitaire te spelen. Zelfs met 1 juiste zettenreeks (laatste in 13) heeft u '100 punten' en kans op een boekenbon van f25,-.

● Verenigingsnieuws ●

► Jaarvergadering/ Studiedag 1990

Eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 1990 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 27 oktober 1990 in het gebouw van: **Het Nieuwe Lyceum**, Jan Steenlaan 38, 3723 BV Bilthoven, 030 - 28 30 60. Aanvang 10.00 h.

Agenda:

- 9.30 h - 10.00 h: Aankomst, koffie
10.00 h - 10.30 h: **Huishoudelijk Gedeelte**
a. Opening door de voorzitter, dr. J. van Lint.
b. Notulen van de jaarvergadering 1989 (zie Euclides jg. 65 nr. 5).
c. Jaarverslagen (zie Euclides).
d. Décharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie.
Het bestuur stelt kandidaat *):
Mw. drs. Th. J. de Poel, Amsterdam en Dhr. T. Vandeberg, Kerkrade.
e. Bestuursverkiezing in verband met het periodiek aftreden van: Mw. H. Goemans-Wallis, C. Th. J. Hoogsteder en drs. J. W. Maassen.
Allen zijn herkiesbaar; het bestuur stelt hen kandidaat. *)
f. Vaststelling van de contributie 1991/1992.
Het bestuur stelt voor de contributie vast te stellen op f55,-.
10.30 h - 15.45 h: **Themagedeelte** (studiedag)
15.45 h - 16.20 h: **Huishoudelijk gedeelte**
g. Rondvraag.

Programma Studiedag

Wat kun je nu met wiskunde?

Hoe gebruik je wiskunde op de MTS, het MEAO, de HTS, het HEAO, de PABO, de Universiteit of in de praktijk?

Waarom kiezen nog zo weinig mensen voor een universitaire studie wiskunde?

Het programma van de studiedag heeft als voorlopige titel:

Aansluiting op vervolgonderwijs.

Maar die titel zou evengoed kunnen luiden:

Wiskunde van 4 jaar en jonger tot 80 jaar en ouder.

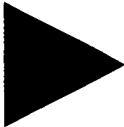
Want wat we onze leden willen bieden op de studiedag 1990 is:

- iets te leren wat direct in de klas te gebruiken is.
- iets te ontdekken van hoe wiskunde in het vervolgonderwijs functioneert.
- iets te ontdekken dat in het kader van advisering aan leerlingen over vervolgonderwijs belangrijk is.
- iets te leren van de leuke dingen die met wiskunde gedaan worden en die ook steeds meer in de klas gedaan worden, dus de aansluiting op de praktijk.
- leuke wiskundige zaken te horen die eventueel voor privéstudie en -ontwikkeling te gebruiken zijn.

We willen dat doen in de vorm van workshops, lezingen, demonstraties, film, discussies. Een combinatie dus van luisteren, kijken, praten en zelf doen.

Meer informatie over de studiedag en informatie over de wijze van aanmelden kunt u vinden in Euclides jaargang 66 nr. 1. Deze aflevering verschijnt in september 1990.

*) Tot achtentwintig dagen na het verschijnen van deze oproep kunnen eveneens andere leden van de vereniging als kandidaat worden voorgedragen bij het bestuur, schriftelijk en door ten minste vijf leden.



Oproep

Aan docenten wiskunde A vwo:

Proefwerken schud je niet zomaar even uit de mouw. Met de invoering van toepassingsgerichte wiskunde is het samenstellen van proefwerken en schoolonderzoeken nog lastiger en tijdrovender geworden. Bovendien is met de komst van wiskunde A de vraag gerezen of deze wiskunde wel goed getoetst wordt met uitsluitend schriftelijke werken. Op een aantal scholen wordt bij wiskunde A een schoolonderzoek mondeling afgenomen en krijgen leerlingen opdrachten voor scripties e.d.

Het is voor de meeste docenten ondoenlijk om telkens weer talrijke nieuwe opgaven of opdrachten te bedenken. Hergebruik van bewaard materiaal en onderling uitwisselen van proefwerken bieden enige verlichting. Niettemin bestaat er bij vele docenten behoefte aan nieuw opgavemateriaal.

Bij het CITO is men in het kader van het project 'Opgavenbanken' gestart met het opzetten van een opgavenbank wiskunde A vwo. Een groepje docenten, de schrijfgroep, houdt zich samen met een CITO-medewerker bezig met het aanleggen van een verzameling opgaven wiskunde A die over enige tijd aan docenten ter beschikking zal worden gesteld. Hierbij wordt gedacht aan een groot aantal opgaven voor proefwerken en schoolonderzoek; zo mogelijk zal er ook plaats worden ingeruimd voor vragen en opdrachten bij andere toetsvormen.

Over de verschijningsvorm van de Opgavenbank Wiskunde A bestaat nog geen volstrekte duidelijkheid. Een mogelijkheid is een computerprogramma waarmee op eenvoudige wijze opgaven kunnen worden geselecteerd, gewijzigd, toegevoegd en geprint. De bank is dan een pakket diskettes met een handleiding. Een andere mogelijkheid is een copieerbare papieren bank. Ook een combinatie van deze twee behoort tot de mogelijkheden. Leidraad bij de keuze zal het gebruiksgemak voor de docent zijn.

U zult begrijpen dat het voor een kleine schrijfgroep ondoenlijk is om op vrij korte termijn een

grote verzameling opgaven te bedenken. Daarom doen we een beroep op u. Wij vragen u om opgaven voor de vijfde en zesde klas beschikbaar te stellen voor de wiskunde A-bank. Met de schrijfgroep bekijken we die ingestuurde opgaven. Het kan zijn dat ze ongewijzigd in de bank passen, maar wellicht kunnen ze ook na enige aanpassing in verschillende varianten in de bank worden opgenomen. Het gaat om lange en korte opgaven voor proefwerken en schoolonderzoek of (ideeën voor) opdrachten in andere toetsvormen.

We hopen dat zeer velen bereid zullen zijn in hun archief te duiken en ons opgaven willen toesturen. Dat is nu voor u een kortstondige inspanning, maar op langere termijn profiteren vele wiskundedocenten. Bovendien willen we als tegenprestatie alle inzenders een kleine verzameling opgaven toesturen, een soort proefbankje op papier.

U kunt de opgaven ongefrankeerd sturen naar:

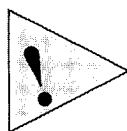
CITO, t.a.v. C. Lagerwaard, P611

Antwoordnummer 573

6800 VB ARNHEM

Antwoordmodellen en gegevens over de moeilijkheid van de opgaven zijn uiteraard welkom, maar niet noodzakelijk.

Voor vragen of opmerkingen kunt u zich richten tot Kees Lagerwaard, CITO, Postbus 1034, 6801 MG Arnhem, tel 085 - 52 13 71.



Kalender

23 t/m 30 juli 1990: Bielsko Biala, Polen, CIEAM-conferentie. Zie Euclides 65,5 blz. 160.

23 en 24 augustus 1990: Eindhoven, Vakantiecursus 1990. Zie de mededeling op blz. 285 van dit nummer.

31 augustus en 1 september 1990: Amsterdam, Vakantiecursus 1990. Zie blz. 285 van dit nummer.

7 september 1990: Eindhoven, Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade.

12 september 1990: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

10 oktober 1990: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

27 oktober 1990: Bilthoven, Jaarvergadering/Studiedag NVvW.

Zie het Verenigingsnieuws op blz. 287 van dit nummer.

14 november 1990: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

Inhoud

Inhoud 249

George Schoemaker: Kolom 18
W12/13 250

Postzegels 250

Bram van der Wal: Wiskunde is spannend
en nuttig 251

Verschenen 254

Henk J. M. Bos: Wiskunde en maatschappij 255

Werkbladen 262

Frank Laforce: De stelling van Zuo
Shan 270

Boekbespreking 273

Henk Mulder: Het tijsdal, integreren met
zand 274

Nans ter Maager: Op het grensvlak van basisschool en brugklas 275

Prof. dr. E. M. Ruseffendi: Wiskundeonderwijs in Indonesië 282

Mededeling 285

Recreatie 286

Jaarvergadering/Studiedag 1990 287

Oproep 288

Kalender 288