

Wolters-Noordhoff

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars

Vakblad voor de wiskundeleraar

Euclyides

816
357
492

jaargang 65 1989 | 1990 mei

Redactie

Drs H. Bakker
Drs R. Bosch
G. Bulthuis
Drs J. H. de Geus
Drs M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
N. T. Lakeman (beeldredacteur)
Drs A. B. Oosten (voorzitter)
P. E. de Roest (secretaris)
Ir. V. E. Schmidt (penningmeester)
Mw. Drs A. Verweij (eindredacteur)
A. van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25,
8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f55,- per verenigingsjaar;
studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de
V.V.W.L. f37,50; contributie zonder Euclides f30,-.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met
vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de
leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan
F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij
drs M. C. van Hoorn, Noordersingel 12,
9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te
zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos
5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is
opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f55,00. Een collectief
abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f35,00.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie,
Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86.
Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen
tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend
nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag
leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde
van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers f9,- (alleen verkrijgbaar na vooruit-
betaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 63 79. Telefaxnr. 01720-9 32 70.

Boekbespreking 236

Postzegels 236

Vershillen in de 20e eeuw

Serie 'De zakrekenmachine' 237

Lourens van den Brom *Wie rekent? De leerling of de ZRM?*

Over berekenen, tekenen en meten. Wat mag wél en wat mag niet bij het examen?

Serie 'Wiskundeonderwijs aan ...' 239

E. Teunissen, G. van den Heuvel *Op weg naar vernieuwd wiskundeonderwijs*

De ontwikkelingen bij wiskunde op de Chr. scholengemeenschap Revis beschreven. Van traditioneel naar vernieuwend, en tenslotte weer een stapje terug?

Actualiteit 218

George Schoemaker *Kolom 17 W12/16* 218

M. C. van Hoorn *Discussie* 218

Bijdrage 219

Victor Schmidt *Overgangsmatrices 2* 219

De ontwikkeling van de studentenpopulatie van een groep hogescholen door een matrixmodel beschreven. De convergentie blijkt volgens een gedempte trilling te verlopen.

H. Zonneberg *Eenvoudige meetkunde* 225

Een bekend vraagstuk over een fietser en twee torens wordt boven de receptensfeer van het kookboek uitgetild.

Ir. Henk Mulder *Stenen tellen* 227

Boekbespreking 228

Ben Knip *Een wereld van wereldjes*

Notities bij een didactiekboek waarin verschillende auteurs hun licht laten schijnen over de negatieve getallen.

Oplossing 231

Werkbladen 232

Bomen en Driehoeken in een vijfhoek

Bijdrage 234

J. G. M. Donkers *De XXXe Internationale Wiskunde Olympiade 1989*

Over de prestaties van de Nederlandse ploeg bij de laatste aflevering van de internationale wiskundewedstrijd voor leerlingen. Met opgaven.

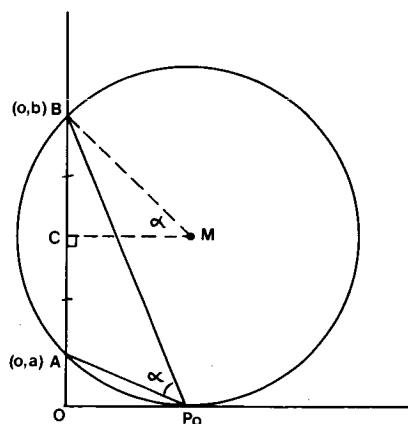
Boekbespreking 246

Aangeboden 246

Recreatie 247

Boekbespreking 248

Kalender 248



... verder nog gezond verstand nodig.

Voorgaande alinea had goed gepast als toelichting bij de sommen die de redactie van Euclides in aflevering 6 plaatste.

► **Discussie**

M. C. van Hoorn

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren belegde in maart j.l. een aantal informatiebijeenkomsten over de Hawex, de nieuwe wiskunde A en B in het Havo. Eerder al werden er bijeenkomsten gehouden op de drie proefscholen, in Dokkum, Utrecht en Geldrop, en ook bijeenkomsten speciaal gericht op de onderbouwdocenten. Dit alles in het kader van de invoering van de Hawex. Onze Vereniging stelde zich gelukkig erg actief op.

Op de in maart gehouden bijeenkomsten verzorgde telkens een lid van het Ontwikkelteam een inleiding. Daarna kon worden gediscussieerd – hetgeen op de bijeenkomsten te Rotterdam en Zwolle goed lukte.

Er lijkt wel eensgezindheid te bestaan over de introductie van wiskunde A en B op Havo-niveau, maar niet over – onder meer – de programmatische invulling. Niet alleen gaan enkele mooie leerstofonderdelen van tafel door een tekort aan lessen (onder andere de binomiale verdeling (A) en het tekenen van doorsneden (B); dit was te voorzien: twee wiskundes, oké, maar dan wel beide in maximaal 4 + 4 uren. Toegepaste informatica zit er dus ook niet in). Maar ook zijn enkele aansluitingsproblemen niet opgelost. Doorstroming van Havo naar Vwo met in beide onderwijssoorten alleen wiskunde A is lastig. Het is nog de vraag of wiskunde A goed voorbereidt op het Heao.

Het kiezen van zowel A als B kan wellicht aansluitingsproblemen oplossen, maar zo'n keuze wordt niet aangemoedigd (logisch eigenlijk), en het dubbel kiezen wilde men zelfs nog officieel verbieden. De circulaire kwam veel te laat.

Tenslotte gaapt er tussen Mavo en Havo een kloof die niet eerder dan in 1997 zal zijn gedicht. Eigenlijk had het Ontwikkelteam – dat overigens niet van alles de schuld mag hebben – een paar jaar eerder met het veld moeten gaan praten. Dan had zo'n discussie misschien nog effect gehad.

► **Kolom 17**



George Schoemaker

In de vorige Euclides stond een aankondiging van de LPC over vakwerk-conferenties. Daar worden onder meer spullen van het werk van W 12-16 aan geïnteresseerde docenten getoond. Laat W 12-16 nou maar zorgen dat ze goeie dingen maken en laat anderen – die daartoe ook de opdracht hebben – zo veel als mogelijk is meedoen aan verspreiding van ideeën.

Tussen leden van het team en de organisatoren van deze bijeenkomsten is van tijd tot tijd contact. Wij geven zonder veel terughouding spullen waarmee we bezig zijn en aan de hand waarvan zekere trends zijn vast te stellen. Zij maken daarmee een programma voor bijeenkomsten. En er is soms ook overleg over hoe het gegaan is. Wij krijgen zo informatie over verspreiding van ideeën op afstand.

Het team is ook bezig met verspreiding via kadervorming – ook weer samen met anderen – en voorlichting: er komt een kaderconferentie in april en een special van de Nieuwe Wiskrant die in september naar alle scholen gaat, er komen regionale bijeenkomsten in dit najaar.

Sommige docenten zeiden bij het zien van opgaven uit oefenexamens CD van dit lopend schooljaar: Is dat nou alles? Nee, verder konden we niet komen met deze eerste lichting die nog examen doet onder het regiem van het bestaande examenprogramma. Zelfs bij het bestaande examenprogramma is blijkbaar toch al meer mogelijk dat de 'jurisprudentie' aangeeft.

► Overgangsmatrices 2

Victor Schmidt

Inleiding

Een school voor hoger beroepsonderwijs – tegenwoordig heet zo'n school een hogeschool – is voor een groot deel van zijn financiering afhankelijk van de landelijke overheid. Sinds enige tijd wordt er door 'Den Haag' een zogenaamd lump-sum financieringsstelsel toegepast. Hierbij wordt een hogeschool jaarlijks een budget toegekend dat de hogeschool vrij mag besteden. De hoogte van dit budget hangt af van het aantal studenten dat aan de hogeschool studeert. Daarom probeert elke hogeschool zo nauwkeurig mogelijk te voorspellen hoe het aantal ingeschreven studenten zich in de tijd ontwikkelt. In dit artikel komt een model aan de orde waarmee het mogelijk is dergelijke voorspellingen te doen.

Het model

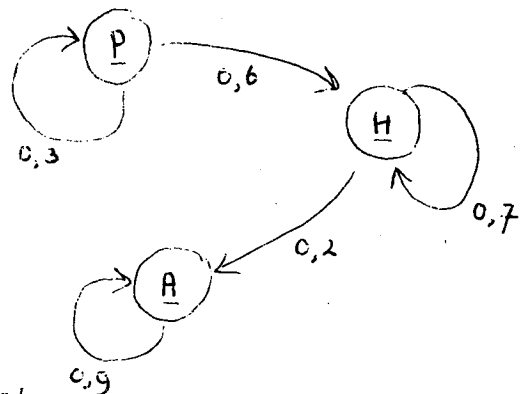
Het model dat in dit artikel aan de orde komt beschrijft de ontwikkeling van de studentenpopulatie van een groep hogescholen, die allen opleiden tot een goed te omschrijven beroepsgroep. Zo kan men denken aan alle zeevaartscholen of aan alle hogere hotelscholen. De omvang van het segment van de arbeidsmarkt waarvoor de studenten worden opgeleid wordt constant in de tijd veronder-

steld. In dit artikel wordt uitgegaan van een omvang van 25 000 arbeidsplaatsen.

Het onderwijsprogramma van deze hogescholen bestaat uit twee fasen, de eenjarige propedeutische fase en de driejarige hoofdfase. Een student dient eerst het propedeutisch examen af te leggen alvorens door te kunnen stromen naar de hoofdfase. Een student is afgestudeerd als hij of zij de hoofdfase met goed gevolg heeft doorlopen.

Uit onderzoek naar de slagingspercentages uit voorafgaande jaren blijkt dat jaarlijks 60% van het aantal studenten dat zich in de propedeutische fase bevindt, doorstroomt naar de hoofdfase. Van deze groep studenten doet 30% het eerste jaar over en verlaat 10% de opleiding. Van het aantal studenten in de hoofdfase studeert jaarlijks 20% af, verlaat 10% alsnog de opleiding en blijft 70% doorstuderen aan de hogeschool.

De afgestudeerden bieden zich aan op de arbeidsmarkt. Of ze werk kunnen vinden hangt af van het aantal beschikbare arbeidsplaatsen. Daarbij speelt het gegeven een rol dat 10% van het aantal mensen dat werkzaam is in de betreffende beroepsgroep of dat werk zoekt, jaarlijks daarmee stopt. Werkzoekenden kunnen besluiten hun heil elders te zoeken, mensen die werken kunnen met pensioen gaan, kunnen arbeidsongeschikt worden of kunnen anderszins dit segment van de arbeidsmarkt verlaten. De verschillende stromen van studenten en afgestudeerden worden in het volgende toestandsdiagram weergegeven.



Figuur 1

Een student in toestand *P* bereidt zich voor op het propedeutisch examen, een student in toestand *H*

studeert in de hoofdfase en in toestand A bevinden zich alle afgestudeerden die werkzaam zijn in het deel van de arbeidsmarkt waarvoor ze zijn opgeleid of die werk zoeken in dit deel van de arbeidsmarkt.

Een belangrijk gegeven is niet in het bovenstaande toestandsdiagram verwerkt. Dat is namelijk de instroom van nieuwe studenten. Een vrij eenvoudige veronderstelling is dat het aantal nieuwe eerstejaars studenten jaarlijks constant is, bijvoorbeeld 10 000. Dit is onder meer het geval als er sprake is van een gedwongen instroombeperking. De vraag is of de arbeidsmarkt in staat is een dergelijke instroom te verwerken.

Om deze vraag te beantwoorden kan een matrix-model worden opgesteld. Daarin worden de volgende variabelen gebruikt.

x_n = het aantal studenten dat zich aan het begin van studiejaar n in de propedeutische fase bevindt.

y_n = het aantal studenten dat zich aan het begin van studiejaar n in de hoofdfase bevindt.

w_n = het totaal aantal afgestudeerden dat aan het begin van studiejaar n werkzaam is in of werk zoekt in het betreffende segment van de arbeidsmarkt.

Zolang $w_n \leq 25\,000$ is er geen werkloosheid onder de afgestudeerden van de groep hogescholen.

Uitwerking

Het toestandsdiagram en de veronderstelling omtrent het jaarlijks aantal instromende studenten laten zich als volgt vertalen in termen van deze variabelen.

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 0,3x_n + 10\,000 \\y_{n+1} &= 0,6x_n + 0,7y_n \\w_{n+1} &= 0,2y_n + 0,9w_n\end{aligned}$$

In matrixnotatie kan het bovenstaande stelsel geschreven worden als

$$\underline{x}_{n+1} = A\underline{x}_n + \underline{b}$$

waarbij

$$\underline{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ w_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,9 \end{bmatrix} \text{ en } \underline{b} = \begin{bmatrix} 10\,000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Als de vector $\underline{x}_0$ bekend is kan $\underline{x}_n$ berekend worden. Ook is het mogelijk $\underline{x}_n$ uit te drukken in A , $\underline{x}_0$, $\underline{b}$ en n . Zo is

$$\begin{aligned}\underline{x}_1 &= A\underline{x}_0 + \underline{b} \\ \underline{x}_2 &= A\underline{x}_1 + \underline{b} \\ &= A(A\underline{x}_0 + \underline{b}) + \underline{b} \\ &= A^2\underline{x}_0 + A\underline{b} + \underline{b} \text{ en} \\ \underline{x}_3 &= A\underline{x}_2 + \underline{b} \\ &= A(A^2\underline{x}_0 + A\underline{b} + \underline{b}) + \underline{b} \\ &= A^3\underline{x}_0 + A^2\underline{b} + A\underline{b} + \underline{b}\end{aligned}$$

Met volledige inductie kan bewezen worden dat

$$\begin{aligned}\underline{x}_n &= A^n\underline{x}_0 + A^{n-1}\underline{b} + A^{n-2}\underline{b} + \dots + A\underline{b} + \underline{b} \\ &= A^n\underline{x}_0 + (A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I)\underline{b}\end{aligned}$$

De matrix waarmee de vector $\underline{b}$ wordt vermenigvuldigd, kan worden vereenvoudigd. Als deze matrix B wordt genoemd dan volgt

$$B = A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I \text{ en ook}$$

$$BA = A^n + A^{n-1} + \dots + A^2 + A$$

Dan blijkt dat $B - BA = -A^n + I$ ofwel $B(I - A) = I - A^n$.

Onder de voorwaarde dat de inverse matrix van $I - A$ bestaat, volgt dan $B = (I - A^n)(I - A)^{-1}$.

Voor $\underline{x}_n$ volgt dan

$$\begin{aligned}\underline{x}_n &= A^n\underline{x}_0 + (I - A^n)(I - A)^{-1}\underline{b} \\ &= A^n\underline{x}_0 + \{(I - A)^{-1} - A^n(I - A)^{-1}\}\underline{b} \\ &= A^n\{\underline{x}_0 - (I - A)^{-1}\underline{b}\} + (I - A)^{-1}\underline{b}\end{aligned}$$

Om het gedrag van $\underline{x}_n$ te bepalen voor grote waarden van n kunnen de eigenwaarden van A worden bepaald. Deze eigenwaarden zijn $k = 0,3$, $k = 0,7$ en $k = 0,9$. Deze eigenwaarden liggen alle drie tussen 0 en 1 en daarom convergeren de elementen van $A^n\{\underline{x}_0 - (I - A)^{-1}\underline{b}\}$ naar 0. De vector $\underline{x}_n$ gaat voor grote waarden van n steeds meer lijken op $(I - A)^{-1}\underline{b}$. Nu is $(I - A)^{-1}$ gelijk aan

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{7} & 0 & 0 \\ \frac{20}{7} & \frac{10}{3} & 0 \\ \frac{40}{7} & \frac{20}{3} & 10 \end{bmatrix} \text{ en daarom geldt } \underline{x}_n \approx \begin{bmatrix} 14\,286 \\ 28\,571 \\ 57\,143 \end{bmatrix}$$

Het derde element w_n van x_n convergeert naar 57 143. Omdat er slechts 25 000 arbeidsplaatsen beschikbaar zijn zal er dus aanzienlijke werkloosheid ontstaan onder de afgestudeerden van de groep hogescholen.

Men kan nieuwe studenten alleen werkgelegenheid garanderen als w_n naar een waarde convergeert die kleiner is dan 25 000. Als de hogescholen jaarlijks a eerstejaars studenten aannemen dan geldt

$$(I - A)^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{10}{7} & 0 & 0 \\ \frac{20}{7} & \frac{10}{3} & 0 \\ \frac{40}{7} & \frac{20}{3} & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{7}a \\ \frac{20}{7}a \\ \frac{40}{7}a \end{bmatrix}$$

Volledige werkgelegenheid kan alleen bestaan als $\frac{40}{7}a \leq 25\,000$ ofwel als $a \leq 4\,375$. Volgens dit model zal er geen werkloosheid ontstaan als de hogescholen tezamen niet meer dan 4 375 studenten aannemen.

Aanpassing van het model

In het model is er van uitgegaan dat er jaarlijks 10 000 studenten in de propedeutische fase instromen. Het is aannemelijker te veronderstellen dat de werkgelegenheid voor afgestudeerden van invloed is op het aantal eerstejaars studenten. Ongetwijfeld zullen er studenten zijn die aan een van de hogescholen gaan studeren, of er nu werkgelegenheid is of niet. Veronderstel dat deze groep 2 000 man/vrouw groot is. Daarnaast zullen er meer studenten naar de hogescholen komen naarmate er meer werkgelegenheid voor afgestudeerden is. Het verband tussen het aantal nieuwe studenten en de werkgelegenheid in de betreffende sector van de arbeidsmarkt wordt lineair verondersteld. Voor elke 10 vrije arbeidsplaatsen aan het begin van een studiejaar beginnen er 4 studenten aan de opleiding.

Onder deze veronderstellingen moet het model als volgt worden aangepast. Aan het begin van schooljaar $n + 1$ zijn er w_{n+1} afgestudeerden beschikbaar op de arbeidsmarkt. Zolang w_{n+1} kleiner is dan 25 000 zijn er dus $25\,000 - w_{n+1}$ vrije arbeidsplaatsen. Het aantal nieuwe eerstejaars studenten in

studiejaar $n + 1$ is volgens de veronderstellingen gelijk aan

$$2\,000 + 0,4(25\,000 - w_{n+1}) = 12\,000 - 0,4w_{n+1}.$$

In eerste instantie wordt de situatie bekeken waarin er jaarlijks sprake is van volledige werkgelegenheid. Achteraf kan dan onderzocht worden of dat terecht is geweest.

Het volledige model wordt nu beschreven door het volgende stelsel vergelijkingen.

$$x_{n+1} = 0,3x_n - 0,4w_{n+1} + 12\,000$$

$$y_{n+1} = 0,6x_n + 0,7y_n$$

$$w_{n+1} = 0,2y_n + 0,9w_n$$

Als in de eerste vergelijking het rechterlid van de derde vergelijking op de plaats van w_{n+1} wordt gesubstitueerd dan volgt

$$x_{n+1} = 0,3x_n - 0,4(0,2y_n + 0,9w_n) + 12\,000$$

$$= 0,3x_n - 0,08y_n - 0,36w_n + 12\,000$$

In matrixnotatie kan het stelsel dan geschreven worden als

$$\underline{x}_{n+1} = A\underline{x}_n + \underline{b}, \text{ waarbij}$$

$$\underline{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ w_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0,3 & -0,08 & -0,36 \\ 0,6 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,9 \end{bmatrix} \text{ en}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 12\,000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Evenals in het voorgaande kan $\underline{x}_n$ geschreven worden als

$$\underline{x}_n = A^n \{ \underline{x}_0 - (I - A)^{-1} \underline{b} \} + (I - A)^{-1} \underline{b}$$

Evenwicht

Afhankelijk van de eigenwaarden van A ontstaat al dan niet een evenwichtssituatie. Deze eigenwaarden zijn niet zo eenvoudig te bepalen als in het voorgaande. De matrixvergelijking $A\underline{x} = k\underline{x}$ heeft alleen dan een oplossing $\underline{x}$ die ongelijk is aan $\underline{0}$ als $\det(A - kI) = 0$. Dit komt overeen met

$$\begin{vmatrix} 0,3-k & -0,08 & -0,36 \\ 0,6 & 0,7-k & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,9-k \end{vmatrix} = 0$$

Als deze determinant naar zijn eerste kolom wordt ontwikkeld, dan volgt voor de eigenwaarden k van A de vergelijking

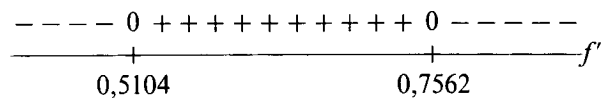
$$(0,3 - k)(0,7 - k)(0,9 - k) - 0,048k = 0$$

Deze vergelijking komt overeen met

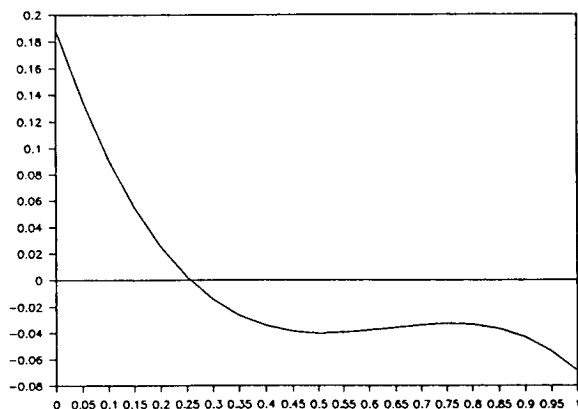
$$0,189 - 1,158k + 1,9k^2 - k^3 = 0$$

Het linkerlid van de laatste vergelijking wordt $f(k)$ genoemd. Het oplossen van de vergelijking komt dan overeen met het bepalen van de nulpunten van f . Om een idee te krijgen van de ligging van de nulpunten van f kan de grafiek van f geschetst worden. Daartoe wordt het functieverloop van f bepaald met behulp van de afgeleide functie van f . Deze afgeleide functie luidt

$f'(k) = -1,158 + 3,8k - 3k^2$. Deze afgeleide functie heeft als nulpunten $k \approx 0,7562$ en $k \approx 0,5104$. Het tekenoverzicht van f' staat in de onderstaande figuur.



De functie f blijkt een minimum te hebben voor $k \approx 0,5105$ met een waarde van ongeveer $-0,0400$ en blijkt een maximum te hebben voor $k \approx 0,7562$ met een waarde van ongeveer $-0,0326$. De grafiek van f ziet er daarom uit zoals in de onderstaande figuur is geschetst.



Figuur 2

Uit deze figuur valt de conclusie te trekken dat f één reëel nulpunt heeft. Dat betekent dat de matrix A een reële eigenwaarde en twee complexe eigenwaarden heeft. Als de reële eigenwaarde van A gelijk is aan k_1 dan kan voor beide complexe eigenwaarden een vergelijking worden afgeleid door een factor $k - k_1$ uit het functievoorschrift van f uit te delen. Voor deze complexe eigenwaarden blijft dan een tweedegraads vergelijking over, waarvan de discriminant negatief is. Een dergelijke vergelijking heeft twee complexe oplossingen die elkaars complex toegevoegde zijn.

Samengevat: A heeft een reële eigenwaarde k_1 , die –zo blijkt uit de schets van de grafiek van f – ongeveer gelijk is aan $0,25$ en twee complexe eigenwaarden k_2 en $\bar{k}_2$.

De vector $\underline{x}_n$ benadert voor grote waarden van n de vector $(I - A)^{-1}\underline{b}$ als zowel $|k_1| < 1$ als $|k_2| < 1$. Als k_2 aan deze voorwaarde voldoet, dan geldt ook $|\bar{k}_2| < 1$, omdat een complex getal en zijn complex toegevoegde dezelfde absolute waarde hebben. De eigenwaarde k_1 is ongeveer gelijk aan $0,25$ en zijn absolute waarde is zeker kleiner dan 1 . Voor de absolute waarde van k_2 kan eenvoudig een benadering worden gevonden. Daartoe kan gebruik worden gemaakt van de eigenschap dat het product van de eigenwaarden van een matrix –vooropgesteld dat de matrix diagonaliseerbaar is– gelijk is aan de determinant van de matrix.

In dit geval is de matrix A diagonaliseerbaar en is het product van de eigenwaarden gelijk aan $k_1 \cdot |k_2|^2$. De determinant van A is gelijk aan $0,189$. Omdat $k_1 \approx 0,25$ volgt dat $|k_2|^2 \approx 0,756$. Daarom geldt dat $|k_2| \approx 0,87$ en deze absolute waarde is kleiner dan 1 .

Geconcludeerd kan worden dat $\underline{x}_n \approx (I - A)^{-1}\underline{b}$ voor grote waarden van n . Als de vector $(I - A)^{-1}\underline{b}$ gelijk is aan $\underline{y}$ dan volgt $\underline{b} = (I - A)\underline{y}$.

De vector $\underline{y}$ kan dus bepaald worden uit het stelsel

$$\begin{bmatrix} 12\,000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,08 & 0,36 \\ -0,6 & 0,3 & 0 \\ 0 & -0,2 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Voor de elementen van $\underline{y}$ geldt daarom het stelsel

$$\begin{cases} 0,7y_1 + 0,08y_2 + 0,36y_3 = 12\,000 \\ -0,6y_1 + 0,3y_2 = 0 \\ -0,2y_2 + 0,1y_3 = 0 \end{cases}$$

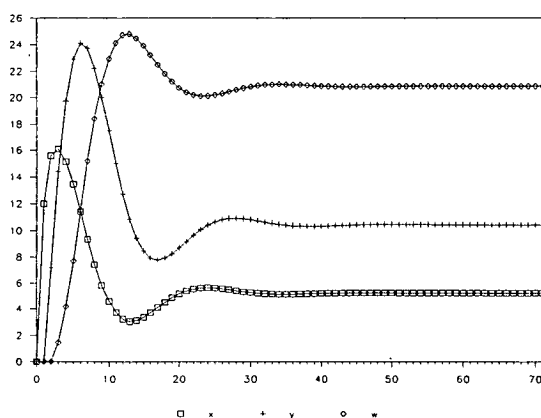
De oplossing van dit stelsel kan bepaald worden door met behulp van de tweede en de derde vergelijking y_1 en y_3 uit te drukken in y_2 . Het resultaat is $y_1 = 0,5y_2$ en $y_3 = 2y_2$. Als deze resultaten worden ingevuld in de eerste vergelijking dan volgt

$$0,35y_2 + 0,08y_2 + 0,72y_2 = 12\,000$$

Hieruit volgt $y_2 = 10\,435$ en dus geldt dat $y_1 = 5\,217$ en $y_3 = 20\,870$. Het aantal eerstejaars studenten x_n convergeert naar 5217, het aantal hoofdfase-studenten y_n convergeert naar 10 435 en het aantal al dan niet werkende afgestudeerden is op den duur gelijk aan 20 870.

Een controle

De bovenstaande conclusie gaat evenwel alleen op als er elk jaar sprake is van op zijn minst volledige werkgelegenheid onder de afgestudeerden. Hoewel w_n convergeert naar 20 870, hoeft dat nog niet te betekenen dat $w_n \leq 25\,000$ voor alle waarden van n . Om inzicht te krijgen in de aard van de convergentie van w_n wordt het model doorgerekend met een spreadsheet-programma. Als startvector $\underline{x}_0$ wordt daarbij de nulvector $\underline{0}$ gekozen. Een aantal resultaten is verwerkt in de onderstaande grafieken.



Figuur 3

Zo te zien overschrijdt w_n voor geen enkele waarde van n de grenswaarden van 25 000. Dat houdt in dat de convergentie verloopt zoals in het model is beschreven. Zou w_n voor een zekere waarde van n groter worden dan 25 000 dan ontwikkelen de studentenpopulatie en de groep afgestudeerden zich volgens het model dat beschreven wordt door $\underline{x}_{n+1} = B\underline{x}_n + \underline{c}$, waarbij

$$B = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,9 \end{bmatrix} \text{ en } \underline{c} = \begin{bmatrix} 2\,000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dit model lijkt sterk op het model uit het inleidende voorbeeld van dit artikel. De vector $\underline{x}_n$ convergeert naar $(I - A)^{-1}\underline{c}$ en dat betekent dat w_n naar 11 429 convergeert. Als w_n op zeker moment boven de 25 000 uitstijgt, dan zal na verloop van tijd w_n weer onder deze grenswaarde dalen en convergeert w_n weer verder volgens het oorspronkelijke model.

Een golfbeweging

Uit de grafieken in figuur 3 blijkt dat de hierboven beschreven situatie zich in dit voorbeeld niet voordoet. Een ander aspect van het convergentieproces komt ook duidelijk in de grafieken van figuur 3 tot uiting. De convergentie van x_n , y_n en w_n verloopt volgens een gedempte trilling. Zo op het eerste oog blijkt de periode van de gedempte trilling gelijk te zijn aan 21 jaar. Met behulp van de eigenwaarden van A is het mogelijk de periode van deze trilling te berekenen.

De matrix A heeft drie eigenwaarden, een reële eigenwaarde k_1 ter grootte van ongeveer 0,25 en twee complexe eigenwaarden k_2 en $\bar{k}_2$. Als k_2 gelijk is aan $re^{i\varphi}$, dan is $\bar{k}_2$ gelijk aan $re^{-i\varphi}$. Omdat de absolute waarde van k_2 gelijk is aan ongeveer 0,87 volgt dat $r \approx 0,87$. Met behulp van deze eigenwaarden kan men schrijven

$$\underline{x}_n = c_1 k_1^n \underline{e}_1 + r^n (c_2 e^{in\varphi} \underline{e}_2 + c_3 e^{-in\varphi} \underline{e}_3) + (I - A)^{-1} \underline{b}$$

waarbij $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ en $\underline{e}_3$ de eigenvectoren zijn bij k_1 , k_2 en $\bar{k}_2$. Uit het bovenstaande volgt onder andere dat

$$w_n = K_1 k_1^n + r^n (K_2 e^{in\varphi} + K_3 e^{-in\varphi}) + 20\,870.$$

In deze uitdrukking zijn K_1 , K_2 en K_3 vooralsnog complexe coëfficiënten die afhangen van c_1 , c_2 en c_3 en van de drie eigenvectoren. Deze coëfficiënten

kunnen bepaald worden uit de eerste drie punten op de grafiek van w_n . Daaruit blijkt namelijk dat $w_0 = w_1 = w_2 = 0$. Voor K_1 , K_2 en K_3 volgt dan het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} K_1 + K_2 + K_3 + 20870 = 0 \\ k_1 K_1 + r e^{i\varphi} K_2 + r e^{-i\varphi} K_3 + 20870 = 0 \\ k_1^2 K_1 + r^2 e^{2i\varphi} K_2 + r^2 e^{-2i\varphi} K_3 + 20870 = 0 \end{cases}$$

Aan de hand van dit stelsel kunnen K_1 , K_2 en K_3 uitgedrukt worden in k_1 , r en φ . Als men met behulp van de eerste en de tweede vergelijking K_2 elimineert en vervolgens met behulp van de tweede en de derde vergelijking ook K_3 elimineert, dan resulteert dat in een stelsel van twee vergelijkingen voor K_1 en K_3 . Uit dat stelsel kan K_3 geëlimineerd worden. Dan blijft er voor K_1 één vergelijking over. Uit deze vergelijking blijkt dat K_1 een reëel getal is. Uit de eerste vergelijking van het oorspronkelijke stelsel volgt dan dat K_2 en K_3 elkaars complex toegevoegde zijn. Geconcludeerd mag worden dat $w_n = K_1 k_1^n + r^n (K_2 e^{in\varphi} + \bar{K}_2 e^{-in\varphi}) + 20870$. Als voor K_2 geschreven wordt $K_2 = R e^{i\alpha}$, dan geldt

$$\begin{aligned} w_n &= K_1 k_1^n + r^n (R e^{i\alpha} e^{in\varphi} + R e^{-i\alpha} e^{-in\varphi}) + 20870 \\ &= K_1 k_1^n + r^n R (e^{i(\alpha+n\varphi)} + e^{-i(\alpha+n\varphi)}) + 20870 \\ &= K_1 k_1^n + 2r^n R \cos(\alpha + n\varphi) + 20870 \end{aligned}$$

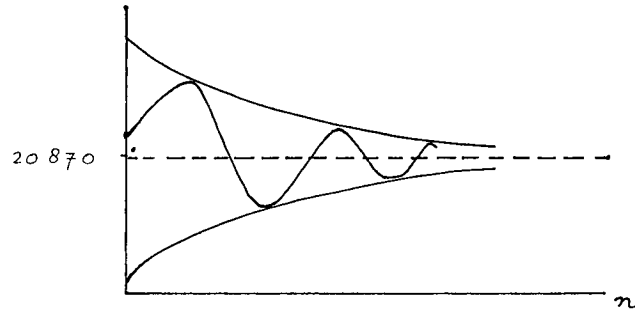
Een goede benadering van w_n kan gevonden worden door te bedenken dat $k_1 \approx 0,25$ en dat $r \approx 0,87$. Voor grote waarden van n kan de eerste term $K_1 k_1^n$ in de uitdrukking voor w_n verwaarloosd worden ten opzichte van de tweede term $2r^n R \cos(\alpha + n\varphi)$. Dat houdt in dat

$$w_n \approx 2r^n R \cos(\alpha + n\varphi) + 20870.$$

De grafiek van dit rechterlid kent ruwweg het volgende verloop.

Er is sprake van een gedempte trilling. De trilling wordt veroorzaakt door de factor $\cos(\alpha + n\varphi)$. De periode van deze goniometrische functie is gelijk aan $\frac{2\pi}{\varphi}$. Wil men deze periode berekenen, dan moet

het argument φ van de complexe eigenwaarde k_2 bepaald worden. Daartoe kan men gebruik maken



Figuur 4

van de eigenschap dat de som van de elementen op de hoofddiagonaal van een matrix gelijk is aan de som van eigenwaarden van deze matrix – mits de matrix diagonaliseerbaar is. Wordt deze eigenschap toegepast op de matrix A met eigenwaarden k_1 , $r e^{i\varphi}$ en $r e^{-i\varphi}$, dan volgt dat $k_1 + r e^{i\varphi} + r e^{-i\varphi} = 1,9$ ofwel $k_1 + r(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = 1,9$ $k_1 + 2r \cos \varphi = 1,9$

Uit het voorgaande blijkt dat k_1 ongeveer gelijk is aan 0,25. Een nauwkeuriger benadering vindt men met een numerieke methode. Een benadering met zes significante cijfers achter de komma is 0,256769. De absolute waarde r van k_2 is dan gelijk aan

$$r = \sqrt{\frac{0,189}{k_1}} = 0,857945$$

Voor $\cos \varphi$ volgt dan de vergelijking

$$0,256769 + 2 \cdot 0,857945 \cdot \cos \varphi = 1,9$$

$$\cos \varphi = 0,957655$$

$$\varphi = 0,292 \text{ (rad)}$$

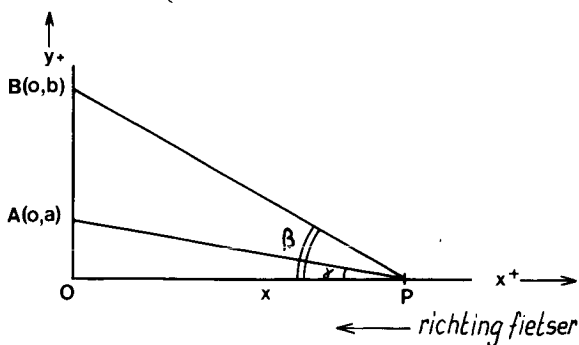
De periode van de functie $n \rightarrow \cos(\alpha + n\varphi)$ is dan gelijk aan $\frac{2\pi}{0,292} \approx 21,5$. Dit houdt in dat de periode van de gedempte trilling om en om 21 en 22 jaar is.

- a stel $OP = x$ en verifieer de formule
 $\tan(\beta - \gamma) = \frac{(b-a)x}{x^2 + ab} = f(x)$;
 b bereken het maximum van $f(x)$;
 c neem $a = 1$, $b = 4$ en voer bovenstaande berekening uit.

► Eenvoudige meetkunde

H. Zunneberg

Kort geleden kwam tijdens de wiskunde-B les in 5 vwo het volgende vraagstuk aan de orde: een fietser, zich op de X^+ -as naar O begevend, ziet op de Y^+ -as twee torens A en B . De hoek, waaronder hij die torens ziet, wordt groter tot hij komt bij een punt P_0 , waarna de hoek weer kleiner wordt. De vraag luidt: waar ligt P_0 ?



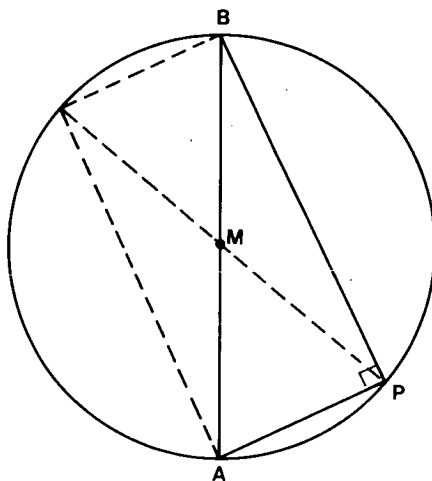
figuur 1

De door mij gebruikte en landelijk zeer bekende methode geeft een schets, waarvan fig. 1 de essentialia bevat met daaronder de formule $\tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan \beta - \tan \gamma}{1 + \tan \beta \times \tan \gamma}$ en de volgende opdrachten:

Na braaf met de klas antwoorden te hebben uitgerekend bekwam ik het gevoel, dat ik weliswaar de opdrachten had uitgevoerd, maar het probleem niet bevredigend had opgelost. Enerzijds was er de eenvoud van het probleem, anderzijds waren er de oneigenlijke middelen, waarmee het moest worden aangepakt.

Ik ben van mening, dat de taak van de wiskundeleraar er niet uit bestaat om de leerling formules te verschaffen, maar om hem te helpen relevante vragen te stellen en hem te helpen bij het beantwoorden daarvan.

Relevant lijkt mij de vraag: waar liggen alle punten, waaronder een gegeven lijnstuk AB onder dezelfde hoek α gezien wordt? Duidelijk is, dat de middellijn (m) van AB een symmetrie-as van de verzameling punten (V) moet zijn, en dat bij $\alpha = 90^\circ$ V een cirkel is met een middellijn AB (fig. 2).

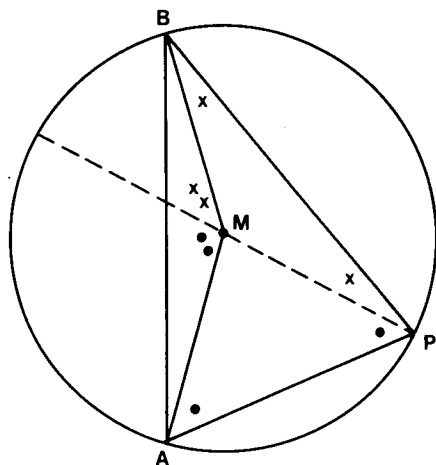


figuur 2 $\triangle ABP$ is een halve rechthoek.

Is $\alpha \neq 90^\circ$ dan ligt het voor de hand een cirkel te proberen, waarvan het middelpunt wel op m maar niet op AB ligt.

Deze poging heeft succes want uit figuur 3 blijkt, dat $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AMB$ voor alle P op grote boog AB . Makkelijk is in te zien, dat $\angle APB > \frac{1}{2} \angle AMB$ is als P binnen de cirkel ligt en $< \frac{1}{2} \angle AMB$ als P erbuiten ligt.

N.B. We spreken hier alleen over punten P , die rechts van lijnstuk AB liggen.



figuur 3

Verder geldt: hoe kleiner de cirkel is, die door A en B gaat, hoe dichter M bij AB ligt, hoe groter $\angle AMB$ en dus $\angle APB$ wordt.

Het gevraagde punt P_0 moet dus liggen op de kleinste cirkel door A en B , die nog een punt met de X^+ -as gemeenschappelijk heeft.

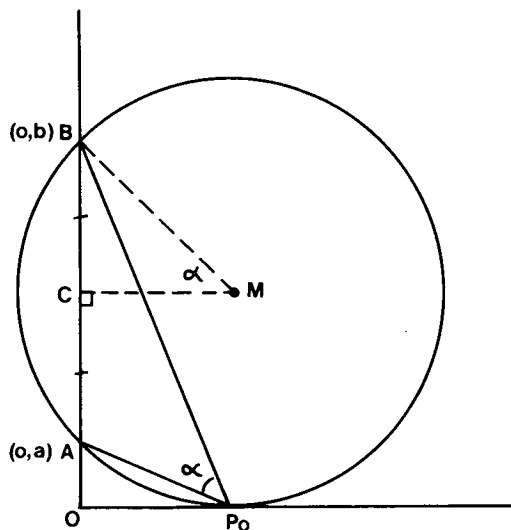
P_0 ligt dus op de cirkel door A en B , die raakt aan de X^+ -as (cirkel OC om vanuit A en B , het snijpunt van de cirkelbogen is M).

Eenvoudig rekenwerk in figuur 4 laat zien, dat $C = (0, \frac{1}{2}(a+b))$, $BM = \frac{1}{2}(a+b)$, $BC = \frac{1}{2}(b-a)$ en $CM = \sqrt{ab}$ dus $P_0 = (\sqrt{ab}, 0)$.

$$\alpha = \frac{1}{2} \angle AMB = \angle CMB, \text{ dus } \tan \alpha = \frac{\frac{1}{2}(b-a)}{\sqrt{ab}}.$$

$$M = (\sqrt{ab}, \frac{1}{2}(a+b)).$$

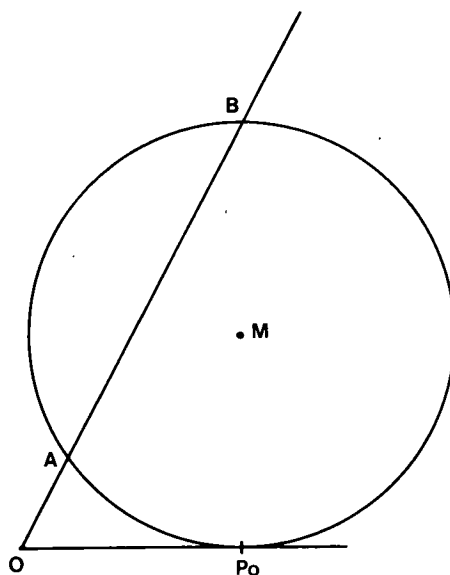
Wonderlijk, x_M is het meetkundig en y_M is het rekenkundig gemiddelde van a en b .



figuur 4 $AC = BC$, $MB = MA = MP_0$

Hieruit volgt, dat de zijden van $\triangle BCM$ de bekende relatie $\sqrt{ab}, \frac{1}{2}(b-a), \frac{1}{2}(b+a)$ vormen voor het vinden van Pythagorische driehoeken.

Tenslotte nog deze vraag: hoe vinden we P_0 als AB niet loodrecht op de X^+ -as staat?



figuur 5

Differentiaalrekening is nu zeker niet meer aan te bevelen. Maar wel blijft gelden, dat $DA \times OB = OP_0^2$ (fig. 5).

Deze gelijkheid heette vroeger de machtsstelling en volgt simpel uit de gelijkvormigheid van de driehoeken OAP_0 en OP_0B .

Met andere woorden: het punt P_0 is slechts afhankelijk van OA en OB en niet van de hoek tussen AB en de X^+ -as.

Wat mij betreft is dit (meetkunde-)probleem nu wel voldoende bekeken, maar er is nog een ander probleem:

hoe kan na een zo langdurige en ingrijpende modernisering van het wiskunde-onderwijs, waarin het afschaffen van maniertjes, het bevorderen van de inzichtelijkheid en het zelf ontdekken hoog in het vaandel stonden, een interessant vraagstuk in een landelijk bekende methode zo in de receptensfeer van het kookboek worden gebracht?

Ik ben bang, dat dit geval niet op zichzelf staat, en dat de neiging om bij voorbeeld een vreemde formule volgens weinig inzichtelijke regels te differentiëren eerder toeneemt dan afneemt (eindexamen). Wie neemt mijn vrees weg?

De titel 'Eenvoudige meetkunde' lijkt pretentius. Toch is mij gebleken, vorig jaar en het jaar daarvoor, tijdens een studieles, gegeven aan een gemotiveerde, maar niet duidelijk briljante groep brugklasleerlingen, hoe zij in staat waren de portée van de stelling van Thales (fig. 2) en de algemenere versie daarvan (fig. 3) binnen het tijdsbestek van één lesuur, te begrijpen.

Om P_0 te kunnen tekenen in figuur 4 en dat is de essentie van het verhaal, is verder nog gezond verstand nodig.

Over de auteur:

H. Zunneberg is leraar wiskunde aan het Geert Groote College te Deventer

● Bijdrage ● ● ● ●

► Stenen tellen

Ir. Henk Mulder



De foto toont een waterput in de sneeuw. Elke laag bestaat uit een aantal stenen, gemetseld in de vorm van een cirkel. De vraag: hoeveel stenen zitten op zo'n cirkel?

In principe kan dat als volgt worden opgelost: tel hoeveel stenen er aan de voorkant te zien zijn en verdubbel dat aantal. Maar nu komt de moeilijkheid. Links en rechts is de vertekening dermate groot dat door de schijnbare verkorting het tellen vrijwel onmogelijk wordt en daardoor de uitkomst erg onbetrouwbaar. Aan het centrale deel van de voorzijde echter is tellen wel goed mogelijk. Bedenk een methode om toch het aantal te weten te komen.

Een oplossing vindt u op pagina 231.

► Een wereld van wereldjes

– notities bij het verschijnen van
*‘Tegengesteld’*¹ –

Ben Knip

Niets mee aan de hand?

Wie heeft geen herinnering aan het werken met negatieve getallen? Mijn gedachten gaan onmiddellijk terug naar de middelbare school. Het was toch eigenlijk een gemakkelijk onderwerp uit de wiskunde. Nog zie ik de leraar voor me die ons met enige schaamte de ‘truc’ onthulde, dat min maal min plus was. Maar nu ik er nog eens bij stil sta, kom ik tot de conclusie dat die negatieve getallen voor mij toch eigenlijk een ‘Fremdkörper’ zijn gebleven. Ik betrap me erop dat ik allerlei berekeningen zó uitvoer, dat ik uitsluitend met positieve getallen werk, waaraan ik tenslotte nog een plus of min toevoeg. Het is blijkbaar een onderwerp waarmee meer aan de hand is.

Probleemgebieden

Dat er meer mee aan de hand is, maken de auteurs reeds in de inleiding van het boek duidelijk; er

blijken trouwens meer aspecten te zijn waardoor het onderwerp problematisch is. In deze studie neemt de didactische analyse van deze problematische aspecten een voorname plaats in. Het gaat om de volgende drie aspecten:

* *Het onderwijs bevindt zich op het breukvlak van basis- en voortgezet onderwijs.*

De brugperiode kent specifieke problemen die zich bij allerlei vakken voordoen. De negatieve getallen² zijn hier een typisch voorbeeld van. Zij markeren de overgang van het reken/wiskunde-onderwijs van de basisschool naar het wiskunde-onderwijs dat er op volgt. Enerzijds zijn de negatieve getallen heel tastbaar en nabij en sluit het onderwerp goed aan bij de leerstof van de basisschool, anderzijds, waar het de rekenregels betreft, zijn de negatieve getallen abstract en ondoorgrondelijk. De vraag is dan hoe je, beginnend bij die inleidende contextrijke activiteiten, uiteindelijk bij de formele rekenregels terecht kunt komen. Het is deze vraag die als een rode draad door het boek heen loopt. Daarbij wordt uiteengezet dat het begrip ‘tegengestelde’ bij de overgang naar de formele wiskunde een belangrijke rol speelt.

* *Het onderwerp kan worden ingeleid met contexten (‘wereldjes’), maar elke context heeft zijn voor- en nadelen.*

Het gebruik van contexten is op zich geen vrijblijvende zaak en de keuzen die daarbij gemaakt kunnen worden, bepalen in hoge mate het gemak waarmee de groei naar een meer omvattend begrip, hier aangeduid met ‘tegengestelde’, kan plaatsvinden. Het gebruik van contexten vraagt bovendien om enige verdieping in de leerpsychologische achtergronden.

* *Het onderwerp is een belangrijke schakel in de opbouw van de wiskunde.*

Inzicht in het begrip ‘tegengestelde’ is bij veel onderwerpen in de wiskunde, zoals bij substituties in formules, van fundamenteel belang. Concrete contexten kunnen zelfs storend werken; de wiskunde zelf lijkt dan de meest aangewezen context te worden.

Exemplarische behandeling

De meeste boeken op het gebied van de wiskunde-didactiek laten de lezer kennis maken met bepaalde ideeën en principes, die aan de hand van enkele losse voorbeelden worden toegelicht. Deze voorbeelden kunnen weliswaar in de klas worden gebruikt, maar passen niet altijd bij de gebruikte methode.

Andere bronnen van (praktische) didactiek vormen de verschillende methodes zelf, waarin didactische principes meestal impliciet en niet erg consequent worden toegepast.

In 'Tegengesteld' is de opzet geheel anders geweest. Om te beginnen is dit didactiekboek niet het werk van één auteur, maar is er sprake van een groep auteurs: leraren, lerarenopleiders, onderzoekers en didactici. De samenstelling van de groep garandeert een originele en veelzijdige benadering van het onderwerp. In het boek wordt dan ook een unieke werkwijze gevolgd:

aan de hand van één onderwerp (de negatieve getallen) worden verschillende didactische benaderingen besproken; een exemplarische behandeling van de didactiek!

Wat mij vooral trof, was dat ik me al lezende in de klas waande, en de beschreven situaties onmiddellijk herkende. Het boek is dus niet een typisch 'studeerkamer'-produkt, maar staat heel dicht bij de onderwijspraktijk. Bovendien zijn de besproken ideeën en principes alle in de praktijk beproefd; de authentieke reacties van leerlingen en leraren verlevendigen op vele plaatsen het betoog.

Plezierig was ook dat ik nu tegelijk met de beschrijving van de moeilijkheden die zich in een aantal praktijksituaties kunnen voordoen, naast een analyse van die situaties ook een overzicht kreeg aangeboden van verschillende didactische mogelijkheden.

Wiskundige fundering

Ook de wiskundige fundering van de negatieve getallen krijgt ruimschoots aandacht. Oppervlakkig gezien lijkt er weinig verband te bestaan tussen de axiomatic van de negatieve getallen en het dagelijks werk van de leraar. De relatie tussen de

grondslagen en de didactiek wordt hier (voor het eerst!) uiteengezet. Op dezelfde wijze wordt de historische ontwikkeling van de negatieve getallen gevolgd en tot in zijn consequenties voor de hedendaagse praktijk doorgetrokken. Het verbaasde me, dat de negatieve getallen, zoals wij ze kennen nog maar zó kort bestaan!

Het boek plaatst een aantal didactische aspecten in een ruimer kader; het beperkt zich daarbij niet tot de negatieve getallen, maar laat ook zien hoe de problemen van introductie en structuur zich voordoen bij andere wiskundige begrippen zoals breuken en functies.

Contexten nader bekeken

Alle beschouwingen vinden plaats in het kader van de didactiek (de leer van het leren). In aansluiting daarop bepaal ik me in dit artikel tot enkele kanttekeningen: meer in het bijzonder meen ik dat de rol van de contexten in een consistent kader zou kunnen worden geplaatst. De wereldjes (contexten waarin de negatieve getallen worden geïntroduceerd) worden onderscheiden in echte (zoals o.m. 'de bank' en 'temperaturen') en kunstmatige (zoals o.m. 'de heks' en 'Sam').

Deze wereldjes zijn bedoeld om de leerling te verplaatsen naar situaties waar zich het verschijnsel 'minder dan nul' voordoet. Zolang het alleen om deze oriëntatie gaat, lijkt het verstandig om meer contexten aan te bieden. Daarbij zullen de reële wereldjes het beter doen dan de kunstmatige. Maar als het er om gaat aan de hand van die zelfde 'echte' wereldjes de structuur van de negatieve getallen te doorgronden, gaan andere factoren meespelen. Er wordt dan flink in het wereldje geëxerceerd; leerlingen moeten opgaven vertalen in termen van het wereldje, daarin de logische oplossing van een probleem vinden en deze terug vertalen naar de uitgangssituatie.

Al doende krijgt dat wereldje een vastere plaats in het denken. Telkens als een begrip uit dat wereldje wordt genoemd, zullen de daarmee samenhangende begrippen en emoties(!) worden opgeroepen. Heeft de leerling daarmee succes, dan geeft dat vertrouwen. Het wereldje wordt dan met graagte opgeroepen, en wordt verrijkt met nieuwe ervaringen.

gen. Zijn de begeleidende emoties echter onplezierig, dan zal dat wereldje slechts met tegenzin worden opgeroepen; het blijft 'arm en kaal', raakt geïsoleerd en wordt vergeten³.

Om vlot te kunnen omgaan met negatieve getallen, zullen de leerlingen ook tot zekere abstracties, de rekenregels voor negatieve getallen, moeten komen. Maar het is moeilijker je los te maken van echte, reële contexten, dan van kunstmatige. Een kunstmatige context impliceert veeleer zijn functie: een hulp om een structuur (hier: van de verzameling van de negatieve getallen) beter te doorzien. Zo'n context nodigt meer uit om die structuur ook te onderkennen.

Van Dormolen meent dat de kracht van 'de heks' nu juist daarin is gelegen, dat het (bij de denkniveau's van Van Hiele)⁴ een soort tussenniveau vormt tussen het grondniveau en het eerste niveau; het zou de gewenste niveausprong kunnen bevorderen.

Waar het er niet meer om gaat leerlingen zich te laten oriënteren in de nieuwe wereld van de negatieve getallen, maar de structuur van deze wereld op te sporen, wordt de keuze van het wereldje of van de wereldjes, belangrijk.

Meer dan één wereldje?

Er is iets voor te zeggen meer dan één wereldje aan te bieden, om zó de isomorfie van de structuren te doen ervaren, d.w.z. de niveausprong naar een begrip 'tegengestelde' voor te bereiden. Van belang is daarbij de volgorde: eerst de structuur expliciet maken en daarna meer contexten aanbieden of eerst meer contexten aanbieden en daarna de daarbij passende overkoepelende structuur ontwikkelen.

Ik stel me voor dat het opsporen van de structuur van een zeker wereldje (bijv. de bank) ook aanleiding geeft tot het verankeren in het denken van typische begrippen (hier bijv. 'rood staan') en rekenregels ('het delgen van een schuld resulteert in

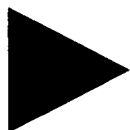
het verhogen van het saldo') daarvan. Wordt daarnaast een ander wereldje verkend (bijv. de doelsaldo's), dan kan dat, ook al vanwege de speciale terminologie, moeilijk in het eerste wereldje (door assimilatie) worden opgenomen. Derhalve zal er voor de doelsaldo's een nieuw wereldje worden aangemaakt, dat goed gescheiden zal blijven van het eerste (anders ontstaat er 'klontering'). Tenslotte zal er nog een omvattend, abstract begrip 'tegengestelde' moeten worden gevormd, dat in dit geval eveneens de kans loopt als apart wereldje, los van de beide andere wereldjes, te worden opgeslagen. We kennen de 'nood'-strategie van leerlingen die zwak zijn in wiskunde: bij elk type vraagstuk memoriseren zij apart de manier van oplossen, d.w.z. bij elk type vraagstuk hoort het eigen bijpassende wereldje met de daarin geldende rekenregels (trucjes), die (lieft éénmalig) uit het hoofd worden geleerd. Op het examen bedrijven deze leerlingen geen wiskunde, maar determineren slechts de vraagstukken naar type.

Dit alles pleit ervoor om bij het doorgronden en expliciteren van de structuur van de negatieve getallen uit te gaan van slechts één wereldje dat een dusdanige opbouw heeft en groei toelaat, dat het (later!) een niveausprong uitlokt waarbij een nieuw begrip ('tegengestelde') wordt gevormd.

Mijn persoonlijke voorkeur gaat daarbij voorlopig nog uit naar het wereldje van de heks, maar in principe is elk wereldje dat aan genoemde specificaties voldoet voor mij acceptabel.

Nu maakt het intussen gevormde begrip 'tegengestelde' geen deel uit van het oorspronkelijke wereldje(!), maar het kan ook niet 'los' van enig wereldje, op zichzelf bestaan. Het hoort thuis in een andere, abstracte wereld, die van de wiskunde zelf. Als ik me nu een min of meer geleidelijke overgang van de wereld van de heks naar die van de wiskunde probeer voor te stellen, dan kan ik me gemakkelijk allerlei verkortingen bij het handelen met de blokjes voorstellen, maar voor het leren omgaan met het begrip 'tegengestelde' in bijv. formules, lijkt het me noodzakelijk dat in het begin regelmatig gereflecteerd zal moeten worden op de structuur van de wereld van de heks. Hierdoor kan het pad van de heks naar de wiskunde worden geëffend en kunnen de leerlingen ermee vertrouwd raken.

Deze 'wereld van de wiskunde' is een vrijwel onmisbare context, waarin de moeizaam verworven abstracties een plaats kunnen krijgen, en de relatie met andere abstracties duidelijk gemaakt kan worden.



Oplossing

Tot slot

Al lezende wordt weer eens duidelijk dat met het toenemen van de didactische kennis, ook de mogelijkheden van de leraar toenemen; de leraar hoeft zich dan niet langer bezig te houden met het aanleggen van noodverbanden (als EHBO'er), maar diagnostiseert (als een arts) en remediëert. Het vak van leraar kan op een hoger, bevredigender niveau worden beoefend.

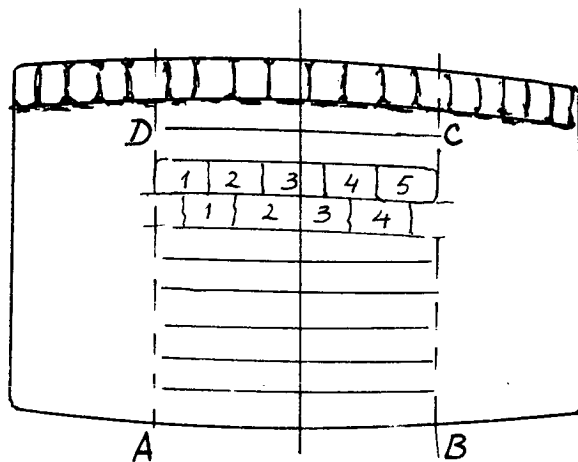
Dit boek verruimt niet alleen de didactische kennis, het nodigt uit tot reflectie en inspireert vooral om nieuwe wegen te verkennen. Zeer de moeite waard voor elke wiskundeleraar en aanstaande wiskundeleraar.

Noten

1. *Tegengesteld*, wiskundendidactiek op de grens van basis- en voortgezet onderwijs, toegespitst op de negatieve getallen. Auteurs: Tineke Brinkman, Kees Buys, Willem Faes, Fred Goffree, Ed de Moor, Pieter Terlouw, Arie Timmermans en Jaap Vedder. Verschenen bij Bekadidact te Baarn, prijs: f34,50.
2. Het gaat hierbij uiteraard niet alleen om de getallen kleiner dan nul, maar om de complete verzameling van de gehele getallen, waarbij de nadruk meer ligt op de deelverzameling van de negatieve gehele getallen.
3. Van Parreren: *Leren op school*.
4. Van Hiele: *Begrip en inzicht*.

Oplossing bij 'Stenen tellen' (blz. 227)

Verdeel de diameter van de put precies in vieren. Trek twee verticale lijnen over de foto, links en rechts op een kwart van de zijkanen. Tussen de lijnen tel ik dan per laag 5 stenen. Dat zijn er per cirkel 6×5 of 30 stenen. En dat kunt u vast zelf wel bewijzen.



Ook is gemakkelijk te bewijzen, dat andere storende factoren, zoals het feit dat de foto van nabij genomen is, slechts tot heel geringe fouten leiden!

Ir. Henk Mulder

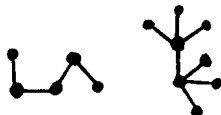
● Werkblad ●

► Bomen

Onder een *boom* zullen we verstaan een stel punten, verbonden door lijnstukken, en wel zo dat:

- 1 Er is altijd een pad van het ene punt naar het andere.
- 2 Van het ene punt naar het andere is er maar één zo'n pad.

Voorbeelden van bomen zijn:

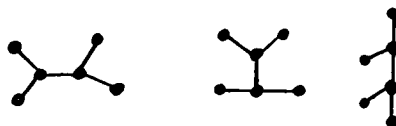


We zullen de punten *knopen* noemen, en de lijnstukken *takken*.

Dit is geen boom, omdat er tussen de beide eindpunten twee verschillende paden mogelijk zijn:



De volgende drie bomen zijn gelijk, omdat we er van uit willen gaan dat de takken mogen worden verbogen:



Er bestaat slechts één boom met twee knopen en één tak:



Er bestaat slechts één boom met drie knopen en twee takken:



Er bestaan twee verschillende bomen met vier knopen en drie takken:



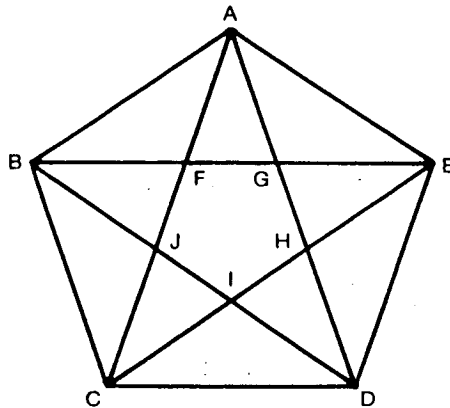
Deze twee bomen zijn verschillend, omdat we de takken nooit zó kunnen verbuigen dat we de ene boom uit de andere kunnen maken.

Hoeveel verschillende bomen bestaan er

- met vijf knopen? (hebben deze alle vier takken?)
- met zes knopen? (hebben deze alle vijf takken?)

● Werkblad ●

► Driehoeken in een vijfhoek



In de regelmatige vijfhoek ABCDE zijn twee verschillende soorten (vormen) driehoeken te zien.

- 1 Welke vormen? (Geef van elke vorm de hoeken.)
 - 2 In hoeveel verschillende groottes komt elke vorm voor?
 - 3 Noem een driehoek die *congruent* is met
 - a driehoek AFG
 - b driehoek BFA
 - c driehoek AFE
 - d driehoek BGD
- (congruent betekent: gelijk in vorm en in grootte)

de deelnemers bevonden zich 15 meisjes, waarvan er één een gouden, twee een zilveren en ook twee een bronzen medaille behaalden. Het volgend jaar zal de olympiade worden gehouden in China.

De Nederlandse ploeg

Drs. J. M. Notenboom (Hogeschool Nederland, Utrecht) en drs. J. G. M. Donkers (Technische Universiteit Eindhoven) waren de begeleiders van het Nederlandse team en hadden voor Nederland zitting in de internationale jury. Prof. dr. H. J. A. Duparc, voorzitter van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, maakte ook dit jaar weer als waarnemer deel uit van de Nederlandse delegatie. De Nederlandse ploeg was geselecteerd uit de prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1988. De voorbereiding op de internationale olympiade door middel van lesbrieven werd verzorgd door J. Donkers. Vijf leden van de Nederlandse ploeg hebben dit jaar hun eindexamen van de middelbare school gedaan en beginnen met een universitaire studie (twee wiskunde, drie natuurkunde). Een lid van de ploeg zal het volgend jaar zijn eindexamen doen. De scores van de Nederlandse deelnemers waren als volgt:

Opgave	1	2	3	4	5	6	Score
Piet Brouwer	0	3	0	7	7	0	17
Lucas du Croo de Jongh	0	2	0	4	7	0	13
Alex Heinis	2	3	0	1	0	1	7
Melvin Koppens	7	3	0	7	0	1	18
Gerton Lunter	0	0	1	3	0	0	4
Marco Vervoort	7	5	7	7	7	0	33
Totaal Ned.	16	16	8	29	21	2	92
gem. Nederland	2,7	2,7	1,3	4,8	3,5	0,3	15,3
gem. alle deelnemers	3,0	4,2	1,3	4,0	3,8	2,5	18,8

Rondom de Olympiade

De meeste ploegen kwamen op zondag 16 juli in Braunschweig aan. Zij werden, gescheiden van hun leiders en begeleiders, ondergebracht in verschillende hotels, verspreid over de stad. In de avond-

► De XXXe Internationale Wiskunde Olympiade 1989

J. G. M. Donkers

De 30e Internationale Wiskunde Olympiade werd gehouden van 13 tot 24 juli 1989 in Braunschweig, West-Duitsland.

Er waren 291 deelnemers uit 50 landen. De Nederlandse ploeg bestond uit de volgende leerlingen:

Piet Brouwer (18), Rotterdam

Lucas du Croo de Jongh (18), Gorssel

Alex Heinis (17), Beverwijk

Melvin Koppens (16), Helmond

Gerton Lunter (18), Sneek

Marco Vervoort (18), Amsterdam.

Marco behaalde een tweede en Melvin een derde prijs. Piet en Lucas ontvingen ieder een oorkonde met een eervolle vermelding.

Op 18 en 19 juli was de wedstrijd en kregen de deelnemers $4\frac{1}{2}$ uur voor drie opgaven. Tien deelnemers wisten de maximale score van 42 punten te behalen. Aan 147 deelnemers werd een prijs (medaille + oorkonde) uitgereikt, 20 goud (38 t/m 42 punten), 55 zilver (30 t/m 37 punten) en 72 brons (18 t/m 29 punten). Er werden dit jaar géén speciale prijzen voor bijzondere oplossingen toegekend. In het officieuze landenklassement werd China eerste met 237 punten gevolgd door Roemenië en de Sovjet-Unie met resp. 223 en 217 punten. Nederland kwam op de 29e plaats met 92 punten. Onder

uren was er voor de deelnemers van allerlei georganiseerd: disco, sporttoernooi, jazz-concert, circus, enz. Voor zover het wedstrijdschema dat toeliet waren er overdag verschillende excursies naar bedrijven en andere bezienswaardigheden in Braunschweig en omgeving. Zaterdag 22 juli brachten we een bezoek aan Hannover, waar we te gast waren van de regering van Neder-Saksen. Na een uitgebreide ontvangst bezochten we een festival van muziek, dans, ballet en mime-voorstellingen in de Herrenhäuser Gärten, dat besloten werd met een groots vuurwerk.

Tijdens de slotbijeenkomst op zondag, riep prof. Engel de leiders van de deelnemende ploegen op tot samenwerking en uitwisseling van olympiade-materiaal. Vervolgens nodigde de Chinese vertegenwoordiger alle landen uit voor de Int. Wiskunde Olympiade 1990 in China. Daarna volgde de prijsuitreiking. We kunnen terugzien op een geslaagde olympiade.

Hieronder volgen nog het landenklassement en de opgaven. De zes gekozen opgaven zijn voorgesteld door resp. de Filippijnen, Australië, Nederland, IJsland, Zweden en Polen.

De door Nederland ingezonden opgave (no. 3), was bedacht door Harm Derksen, wiskundestudent aan de Universiteit van Nijmegen, die in 1988 bij de Int. Wiskunde Olympiade in Australië een bronzen medaille behaalde.

1 China	237	26 Israël	105
2 Roemenië	223	27 België	104
3 Sovjet-Unie	217	28 Korea	97
4 Oost-Duitsland	216	29 Nederland	92
5 Verenigde Staten	207	30 Tunesië	81
6 Tsjecho-Slowakije	202	31 Mexico	79
7 Bulgarije	195	32 Zweden	73
8 West-Duitsland	187	33 Cuba	69
9 Vietnam	183	Nieuw-Zeeland	69
10 Hongarije	175	35 Luxemburg (3)	65
11 Joegoslavië	170	36 Brasilië	64
12 Polen	157	Noorwegen (4)	64
13 Frankrijk	156	38 Marokko	63
14 Iran	147	39 Spanje	61
15 Singapore	143	40 Finland	58
16 Turkije	133	41 Thailand	54
17 Hongkong	127	42 Peru	51
18 Italië	124	43 Filippijnen	45
19 Canada	123	44 Portugal	39
20 Griekenland	122	45 Ierland	37

Groot-Brittannië	122	46 IJsland (4)	33
22 Australië	119	47 Koeweit	31
Columbia	119	48 Cyprus	24
24 Oostenrijk	111	49 Indonesië	21
25 India	107	50 Venezuela (4)	6

De opgaven

1 Bewijs dat de verzameling $\{1, 2, 3, \dots, 1989\}$ geschreven kan worden als de vereniging van 117 deelverzamelingen $A_1, A_2, \dots, A_{117}$ waarbij geldt:

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ voor alle $i \neq j$;
- elke A_i bevat 17 elementen;
- de som van de elementen van A_i is hetzelfde voor alle i .

2 De bissectrice van hoek A van een scherphoekige driehoek ABC snijdt de omschreven cirkel van de driehoek in A_1 . De punten B_1 en C_1 worden op eenzelfde manier gedefinieerd. A_0 is het snijpunt van de lijn AA_1 en de buitenbissectrices van de hoeken B en C . De punten B_0 en C_0 worden op eenzelfde manier gedefinieerd.

Bewijs: a) Opp. $\triangle A_0 B_0 C_0 = 2 \cdot$ Opp. zeshoek $AC_1 B A_1 C B_1$;

b) Opp. $\triangle A_0 B_0 C_0 \geq 4 \cdot$ Opp. $\triangle ABC$.

3 Gegeven zijn positieve gehele getallen n en k . In een plat vlak is een verzameling S gegeven van n verschillende punten met de volgende eigenschappen:

- geen drie punten van S liggen op één lijn;
- bij elk punt P van S zijn er tenminste k andere punten van S die alle dezelfde afstand tot P hebben.

Bewijs: $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

4 In een convexe vierhoek $ABCD$ geldt voor de zijden AB , AD en BC dat $AB = AD + BC$. Er bestaat een punt binnen de vierhoek met afstand h tot de zijde CD zodanig, dat $AP = h + AD$ en $BP = h + BC$.

Bewijs: $\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$.

5 Bewijs dat voor elk positief geheel getal n er n opeenvolgende positieve gehele getallen bestaan

die geen van allen een gehele macht van een priemgetal zijn.

6 Een permutatie $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ van de verzameling $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ waarbij n een geheel positief getal is, heeft de eigenschap P als geldt $|x_i - x_{i+1}| = n$ voor tenminste één i in $\{1, 2, 3, \dots, 2n - 1\}$.

Bewijs dat er voor elke n meer permutaties zijn met de eigenschap P dan zonder de eigenschap P .

Boekbespreking

Gerhard Holland: *Geometrie in der Sekundarstufe*; 201 blz.; DM. 34.-; Band 9 van de serie Lehrbücher und Monographien der Mathematik; B.I., Mannheim, Wien, Zürich; ISBN 0-411-03178-6.

Dit boekje heeft tot doel om leraar en student een degelijke achtergrondkennis te geven van de in het (Duitse) onderwijs voorkomende meetkundeleerstof om hem daardoor in staat te stellen in zijn onderwijs redelijke beslissingen te nemen en keuzes te maken. Grondig, uitvoerig en systematisch wordt ingegaan op leerstofordening, leerstofdoelen, leerdoelen, procesdoelen en op niveaus van behandeling afhankelijk van het schooltype (mavo, havo, vwo). Om het te kunnen lezen is er enige voorkennis nodig en wel een diploma h.b.s.-B of de oude akte L.O.-wiskunde of de akte K 1.

Een groot deel van de in dit boek behandelde meetkunde komt in het Nederlandse onderwijs niet meer voor. Maar in Europa wel! Het boekje bevat de volgende onderwerpen: 1: Doelen, inhouden, leerstofordening, 2: Bewijzen, 3: Construeren, 4: Probleemoplossen, 5: Ontdekkend leren, 6: Begripsvorming. Elk onderwerp wordt op een aantal manieren behandeld naar de aan dit onderwerp verbonden aspecten. Het diepgaand ingaan op procesdoelen geeft een extra dimensie.

De leerling en zijn leerprocessen en de leerpsychologie komen in dit boek niet voor.

De aangehaalde literatuur is op een enkele uitzondering na van Duitse auteurs. Op een verwijzing naar Freudenthal na ontbreken Nederlandse of Engelse bijdragen.

Voor de Nederlandse wiskunde-onderwijsmensen kan dit boek nuttig zijn om kennis te maken met een behandeling van bovengenoemde onderwerpen, die diepgaander en anders is dan in Nederland gebruikelijk.

J. J. Sloff

Postzegels

Versillen in de 20e eeuw



Srinivasa Ramanujan (1887-1920) uit Madras, Tamil Nadu, India, was geheel autodidact. Hij was uiterst origineel; hij ontdekte formules en schreef ze neer. Tot veler verbazing klopten ze (meestal). De Westeuropese bewijstechniek kende hij niet. Hij deed opmerkelijk onderzoek in de getaltheorie; een voorbeeld van een door hem gevonden formule

$$\text{is } \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{\dots}}}} = 3$$



Bertrand Russell (1872-1970), op latere leeftijd vooral bekend als vredesactivist, publiceerde samen met A. N. Whitehead de *Principia Mathematica* (1910-1913), waarin hij de wiskunde geheel in logische termen trachtte te vervatten. Russell is de logica altijd trouw gebleven, iets wat niet van alle wiskundigen gezegd kan worden. De mathematische logica is echter een belangrijke tak van de wiskunde geworden.

'De zakrekenmachine'

► Wie rekt? De leerling of de ZRM?

Lourens van den Brom

Het onderdeel wiskunde van het havo-examen 1989 bestond uit 18 vragen, verdeeld over 5 opgaven. Eigenlijk waren het 17 opdrachten en één echte vraag. Dertien van deze opdrachten waren gesteld in de formulering: 'Bereken...', drie als: 'Teken...' en één luidde: 'Stel een vergelijking op...'

Een waarschuwing ging aan de opgaven vooraf: 'Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.'

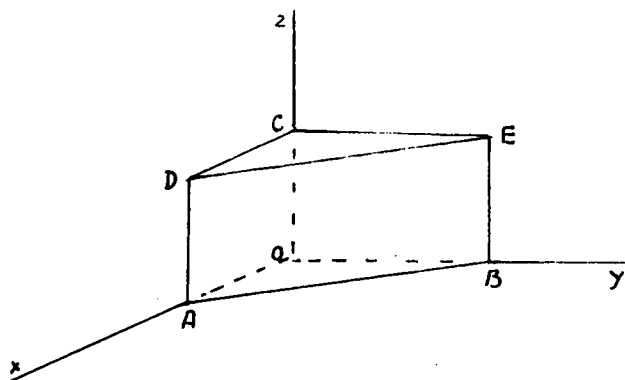
Dus bij een 'Bereken...'-opdracht moest ook de berekening weergegeven worden. Het antwoord alleen leverde meestal geen punten op.

Ik vraag mij dan wel af wat een kandidaat moest doen die een berekening geheel of gedeeltelijk uit het hoofd uitvoerde. En wat als een elektronische zakrekenmachine werd gebruikt? In dat geval had men alle intoetsingen en aflezingen moeten opgeven.

Een voorbeeld uit genoemd examen:

Opdracht 1. 'Bereken in graden nauwkeurig de hoek van de vlakken OAB en BCD .'

Daarbij is dan gegeven het rechte driezijdige prisma $OAB.CDE$ (zie figuur 1) waarbij $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$ en $C(0,0,4)$ in coördinaten t.o.v. het rechthoekige assenstelsel $Oxyz$.



Figuur 1

Een oplossing, die gezien de beoordelingsnormen, toegestaan was gaat als volgt:

'Het vlak OBC is een standvlak van de snijdende vlakken OAB en BCD ; $\angle OBC$ is een standhoek van die vlakken. Berekening van $\angle OBC$ in graden nauwkeurig levert het gevraagde. Nu is $OC = 4$ en $OB = 6$, dus $\tan \angle OBC = 4/6 = 2/3$.'

Omdat een berekening gevraagd werd is het niet duidelijk of men nu ook expliciet moest uitleggen dat $\angle OBC$ een standhoek is. De normen voor de beoordeling van het examenwerk gaven hieromtrent geen uitsluitel: 'Voor het inzicht dat $\angle OBC$ berekend moet worden' 3 punten. Hoe kon een kandidaat nu blijk geven van dat inzicht? Ik heb het vermoeden dat vele beoordelaars van examenwerk het in dit soort gevallen ook niet weten en dan de kandidaat het voordeel van de twijfel schenken.

Maar nu verder. Als de kandidaat zijn berekening, voor zover men hier nog kan spreken van een 'berekening', nu uitvoerde met een ZRM, dan had hij dat kunnen weergeven als:

'2 $\boxed{3} = \boxed{\text{inv}} \boxed{\tan} 33,69006753$.

Antwoord: $34^\circ (\pm 0,5^\circ)$

Zijn er leerlingen die een berekening, uitgevoerd met een ZRM, op een dergelijke manier weergeven? Wellicht de leerlingen van Leen Bozuwa, (zie Euclides, jaargang 65, 1989/90, blz. 13).

Terzijde: voor een lerarenopleiding is het een interessante opgave om dit vraagstuk eens aan te pakken zonder zo'n ZRM, waarin al die mooie transcendente functies zijn opgeslagen. Eventueel is een eenvoudig apparaat met slechts de operaties $+$, $-$, $\times$ en $:$ wel toegestaan. Maar geen log-tafel en geen tafels van de goniometrische functies. En ook mag π niet in een aantal decimalen bekend verondersteld worden.

'Laat dat maar eens zien jongens (m/v)! Dat is pas echt *'berekenen'!*'

Is 'tekenen en meten' ook berekenen?

Er waren ook *'Tekenen...'*-opdrachten bij het havo-examen 1989. Men mocht dus tekenen. Ook bij opdracht 1?

Ik kan mij een kandidaat voorstellen die de stoute schoenen aantrok. Deze tekende een voldoende grote rechthoekige driehoek met rechthoekszijden die zich verhouden als 2:3 en mat daarna in deze driehoek met zijn gradenboog *'inv tan 2/3'* op.

Ik kan mij zelfs voorstellen dat mijn kandidaat het zich nog makkelijker dacht te maken, door tot het inzicht te komen dat rechthoek *OBEC* in de gedrukte figuur van zijn opgaven in het zogenaamde tafereel lag, of er evenwijdig aan was, en dat hij dus met zijn gradenboog rechtstreeks in die figuur $\angle OBC$ kon opmeten. Mocht hij daarna gaan controleren of rechthoek *OBEC* voldoende precies op schaal, overeenkomstig de gegevens, was afgedrukt, dan was hij tot de conclusie gekomen dat zulks niet precies klopte.

Gegeven $OB = 6$ en $OC = 4$, in de figuur $OB \approx 3,1$ cm en $OC \approx 2,0$ cm.

Dan toch maar liever zelf een grote driehoek *OBC* getekend.

De opdracht was echter *'Bereken...'* en niet *'Meet...'*

Hoe kon nu een beoordelaar van dit examenwerk zien op welke wijze een kandidaat tot het antwoord gekomen was, als die kandidaat opschreef: *'tan $\angle OBC = 2/3$, daaruit volgt $\angle OBC = 34^\circ$ (in graden nauwkeurig)'*

Wat is 'berekenen'?

In de loop der tijden heeft de mens heel wat hulpmiddelen bedacht om rekenwerk makkelijker te maken. Om maar wat te noemen:

– de vingers van de hand; bekertjes met steentjes; abaci in verschillende vormen, suan-pan, soroban; proportionaal-passers in verschillende uitvoeringen; logaritmentafels; rekenlinialen; nomogrammen; de koffiemolen-handrekenmachine en vooral in de 2e helft van deze eeuw allerlei elektronische apparatuur.

Onlangs dat het gebruik van deze hulpmiddelen veelal in de verste verte niet meer lijkt op hetgeen men moet doen als men met pen en inkt op papier, of met een griffel op een leetje, rekent spreekt men toch steeds over *'berekenen'*. Uit wiskundig oogpunt is er weinig verschil tussen de werkwijze van onze metende havo-kandidaat en de werkwijze van een artillerie-officier, die met behulp van een nomogram de elevatie *'berekende'*.

Toch zal menige leraar zo'n teken-oplossing afkeuren, omdat deze niet past bij de ongeschreven gedragscode ten aanzien van *'berekenen'*.

De vraag: *'Wat is berekenen?'* laat ik als zijnde te moeilijk voor mij maar onbeantwoord.

Aanbeveling

Wissel in het onderwijs perioden waarin de leerling de ZRM mag gebruiken af met perioden waarin het gebruik ten strengste verboden is. Dat zal zeker bijdragen tot een verdieping van het inzicht ten aanzien van rekenwerk. Zorg dan wel dat de vraagstukken afgestemd zijn op het al of niet mogen gebruiken van de ZRM.

Zo vind ik het altijd weer opmerkelijk dat wanneer een ZRM gebruikt mag worden men toch opgaven geeft met *'mooie'* getallen, ja zelfs met *'mooie'* antwoorden.

En laat ook eens, als de ZRM niet gebruikt mag worden, waarden van goniometrische functies en hun inversen benaderen middels een figuur. Dat zal de leerlingen zeker nog eens met hun neus op de definities van die functies drukken.

'Wiskundeonderwijs aan ...'

► Op weg naar vernieuwd wiskundeonderwijs

E. Teunissen, G. van den Heuvel

1 Inleiding

1.1 Een vernieuwingsschool

Revis, en dan vooral ook Revis en wiskunde, is de afgelopen jaren welhaast synoniem geweest met vernieuwend onderwijs voor de brugperiode. Ook nu nog, als proefschool van het team W12-16. Een bewogen tijd met een rijkdom aan ervaringen en ontwikkelingen. In dit artikel willen we wat van deze ontwikkelingen en achtergronden beschrijven. Van een brede scholengemeenschap, die streeft naar eigentijds onderwijs voor iedereen.

1.2 De school in het kort

De Christelijke Scholengemeenschap Revis is een scholengemeenschap met afdelingen voor lno, lto, mavo, havo en vwo. De school staat in Deventer en is gevestigd in een fraaie nieuwe accommodatie. Als brede scholengemeenschap kent de school momenteel een tweejarige brugperiode, met een heterogeen eerste jaar. In het tweede jaar zijn er ab-, cd-, mh- en hv-klassen. Daarna vindt onderverdeling plaats in de diverse afdelingen. Overigens staan met ingang van de komende cursus veranderingen voor de brugperiode op stapel, waarover verderop meer.

De school laat zich karakteriseren als voorzichtig vernieuwend, met name voor de brugperiode: Daarin zoekt de school eigenlijk al een tiental jaren naar de meest geschikte vorm. De wiskundesectie is daarbij een voorloper geweest in de richting van een heterogeen eerste leerjaar. Ze functioneert daarbij al jaren als proefschool voor de SLO.

1.3 Opbouw van dit artikel

In dit artikel staan de ontwikkelingen in de wiskundesectie in de afgelopen jaren centraal, van traditioneel naar vernieuwend. De ontwikkeling is onderverdeeld in een aantal stappen:

- De startfase met nieuwe onderwerpen en werkvormen in een paar klassen.
- De uitbreiding van het experiment naar alle eerste en tweede klassen.
- De overgang naar een heterogene klasse-indeling.
- De te verwachten ontwikkelingen in de nabije toekomst.

Tot besluit van dit artikel geven we een opsomming van een aantal belangrijke opbrengsten, die het vernieuwingsproces heeft gehad.

2 Revis in ontwikkeling

2.1 Inleiding

De titel van dit hoofdstukje verwijst naar de gelijknamige SLO-uitgave¹, waarin de ontwikkelingen bij wiskunde op Revis uitvoerig worden beschreven. Van traditioneel naar vernieuwend onderwijs, in de periode 1981-1985. In dit hoofdstukje komen we op een aantal markante punten terug en beschrijven we de verdere ontwikkelingen richting nu. We kijken dan met name naar de eerste twee leerjaren: onze brugperiode.

2.2 Nieuwe inhouden en werkvormen beproefd

De wiskunde in de brugjaren en dan vooral in de eerste klas, is al heel lang onderwerp van gesprek in de sectie. Vaak ook, omdat niet alles precies naar wens verliep: welke methode we ook kozen, steeds ervoeren we een aantal bezwaren. Zeker toen de

school steeds breder werd. Bij mavo kwamen havo en vwo en later ook nog lbo.

In 1982 diende zich een verrassende mogelijkheid aan voor de sectie. De SLO zocht een proefschoon voor haar materialen-in-ontwikkeling voor de brugklas en Revius leek een geschikte kandidaat. Na enig overleg werd, nog wel met enige aarzeling van onze kant, besloten tot een proef bij twee collega's in klas 1. De helft van de tijd zou worden gevuld met nieuwe inhoud van de SLO – denk aan inmiddels heel bekende pakketten als 'Grafiektaal', 'Goed Gezien' en 'Verpakkingen' – een hele revolutie in die tijd. Voor de andere helft werd de traditionele stof compact samengevat in eigen pakketjes, als bijvoorbeeld 'Vergelijkingen en Ongelijkheden', 'Afbeeldingen', 'Negatieve Getallen en Coördinaten', enz.

De SLO-pakketjes werden van commentaar voorzien via evaluatiegesprekken, protocollen, video-opnamen, e.a. Zo ontstonden van de verschillende pakketten de eigen Revius-versies.

Een heel avontuur voor onze, op zich helemaal niet zo avontuurlijke, sectie. Daar kwam nog bij, dat niet alleen de inhoud vernieuwd werden, maar

dat er, op verzoek van de SLO, les werd gegeven met groepswork. Een hele omschakeling, waarbij we er na verloop van tijd achter kwamen, dat het toch beter was om dat groepswork af te wisselen met klassikale momenten. Voor wie over dit en ander soort zaken wat meer informatie wil hebben, verwijzen we naar het boekje 'Met het oog op...'².

2.3 Operatie geslaagd: alle klassen gaan meedoen

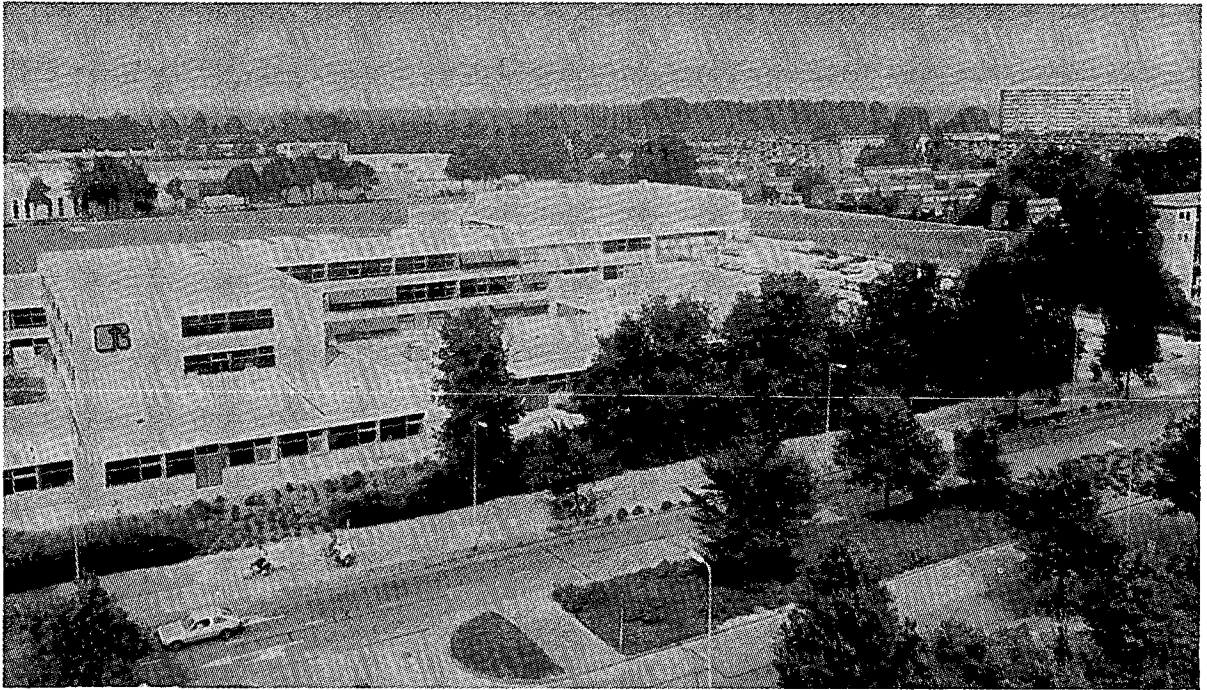
Ondanks, of wie weet ook dankzij dit spannende en drukke gebeuren, in elk geval zeker dankzij het aansprekende materiaal en de goede begeleiding werd het project vrijwel direct een succes. Geen gemakkelijk materiaal om mee les te geven, maar wel motiverend en interessant voor de kinderen.

Het was dan ook geen moeilijk besluit om het experiment voort te zetten in alle eerste en tweede klassen. Een boeiende tijd, met veel overleg met elkaar, over planning, ervaringen, toetsen en noem maar op.

Terugkijkend op het gebeuren toen zijn een aantal zaken van belang geweest voor het succes: het materiaal, de begeleiding vanuit de SLO, de realistische planning, de geleidelijke invoering, maar zeker ook de wekelijkse sectievergadering op donderdagmiddag van 1 tot 3.

pakketten	geplande tijd:
– Goed Gezien, uitgebreide versie (SLO)	12 lessen
– Verzamelingen (eigen pakket)	6 lessen
– Vergelijkingen en ongelijkheden (eigen pakket)	4 lessen
– Negatieve getallen en coördinaten (eigen pakket)	9 lessen
– Grafiektaal (SLO)	12 lessen
– Hoeken (eigen pakket)	4 lessen
– Verpakkingen (SLO, IOWO)	14 lessen
– Rekenen met positieve en negatieve getallen (eigen pakket)	9 lessen
– Eén variabele (SLO)	9 lessen
– Hoe langer, hoe meer (SLO)	10 lessen
– Regelmatige figuren (SLO, IOWO)	10 lessen
– Meer variabelen (SLO)	7 lessen
– Meetkundige afbeeldingen (eigen pakket)	9 lessen
	Totaal: 115 lessen

Overzicht pakketten voor klas 1



Chr.s.g. 'Revius'-Deventer

2.4 Intermezzo

Dit artikel gaat over de ontwikkelingen binnen onze sectie in de afgelopen jaren. We ervaren die als vrij positief. Dat betekent echter niet, dat alles vanzelf gaat.

Wat kunnen leerlingen bv. na een pakket als Grafiekentaal? We toetsen dat via proefwerken, die uit twee delen bestaan:

Het eerste deel bevat letterlijke vragen uit het pakket en eenvoudige variaties daarop. Dat is de basis-kennis, die iedereen voldoende moet kunnen scoren. Dat lukt veelal ook wel.

Het tweede deel bevat complexere toepassingen en meer beschrijvende vragen. De score hiervoor wordt vertaald in een letter, ab, c, m of hv. Dit verwijst natuurlijk naar de determinatie voor klas 2.

Uit zo'n tweede deel is een voorbeeld afgedrukt op pagina 242.

We laten op pagina 243 een paar antwoorden zien. Ook hier veel variatie: van heel goed tot vrijwel niets. Niet eenvoudig om te beoordelen overigens. Daarvoor spreken we in de sectie een puntenverdeling af. Voor deze vraag zijn drie punten te verdelen, ongeveer als volgt:

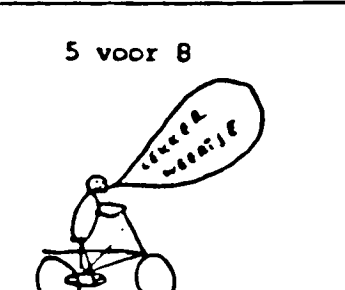
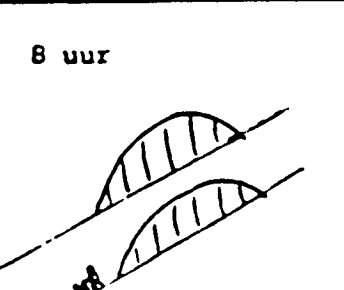
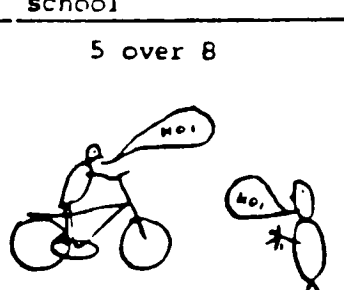
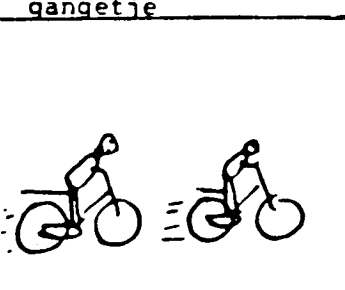
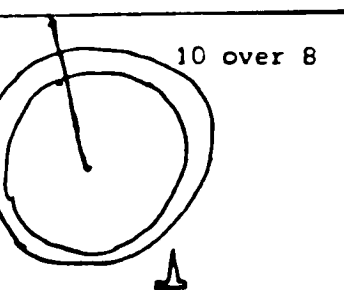
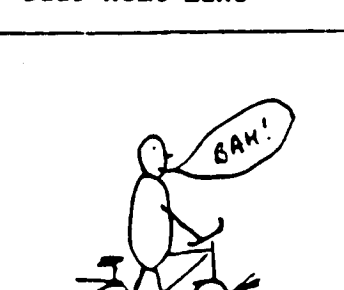
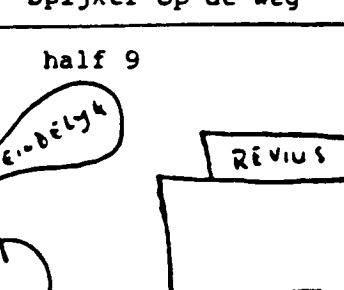
- voor de drie stijgende stukjes $1\frac{1}{2}$
- het middelste stuk stijgt het snelst $\frac{1}{2}$
- (1 of) 2 horizontale stukjes $\frac{1}{2}$
- tijdverdeling $\frac{1}{2}$

2.5 De brugklas anders ingedeeld

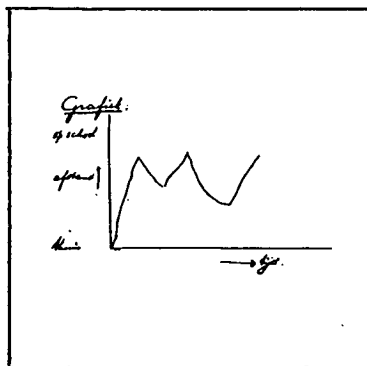
Gaandeweg het werk kwam een andere vraag naar voren. Het SLO-materiaal was in eerste instantie geschreven voor heterogene groepen op basis van differentiatie-ideeën van prof. Freudenthal³. De eerste jaren werkten wij echter met dakpansgewijs ingedeelde groepen: 1m, mh en hv. Na verloop van tijd leek het ons beter om deze indeling te verlaten

Peter gaat naar school.

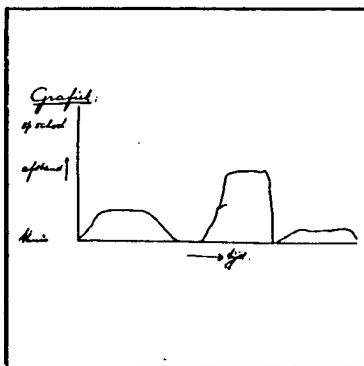
Lees deze strip rustig door en teken er zelf een grafiek bij van de fietstocht van Peter. Zet ook de tijden bij de grafiek.

kwart voor 8 	5 voor 8 	8 uur 
Peter gaat naar school	Lekker rustig gangetje	Wachten op Hans
5 over 8 		10 over 8 
Daar komt Hans	Effe lekker hard	Spijker op de weg
	10 voor half 9 	half 9 
Lekke band	Bij Hans achterop	Te laat op school

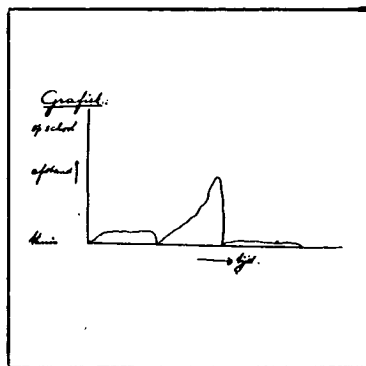
Voorbeeld van een toetsvraag voor klas 1



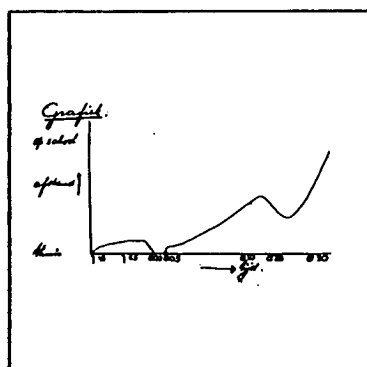
hier valt weinig van te maken : 0



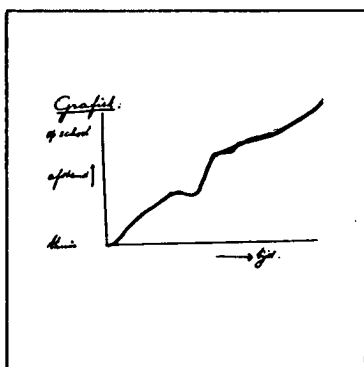
snelheid i.p.v. afstand, schaal vergeten : 1



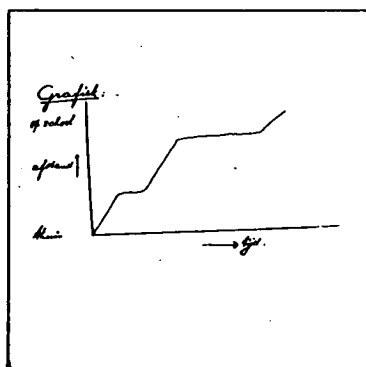
ook zo iets, of toch niet : $\frac{1}{2}$



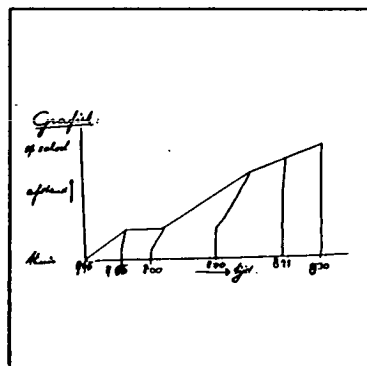
schaal goed, begin twijfelachtig : 1



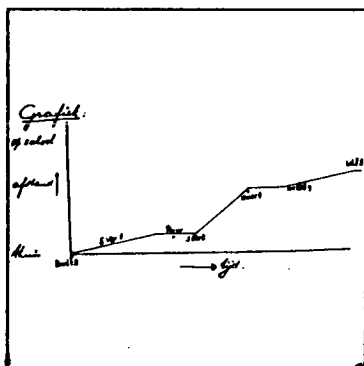
acceptabele globale grafiek, geen schaal : $2\frac{1}{2}$



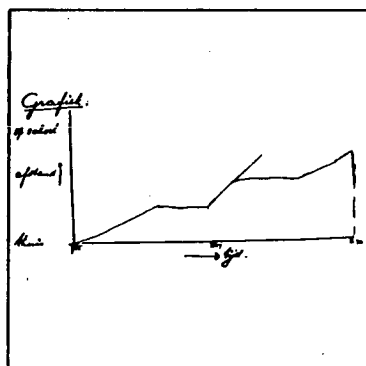
mooi, maar schaal en middenstuk fout : 2



niet snel genoeg in midden, schaal fout : 2



tijd wat vreemd, einde niet helemaal goed, toch : 3



ook goed genoeg : 3

en om heterogene klassen samen te stellen voor klas 1. Dit bleek mogelijk binnen de school. De klassen werden, eerst alleen voor de wiskundelessen, heterogeen ingedeeld. Later werd dat voor alle vakken in de eerste klas ingevoerd.

Met name bij de SLO-materialen wordt er gewerkt in groepjes van 3 of 4 leerlingen. Deze groepjes zijn zoveel mogelijk heterogeen samengesteld, bij voorkeur zitten leerlingen met lbo-, mavo-, havo- en vwo-advies in één groepje, en ook, als het kan, jongens en meisjes in één groepje. De opdrachten worden in het algemeen klassikaal ingeleid, waarna de groepjes aan het werk gaan. Soms wordt dit werk onderbroken door een klassikaal moment voor uitleg of bespreking van een bladzijde. Op pagina 245 een duidelijk voorbeeld, dat uitnodigt tot samenwerking binnen een groep, waarbij leerlingen met uiteenlopende capaciteiten toch hun eigen inbreng kunnen hebben.

Vooraf in het eerste jaar werkt dit systeem stimulerend voor de leerlingen. Onze ervaring is, dat leerlingen met weinig wiskunde-aanleg en/of met weinig resultaten in rekenen in het basisonderwijs toch lang enthousiast blijven en niet, zoals vroeger, al snel in het eerste jaar afhaken. En ook de goede leerlingen komen in het algemeen prima aan hun trekken. Er is bijvoorbeeld geen daling van de resultaten in de bovenbouw van het vwo te constateren bij groepen die een vernieuwd programma hebben gehad.

Kortom, we kijken heel tevreden terug op de gang van zaken. Overigens is het experiment inmiddels in een wat ander kader komen te staan. Het SLO-project is opgegaan in het team W12-16 en onze school treedt daarin als proefschool op. Hoe dat zich precies zal ontwikkelen is nog niet geheel duidelijk, maar voor ons is het interessant dat een voortzetting van de vernieuwing in klas 3 en 4 (l en m) nu mogelijk lijkt. Op dit moment, nu het experiment gevorderd is tot in klas 2, is er nog niet zo erg veel veranderd. Er zijn een paar nieuwe pakketten en onderwerpen bijgekomen, maar de inpassing daarvan in het programma is nu inmiddels al welhaast routine geworden.

Als sectie wiskunde functioneer je binnen je school en binnen de samenleving. In het voorgaande deel van het verhaal speelde de wiskundesectie een vrij autonome rol. Dat is momenteel aan het veranderen. Net als voor veel vernieuwingsscholen valt het ook voor Revisus niet mee om voldoende leerlingen te blijven trekken. De overheid voert voor scholen als de onze eigenlijk al jarenlang een weinig stimulerend beleid en een gevolg is, dat het steeds moeilijker wordt om genoeg met name vwo-leerlingen te blijven trekken. Dit treurige feit betekende, dat de school zich nader moest bezinnen op de toekomst. De uitkomst van deze discussie is geweest, dat besloten is om weer terug te gaan naar een dakpansgewijs systeem voor de eerste klas in de komende cursus. Noodgedwongen een stap terug gezegd, voor de sectie niet zozeer vanwege de slechte ervaringen met de vernieuwing, als wel vanwege factoren van buitenaf.

Enfin, wat de toekomst precies zal gaan brengen is nog ongewis, maar één ding staat voor ons vast: via de vernieuwingen in het vak hebben we als sectie grote vorderingen gemaakt. We komen daarop nog terug in het volgende hoofdstukje. Daarom verwachten we ook, dat we bij de nieuwe ontwikkelingen op school toch royaal met de vernieuwingen in het vak kunnen blijven meedoen. Bovendien bevat het geheel weer een uitdaging om ook in een wat andere opzet te blijven streven naar goed hedendaags onderwijs, voor alle leerlingen. Dat centrale thema blijft in de toekomst van kracht.

3 Opbrengsten

Wat levert dat nu allemaal zo op, zo'n kleine 10 jaar vernieuwend bezig zijn met je vak? Volgens ons veel; we sommen een aantal zaken op:

- Het programma is verbeterd en vernieuwd. Dit is zonder meer in het voordeel van de leerling geweest. Natuurlijk zijn er wel wat kanttekeningen te maken, maar over het geheel genomen werkt het huidige programma beter, het motiveert de leerling en het biedt relevante hedendaagse kennis voor iedereen.

Voor twee leerlingen.

De een tekent in het kaartje een aantal tekentjes zoals zonnetjes, wolkjes en dergelijke. En een paar temperaturen.

De ander maakt daarbij de weersverwachting.

Overleg over de resultaten. Klopt het verhaaltje met het kaartje?



HET WEER

VERWACHTING
TOT HEDENAVOND.

Nogmaals voor twee leerlingen.

Nu doen we het andersom.

De een bedenkt een mooi verhaaltje dat de weersverwachting is.

De ander tekent daarbij de tekentjes en zo in het kaartje.

Overleg weer over de resultaten.

HET WEER

VERWACHTING
TOT HEDENAVOND.





Boekbespreking

– Er is een proces in werking gezet van permanente bijstelling en verbetering van het programma. Elk jaar proberen we weer om tot evenwichtiger samenstelling van het programma te komen en om de gebruikte materialen nog weer bij te stellen.

– De know-how van ons, docenten, is in de loop der jaren aanzienlijk gegroeid. Verwacht niet allemaal wondermensen in de sectie aan te treffen, integendeel, we zijn heel gewoon. Maar het is toch een feit dat ons repertoire van lesgeven behoorlijk is gegroeid, al blijft groepswork altijd een moeilijke werkvorm, en dat we veel meer zicht hebben gekregen op de programmatische mogelijkheden en onmogelijkheden in de brugperiode. Ook hebben we veel bijgeleerd over zelf materiaal aanvullen en verbeteren, maar ook over het maken van toetsen, een hoofdstuk apart.

– En last but not least is de sectie veel meer als groep gaan werken in de loop van de tijd. Goede samenwerking, wekelijks overleg, afspraken over programma's en toetsen, een goede onderlinge werkverdeling, al dit soort zaken is inmiddels vanzelfsprekend geworden.

Kortom, een variëteit aan ervaringen en gebeurtenissen, waarvan de conclusie is, dat we ze geen van alle hadden willen missen.

Noten

- 1 Heuvel, G. van den, *Revis in ontwikkeling, lesgeven aan heterogene klassen*, SLO, Enschede, 1985.
- 2 Kerkhofs, W., e.a., *Met het oog op... de leerkracht in de praktijk van het werken met kleine heterogene groepen*, SLO, Enschede, 1985.
- 3 Freudenthal, H., *Weeding and Sowing*, D. Reidel, Dordrecht, 1978.

A. Treffers, E. de Moor, E. Feijs:

Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskunde-onderwijs op de basisschool, Deel 1: Overzicht Einddoelen, Zwijssen, Tilburg 1989 (155 blz., f 27,50).

De eindtermen voor het reken-wiskunde-onderwijs voor de basisschool zijn vastgesteld en aan het ministerie aangeboden. Deze eindtermen zijn juridisch passende formuleringen die afgeleid zijn uit een uitgebreider plan van doelstellingen en voorbeelden. De 'Proeve...' is een weergave van dit plan.

In hoofdstuk 1 worden de didaktische uitgangspunten van het programma toegelicht. Centraal staat hierin de zogenaamde 'reconstructiedidactiek' waarin 'de kinderen ruimschoots de gelegenheid krijgen de standaardprocedures zelf geleidelijk te construeren'.

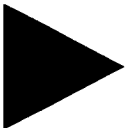
De concrete doelstellingen zelf zijn terug te vinden in hoofdstuk 2. Als afsluiting van een beschrijving van het betreffende leergebied vormen ze maar een gering deel van de tekst. Er zijn algemene doelen, die de reken-wiskunde een plaats geeft in het totale basisschoolleerplan, en er zijn concrete doelen, toegespitst op de volgende leergebieden: basisvaardigheden, cijferen, verhoudingen en procenten, breuken en kommagetallen, meten.

Hoofdstuk 3 tenslotte bevat 100 opgaven met uitwerkingen. Ze geven zowel een beeld van het beoogde eindniveau van het onderwijs als van het karakter van dat onderwijs. Het zal niemand verbazen dat alle opgaven een realistische context betreffen.

Het boek geeft een duidelijk beeld van het voorgestelde eindniveau. Door de opzet werken de doelstellingen als een explicitering van eerder gegeven omschrijvingen. Ze verwijzen daardoor terug naar die omschrijving. De lezer ontkomt er niet aan om met de doelstellingen de omschrijving te lezen. Dat voorkomt veel misverstanden.

Hopelijk gaat dit boek als een wegwijzer functioneren voor de toekomstige leerplanontwikkeling rekenen en wiskunde op de basisschool en ontstaat er daardoor wat meer helderheid in de huidige verwarde situatie.

Sieb Kemme



Aangeboden

Euclides 1980 - heden

Nieuwe Wiskrant 1981 - heden

Telefoon 04752-2180.

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

► Opgave 618

Een aantal lezers schreef me wanneer er nu eens een 'echte' wiskundige puzzel kwam. Ik weet niet wat daar nu precies mee bedoeld wordt, omdat er bij de vorige puzzels toch ook wiskundig denken aan te pas kwam. Daarbij wil ik u allen een grote verscheidenheid aan puzzels aanbieden. (En dat kan best in de toekomst eens een aardige woordpuzzel zijn!)

Om het iedereen naar de zin te maken, dan nu een 'echte wiskundige puzzel':

Op het derde schoolonderzoek in 5-Havo vroeg ik onder andere: 'In een doos zitten vier kaartjes, genummerd 1 tot en met 4. Ik haal ze aselekt uit de doos en leg ze van links naar rechts voor me neer op tafel. Bijvoorbeeld:



Nu is 1 Kleiner dan 3, 4 Groter dan 1 en 2 weer Kleiner dan 4. We hebben dus de afwisselende volgorde KGK.

Bij 1324 hebben we GKG.

Wat is de kans dat er zo'n afwisselende volgorde ontstaat?

Eén van mijn leerlingen is deze opgave thuis verder gaan uitwerken en vond het juiste aantal manieren tot en met zeven kaartjes. Hij vroeg me of er een formule bestond voor N kaartjes.

Mag ik heel eerlijk zijn? Ik heb de formule nog niet gevonden, tot grote teleurstelling van mijn leerling.

Mijn vragen zijn dus deze keer:

a. Op hoeveel manieren kunnen zeven kaartjes, genummerd 1 tot en met 7, neergelegd worden en een afwisselende volgorde KGKGKG of GKKGKG ontstaat?

b. Op hoeveel manieren kan dit bij N kaartjes?

Ik hoop dat u allen een wanhopige puzzelredacteur wilt helpen! Als u uw ontdekkingen binnen een maand aan mij opstuurt, dan maakt u een kans op een boekenbon van f25,-.

In 'Ideaal' van 25 april 1989 vroeg Anneke Treep als Fanaadse 142 wat het vijfde cijfer van rechts was, als we het volgende getal gaan uitschrijven:

$$\begin{array}{c} 5 \\ - 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{array}$$

Deze vraag kunnen we op twee verschillende manieren interpreteren:

a) $\left(\left(\left(\left(\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array} \right) \right) \right) \right)$ resp. b) $\left(\left(\left(\left(\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array} \right) \right) \right) \right)$

De meeste oplosers werkten modulo 100000.

We zien $5^8 - 1 = 390624 = 2^5 \times 3 \times 13 \times 313$.

Als $n \geq 5$ is, dan geldt: $5^{n+8} - 5^n = 5^n(5^8 - 1) \equiv 0 \pmod{10^5}$ oftewel $5^{n+8} \equiv 5^n \pmod{10^5}$.

Bij opgave a kunnen we nu opmerken:

$$5^5 = 3125 \Rightarrow 5^{(5^5)} = 5^{3125} = 5^{390 \times 8 + 5} \equiv 5^5 \pmod{10^5}.$$

Voor deze opgave geldt dus dat de eindcijfers dezelfde zijn als die van $5^5 = 03125$. Het vijfde cijfer van rechts is dus een nul.

(Ter controle kun je nog 5^{13} uitrekenen.)

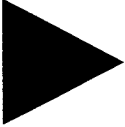
Bij opgave b moeten we in feite uitrekenen

$$5^{625} = 5^{77 \times 8 + 9} = 5^9 \pmod{10^5}.$$

Nu is $5^9 = 1953125$ zodat het vijfde cijfer van rechts een vijf is.

Met veel plezier heb ik de oplossing van *Lourens van den Brom* uit Krommenie gelezen, die de opgave in het 5-tallig stelsel correct oploste!

Na loting ontvangt *Markus Nijmeijer*, Stationsstraat 4-5, 6131 AZ Sittard, de boekenbon van vijftiengulden. Mijn felicitaties voor deze zéér trouwe inzender!



Boekbespreking

J. L. Teugels e.a.: *Inleiding tot de Discrete Wiskunde, het Kansrekenen en de Statistiek*; Acco, Leuven/Amersfoort; 3 deeltjes, f 14,50 en 90 blz., f 18,50 en 119 blz. en f 10,50 en 63 blz..

Het voorwoord van de drie deeltjes vermeldt niet voor welk publiek het werk bedoeld is. Uit de grondige en theoretische opzet van het geheel maak ik op dat het niet geschikt is als leerstof voor een hbo-opleiding waar Kansrekening en Statistiek deel uitmaken van het studiepakket. De overblijvende conclusie is dat het bestemd is voor een universitaire wiskunde-opleiding.

De schrijvers stellen in het voorwoord dat de 'Discrete Wiskunde' in het recente verleden (misschien te veel) naar de achtergrond is gedrongen door de 'Continue Wiskunde' als: afgeleiden, integralen en differentiaalvergelijkingen. Bij numerieke methoden zijn er echter discrete analoge operaties nodig zoals: differenties, sommaties en differentievergelijkingen.

Bij het samenstellen van het deeltje 'Discrete Wiskunde' hebben de schrijvers moeten kiezen tussen kennis die nodig is voor de volgende beide deeltjes en meer algemene theorie. Deze laatste voert echter de boventoon waarbij van de gebruiker een behoorlijke wiskundige kennis wordt verlangd. Via de eerste drie hoofdstukken Combinatoriek, Discrete Analyse en Recursievergelijkingen komen in hoofdstuk 4 Enkele Speciale Functies en Getallen aan de orde. Van deze laatste noem ik Fibonacci-, Stirling- en Bernoulli-getallen. Het deeltje wordt afgesloten met Asymptotiek.

Het deel 'Kansrekenen' behandelt de standaardbegrippen Kansruimte, Stochasten, Onafhankelijkheid, Voorwaardelijke kansen als ook de Limietstellingen en Transformatie van stochasten. Het gaat hierbij om zowel discrete als continue verdelingen en ook om meer dimensionale gevallen. Voor dit deeltje geldt weer dat een goede wiskundige ondergrond vereist is alsmede een basiskennis van de kansrekening.

De bekende verdelingen (discrete en continue) komen aan de orde, echter zonder vermelding van de herkomst en toepasbaarheid van deze. Weliswaar wordt naar tabellen voor verschillende verdelingen verwezen maar er is niet te vinden hoe deze toe te passen.

Het laatste deel 'Statistiek' bevat de drie te verwachten onderdelen Puntschatters, Betrouwbaarheidsintervallen en Hypothese toetsen. Ook hier weer een theoretische benadering waarbij inlichtingen over praktische toepassingen achterwege blijven. Dit deel bevat aan het eind een literatuurlijst en personen- en zakenregister betreffende de drie deeltjes tesamen.

In alle deeltjes worden de hoofdstukken afgesloten met een paragraaf 'Oefeningen'. Gedeeltelijk gaat het hier om opdrachten die voorafgaande theorie uitdiepen. Een tekort vind ik het

ontbreken van opgaven waarin de theorie in praktische gevallen toegepast moet worden.

Het werk bevat een aantal slordigheden die waarschijnlijk te wijten zijn aan het ontstaan uit een bijgewerkt collegedictaat.

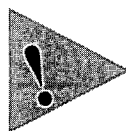
Op blz. 11, deel 1, wordt bijv. $\binom{n}{k}$ gebruikt terwijl deze notatie op

blz. 12 wordt uitgelegd. Zo staat op blz. 25, deel 2: 'Kijk terug naar Voorbeeld 3 uit Hoofdstuk 2'; bedoeld wordt: Voorbeeld 6.6 uit § 6.2. Bovendien ging het eerst over $\{J, F\}$ en $\{J, M\}$ en na de verwijzing over $\{J, V\}$ en $\{M, J\}$. Verder vond ik op blz. 84, deel 1 bij Stelling 5.3: $0 \leq x \leq 1$ terwijl als variabele in de formules z wordt gebruikt. Ook de zetter is slordig geweest of onvoldoende gecontroleerd. Op blz. 32, deel 2 zijn bijv. de haken van een interval verwisseld.

Ik durf geen uitspraak te doen of de deeltjes geschikt zijn om te gebruiken in het universitaire wiskundeonderwijs. Voor het hbo is het werk te theoretisch gericht en bevat het onvoldoende verwijzingen naar praktische toepassingen. Voor leraren in het vo en hbo en wiskundig geïnteresseerden vormt dit werk een goede bron voor theoretische informatie. Men kan er bijv. de formules met afleiding van de Fibonacci- en Stirlinggetallen in vinden.

De prijs van het geheel en het gebruik van de Nederlandse taal zijn voordelen die bij een eventuele aanschaf een rol kunnen spelen. Ik veronderstel daarbij dat men gemakkelijk went aan het Vlaamse Nederlands, andere terminologie (bijv. 'betekenisniveau' i.p.v. 'significatieniveau') en sommige notaties die iets afwijken van wat hier gebruikelijk is.

Drs. J. V. Jansen



Kalender

18 mei 1990: Diverse plaatsen. Examenbesprekingen wiskunde voor lbo/mavo, havo en vwo B. Zie Euclides 65.7 blz. 214 en 215.

28 mei 1990: Diverse plaatsen. Examenbesprekingen wiskunde A voor vwo. Zie Euclides 65.7 blz. 215 en 216. (Op blz. 215 had moeten staan **maandag 28 mei** in plaats van vrijdag 28 mei.)

13 juni 1990: Utrecht. Bestuursvergadering NVvW, met de inspecteurs voortgezet onderwijs.

23 t/m 30 juli 1990: Bielsko Biala, Polen, CIEAM-conferentie. Zie Euclides 65.5 blz. 160.

7 september 1990: Eindhoven. Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade.

12 september 1990: Utrecht. Bestuursvergadering NVvW.

10 oktober 1990: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

Inhoud

Inhoud 217

George Schoemaker: Kolom 17
W12/16 218

M. C. van Hoorn: Discussie 218

Victor Schmidt: Overgangsmatrices
2 219

H. Zunneberg: Eenvoudige meetkun-
de 225

Ir. Henk Mulder: Stenen tellen 227

Ben Knip: Een wereld van wereld-
jes 228

Oplossing 231

Werkbladen 232

J. G. M. Donkers: De XXXe Internationale
Wiskunde Olympiade 1989 234

Boekbespreking 236

Postzegels 236

Lourens van den Brom: Wie rekt? De
leerling of de ZRM? 237

E. Teunissen, G. van den Heuvel: Op weg
naar vernieuwd wiskundeonderwijs 239

Boekbespreking 246

Aangeboden 246

Recreatie 247

Boekbespreking 248

Kalender 248

STUDEREN IN DEELTIJD

ondermeer:

biologie

gezondheidskunde

natuurkunde

scheikunde

techniek

wiskunde

HMN
HOOGESCHOOL
MIDDEN
NEDERLAND

LERARENOPLEIDINGEN HMN

VOOR TWEEDE- OF

VOORLICHTINGSDAG

ZATERDAG 19 MEI
11.00 - 13.00 UUR

Archimedeslaan 16, Utrecht

030 - 52 51 11 toestel 123 en 347

EERSTEGRAADS LERAAR?