

Wolters-Noordhoff

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Vakblad voor de wiskundeleraar

Euclides

816
357
492

jaargang 65 1989 | 1990 april

GETAL EN RUIMTE

VERNIEUWD VERANTWOORD

in leerjaar 1 en de bovenbouw havo



De delen voor het eerste leerjaar mavo/havo/vwo zijn vernieuwd op een manier die u van GETAL EN RUIMTE mag verwachten.

Met het oog op de invoering van Wiskunde A en B in de bovenbouw havo verschijnen voor aanvang van het nieuwe cursusjaar twee nieuwe delen 4/5 H-A1 en 4/5 H-B1.

Onveranderd is de evenwichtige aanpak van GETAL EN RUIMTE die ook in de nieuwe delen duidelijk herkenbaar is.

Getal en Ruimte is ook verkrijgbaar bij de erkende boekhandel.



Educaboek

Voor meer informatie:

Educaboek

Postbus 48

4100 AA Culemborg

tel. (03450) 71 880

● Inhoud ● ● ● ● ●

Actualiteit 186

Anne van Streun *Wishful thinking en nieuwe leerplannen*

Er gaapt een kloof tussen de visioenen van leerplanontwikkelaars en de onderwijswerkelijkheid van de leraar. HEWET, HAWEX, COW: wanneer mag de docent nu eens mee beslissen?

Verschenen 189

Actualiteit 189

George Schoemaker *Kolom 16 W12/16*

Bijdrage 190

Drs. G. Bakker, Dr. J. G. Nijenhuis *De wiskunde-examens lbo/mavo van 1989 I*

De auteurs, respectievelijk Cito-medewerker en inspecteur AVO, bespreken de examenopgaven en de resultaten van het C- en D-niveau.

Boekbespreking 195

Bijdrage 196

K. A. Post *De stelling van Moessner*

Een elegant bewijs van een stelling over natuurlijke getallen. Met scholieren die zich wél en leraren die zich niet aan de verkeersregels houden.

Werkbladen 200

Gelijke uitkomsten en Ontbinden in factoren

Bijdrage 202

Adolf Klaming *Bierviltjes als cirkels* 202

Aansluiten bij de leefwereld van uw leerlingen:

omgeschreven en ingeschreven cirkels van driehoeken vindt u in de kroeg!

Simon T. M. Gribling *Lineair programmeren met de computer* 204

Een bespreking van drie computerprogramma's voor het oplossen van LP-problemen in de klas. Vooraf wordt het Simplex-algoritme uitgelegd.

Boekbespreking 209

Serie 'De zakrekenmachine' 210

Piet van Wingerden *Exact*

Voorbeelden van didactische obstakels bij het behandelen van exacte onderwerpen in het tijdperk van de zakrekenmachine. Maar de ZRM moet blijven!

Recreatie 212

Verenigingsnieuws 213

Havo-examenprogramma's 213

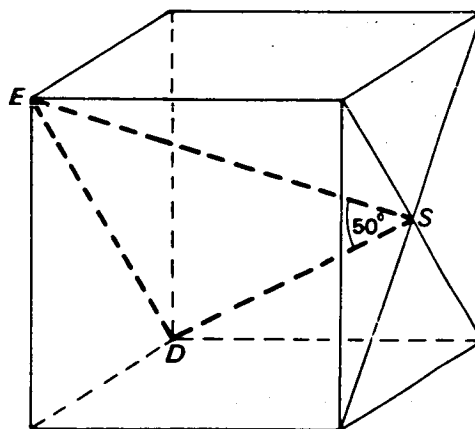
Examenbesprekingen 214

Mededeling 216

Kalender 216

Postzegels 216

Landmeetkunde



... velen nemen aan dat hoek D recht is.

► Wishful thinking en nieuwe leerplannen

Anne van Streun

Oriëntatie

Soms lijkt het er op dat het wereldje van de leerplanontwikkelaars volkomen gescheiden opereert van de onderwijswerkelijkheid van de leraren in het veld. Als lerarenopleider, nascholer of schoolboekenauteur heb je met beide te maken en valt mij die kloof tussen de opvattingen van leraren en ontwikkelaars herhaaldelijk op. Toch gaat die leerplanontwikkeling elke wiskunde-docent aan, omdat de gevolgen en gevolgtrekkingen directe invloed hebben op het dagelijks lesgeven. Bij de HAWEX-nascholing heb ik gemerkt dat docenten wel degelijk willen weten waarom zo'n nieuw leerplan over hen heen komt en welk onderzoek de vooronderstellingen van de ontwikkelaars heeft bevestigd. Omgekeerd heeft de geschiedenis al vaak genoeg uitgewezen dat een nieuw leerplan alleen maar tot slechter onderwijs leidt, als de leraren de achterliggende ideeën niet accepteren of begrijpen.

Wishful thinking en leerplanontwikkeling

Leerplanontwikkelaars en ontwerpers van nieuwe leerstof dromen per definitie van onderwijs dat er

beter uit ziet dan wat gangbaar is. Anders begonnen ze niet eens aan hun werk. Zij hebben een visioen, dat varieert van effectiever onderwijs voor allen tot meer creatief of meer op de werkelijkheid gericht onderwijs. Dat geldt zowel voor de grote pedagogen uit onze geschiedenis als voor ontwerpers van een communicatieve methode Engels voor de basisschool. Ontwerpers moeten de ruimte krijgen voor het lanceren van oorspronkelijke ideeën, voor het schrijven en uittesten van nieuwe leerteksten of computerprogramma's, voor het bijstellen van hun ideeën en produkten op grond van ervaringen en voor het eerlijk evalueren van de opbrengsten van hun pogingen.

Ontwerpers vinden meestal wel leraren, die warm gaan lopen voor hun ideeën en vanaf de eerste versie willen meedoen met het uitproberen en evalueren. Wij kennen die situatie bij de eerste HEWET-experimenteerscholen, bij de drie HAWEX-experimenteerscholen en bij de paar COW-scholen. Er ontstaat, als het goed is, een zekere band tussen die eerste docenten en de ontwerpers, een vorm van medeplichtigheid. Op die manier worden gegevens verzameld over de wenselijkheid en haalbaarheid van elementen van het beoogde leerplan.

De vraag is vervolgens of die ervaringen generaliseerbaar zijn naar een grotere groep docenten en scholen of naar de landelijke populatie. Het is daarom noodzakelijk om de groep experimenteerscholen in tweede instantie fors uit te breiden en ook hun ervaringen systematisch te verzamelen voor bijstelling van het voorgestelde programma en van de leerlingenteksten. Bij HEWET is dat geprobeerd, maar door het ontbreken van een evaluatiejaar zijn het programma en de leerlingenteksten op basis van de ervaringen van de 12 en de ruim 40 scholen niet meer bijgesteld. Bij HAWEX werd het programma al vastgelegd *voordat* de grotere groep van ruim 20 scholen één maand ervaring had opgedaan en bij de COW dreigt de grotere groep scholen helemaal uit het beeld te verdwijnen. Je hoeft geen statisticus of evaluatiedeskundige te zijn om te beseffen dat de ervaringen in een handjevol experimenteerscholen natuurlijk niet naar de gehele populatie van alle docenten en scholen vallen te generaliseren. Toch doen we dat in wiskundig Ne-

derland, omdat we een nieuw leerplan vastleggen of opleggen zonder dat een goede evaluatie van de experimenten heeft plaats gevonden.

Natuurlijk wordt in discussies de zwarte Piet gelegd bij de politiek, die niet meer middelen ter beschikking wil stellen, of bij een staatssecretaris die nog in deze zittingsperiode succes wil boeken. Maar dat is niet het hele verhaal. Kijken we bijvoorbeeld naar de leerplanontwikkeling bij scheikunde en natuurkunde dan is daar de invloed van de onafhankelijke vereniging van vakdocenten veel groter dan bij ons. Niet voor niets is het nieuwe scheikundeprogramma jaren en jaren grondig uitgetest en in alle regio's door docenten doorgesproken voordat het landelijk werd ingevoerd, met een overgangsperiode waarin twee examenprogramma's vigeerden. Zo is bij natuur- en scheikunde *wel* de eerste versie van de voorgestelde eindtermen basisvorming direct aan de docenten voorgelegd, voordat het stuk naar het ministerie ging. Bij wiskunde werd het door de COW geheim gehouden, waarover terecht de hoofdredacteur van dit blad zijn verbazing uitsprak (1). Bij wiskunde is het eindtermenontwerp pas aan de docenten voorgelegd, nadat de staatssecretaris het had ontvangen en vrijgegeven. Wie de vorig jaar ingeleverde eindversie vergelijkt met de door docenten geleverde commentaren op dat eerste ontwerp zal kunnen constateren dat die geen invloed hebben gehad. In Budapest 1988 (ICME-6) sprak een Australische curriculumdeskundige mij verbaasd aan na een verhaal van Jan de Lange over HEWET te hebben aangehoord. Waar spelen bij jullie in Nederland de docenten een rol in de leerplanvernieuwing? Hebben die niets in te brengen? En werkt zo'n van boven opgelegd leerplan echt iets goeds uit? Ontwerpers en ontwikkelaars hebben per definitie visioenen, waarvan ze iets proberen te realiseren in hun producten. Per definitie zijn ze daarom ook ongeschikt als besluitvormers over een nieuw leerplan. Hun beeld van de werkelijkheid wordt sterk bepaald door wishful thinking en door de ervaringen in enkele met hen meewerkende scholen. De vereniging van vakdocenten is de aangewezen club om in democratisch overleg met de eigen leden en na een goede peiling van de niet-leden een tegenwicht te vormen tegen professionele ontwikkelaars, zodat er uiteindelijk een evenwicht

tig nieuw leerplan kan ontstaan, als daar maatschappelijk of onderwijskundig behoefte aan is. Een leerplan dat door docenten niet wordt ervaren als van boven opgelegd door vrijgestelden, maar als een verzameling ideeën die de moeite van het realiseren waard zijn. Alleen dan is er een goede kans dat ook de geest van het nieuwe leerplan bij de uitvoering in de dagelijkse lespraktijk herkenbaar wordt.

Onze vakvereniging vormt al jaren geen onafhankelijk tegenwicht meer tegen leerplanontwikkelaars en vertegenwoordigt slechts een klein percentage (voornamelijk eerstegraads) wiskundedocenten. Hoorzittingen worden misbruikt om ontwikkelaars gelegenheid te geven hun evangelie te verkondigen. Bezwaren van docenten, alternatieven en forse kritiek worden door de 'deskundigen' weggewoven. Zo is bijvoorbeeld in de eindversie van de eindtermen voor de basisvorming niets terug te vinden van het algemeen geuite ongenoegen over de zwakke passages over de formuletaal en de algebra in de vorige versie. Legt u de verslagen van de hoorzittingen er maar naast (2). We hebben creatieve ontwerpers genoeg (kijk maar naar HEWET en HAWEX), maar we missen bestuurders die namens en samen met de docenten eisen stellen aan de realiseerbaarheid, de relevantie en de samenhang van een nieuw leerplan. Dat kan alleen door een vroegtijdige opening van zaken, door een bewaking van tijdschema's, door activering van de betrokken docenten en door het onafhankelijk van ontwikkelaars beslissen over een nieuwe leerplan.

De geschetste ondemocratische gang van zaken pakt soms slecht en soms goed uit. Als de docenten voldoende inspraak hadden gekregen in het leerplan van 1968 (waar we nu vanaf willen) dan was het er niet op die manier gekomen. De actie WISKOBAN, na 1968 door Van der Haak opgezet, werd door duizenden wiskundedocenten ondersteund (3). Was de toelichting op en de uitvoering van dat programma niet ondemocratisch gecentraliseerd, dan was er heel wat minder verzamelingenprietpraat en logica in de schoolboeken terecht gekomen. Wellicht had dan de kritiek van mensen als P. M. van Hiele (4) en N. G. de Bruijn (5) meer gehoor gekregen.

●

Ondanks de positieve berichtgeving werd HEWET door de docenten niet met gejuich binnen gehaald en bleek het nodig om vorig jaar een officiële commissie in te stellen die moet gaan uitleggen wat het wiskunde A-programma eigenlijk inhoudt. Bij HAWEX is het jaar uitstel besteed aan verder ontwikkelwerk en niet aan een goede evaluatie van het experiment, aan inspraak door docenten en aan een goede voorbereiding van de invoering. Zelf denk ik (als externe deskundige) dat deze twee leerplanvernieuwingen wel zullen convergeren naar een goed eindresultaat als leerboekenauteurs en examenmakers de achterliggende onderwijsdoelen van de programma's zullen (blijven) honoreren.

Zorgelijker is het gesteld met een nieuw leerplan voor 12-16 jarigen. Van de COW 12-16 is weinig goeds te melden. Het eigen plan wordt in geen velden of wegen gehaald, de contouren van een samenhangend leerplan ontbreken nog ten enenmale en het aantal medewerkende scholen is bijzonder gering. Op welke basis moet het wiskundeprogramma van de basisvorming vanaf 1991 worden ingevuld? Op basis van de schaarse pakketjes en de nog schaarsere ervaringen in enkele scholen? Welke gegevens zijn er beschikbaar als het eindrapport over de examenprogramma's mavo-lbo in 1992 moet worden ingeleverd? En wie beslist over het nieuwe leerplan, vroeg ik enige tijd geleden (6)? Weer een clubje dat in hoge mate wordt gedomineerd door de ontwikkelaars? Moge de inspectie of de nieuwe staatssecretaris verhinderen dat op basis van de nu geplande evaluatie van enkele scholen een nieuw leerplan wordt afgekondigd! Natuurlijk zou de vakvereniging een *onafhankelijke* commissie in het leven moeten roepen die beleidsvoorstellen gaat doen en dat niet overlaten aan de ontwikkelaars zelf.

Zo'n commissie met een *evenredige* vertegenwoordiging van lbo-, mavo-, havo-, havo-, vwo-docenten en een enkel deskundig adviseur kan ervoor zorgen dat op een breed front docenten gaan meebeslissen over de komende ingrijpende veranderingen in hun werksituatie. Alleen als de docenten op grote schaal worden betrokken bij de leerplanont-

wikkeling, dan is er kans op een vernieuwing die inderdaad een verbetering belooft.

Onderwijskundige wetmatigheden

Na enige tientallen jaren van onderwijskundig onderzoek convergeren op een aantal terreinen de conclusies die uit een grote variatie aan onderzoeksprojecten zijn te trekken. Eén van die gebieden is dat van het onderzoek naar effectief onderwijzen aan klassen of groepen. Welke variabelen uit de lessituatie beïnvloeden in hoge mate de leerresultaten van leerlingen? Brophy (7) noemt de volgende factoren:

- De mate waarin de docent(e) erin slaagt om de leerlingen effectief tijdens de les te laten werken aan wiskundige taken.
- De overtuiging van de docent(e), dat de leerlingen in de eerste plaats de concrete wiskundige kennis, vaardigheden en methoden moeten leren beheersen.
- Een optimale afwisseling van klassikale uitleg, groepswork en individueel zelfstandig werken met veel terugkoppeling naar de leerlingen over hun vorderingen en met de mogelijkheid tot 'reteaching'.
- Een zodanige opbouw van de leerstof, dat leerlingen continu vorderingen kunnen maken, met kleine stappen die veel succes opleveren en een minimum aan verwarring en frustratie veroorzaken.
- Een duidelijk gestructureerde leertekst, met een goede samenhang en een accentueren van de voornaamste algoritmische en heuristische methoden.
- Veel meer aandacht voor het motiveren van het leerdoel (het is de moeite waard om dit te leren) dan voor het aardige en leuke van de afzonderlijke taken.

Bij de invoering van een nieuw leerplan moet rekening worden gehouden met deze 6 factoren, omdat anders het nieuwe in de uitvoering al snel slechter wordt dan het oude. Docenten moeten bijvoorbeeld de tijd hebben gekregen om de kern van het nieuwe leerplan, de wiskundige kennis/vaardigheden/methoden, te kunnen overzien. Dat lukt niet zonder overzicht op het gehele programma en duidelijkheid aangaande de eisen, die zij aan leerlingen moeten stellen. Hetzelfde geldt voor auteursteams,

die een essentiële rol vervullen bij de vierde en vijfde factor. Omdat in onze leerplanontwikkeling geen tijd wordt ingeruimd voor een geleidelijke invoering van een nieuw leerplan kan het onderwijs de eerste jaren niet erg effectief zijn, omdat onmogelijk aan deze 6 factoren kan worden voldaan. De docenten hebben geen overzicht, de auteurs kunnen hun teksten niet uittesten en er heerst onduidelijkheid bij vakken als wiskunde A over de doelstellingen.

● Actualiteit ● ● ● ●

Genoemde literatuur

1. Zie Euclides, M.C. van Hoorn, 64e jaargang nummer 4, december 1988.
2. De verslagen van de hoorzittingen zijn aan de bezoekers toegestuurd en verkrijgbaar bij de secretaris van de NVvW.
3. Zie bijvoorbeeld Euclides, 63e jaargang nummer 9, juni-juli 1988, het interview met Joop van Dormolen.
4. Zie bijvoorbeeld het boek 'Ik was wiskundeleraar', een uitgave van de SLO, 1985.
5. Zie in Euclides, 1968, jaargang 43, het artikel van De Bruijn: Modernisering leerplan wiskunde.
6. Zie het artikel 'Basisvorming in de ruimte', Nieuwe Wiskrant, 1987, 4.
7. Brophy vatte onder andere in 'The Third Educational Year-book 1986' van de vereniging van onderwijskundigen in de V.S., de AERA, de stand van zaken samen.

Verschenen

Cohn, P.M.: *Algebra*, volume 2; John Wiley; £ 14.95; 428 blz. In deel 1 is aandacht besteed aan Groepen, Lineaire ruimten en Ringen. In deze herziene editie van het tweede deel wordt de theorie van Lichamen en Modulen centraal gesteld. Daarnaast worden ook andere algebraïsche structuren (Grafen, Tralies) alsmede toepassingen (Representatie van eindige groepen, Coderingen) behandeld. Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een opgavenset.

Jensen, C.U./Lenzing, H.: *Model Theoretic Algebra*; Gordon and Breach; \$ 98.00; 443 blz.

In dit boek worden onderwerpen uit de algebra (Ringen, Lichamen, Modulen) beschreven vanuit modeltheoretisch perspectief. Daartoe wordt een semantische analyse van de begrippen gemaakt. Uit de modeltheorie worden alleen elementaire technieken gebruikt.

► Kolom 16



George Schoemaker

Ton Sijbrands – in een serie wedstrijden gewikkeld met de veel jongere wereldkampioen dammen – verzucht dat het niet meevalt als je veertig bent. Het is een zware aanslag op je conditie. Je moet fit zijn om toegang te hebben tot je opgebouwde kennis. Jonge wielrenners die pas bij Post in de ploeg komen krijgen van journalisten stevast de vraag hoe ze denken aan de top te komen met hun talent. 'Je eigen goed verzorgen', postuleren ze dan. Dat houdt in goed eten met veel groenten, regelmatig rust nemen, een goede trainingsopbouw. Wat is 'je eigen goed verzorgen' bij wiskundeonderwijs? Allereerst kun je het rijtje over eten, rusten en regelmaat zo meegeven aan leerlingen die zich voorbereiden op een examen. Maar hoe wordt er gefietst, oftewel wat zijn regelmatig terugkerende wiskundeactiviteiten?

Rekenen bij voorbeeld. Jarenlang dacht men bij het woord rekenen uitsluitend aan de basisschool en aan het ibo en lbo. Wie wiskunde doet op mavo, havo, vwo of lbo C/D moet daarbinnen heel anders rekenen met letters, en voor activiteiten zoals schatten, percentages berekenen, rekenen met een verhoudingstabel is dan geen tijd.

In het HAWEX wiskunde-A programma staat rekenen als belangrijk aandachtspunt. Dat maakt het klimaat beter geschikt voor het bijhouden en uitbouwen van rekenvaardigheden in de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Bij W12-16 vinden ze: rekenen moet, regelmatig, afwisselend en geïntegreerd.

De opzet van de examens is gelijk gebleven aan die van 1987 en 1988. De opstellers zijn zich steeds meer bewust hoe moeilijk het is te zorgen dat bij meerkeuzevragen het goede alternatief slechts het resultaat is van een goede aanpak en een fout alternatief slechts het gevolg is van een foutieve aanpak. De meeste meerkeuzevragen zijn enkelvoudige 2-minuutsvragen. Open vraag 33 is overeenkomstig de wens van de vaksectie bedoeld om de creatieve, inventieve capaciteiten van de kandidaten te meten.

Voor alle schooltypen geldt dat de gemiddelde score voor de meerkeuzevragen in 1988 3 à 4 punten lager was dan in 1987; in 1989 is een licht herstel opgetreden met $1\frac{1}{2}$ à 2 punten.

Bij de open vragen is de gemiddelde score voor mavo-D en mavo-C ongeveer gelijk gebleven aan die in 1988; bij het lbo heeft zich bij open vragen een daling voorgedaan met 3 à 4 punten.

Op grond van het aantal inschrijvingen voor het examen kan een schatting gemaakt worden van het percentage kandidaten dat een wiskunde-examen aflegt: in 1985 55%, in 1986 54%, in 1987 58%, in 1988 62% en in 1989 65% (in 1989 is dat 55% bij lbo en 70% bij mavo). Beduidend meer kandidaten kiezen dus voor wiskunde.

► De wiskunde-examens lbo/mavo van 1989 I

Drs. G. Bakker (Cito),

Dr. J. G. Nijenhuis (Cevo)

Na de algemene inleiding en een globale vergelijking van het C- en D-niveau, worden het D-examen en C-examen van 1989 besproken.

Algemene inleiding

In de jaarlijks terugkerende tabel 1 zijn de belangrijkste resultaten van het examen voor het C- en D-

	mavo-D	lbo-D	mavo-C	lto-C	leao/lhno llo/lmo-C	mavo/ lbo-C
aantal kandidaten in steekproef	824	184	739	709	842	2000
gemiddelde p-waarde van de 30 meerkeuzevragen	59,7	64,8	56,0	56,1	45,5	52,9
p'-waarde open vraag 31	73	77	64	49	41	52
„ open vraag 32	24	23	33	23	16	24
„ open vraag 33	31	40	33	37	24	31
gemiddelde score meerkeuzevragen	35,8	38,9	33,6	33,6	27,3	31,7
„ „ open vragen	12,9	14,0	12,6	10,9	7,9	10,6
„ „ totaal	48,7	52,9	46,2	44,6	35,2	42,4
door CEVO vastgestelde cesuur	44/45	44/45	44/45	44/45	44/45	44/45
gemiddeld cijfer	5,9	6,3	5,6	5,5	4,5	5,3
percentage onvoldoendes	41	28	46	50	74	57
betrouwbaarheid meerkeuzevragen	0,74	0,80	0,66	0,77	0,72	0,74
„ open vragen	0,49	0,50	0,58	0,66	0,64	0,65
„ totaal	0,74	0,79	0,69	0,78	0,76	0,77

Tabel 1

Vergelijking van C- en D-niveau

In de beide examens komen zes meerkeuzevragen voor met twee duidelijk onderscheiden niveaus: een eenvoudige C-vraag en een moeilijker D-vraag over hetzelfde onderwerp.

Er zijn twee vragen op meer vergelijkbaar niveau en twee vragen waarbij de D-variant gemakkelijker is (voor D) dan de C-variant (voor C).

Er zijn 9 vragen die specifiek zijn voor de examenstof voor het D-niveau: de gemiddelde p-waarde is daar 58. Er zijn 9 eenvoudige vragen speciaal gericht op het C-niveau: de gemiddelde p-waarde is voor mavo 68 en voor lbo 63.

Wat de open vragen betreft, zijn 31 en zeker 32 van het C-niveau beter toegankelijk dan 31 en 32 van het D-niveau. Over vraag 33 kan men van mening verschillen: bij C wat traditioneel, maar met een gelijkvormigheid die niet ieder ziet en bij D een zeer origineel, onverwacht probleem dat misschien niet eens zo specifiek voor het wiskunde-onderwijs is.

De leden van adviescommissies en vaksectie besteden veel aandacht aan een goede onderlinge afstemming van de beide niveaus. Enerzijds kan dit, overeenkomstig de doelstelling van het niveau-onderscheid, door een D-vraag wat ingewikkelder te maken dan een bijbehorende C-vraag (één of twee stappen meer, iets moeilijker getallen, een parameter, andere tekening, ...). Anderzijds kan over het gemeenschappelijk deel van de examenprogramma's een aantal identieke vragen gesteld worden, waar vroeger sprake was van een toevallig verschil tussen vragen. In het tweede tijdvak van 1989 zijn reeds 3 voorbeelden van identieke vragen opgenomen.

Lbo/mavo-D

Het examen geeft een evenwichtige spreiding over de diverse leerstofcomponenten. De vele tekeningen geven ondersteuning bij de te verrichten activiteiten.

Tabel 2 geeft weer hoeveel procent bij mavo-D de verschillende alternatieven van de meerkeuzevragen kiest. Ter illustratie volgen enkele veel gemaakte fouten:

$$(x + 1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0;$$

$$f(x) \geq g(x) \text{ i.p.v. } f(x) \leq g(x) \text{ aflezen;}$$

middellijn 3 als straal 3 lezen;

$$k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k = -3 \vee k = -2;$$

$$(x - 8)^2 + (y + 4)^2 = 8 \text{ 'raakt' de } x\text{-as.}$$

Toets- en itemanalyse – Cito, Arnhem

Analyse meerkeuzevragen wiskunde-D mavo-populatie

Vraag	sleutel	A	B	C	D	E	F
1	F	2	2	3	3	5	86*
2	E	3	10	8	10	64*	5
3	B	13	65*	2	6	4	11
4	C	7	12	52*	5	19	5
5	D	4	11	6	56*	17	6
6	E	8	9	20	6	51*	7
7	F	4	22	4	13	12	46*
8	C	9	16	57*	10	6	3
9	D	5	17	5	65*	4	5
10	C	6	4	68*	3	8	11
11	F	2	2	8	6	13	69*
12	F	18	4	11	18	4	44*
13	A	63*	8	11	6	12	1
14	C	3	5	85*	8		
15	D	3	45	7	43*	2	
16	C	3	12	78*	4	4	
17	B	11	25*	16	5	12	31
18	B	10	48*	10	17	9	5
19	E	3	6	11	10	59*	10
20	D	8	5	13	48*	19	7
21	C	32	25	43*			
22	D	8	9	10	63*	5	4
23	C	2	8	56*	15	11	8
24	C	2	2	83*	2	10	1
25	C	19	5	61*	7	5	4
26	D	5	9	25	48*	13	
27	F	1	4	3	4	4	83*
28	A	71*	9	11	5	3	1
29	A	49*	15	5	20	2	9
30	A	61*	6	20	9	3	2

aantal kandidaten:	824
gemiddelde score:	35,82
standaarddeviatie:	9,57
gemiddeld percentage goed:	59,7

Tabel 2

De afgedrukte vragen 15, 21 en 26 kunnen als origineel aangemerkt worden: ze bevatten aspecten die voor veel leerlingen nieuw zijn.

In vraag 15 herkennen velen alleen de gelijkbenige driehoek met $AP = BP$.

- 15 ■ Hiernaast is de rechthoek $ABCD$ getekend. Hoeveel punten P kun je op de zijde CD tekenen zo dat $\triangle ABP$ twee gelijke zijden heeft?

A nul
B precies één
C precies twee
D precies drie
E precies vier

Gegeven is een balk van 7 bij 5 bij 5. Zie de figuur.

- 21 ■ Zijn $\angle GHB$ en $\angle GBH$ even groot?
A ja, $\angle GHB = \angle GBH$
B nee, $\angle GHB < \angle GBH$
C nee, $\angle GHB > \angle GBH$

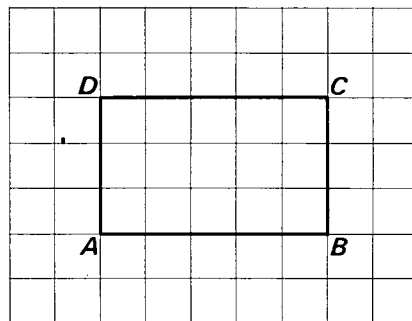
Een balk $ABCD.EFGH$ van 6 bij 9 bij 3 wordt in zes stukken gezaagd. Zie de figuur.

- 26 ■ Bereken de inhoud van het stuk $LBCK.NFGM$. Het antwoord is
A 18
B 27
C 36
D 45
E 54

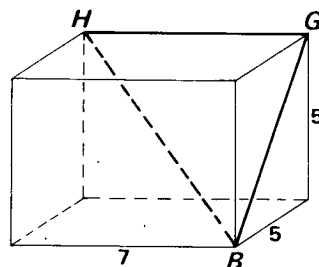
Vraag 21 bevat verschillende mogelijkheden om tot het goede alternatief te komen. De belangrijkste stap is $HG = 7$ en $BG = \sqrt{50}$ dus $BG > HG$, gevolgd door een hoekberekening of kennis dat tegenover een langere zijde een grotere hoek ligt. Meten leidt tot alternatief B, te vroeg afronden tot A.

Vraag 26 over de inhoud van een prisma vraagt veel inzicht in gelijkvormigheid.

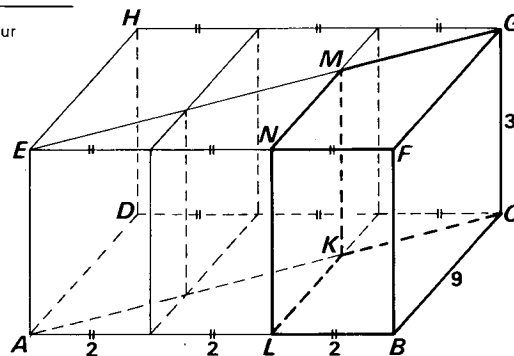
figuur



figuur



figuur



Opgave 1

Gegeven zijn de parabool $p: y = x^2 - 6x + 11$ en de lijn $k: y = -3x + 21$.

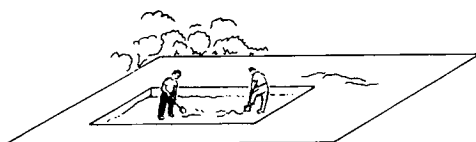
- 31 □ Bereken de coördinaten van de snijpunten van p en k .

Een lijn l die evenwijdig is met k raakt p .

- 32 □ Stel een vergelijking op van l .

Opgave 2.

figuur



Een tuin heeft de vorm van een vierkant met een zijde van 20 meter. In de tuin wordt een rechthoekige vijver gegraven van 10 meter lang, 8 meter breed en x meter diep.

Met de uitgegraven grond wordt de tuin gelijkmatig opgehoogd.

- 33 □ Druk de ophoging van de tuin uit in x .

Bij de open vragen wordt 31 met een vertrouwd algoritme goed gemaakt met $p' = 75$. Evenals in 1987 wordt het raken in vraag 32 als groot probleem ervaren met $p' = 24$: de helft van de kandidaten krijgt slechts 0 of 1 van de 10 punten. Bij vraag 33 is het met $p' = 31$ weinig beter: de helft krijgt niet meer dan 0, 1 of 2 van de 10 punten.

In vraag 33 doen eenheden (m , m^2 , m^3) voorzichtig hun intrede in het wiskundeonderwijs. De uitgegraven grond wordt nogal eens uitgespreid over de gehele tuin, leidend tot het antwoord $\frac{1}{3}x$ m, wat toch nog 5 à 6 van de 10 punten oplevert.

Scoorden de lbo-D-kandidaten in 1988 gemiddeld 2 punten hoger dan mavo-D, dit jaar is dat zelfs 4 punten hoger.

Gezien de kwaliteit van de examen vragen, alsmede de indruk dat het examen positief door de docenten werd ontvangen, kon de vaksectie besluiten de cesuur vast te stellen op 44/45. Op deze cesuur was de constructie van het examen gericht geweest. Het percentage onvoldoenden komt hiermee voor mavo op 41 en voor lbo op 28. De cijfers 8, 9 en 10 worden behaald door respectievelijk ongeveer 10%, 4% en $\frac{1}{4}$ % van de mavo-D kandidaten.

Lbo/mavo-C

Ook hier is er een goede spreiding over de gehele leerstof. Goniometrie ontbreekt weer in het centraal examen omdat dat onderdeel alleen in het schoolonderzoek getoetst moet worden. Door de vele tekeningen kunnen de kandidaten zich snel op de problemen oriënteren.

In tabel 3 is met procenten aangegeven hoeveel kandidaten de diverse alternatieven van de meerkeuzevragen kiezen.

Analyse meerkeuzevragen wiskunde-C gehele populatie

Vraag	sleutel	A	B	C	D	E	F
1	B	2	47*	8	10	28	5
2	F	2	6	1	3	12	76*
3	D	12	12	22	55*		
4	F	16	6	6	5	7	60*
5	B	4	30*	9	40	12	5
6	F	3	4	5	6	21	60*
7	E	5	2	5	2	85*	1
8	C	15	18	41*	10	8	7
9	B	8	57*	27	9		
10	B	4	52*	5	13	8	18
11	A	37*	9	15	6	19	15
12	C	4	9	69*	5	8	6
13	B	3	30*	16	49	1	1
14	B	7	59*	2	2	24	7
15	B	5	67*	3	4	3	18
16	D	4	9	17	54*	16	
17	B	9	56*	22	12		
18	A	64*	17	8	5	6	
19	C	4	3	60*	13	16	5
20	B	6	67*	3	11	10	4
21	E	6	4	4	5	77*	4
22	E	49	11	14	4	15*	7
23	B	20	49*	15	3	14	
24	E	9	5	8	16	51*	12
25	D	11	17	18	40*	8	7
26	C	7	8	60*	25		
27	D	1	6	19	65*	6	3
28	B	2	31*	7	2	31	27
29	A	49*	4	4	32	4	8
30	A	24*	20	6	22	6	23

aantal kandidaten: 2000
 gemiddelde score: 31,71
 standaarddeviatie: 9,71
 gemiddeld percentage goed: 52,9

Tabel 3

Er zijn 7 vragen met een p-waarde ≥ 65 , meest elementaire of praktische vraagjes. Er zijn 5 vragen met een p-waarde ≤ 35 .

Het aflezen van een ongelijkheid uit een grafiek wordt altijd moeilijk gevonden.

Het ordenen van de breuken $-\frac{5}{8}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{6}$ betreft een in het centraal examen wat vergeten leerstofonderdeel: kennelijk moeilijk om of door gelijknamig maken of door gebruik van de rekenmachine de getallen goed op de getallenlijn te plaatsen. Bij het oplossen van $(x+1)(x-2) = 4$ is een veel gemaakte fout het oplossen van $(x+1)(x-2) = 0$; een andere fout is $(x+1)(x-2) = 4 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$ omdat $2 \cdot 2 = 4$.

In vraag 13 over gelijkvormigheid maakt 49% de

Hiernaast is een driehoek ABC getekend; D en E liggen op de zijden zo dat $DE \parallel BC$.

- 13 ■ Bereken DB in het geval dat $AD = 4$, $DE = 2$ en $BC = 5$.

$DB =$

- A 3
- B 6
- C 7
- D 10
- E 21
- F 25

Hiernaast is een balk getekend.

$\angle ESD = 50^\circ$.

- 22 ■ Hoe groot is hoek DES ?

- A 40°
- B 45°
- C 50°
- D 60°
- E 65°
- F 80°

beruchtste fout, namelijk $DE : BC = AD : DB$.

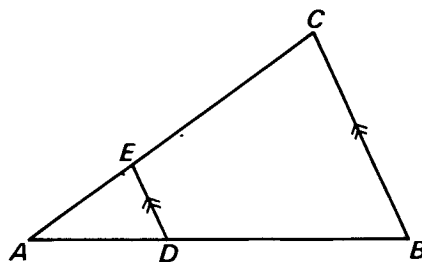
Vraag 22, waar bewust geen maten zijn vermeld, doet rechtstreeks een beroep op het inzicht dat E en D even ver van S liggen; velen nemen aan dat hoek D recht is.

In drie meerkeuzevragen worden eenheden gebruikt: lengte ladder in m, inhoud steunbeer in m^3 en snelheid auto's in km/uur.

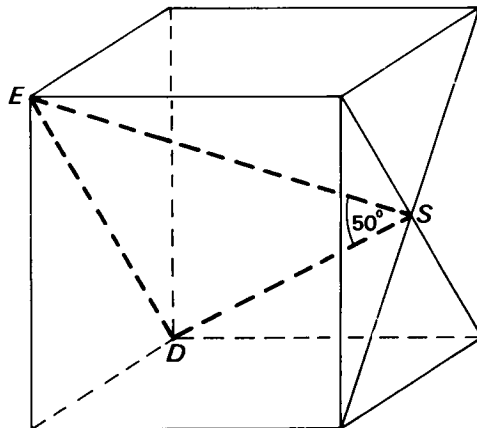
De betekenis van het voor velen onbekende woord 'steunbeer' is in de tekst én in de bijbehorende figuur ondubbelzinnig weergegeven. Toch gaf dit adviescommissie en vaksectie het signaal vooral gespitst te blijven op het gebruik van toegankelijke taal, vooral voor het C-niveau.

Mavo en Ito hebben dit jaar dezelfde gemiddelde score bij de meerkeuzevragen. Het Ito is beter in meetkundig getinte vragen.

figuur



figuur



Opgave 1

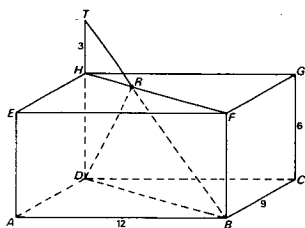
Gegeven zijn de parabool $p: y = x^2 - 4x - 5$ en de lijn $l: y = 4x + b$ die elkaar in het punt $(1, -8)$ snijden.

- 31 □ Teken p en l in één assenstelsel.
32 □ Bereken de coördinaten van het andere snijpunt van p en l .

Opgave 2

Gegeven is de balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 12$, $BC = 9$ en $CG = 6$.
Op het verlengde van de ribbe DH ligt het punt T zo dat $HT = 3$.
De lijnen BT en HF snijden elkaar in het punt R .

figuur



- 33 □ Bereken de omtrek van $\triangle DRH$ in één decimaal nauwkeurig.

Open vraag 31 is een vraag waarbij zeker de parabool zonder problemen getekend kan worden, nadat de vergelijking $x^2 - 4x - 5 = 0$ is *opgelost* en de coördinaten van de top van p zijn *berekend*. (Dat is dus iets anders dan een visgraattabel invullen!). Ook is de indruk dat het tekenen van de lijn in vraag 31 en het berekenen van b in vraag 32 (of eventueel reeds in vraag 31) nauwelijks problemen kan geven. Toch blijven de scores in vraag 31 met $p' = 52$ en in vraag 32 met $p' = 24$ achter bij de verwachtingen. Bij vraag 32 heeft 55% geen enkel punt behaald. Wellicht ten overvloede zij vermeld dat met een opdracht als 'Bereken de coördinaten van de snijpunten' de constructeurs bedoelen dat de coördinaten *berekend* moeten worden en dus *niet* dat zij geraden of afgelezen worden. Tevens verdient het sterk de voorkeur dat de berekende coördinaten tenslotte als geordend getallenpaar $(7, 16)$ genoemd worden (en niet als '7 en 16', '16 en 7' of iets dergelijks) om elke verwarring bij de correctie bij voorbaat uit te sluiten.

Bij vraag 33 is $p' = 31$: de meesten kwamen niet verder dan $BD = 15$.

De resultaten van Ito bleven bij de open vragen 31 en 32 ver achter bij die van mavo.

Indien van het leao/lhno/llo/lmo alleen de 56% best voorbereide kandidaten examen zouden doen op C-niveau, zouden hun scoreresultaten overeenstemmen met die van mavo en Ito.

In het correctievoorschrift had beter expliciet kunnen staan dat als b al in vraag 31 werd berekend, dit ook de 3 bij vraag 32 vermelde punten oplevert. De punttoekenning bij vraag 33 had preciezer geformuleerd moeten worden.

Na het examen heeft de vaksectie opnieuw de diverse vragen en de scoreresultaten bestudeerd en geen enkele aanleiding gevonden om af te wijken van de cesuur 44/45. Het percentage onvoldoenden kwam hiermee voor mavo op 46, voor Ito op 50 en voor leao/lhno/llo/lmo op 74. Voor het C-examen behaalde 7% het cijfer 8, 2% het cijfer 9 en 0% het cijfer 10.

Boekbespreking

A. Beutelspacher/B. Petri; *Der goldene Schnitt*.
B.I.-Wissenschaftsverlag; 180 blz.; 46,- DM.

In dit boekje hebben de schrijvers een veelheid aan onderwerpen bijeengebracht die op de een of andere manier zijn verbonden met de Gulden Snede: verdeel de eenheid in M en m met $1: M = M:m$. In de eerste hoofdstukken komen meetkundige zaken aan de orde: constructie van de GS met passer en liniaal; de regelmatige vijfhoek; Platonische lichamen etc.

De volgende groep hoofdstukken gaat meer in op analytische onderwerpen. We noemen Fibonacci-getallen, kettingbreuken en een toepassing binnen dynamische systemen.

Voor veel lezers zal het bovenstaande, zeker gedeeltelijk, bekend zijn. Met het beschrijven van de rol van de GS-verhouding in de analyse van een aantal spelen wordt de bekende weg verlaten. De laatste twee hoofdstukken staan zelfs buiten de wiskunde. Er wordt beschreven waar de GS in Natuur, Beeldende kunst, Muziek etc. ontdekt kan worden.

Door de grote diversiteit aan onderwerpen is het een bijzonder aardig boekje geworden, temeer daar er alleen elementaire wiskundekennis nodig is om de vlot geschreven tekst te kunnen volgen. Verder bevat elk hoofdstuk een aantal oefeningen.

Harm Bakker

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13...
1	3		7	12		19	27		37	48		61...
1			8			27			64			125...

Het lijkt er op dat we nu de derde machten krijgen.
Toeval of echt waar?

Nog een beetje algemener, de voortzetting is duidelijk:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13...
1	3	6		11	17	24		33	43	54		67...
1	4			15	32			65	108			175...
1				16				81				256...

Inderdaad, de vierde machten! Of toch niet...?

De ontdekking van dit verschijnsel (dat ook voor hogere machten blijft opgaan) staat op naam van Alfred Moessner (1951, dus eigenlijk heel recent) en de bewijzen van de stelling dateren van vóór 1970. Ook werden wat algemenere resultaten gevonden, maar geen van de bewijzen munt uit door korthed of elegantie. Calvin Long (The Mathematical Gazette, 1982) geeft een paar voorbeelden, maar noemt de bewijzen 'somewhat involved and not really suitable at school level'.

Sinds 1986 ben ik een andere mening toegedaan, omdat er een eenvoudig bewijs met behulp van grafen is te geven. Het berust op de volgende overweging:

Stel dat in een stad iedere straat éénrichtingsverkeer heeft. Er zijn twee soorten weggebruikers. Voor het gemak: *scholieren*, die altijd de verkeersregels in acht nemen, en *leraren* die consequent *altijd* tegen de regels zondigen.

Het atheneum staat op kruispunt *A*, de broodjeswinkel op kruispunt *B*.

Dan is de volgende uitspraak evident: het aantal routes die scholieren kunnen kiezen van *A* naar *B* is gelijk aan het aantal voor leraren beschikbare routes van *B* naar *A*.

De kunst is om het probleem van Moessner te vertalen in een stadsplattegrond met éénrichtingsverkeer, die een elegante oplossing toelaat!

► De stelling van Moessner

K. A. Post

Puzzelen, bijvoorbeeld met natuurlijke getallen, en daarbij wetmatigheden ontdekken, zou een uitdaging moeten zijn voor iedere wiskundeleraar. Het vinden van een elegante bewijsmethode vormt in zo'n situatie dan de kroon op alle inspanning. Een voorbeeld hiervan is het volgende:

- 1 Zet de natuurlijke getallen naar opklimmende grootte op een rij.
- 2 Laat de getallen op plaats 2, 4, 6, 8, ... weg (we onderstrepen ze voor het gemak).
- 3 Schrijf de rij van de partiële sommen van de resterende getallen er onder.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13...
1		4		9		16		25		36		49...

Het eindresultaat is de rij van alle kwadraten (dat wisten we natuurlijk al!).

We proberen het een stapje algemener:

- 1 Zet de natuurlijke getallen op een rij.
- 2 Laat de getallen op plaats 3, 6, 9, 12, ... weg.
- 3 Vorm de rij van partiële sommen van de rest.
- 4 Laat uit deze rij de getallen op plaats 2, 4, 6, 8, ... weg.
- 5 Vorm de rij partiële sommen van de rest.



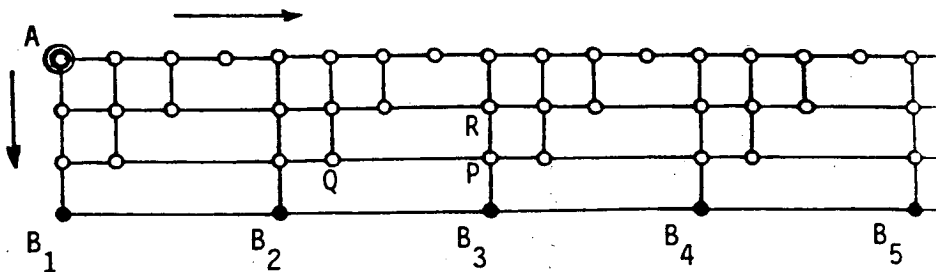
Daartoe breiden we eerst onze tellerij uit door met een rij van louter enen te beginnen, en, om bijv. de derde machten te krijgen, de enen op plaats 4, 8, 12, 16, ... weg te laten en hetzelfde proces te volgen.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...			
1	3		7	12		19	27		37	48		61	...			
1			8			27			64			125	...			

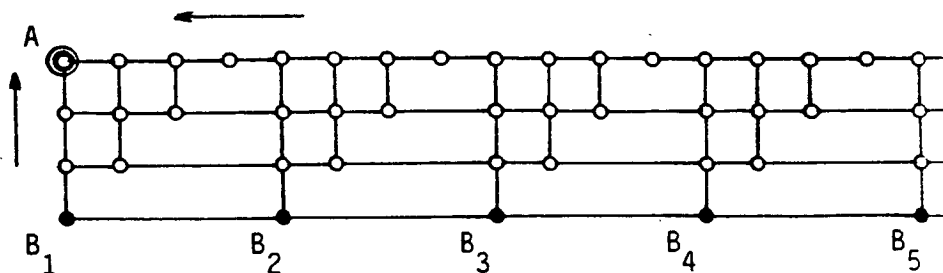
En nu de bijbehorende stadsplattegrond. Die doet wat Amerikaans aan en bestaat uit vier lange straten van west naar oost en vele korte noord-zuid verbindingen!

Situeer op de plaats van ieder getal uit het Moessner-schema een kruispunt en verbind opvolgende punten die in een zelfde rij staan, alsmede opvol-

gende punten die in de zelfde kolom voorkomen. Kies het eenrichtingsverkeer in alle oost-west straten naar het oosten en in alle noord-zuid straten naar het zuiden. Het atheneum A komt in de noordwesthoek van de stad en een rij broodjeswinkels $B_1 B_2 B_3 \dots$ op de kruispunten langs de zuidelijke randweg (zie figuur 1). Leerlingen zwermen uit van de school naar de broodjeswinkels. Ieder kruispunt P (behalve A) is bereikbaar van af zijn westelijke buur Q en/of zijn noordelijke buur R , en heeft dus een totaal aantal toegangsroutes dat gelijk is aan het aantal toegangsroutes tot Q en R samen. Maar dat is precies het recept om partiële sommen te maken. En omdat langs de noordelijke en de westelijke randweg steeds een 1 bij de kruispunten staat lezen we in het Moessner-schema de aantallen routes van A naar ieder punt P af!



Figuur 1. Eenrichtingsverkeer (Zuid en Oost)



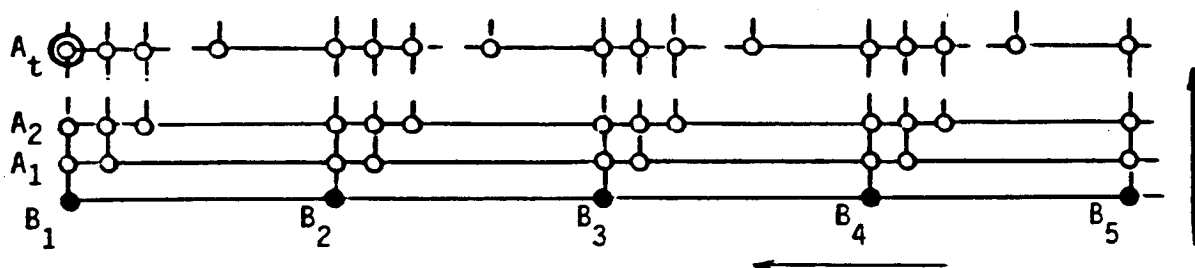
Figuur 2. Tegendraads verkeer (Noord en West)

Leraren verplaatsen zich tegendraads (fig. 2) en kunnen gemakkelijk vanuit hun favoriete broodjeswinkel het aantal routes naar ieder kruispunt op weg naar school uitrekenen: Dat doen ze voor iedere wijk (driehoek van punten) die ze passeren afzonderlijk met een inductie, die aanleiding geeft

tot eenvoudige meetkundige rijen (zie figuur 3). Het algemene geval laat zich beschrijven in een gigantisches stratenplan (fig. 4). Allemaal wijken met een driehoeksstructuur. Broodjeswinkels langs de zuidelijke randweg, athenea langs de westelijke randweg.

Wijk k-3				Wijk k-2				Wijk k-1								
--	64	48	36	27	--	27	18	12	8	--	8	4	2	1	--	1
--	16	12	9	.	--	9	6	4	.	--	4	2	1	.	--	1
--	4	3	.	.	--	3	2	.	.	--	2	1	.	.	--	1
--	1	.	.	.	--	1	.	.	.	--	1	.	.	.	--	1
B_{k-3}				B_{k-2}				B_{k-1}				B_k				

Figuur 3. De (tegendraadse) routegetallen van B_k uit beschouwd



Figuur 4. Tegendraads verkeer (Noord en West)

► Gelijke uitkomsten

Neem een getal (bijvoorbeeld 7)

Trek dit getal van 1 af (resultaat: $1 - 7 = -6$)

Bereken: het eerste getal + het kwadraat van het tweede getal
 $(7 + (-6)^2 = 7 + 36 = 43)$

Bereken ook: het kwadraat van het eerste getal + het tweede getal
 $(7^2 + -6 = 49 - 6 = 43)$

De beide uitkomsten zijn gelijk.

Neem als begingetal respectievelijk: 6, 5, 4, 3, 2 en 1.

Controleer dat je telkens gelijke einduitkomsten krijgt.

Probeer het gevonden verschijnsel te bewijzen (neem begingetal a , het tweede getal is dan $1 - a$; werk verder met a en $1 - a$).

Reken tenslotte na dat je voor a niet een natuurlijk getal hoeft te kiezen; neem $a = \frac{1}{3}$ en ook $a = 0,3$. Probeer het ook met $a = \sqrt{3}$.

► Ontbinden in factoren

Over 10 jaar krijgen we het jaar 2000.

Het getal 2000 is, rekenkundig gezien, een mooi getal:

$$2000 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

Korter opgeschreven: $2000 = 2^4 \times 5^3$

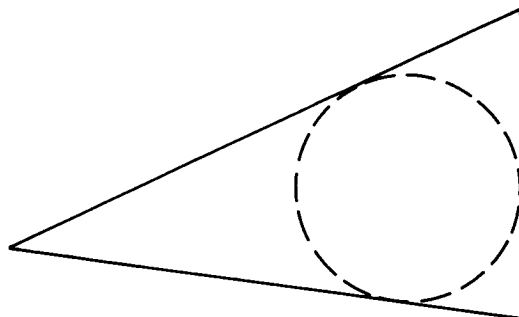
Hier is 2000 ontbonden in factoren.

Ontbind ook de getallen 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998 en 1999 in factoren.

Drie van deze getallen zijn priemgetallen (dat wil zeggen: er is geen ontbinding mogelijk). Welke getallen zijn dat?

Hoeveel van deze getallen zijn deelbaar door 7? En hoeveel door 8?

– vind een driehoek, die het bierviltje nog net bedekt (fig. 2).



Figuur 2

Ik kies voor deze ingang, omdat bierviltjes in de leefwereld van mijn leerlingen voorkomen en een zinnig verband tot stand brengen, waardoor ik me kan veroorloven, de jeugd niet meteen met vaktermen te bestoken.

Bij het oplossen van de beide opgaven 'construeren' de leerlingen, zonder het te weten, de omgeschreven en de ingeschreven cirkel van een driehoek. Het komt er dan nog slechts op aan, de problematiek voor de leerlingen 'transparant' te maken. Daartoe worden passende meegebrachte gekleurde driehoeken als overheadfolie en een 'transparant bierviltje' op de projector gelegd. Door gericht te vragen is gemakkelijk vast te stellen, dat het bierviltje (de cirkel)

- in het eerste geval *om* de driehoek heen ligt (*omgeschreven cirkel*), en
- in het tweede geval *in* de driehoek ligt (*ingeschreven cirkel*).

Hierbij kunnen de vaktermen (dat wil zeggen: 'omgeschreven cirkel van een driehoek' en 'ingeschreven cirkel van een driehoek') worden geïntroduceerd.

Na deze speelse uitwerking van de taakstelling wordt een „echte” constructie van de middelpunten gewaagd.

In de inleiding tekende elke leerling twee driehoeken, waarbij het bierviltje de omgeschreven cirkel respectievelijk de ingeschreven cirkel vormde. Voor de constructieve bepaling van de middelpun-

► **Bierviltjes als cirkels**

Adolf Klaming

Waarvoor kun je een bierviltje gebruiken?

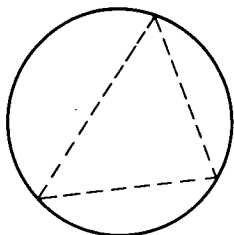
- als onderzetter voor een pilsje uiteraard,
- voor het bouwen van een kaartenhuis,
- voor kroegkunstjes,
- als kladje voor het noteren van de genuttigde pilsjes, en ...

– als hulpmiddel voor het construeren van bijzondere lijnen in een driehoek.

De eerste vier toepassingen zijn zeker bekend, bij de laatste toepassingsmogelijkheid ben ik daarvan niet zo zeker. Daarom wil ik in dit artikel kort uiteen zetten, hoe ik met mijn leerlingen de omgeschreven en de ingeschreven cirkels van driehoeken construeer.

Elke leerling krijgt een rond bierviltje en de volgende opgaven:

- vind een driehoek, die door het bierviltje nog net te bedekken is (fig. 1), en

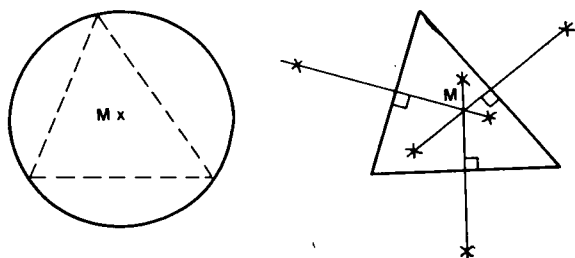


Figuur 1

ten moet nu over de plaats van deze middelpunten M en I worden nagedacht.

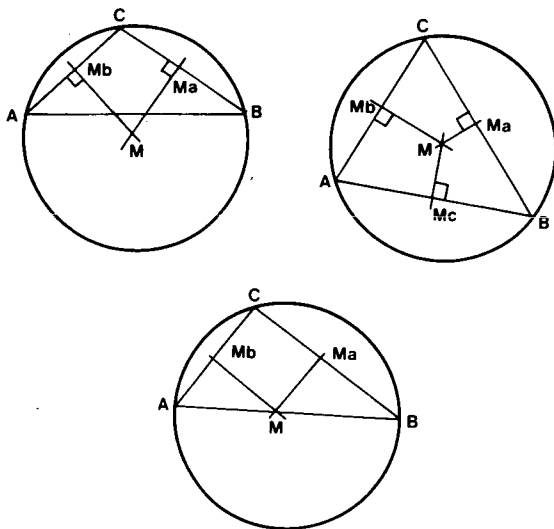
Daartoe markeren de leerlingen de middelpunten M en I met behulp van het bierviltje, waarvan het middelpunt door middel van een gat aangegeven is.

Wanneer M en I met de hoekpunten van de driehoek worden verbonden, dan valt de leerlingen zeker op, dat M van elk hoekpunt even ver verwijderd is en op elke middelloodlijn ligt (die de desbetreffende zijde loodrecht middendoor deelt) (fig. 3).



Figuur 3

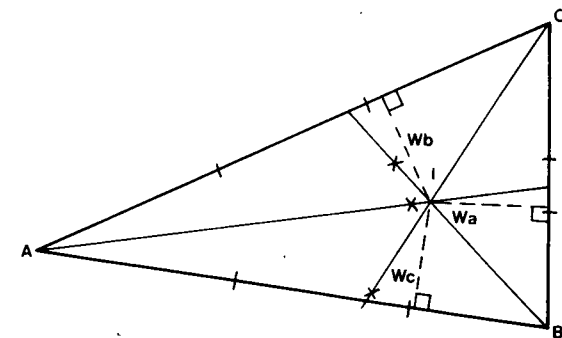
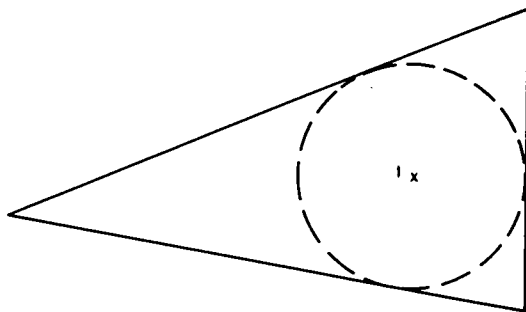
Over de plaats van het middelpunt van de omgeschreven cirkel ontdekken de leerlingen het volgende:



Figuur 4

- in een scherphoekige driehoek ligt M binnen de driehoek,
- in een stomphoekige driehoek ligt M buiten de driehoek,
- in een rechthoekige driehoek ligt M op de hypotenusa (cirkel van Thales) (fig. 4).

Met wat aanwijzingen ontdekken de leerlingen zeker ook, dat de verbindingslijnen van I met de hoekpunten de binnenhoeken van de driehoeken middendoor delen (fig. 5).



Figuur 5

Vanuit de verworven inzichten wordt het zinvol M en I bij gegeven driehoeken te construeren, waarbij verdere ervaring wordt opgedaan met de plaats van deze middelpunten.

Ik hoop, beste lezers, dat u in het vervolg met wat meer respect met uw bierviltje zult omgaan.

Oorspronkelijke titel: Vom Bierdeckel zum Um- und Inkreis von Dreiecken.

Verschenen in Mathematik lehren 22 (juni 1987).

Vertaling: A. J. F. van den Berg, Bedum.

► **Lineair programmeren met de computer**

Simon T. M. Gribling¹

'Een fabriek van landbouwwerktuigen assembleert maaiers en trekkers. Deze zijn ongeveer even groot. Op dezelfde dag dat ze in elkaar worden gezet worden ze weggehaald.

Terwijl voor de montage van 'n maaier één mandag nodig is, zijn twee man een hele dag bezig om 'n trekker in elkaar te zetten.

Een maaier brengt na aftrek van arbeidsloon en materiaalkosten 200 gulden op. Er kunnen er hoogstens 10 op een dag afgezet worden, zodat het geen zin heeft er 11 of meer te produceren.

Een trekker brengt 300 gulden op bij een afzetbereping van 8 per dag.

Voorts importeert de firma nog pootmachines. Hiervan kunnen er per dag maximaal 15 geleverd worden. De zuivere verdienste per machine is 50 gulden.

Aan zo'n pootmachine hoeven slechts enkele routine-controles te worden verricht, waardoor de benodigde manuren te verwaarlozen zijn. Ze nemen echter wel ruimte in in de fabriekshal, waar ten hoogste plaats is voor 13 maaiers. Een pootmachine is half zo groot als een maaier.

De fabriek heeft 18 personeelsleden.

Bij welk aantal maaiers, trekkers en pootmachines is de winst maximaal?

Bovenstaand probleem is een voorbeeld van een

Lineair Programmerings-probleem in drie variabelen.

Bij het oplossen van dergelijke problemen kan de computer een belangrijke ondersteunende rol spelen en ik zal dat laten zien aan de hand van een drietal computerprogramma's².

Het eerste is de software van Wolters-Noordhoff bij de hoofdstukken over Lineair Programmeren uit *Moderne Wiskunde* (deel vwo 5a en 6a)³. Het tweede, SIMOPT, is een onderdeel van een Operations-Research-pakket van de Vrije Universiteit van Amsterdam⁴. Het derde tenslotte is het programma LINPROG uitgegeven door het OW&OC⁵.

Eerst zal ik, misschien ten overvloede, uitleggen wat Lineair Programmeren inhoudt en, uiterst beknopt overigens, het daarbij veel gebruikte Simplex-algoritme toelichten.

Lineair Programmeren

Lineair Programmeren (LP) is een wiskundige methode voor het vinden van een maximum (of minimum) van een lineaire doelfunctie in een veelal groot aantal (positieve) beslissingsvariabelen. Aan deze variabelen zijn lineaire restricties gesteld. Deze restricties kunnen een 'kleiner dan' of een 'groter dan' (soms ook een 'gelijk aan')-karakter hebben.

LP-problemen met 2 of 3 beslissingsvariabelen kunnen grafisch opgelost worden. Voor LP-problemen van willekeurige dimensie is er het zogenaamde Simplex-algoritme.

Kort gezegd bestaat dat er uit dat vanuit de oorsprong op een slimme manier langs de hoekpunten van het domein (dat is het gebied van oplossingen die voldoen aan alle restricties) gewandeld wordt op zoek naar de *beste* oplossing. Omdat elke restrictie lineair is, is het domein convex.

En omdat ook de doelfunctie lineair is, is het maximum (of minimum) in een hoekpunt te vinden. Elke wandeling langs de hoekpunten brengt je dus vanzelf naar dat maximum (minimum).

De Simplex-wandeling is echter niet willekeurig. Steeds wordt dié richting ingeslagen waar, gezien de coëfficiënten in de doelfunctie, het meest van verwacht wordt. Als je je in een hoekpunt bevindt

van waaruit in elke richting je doelfunctie niet meer te verbeteren valt, zit je in het beste punt. Hoewel vanzelfsprekend ook een lijn, vlakdeel of deel van een hypervlak in zijn geheel uit beste punten kan bestaan, stopt het algoritme, zodra een maximum (minimum) bereikt is. Andere oplossingen, als die er al zijn, blijven zodoende in eerste instantie buiten zicht.

Aan de hand van (de oplossing van) het in de aanvang gestelde probleem zal ik een en ander proberen te verduidelijken.

Stel x_1 , x_2 en x_3 de aantallen maaiers, trekkers en pootmachines.

Dan moet de volgende doelfunctie gemaximaliseerd worden:

$$W = 200 x_1 + 300 x_2 + 50 x_3$$

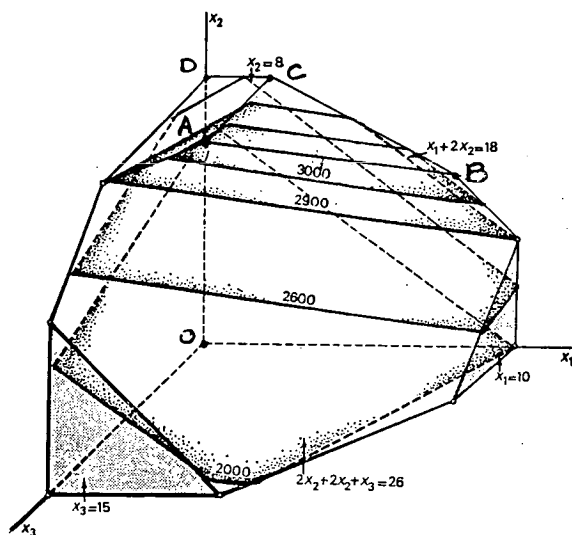
Onder de voorwaarden:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq 10 \\ 0 \leq x_2 \leq 8 \\ 0 \leq x_3 \leq 15 \end{array} \right\} \quad (\text{afzet})$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 18 \quad (\text{arbeid})$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 26 \quad (\text{ruimte})$$

Dat levert het volgende plaatje.



In de figuur zijn diverse niveauvlakken (waar de doelfunctie bepaalde vaste waarden aanneemt) getekend die alle evenwijdig blijken te zijn met het lijnstuk AB . Op AB liggen dus de ideale oplossingen: $A(2, 8, 6)$, $B(8, 5, 0)$ en ook de tussenpunten met gehele coördinaten $(6, 6, 2)$ en $(4, 7, 4)$, die eveneens ideale oplossingen vertegenwoordigen.

Deze leveren ons telkens die combinaties maaiers, trekkers en pootmachines waarvoor de winst maximaal (3100) is, waarmee het probleem nu (grafisch) opgelost is.

Om het probleem via het Simplex-algoritme, dat geen ongelijktekens aankan, op te lossen moeten eerst met behulp van zogenaamde spelingsvariabelen (of verschilvariabelen) alle ongelijktekens worden vervangen door gelijktekens (ik zal dat hier niet demonstreren, maar in ons voorbeeld zou dat neerkomen op het invoeren van 5 nieuwe variabelen; het *positief* zijn van de beslissingsvariabelen wordt door het algoritme aangenomen).

Dat levert de zogenaamde kanonieke vorm, die eenvoudig is om te zetten in het eerste Simplex-tableau (een speciaal type matrix).

Het Simplex-algoritme nu laat na iedere slag, die feitelijk niet meer inhoudt dan het met een goed gekozen *spil* schoonvegen van een kolom in die matrix, één beslissingsvariabele en één spelingsvariabele van rol wisselen en stelt vervolgens een nieuw Simplex-tableau op waarin de nieuwe beslissingsvariabelen (die in dat hoekpunt alle nul zijn) een nieuwe 'oorsprong' vormen, een nieuw uitgangspunt voor een volgende stap.

De wandeling voert ons zo van $O(0, 0, 0)$, via $D(0, 8, 0)$ en $C(2, 8, 0)$ naar $B(8, 5, 0)$.

In B stopt het algoritme. In het laatste tableau zijn de coëfficiënten van de meegeveegde doelfunctie namelijk nul of negatief, zodat er hoegenaamd geen eer meer te behalen valt. Omdat echter een van de nullen als coëfficiënt hoort bij een van de beslissingsvariabelen, mag het algoritme 'gratis' nog een slag worden voortgezet, waardoor alsnog het punt $A(2, 8, 6)$ als oplossing boven tafel komt.

Daarna kunnen ook de geheeltallige *tussenpunten* worden berekend.

In het algemeen kunnen zich bij de uitvoering van

het Simplex-algoritme problemen voordoen wanneer één van de restricties een lijn door de oorsprong oplevert (dan moet soms één slag met het algoritme worden uitgevoerd zonder dat je van plaats verandert – maar met rolwisseling van variabelen), of als minstens een van de beperkingen een 'groter dan'-karakter heeft. In dat laatste geval behoort het startpunt van de wandeling namelijk meestal niet tot het domein. En als dan bijvoorbeeld een doelfunctie met slechts positieve coëfficiënten geminimaliseerd moet worden zou het algoritme direct op kunnen houden. Immers, elke stap weg van de oorsprong zal de doelfunctie slechts verhogen.

Het Simplex-algoritme nu ondervangt dit probleem door het invoeren, na enig voorwerk, van een nieuwe (super)spelingsvariabele en een nieuwe *pseudodoelfunctie*. Het allereerste minimaliseren van die *pseudodoelfunctie* voert je het domein in, waarna het 'gewone' algoritme zijn werk kan beginnen.

Een laatste complicatie is de veelal noodzakelijke geheeltalligheid van de oplossing, maar daar zal ik hier niet verder op in gaan.

Lineair Programmeren op school

Het aantrekkelijke van Lineair Programmeren is dat alle noodzakelijke handelingen op zich eenvoudig en voor middelbare scholieren goed uitvoerbaar zijn, waardoor niet alleen het modelmatige aspect volop aandacht kan krijgen, maar waardoor ook het Simplex-algoritme zelf binnen bereik komt.

Zelfs bij meerdere beslissingsvariabelen, vooropgesteld dat er slechts 'kleiner dan' restricties gelden, hoeven er namelijk geen al te grote problemen te ontstaan, ook niet bij het rekenwerk. Weliswaar neemt de kans op rekenfouten bij het uitvoeren van het algoritme (vegen) toe als de tableaux groter worden, het blijft toch allemaal goed te doen, juist omdat het *idee* in wezen steeds hetzelfde blijft én omdat het algoritme per stap tal van 'controle'-mogelijkheden biedt (in welk hoekpunt zit je nu,

welke waarde heeft de doelfunctie, zijn alle variabelen nog positief, welke rolwisseling heeft plaatsgevonden).

Om die reden lijkt me ook een beperking tot 2-dimensionale problemen of problemen met slechts enkele restricties in ons onderwijs onnodig.

Voor echt complex reken- of tekenwerk of voor problemen met 'groter dan'-restricties kunnen de in de inleiding genoemde computerprogramma's uitkomst bieden:

het OR-pakket bij het snel doorrekenen van omvangrijke modellen, het OW&OC-programma als ondersteuning bij een grafische aanpak, en als hulpmiddel bij het aanleren van (een deel van) het Simplex-algoritme ten slotte de software van Wolters-Noordhoff.

Software I (Wolters-Noordhoff)⁶

Een van de onderdelen van de C.O.O.-software van uitgeverij Wolters-Noordhoff is het programma Lineair Programmeren. Het is een educatief programma voor het oplossen van LP-problemen met behulp van (een eenvoudige versie van) het Simplex-algoritme.

Het programma werkt met beeldpagina's. Per pagina zijn er slechts een paar toetsen actief. Welke dat zijn staat in de handleiding of is met hulp van de H(elp)-toets op het scherm te krijgen. Dat is handig, maar het programma vraagt daardoor voor veel leerlingen wel de nodige instructie vooraf.

Het programma verwacht van de gebruiker dat deze zelf de kanonieke vorm opstelt, de gewenste afmetingen (aantal vergelijkingen/rijen; aantal variabelen/kolommen; en de kolombreedte) van het eerste Simplex-tableau levert en dat tableau vervolgens (op beeldpagina 3) vult. Gehele getallen, decimale breuken en zelfs quotiënten als $2,5/-4,3$ zijn toegestaan.

Eventueel kan een tableau uit een van de (zes) geheugens opgeroepen worden, wat handig kan zijn bij demonstraties of als de computers aangesloten zijn op een netwerk.

Indien het tableau niet in zijn geheel op het scherm kan, wordt er gewerkt met een 'venster' dat over het tableau geschoven kan worden.

Bij het oplossen van het model zijn er twee mogelijkheden, een automatische en een halfautomatische (kolommen vegen).

De automatische oplossing kun je door middel van de spatiebalk stap voor stap volgen waarbij de computer (eventjes) aangeeft welke kolom met welke rij geveegd wordt.

Bij de half-automatische oplossing kun je zelf kiezen welke operaties (rijen verwisselen of kolommen vegen) je op het tableau wilt loslaten. De computer geeft echter steeds aan (helaas) welk element volgens het Simplex-algoritme de spil is.

Problemen heeft het programma met minimaliseren, met 'groter dan'-restricties (omdat het gebruikte algoritme niet controleert of alle variabelen in elk hoekpunt ≤ 0 zijn, leidt dit soms zelfs tot oplossingen die niet-toelaatbaar zijn) en met de al eerder gesignaleerde beperkingen 'door de oorsprong' (voor de kenners: een nul als bekende term wordt bij het zoeken naar een spil niet als een beperking gezien). Door de te maken wandeling evenwel zelf slim te beïnvloeden (spilkeuze) zijn deze problemen vaak toch oplosbaar⁷. Verstand van zaken is daarvoor echter onontbeerlijk.

Voor wat betreft het gebruik nog een paar detailopmerkingen: het instellen van de kolombreedte kan niet tijdens het invullen van het eerste simplextableau worden gewijzigd, wat tot onprettige verrassingen kan leiden met name wanneer de doelfunctie in de oorsprong al een bepaalde waarde heeft.

En ook het per ongeluk 'doorbladeren' naar de eerste beeldpagina, waarna je weer opnieuw kan beginnen, is akelig. Verder corrigeert het programma nauwelijks (maar wat valt er ook te corrigeren), wordt delen door nul in de quotiënten niet geaccepteerd (bravo) en is er een bijzonder plezierige 'breuken'-optie ingebouwd.

Dit alles leidt tot de slotsom dat het programma goed geschikt is voor het leren oplossen van LP-problemen met behulp van het Simplex-algoritme, en dus voor ons middelbaar onderwijs.

Het algoritme is goed te volgen en, indien gewenst, te sturen. Ondanks de matige toegankelijkheid, maar mede dankzij het behoorlijk overzichtelijke scherm, is het programma ook door leerlingen zelfstandig te gebruiken.

En tenslotte zijn de genoemde inconsistenties van het programma makkelijk te omzeilen (door de op te lossen problemen zorgvuldig te kiezen), ja zelfs te benutten bij een verder onderzoek naar het echte Simplex-algoritme.

Software II (Operations Research)

Het programma SIMOPT is een onderdeel van het pakket 'Educatieve Operations Research Software voor de PC'. SIMOPT is een SIMpel OPTimaliseringsprogramma, waarmee op eenvoudige wijze LP-problemen *doorgerekend* kunnen worden. Het is geschreven vanuit het idee dat '...voor onderwijsdoelen het de voorkeur verdient de nadruk te leggen op de toepassing van de Simplexmethode en niet op de werking ervan'⁸.

Het programma bevat een editor voor de invoer van de modelgegevens en verder staat een serie functietoetsen ter beschikking. Zo is er een hulptoets, die een help-venster doet verschijnen, en zijn er mogelijkheden bestanden te laden en weg te schrijven.

Een van de luxe-opties van dit pakket is die waarmee achteraf een gevoeligheidsanalyse uitgevoerd kan worden. Hoe verandert de optimale oplossing als er kleine veranderingen in het model plaatsvinden? Of hoe kunnen we de beperkingen 'oprekken' zonder de optimale oplossing geweld aan te doen? Een optie, lijkt me, waar we in het reguliere middelbare onderwijs (nog) niet veel aan hebben.

Het programma kan zowel minimaliseren als maximaliseren, hoewel bij 'groter dan' restricties de gevolgde procedure (per restrictie één nieuwe variabele en één pseudodoelfunctie) onnodig veel stappen vergt. Verder zijn de via een keuzeoptie zichtbaar te maken Simplex-tableaus, met de doelfunctie op de eerste (!) rij, niet makkelijk te lezen, bijvoorbeeld doordat nullen steeds als 0,00 gerepresenteerd worden, en maken ook de aanduidingen naast de rijen en boven de kolommen het geheel niet toegankelijk.

Een echt belangrijk didactisch nadeel is dat het programma, maar zo is het ook opgezet, ons niets *leert* en, ondanks prof. Tijms' positieve uitlatingen in die zin⁸, mijns inziens slecht aansluit bij het

●
wiskundeonderwijs in de hoogste klassen van het vwo. Het biedt daarvoor te weinig inzicht, of mogelijkheden inzicht te verwerven, in het Simplex-algoritme zelf.

Software III (OW&OC)

Het programma LINPROG, uitgegeven door het OW&OC, is als hulpmiddel bedoeld bij het *grafisch* oplossen van LP-problemen met drie variabelen. Het programma, dat slechts bestemd is voor enkele lessen, is in staat drie-dimensionale domeinen te tekenen, hoekpunten te berekenen en aan de hand van een ingevoerde doelfunctie de waarden daarvan in die hoekpunten. Daardoor is het mogelijk zonder Simplex-tableaus op te stellen toch een soort Simplex-wandeling over de rand van het domein te maken.

Eerst dienen daarvoor één voor één de niet-triviale restricties van het LP-probleem ingevoerd te worden⁹, waarbij na elke stap op het scherm het nieuwe toelaatbare gebied verschijnt.

Als alle restricties zijn ingevoerd, maar desgewenst ook eerder, kunnen met behulp van de L(ijst)-toets alle beperkingen (ook de triviale) én de coördinaten van de automatisch genummerde hoekpunten van het domein zichtbaar gemaakt worden. Vervolgens kan na het invoeren van de doelfunctie per hoekpunt de waarde van die doelfunctie worden opgevraagd.

Daarbij worden tevens de rangnummers van de aanliggende hoekpunten zichtbaar, zodat een Simplex-achtige wandeling daadwerkelijk uit te voeren is.

Om alvast een idee te krijgen waar het maximum zich ongeveer zal bevinden kan de opdracht gegeven worden tot het tekenen van enkele niveaувlakken. Jammer daarbij is dat deze vlakken weer verdwijnen zodra een andere optie uit het menu gekozen wordt. Jammer, maar begrijpelijk, want de tekening wordt er door die nieuwe vlakken niet duidelijker op. Het niveaувlak door het beste punt, waar het uiteindelijk om draait, is zelfs helemaal niet te zien. Verder is het een handicap dat de x -as

naar voren steekt, wat het gebruik van het programma bij twee-dimensionale problemen (wat op zich best mogelijk is) bemoeilijkt.

Dat het programma ook 'groter dan'-restricties aankan, met dien verstande dat je ze met 'kleiner dan'-tekens zult moeten opvoeren, en dat je, uiteraard, ook op zoek kan naar het minimum van een doelfunctie is prettig. Denk er overigens wel om het tekengebied ruimer te maken dan wat op grond van de zwaarste beperkingen nodig lijkt. Mijn ervaring was dat het programma anders rekentechnische problemen krijgt, maar dat hoort wellicht nog tot de kleine oneffenheden waar de auteurs me voor waarschuwden.

Over het geheel genomen is LINPROG een handig programma, waarvan de dynamiek – iedere invoer heeft onmiddellijk effect – grote didactische voordelen biedt.

Conclusie

Elk van de programma's heeft zijn waarde. Het programma van Wolters-Noordhoff lijkt goed geschikt om de *werking* van het simplexalgoritme toe te lichten en dus voor gebruik op de middelbare school. Het neemt weinig van de leerling over en kan de meeste simpele LP-problemen aan (maximaal tien vergelijkingen en tien variabelen). Wat het programma niet kan hoeven de leerlingen ook niet zo te kunnen. Eenvoudige minimaliseer-problemen met 'groter dan' restricties of problemen met restricties 'door de oorsprong' kunnen grafisch worden opgelost (en eventueel kan daarna gezamenlijk bekeken worden wat het programma ervan bakt).

Bij dat *grafisch* oplossen van LP-problemen kan het programma LINPROG een ondersteunende rol spelen. Hoewel ik nooit zo gecharmeerd raak van drie-dimensionale tekeningen op een beeldscherm is LINPROG voldoende duidelijk, makkelijk en snel hanteerbaar, zowel vóór de klas als in een practicumsetting, en geeft het een fraai idee van waar het bij Lineair Programmeren nu eigenlijk om draait. Daarbij kan het een mooie aanleiding bieden met de leerlingen op zoek te gaan naar een meer algoritmische aanpak.

Het OR-programma is een fraai *toepassings*-programma en hoort als zodanig in de bovenste la van de (middelbareschool-)docent thuis. Voor leerlingen is het te ondoorzichtig. En het voegt, op hun niveau tenminste, niets wezeleijks toe. Het lijkt meer geschikt voor HBO-opleidingen en universiteiten, maar ik zou zeggen dan voor *niet*-wiskunde-opleidingen. Op een wiskundeopleiding mag de charme van het (ontdekken van het) Simplex-algoritme per se niet ontbreken.

Noten

- 1 Met dank aan Cor Nagtegaal en Gerke de Boer voor hun kritische commentaar op eerdere versies van dit artikel.
- 2 Dit artikel is al in december 1988 voor publicatie in *Euclides* gereed gemaakt. Inmiddels zou een deel van het hierin beschreven commentaar op de software door update's achterhaald kunnen zijn.
- 3 Het programma Lineair Programmeren is een onderdeel van de C.O.O. – software van uitgeverij Wolters-Noordhoff. De auteur ervan is drs. G. N. Kalkman ('verbeterde' versie leverbaar, red.).
- 4 Het pakket 'Educatieve Operations Research Software voor de PC' is geschreven door Erwin Kalvelagen van het Instituut voor Erwin Kalvelagen van het Instituut voor Econometrie van de Vrije Universiteit van Amsterdam. Het is daar voor middelbare scholen tegen kostprijs en verzendkosten te bestellen: Boelelaan 1105, 1081 HV A'dam, 020-5 48 70 63.
- 5 Het programma LINPROG is op het OW&OC ontwikkeld door Kees Henzen en Helen Verhage. Het is schriftelijk te bestellen bij het OW&OC (t.a.v. J. van der Voort), Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, onder vermelding van bestelnummer 060389 (3,5 inch) of 070389 (5,25 inch.) De prijs bedraagt ongeveer 30 gulden excl. porto en verzendkosten.
- 6 Ik heb de programma's die elk gewoon op één schijfje (5, 25 inch) passen, bekeken op een MS-DOS gestuurde XT-machine. Het programma van Wolters-Noordhoff bestaat ook op bandje (voor de Philips 2000). Voor het programma LINPROG is een CGA-kaart nodig.
- 7 Zo bestaat bijv. veelal de mogelijkheid de doelfunctie eerst te maximaliseren tot je in het domein bent aangeland (alle variabelen zijn dan positief) en dan pas te minimaliseren.
- 8 Tijms, prof. dr. H. C., *Educatieve Operations Research Software: wis en waarachtig*. In: *Euclides*, 62e jrg. nr. 8 (1986/87), blz. 227-236.
- 9 Het is zaak hierbij goed op te letten, daar eenmaal ingevoerde restricties (helaas) niet meer kunnen worden gewijzigd.

Over de auteur:

Simon Gribling (1954) studeerde in Utrecht wiskunde aan de Universiteit en later drama aan de Hogeschool der Kunsten.

Vanaf 1980 is hij werkzaam in het onderwijs. Aanvankelijk bij het schooladviescentrum te Utrecht als co-auteur van de basisschoolmethode Rekenwerk, later onder andere op de Pabo in Nijmegen, en tegenwoordig (sinds 1984) op de lerarenopleiding van de Algemene Hogeschool Amsterdam (D'Witte Leli).

Hij schreef mee aan het tweedeklas deel van Exact-wiskunde.



Boekbespreking

D. A. Smith, G. J. Porter, L. C. Leinbach, R. H. Wenger (editors): *Computers and Mathematics – the use of computers in undergraduate instruction*; The Mathematical Association of America, MAA Notes Number 9, 1988, 147 pp., £ 7,65, ISBN 0-88385-059-1.

Dit boek bevat 18 artikelen op het terrein van computergebruik bij de wiskundestudie op undergraduate niveau. De bundel is het resultaat van drie jaar denkwerk en ervaringen opgedaan door het Committee on Computers in Mathematics Education van de Mathematical Association of America. De meeste artikelen behandelen het gebruik van de computer als gereedschap bij een bepaald onderwerp uit de wiskunde. Onderwerpen die aandacht krijgen zijn: analyse, lineaire algebra, differentie en differentiaal vergelijkingen, discrete wiskunde, getaltheorie, statistiek en waarschijnlijkheidsrekening, meetkunde. Vaak wordt software genoemd of besproken, maar die is niet altijd van even recente datum (dat kan ook niet, gezien de produktietijd van een boek). Ook computeralgebra en graphic calculator blijven niet onbesproken.

Verder zijn er enkele artikelen die meer beschouwend of algemeen van aard zijn, namelijk over recente ontwikkelingen van en toekomstvisie op computergebruik in (tertiair) wiskunde-onderwijs, evaluatie van software, probleem oplossen met logo, remediërende cursussen.

De bundel geeft een aardig overzicht van de stand van zaken op dit moment, zij het dat het boek erg gericht is op de Amerikaanse situatie. Dat neemt niet weg dat docenten wiskunde aan universiteit of hogeschool er wellicht enkele ideeën voor hun onderwijs uit kunnen halen.

H. B. Verhage

'De zakrekenmachine'

► Exact

Beschouwing naar aanleiding van een artikel van Frans Bouman

Piet van Wingerden

Er is een tijd geweest, dat men onze leerlingen bezig hield met problemen, waarvan het belang en de schoonheid vrijwel alleen door de leraren werden ervaren.

Ik denk bijvoorbeeld aan de stelling van Stewart in een driehoek, waaruit de formules voor de lengte van de zwaartelijn en van de bissectrice konden worden afgeleid, de s -formules, waarin s de halve omtrek van de driehoek was en waarbij de oppervlakte van de driehoek werd uitgedrukt in de formule $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Dat leidde vaak tot een niet gewenst formalisme. Men probeerde dat tegen te gaan door de leerlingen langdurig te confronteren met de afleiding van de formules. Maar ook zo iets kan half begrepen (wat dat ook zijn moge) worden ingeoeft.

Uiteindelijk is de hele troep geschrapt. Maar het exact-gevoelige bloed van de wiskundeleraar kruipert waar het niet gaan kan.

In Moderne Wiskunde vwo 6B zie ik in hoofdstuk A4 een fraaie aanpak van de functie

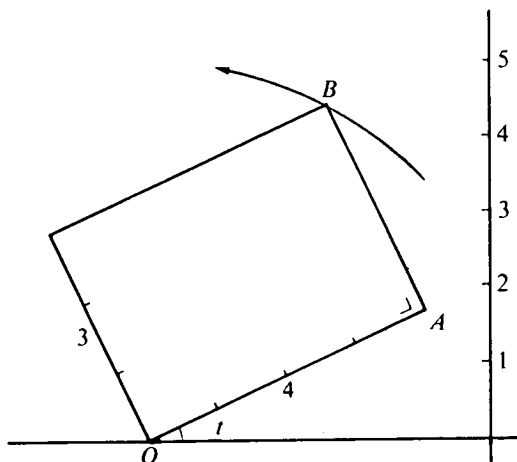
$a \sin t + b \cos t$, ingeleid via

$h(t) = 4 \sin t + 3 \cos t$

met een doeltreffende tekening en een stapsgewijze vraagstelling (figuur 1).

14 $h(t) = 4 \sin t + 3 \cos t$

- De tekening is een momentopname van een draaiende rechthoek. Laat zien hoe, op de lijn l , een functiewaarde van h uit de tekening kan worden afgelezen.
- Bepaal, met behulp van andere standen van de draaiende rechthoek, het maximum en het minimum van de functie h .
- Laat zien dat $h(t) = 5 \sin(t + \arctan \frac{3}{4})$ een passend functievoorschrift is voor de functie h .



Figuur 1

Maar dan verschijnt in een gekleurd kader de formule

$$a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + \arctan \frac{b}{a})$$

Mooi zie ik onze leerlingen met deze toestand omgaan als destijds de hbs-ers met de s -formule. Om verlegen bij te worden.

Moeten we dan didactisch moeilijk toegankelijke gebieden bij het wiskunde-onderwijs maar niet (meer) betreden?

Het lijkt er soms op, dat het gebruik van de rekenmachine ons daarbij een duwtje geeft weg van die moeilijkere – exactere – gebieden.

De kennis van de verhoudingen van de 'halve' gelijkzijdige driehoek bijvoorbeeld is niet meer nodig om tot een antwoord te komen. Het is best te

begrijpen, dat veel leraren zich niet happy voelen als ze merken, dat hun leerlingen naar de rekenmachine grijpen bij $\tan 45^\circ$, $\sin 30^\circ$ en $\cos 90^\circ$.

Er zijn veel van dergelijke voorbeelden aan te wijzen.

Maar er is meer, zoals uit het volgende moge blijken.

Michiel uit de zesde zit met plezier te werken aan de ongelijkheidsopgave:

$$\frac{\ln x}{2 - \ln x} \geq 0$$

Ik kijk met belangstelling toe hoe intensief de rekenmachine wordt gebruikt:

Het domein moet eerst worden vastgesteld. Hij toetst in: $(-1, \ln x)$. Op het display verschijnt E. Daarna wordt genomen: $(0, \ln x)$. Opnieuw is het signaal E zichtbaar. Michiel weet nu wat het domein is.

Hij tekent een getallenrechte, bakent daarop netjes dat domein af.

Dan schrijft hij op: $\ln x = 0$
 $x = \dots$

Opnieuw hanteert hij de rekenmachine:

$(0, \text{inv}(\ln x))$. Ha, dat is mooi: $x = 1$.

Het is voorspelbaar wat er zal volgen: $(2, \text{inv}(\ln x))$ en dat geeft blijkbaar $x = 7,39$. Nu wordt een aantal tussenpunten met de rekenmachine ingetoetst voor het tekenschema. Michiel voltooit zijn werkstuk door de oplossingsverzameling te noteren: $[1; 7,39]$

Het lijkt wel of hij geïnspireerd is door de titel van een artikel van Harrie Broekman: "Onderzoekend bezig zijn met de zakrekenmachine". Voldaan kijkt Michiel mij aan.

Hij mag niet merken hoe machteloos ik me nu voel. Hoe moet ik hem duidelijk maken, dat we met het wiskundeonderwijs ook nog iets anders op het oog hebben? Ik vraag of hij er zeker van is, dat het getal 7,3894 echt wel bij die oplossingsverzameling behoort. Als hij dat op zijn apparaat narekent blijkt het meer dan 40 000 onder nul op te leveren, in plaats van een getal groter dan nul. Deze keer is Michiel overtuigd, dat de rekenmachine beperkingen heeft die hij zelf met zijn verstand zou kunnen

overstijgen. Maar het nog eens uitgelegd krijgen van het verband tussen $\ln t = 2$ en $t = e^2$ maakte Michiel heel moe.

Moeten we om deze didactische obstakels te vermijden de rekenmachine ongebruikt laten?

Zeker niet!

Zo'n goede bondgenoot laat je niet achteloos onbenut.

Maar er is veel voor te zeggen om ons bij wiskunde A te beperken tot rationale getallen. Het is zeer optimistisch om ons te verbeelden, dat het begrip 'reële getallen' al helder zou zijn, als onze leerlingen zonder rekenmachine kunnen manipuleren met bijvoorbeeld $\sqrt{12} + \sqrt{27}$.

Samenvattend:

– Er zijn onderwerpen in de wiskunde, waarbij we moeten constateren, dat een groot aantal leerlingen moeilijk verder komt dan nazeggen van wat niet goed begrepen is.

Het is een voortdurende uitdaging voor de leraar om naar didactische mogelijkheden op dit terrein te blijven zoeken.

– Er zijn problemen, waarbij een exact antwoord noodzakelijk is. Daar willen en kunnen we niet omheen. Bij wiskunde A zal het in de regel niet exact hoeven.

Ik zou nu mooi aan een artikel kunnen beginnen over de zakrekenmachine als bondgenoot in het wiskundeonderwijs.

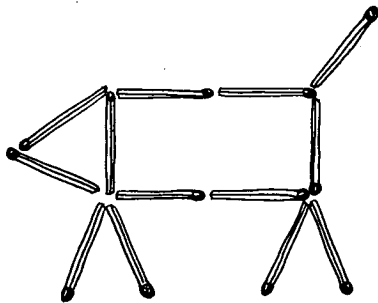
Maar dat heeft Frans Bouman al gedaan.

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

► Opgave 617

Luciferpuzzels hebben in de loop der eeuwen een grote aantrekkingskracht gehad. Logisch, want vroeger hadden de meeste mensen een doosje lucifers op zak. In de moderne tijd werd dat wat minder met de opkomst van de gasaansteker. Hoewel ze in bijna elk puzzelboek voorkomen, worden luciferpuzzels nogal eens 'flauw' gevonden. Dat is toch lang niet altijd terecht. De oplossingen komen vaak uit een hoek, die we niet verwachten. Zowel jong als oud kan er daardoor plezier aan beleven. Geeft u de volgende twee problemen eens op aan uw leerlingen.

'Bello was een hondje dat parmantig naar het westen wandelde. Vrolijk als altijd, met z'n staart in de lucht:



Op een gegeven ogenblik hoorde hij geblaf. Hij keek naar het oosten en zag de grote bulldog van de buren.

Probleem: *Verplaats slechts twee lucifers zodat Bello hem ziet.* Bello schrok en zette het op een lopen richting het westen. Helaas haalde de vervaarlijke bulldog hem in. Na een grote vechtpartij spitte Bello Delft onder, pardon... dolf Bello het onderspit. Bello was dood... snik".

Probleem: *Verplaats vanuit de beginstand slechts twee lucifers.*

Graag ontvang ik deze maal veel oplossingen van leerlingen! Wie beide oplossingen vindt, loot mee naar de boekenbon van f25,-. Inzenden binnen 1 maand na verschijning.

► Oplossing 614

De drie broers van de overleden sjeik moesten voor de $n=41$ vrouwen zorgen. De verdeling was $1/a$, $1/b$, en $1/c$ waarbij $a=2$, $b=3$ en $c=7$. Gelukkig zorgde oom Omar ervoor dat de verdeling zonder bloedvergieten uitgevoerd kon worden. Met zijn eigen vrouw erbij kon men de $p=42$ vrouwen verdelen zodat hij weer met zijn vrouw naar huis kon. ('Zijn eigen vrouw?', vraagt *Lourens van den Brom* zich af).

Het algemene probleem lost *H. Udo* uit Amstelveen als volgt op (kort samengevat):

Het aantal vrouwen n moet oneven zijn.

De grenzen voor a zijn: $2 \leq a \leq 4$.

Daarna de grenzen voor b : $3 \leq b \leq 8$.

En tenslotte voor c : $4 \leq c \leq 24$.

D.m.v. een kort computerprogrammaatje en de uitdrukking $n = (bc + ac + ab)/(abc - (bc + ac + ab))$ vinden we de volgende 12 oplossingen in de volgorde $a-b-c-n$:

2-3-7-41, 2-3-8-23, 2-3-9-17, 2-3-12-11,
2-4-5-19, 2-4-6-11, 2-4-8-7, 2-5-5-9,
2-6-6-5, 3-3-4-11, 3-3-6-5, 4-4-4-3.

Het meest bekend is de oplossing 2-3-9-17 geworden. In ontzettend veel puzzelboeken staat deze vermeld als het 17 kamelen probleem.

Blijkens uw reacties wordt dit probleem ook vrij vaak in de klas verteld, zoals onder andere *Lokko Rang* uit Driebergen mij schreef.

Ook in gewone leesboeken wordt dit probleem gesignaleerd. Het verhaal 'De wijze rechter' in 'Oome Keesje vertelt' door Willem van Cappelen behandelt dit vraagstuk met koeien. (Met dank aan *Lourens van den Brom* uit Krommenie voor deze informatie.)

Volgens de puzzelgeschiedenis was de Italiaan *Nicolo Tartaglia* in 1556 de eerste die het voorstel van de achttiende kameel deed.

Een andere oorsprong zou Egypte kunnen zijn, omdat we de opgave kunnen schrijven als een som van STAMBREUKEN:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{p} = 1$$

Joseph Leeming maakt het in zijn puzzelboek 'Fun with puzzles' (1946) wel erg bont als hij verhaalt van een kudde koeien die verdeeld moet worden in de stambreuk $1/3$, $1/4$, $1/6$, $1/8$ en $1/9$. Gelukkig helpt de buurman, die hem 2 koeien leent. Alles wordt keurig verdeeld en de buurman gaat weer met zijn twee koeien huiswaarts. Hoe groot is de kudde?

Uit de grote stapel goede inzendingen trok mijn zoontje de brief van *W. M. Banis*, Engweg 9A, 1251 LK Laren NH. Van harte gefeliciteerd met de boekenbon van vijftig gulden!

Alle andere inzenders niet getreurd, blijf inzenden, misschien bent u de volgende keer aan de beurt!

► Havo-examenprogramma's

Op 24 januari zond het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren onderstaande brief aan de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen.

Excellentie,

In Uw brief, kenmerk VO/AVV/VO.II-901.339, van 16 november 1989 bood U de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren de mogelijkheid te reageren op de voorstellen eindexamen havo wiskunde A en B.

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is bijzonder verheugd over de voorstel-examenprogramma's, vooral omdat blijkt dat de vervolgopleidingen positief op de voorstellen hebben gereageerd.

Bij de opstelling van de examenprogramma's heeft de Hawex-commissie zich laten leiden door het belang van deze programma's voor leerlingen die na het havo een tertiaire opleiding gaan volgen. Hoewel door een grotere explicitering de omvang van de examenstof beter omschreven is dan tot nu toe het geval was, geeft een examenprogramma slechts informatie over de inhoud van de programma's en niet over de beoogde diepgang.

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is van mening dat in het pro-

gramma wiskunde B iets te nadrukkelijk eisen van het technisch tertiair onderwijs aan de orde komen. Er zal iets meer rekening gehouden moeten worden met het feit dat ook andere opleidingen kennis, die opgedaan is bij wiskunde B, willen gebruiken. Het onderdeel ruimtemeetkunde lijkt ons te zwaar. Voor veel opleidingen zal een minder diepgaande kennis van de ruimtemeetkunde voldoende zijn. Indien een aantal onderdelen van de ruimtemeetkunde geschrapt worden, zullen meer leerlingen het vak in hun keuzepakket kunnen opnemen.

In het geval van doorstroming van havo naar vwo zullen er problemen ontstaan bij leerlingen die wiskunde A in hun havo-pakket hebben en ook in het vwo wiskunde A willen volgen. Enkele onderwerpen die in de vierde klas van het vwo moeten worden behandeld, komen te weinig of niet voor in het programma wiskunde A van het havo. Een kleine verzwaring van het wiskunde A programma zou hier uitkomst kunnen bieden.

Ook is er, doordat de programma's voor mavo en onderbouw van vwo en havo nog niet zijn vernieuwd, een slechte aansluiting van mavo en onderbouw naar het vierde leerjaar van havo. Door deze slechte aansluiting en doordat de docenten nog ervaring met het programma moeten opdoen zal de eerstkomende jaren nog niet optimaal met de nieuwe programma's kunnen worden gewerkt.

Hoewel eindexamens niet goed aan kunnen geven wat de totaal opgedane kennis en vaardigheid is, geven zij wel richting aan het onderwijs.

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is van mening dat alles in het werk gesteld moet worden om er voor te zorgen dat:

- 1 de examens wel zo zwaar zijn dat het onderwijs op een niveau blijft dat voor de vervolgopleidingen voldoende waardevol is,

- 2 de eindexamens echter niet zo zwaar zullen zijn dat teveel leerlingen in het havo een onvoldoende gaan scoren.

Een definitief oordeel over de voorgestelde programma's kan slechts na lange termijn gegeven worden als meer ervaring met deze programma's is opgedaan.

Hierbij zal onder andere een rol spelen:

- welke leerlingen kiezen wiskunde A en welke wiskunde B?
- hoe wordt in de onderbouw ingespeeld op de vernieuwingen in de bovenbouw?
- hoeveel wekelijkse lesuren zijn in de onderbouw beschikbaar?

Pas in 1987 is op drie scholen een experiment met het nieuwe programma opgezet. Deze scholen zijn begonnen met 5 wekelijkse lessen voor wiskunde A én voor wiskunde B in de klassen 4 en 5.

In 1989 is het experiment uitgebreid met 26 volgscholen. Deze scholen hebben van het Hawex-ontwikkelteam het advies gekregen om het experiment te starten met 5 wekelijkse lesuren voor wiskunde A én voor wiskunde B in de klassen 4 en 5.

Gezien de slechts zeer korte ervaringen met het nieuwe programma acht het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren het wenselijk dat alle scholen de invoering van wiskunde A en zeker wiskunde B beginnen met vijf wekelijkse lesuren zowel voor het vierde als voor het vijfde leerjaar. Het bestuur vreest echter dat door de vele bezuinigingen die de laatste jaren op de leraarlessen zijn toegepast slechts weinig schoolbesturen in staat en bereid zijn de invoering van de nieuwe programma's een optimale kans te geven.

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is van mening dat het welslagen van de nieuwe programma's slechts mogelijk is indien het ministerie het de scholen mogelijk maakt gedurende de eerste jaren voldoende extra uren uit te trekken voor wiskunde B en wiskunde A.

Samenvattend is het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundelaren van mening dat de voorgestelde programma's kunnen worden aangenomen als aan de volgende voorwaarden voldaan wordt:

- 1 Bij wiskunde B moet een aantal onderdelen geschrapt worden uit het programma voor de ruimtemeetkunde.
- 2 Bij wiskunde B moet gezorgd worden voor een invulling die voor meer dan alleen technische ver-

volgopleidingen bruikbaar is.

3 Bij wiskunde A moet de aansluiting met wiskunde A op het vwo verbeterd worden.

4 De scholen zullen enige extra faciliteiten moeten krijgen gedurende de eerste jaren na de landelijke invoering van de nieuwe programma's.

5 Het Hawex-ontwikkelteam moet nog enige extra tijd krijgen om het experiment goed te evalueren en om ondersteuning te geven bij de landelijke invoering, waarbij gebruik gemaakt moet worden van de in het experiment opgedane ervaringen.

6 De CEVO zal bij het vervaardigen van examens gedurende de eerste jaren moeten zorgen voor een niveau dat niet te laag én niet te hoog is.

Namens het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren,

(dr. J. van Lint)
voorzitter

► Examenbesprekingen

Examenbesprekingen wiskunde lbo/mavo C en D op vrijdag 18 mei 1990 van 15.00 h – 18.00 h te:

Plaats	Gespreksleiders: (1: C-examen, 2: D-examen)
ALKMAAR Bram Daaldermavo Rubenslaan 14 072-11 34 38	1 T. Dunselman 075-28 40 42 2 Mw. C. Gaykema 020-12 91 85
'S-GRAVENHAGE Gr. v. Prinsterercollege Albardastraat 25 070-39 71 54 1	1 C. M. de Hoog 01749-4 84 83 2 B. van Klaarbergen 070-45 93 03
GRONINGEN Zernike College Parkweg 128 050-26 03 45	1 S. Kooiman 050-25 12 89 2 J. C. Borst 05960-2 54 64
LEEWARDEN Mavo Nylan Prinsessenweg 4 058-88 42 02	1 F. de Boer 05170-36 10 2 J. Bijlsma 05124-14 27

ROTTERDAM
Mavo Het Lage Land
Kromhoutstraat 1-7
010-4 20 53 93

1 A. B. T. Hazenberg
01727-1 37 74
2 L. Bozuwa
078-14 55 22

GRONINGEN
Rölingcollege
Melisseweg 2
050-42 10 00

H. H. C. Pentinga
05909-15 28

TILBURG
HS Kath. Leergangen
Pyreneeënweg 3
013-39 46 70

1 en 2 F. J. Mahieu
04116-7 34 68

HENGEL
Twickelcollege
Woolderesweg 130
074-42 44 25

J. C. A. Epping
05452-2 72

UTRECHT
K.S.G. Lunetten
Kampereiland 6
030-88 35 51

1 en 2 R. J. Roukema
03465-6 04 29

ROTTERDAM
Citycollege E.F.
Beukelsdijk 91
010-4 77 00 33

E. J. van Dongen
010-4 67 21 30

ZWOLLE
Thorbecke S.G.
Dr. v. Heesweg 1
038-54 66 77

1 G. Hoogendoorn
038-53 82 62
2 S. R. Zwaan
038-65 25 30

TILBURG
HS KL Ac. Lich. Opv.
Goirleseweg 46
013-39 46 70

A. L. P. van Merode
01623-1 37 46

Examenbesprekingen wiskunde voor havo op vrijdag 18 mei 1990 van 16.00 h – 18.00 h te:

Plaats	Gespreksleiders:
AMSTERDAM Calandlyceum Hoekenes 61 020-19 83 99	Mw. drs. G. W. Fokkens 020-43 84 47
GRONINGEN Rölingcollege Melisseweg 2 050-42 10 00	Drs. M. van Steenis 05908-1 81 21
HENGEL Twickelcollege Woolderesweg 130 074-42 44 25	J. P. Scholten 053-76 87 91
ROTTERDAM Citycollege E.F. Beukelsdijk 91 010-4 77 00 33	B. L. G. P. Hillebrand 01807-1 52 10

Examenbesprekingen wiskunde voor vwo B op vrijdag 18 mei 1990 van 18.30 h – 20.30 h te:

Plaats	Gespreksleiders:
AMSTERDAM Calandlyceum Hoekenes 61 020-19 83 99	Mw. drs. G. W. Fokkens 020-43 84 47

Examenbesprekingen wiskunde voor vwo A op vrijdag 28 mei 1990 van 16.00 h – 18.00 h te:

Plaats	Gespreksleiders:
AMSTERDAM Calandlyceum Hoekenes 61 020-19 83 99	S. Th. Min 02290-3 77 56
ARNHEM Thorbecke S.G. Thorbeckestraat 17 085-42 30 28	Ir. W. J. M. Laaper 040-12 33 54
BUSSUM Goois Lyceum Vossiuslaan 2A 02159-3 32 94	Drs. G. V. J. Stroomer 08365-4 19 95
GOES Buys Ballotcollege Bergweg 4 01100-1 30 10	Drs. S. H. P. Garst 01874-21 77
's-GRAVENHAGE St-Janscollege Colijnplein 9 070-368 76 70	J. P. C. van der Meer

GRONINGEN Rölingcollege Melisseweg 2 050-42 10 00	C. H. G. Hegeman 050-77 54 90
--	----------------------------------

Zie voor vervolg de volgende bladzijde.

Postzegels

ROTTERDAM
Citycollege E.F.
Beukelsdijk 91
010-4 77 00 33

C. Rijke
01807-2 17 40

TILBURG
HS Kath. Leergangen
Pyreneënweg 3
013-39 46 70

Drs. J.J. Verboom

ZWOLLE
Chr. HS Windesheim
Campus 2-6
038-69 92 50

Mw. drs. A. Breeman
038-53 99 85

Landmeetkunde

Voor topografische kaarten is een nauwkeurige registratie van de details van het aardoppervlak nodig. De kromming van het aardoppervlak veroorzaakt dat een waterpas op de ene plek een verschillende positie heeft ten opzichte van een waterpas op een andere plek.



Het werken met waterpas en theodoliet is heel lang de basis van het landmeetwerk gebleven. Tegenwoordig is luchtkartering steeds belangrijker aan het worden.



Om de positie van alle punten op het aardoppervlak vast te leggen, wordt de aarde 'belegd' met vaste driehoeken; dit heet triangulatie. Het veld- en luchtwerk, en de trigonometrie vormen de fundering van de landmeetkunde.

Mededeling

Rectificatie

Op blz. 181 van Euclides 65,6 is als prijs van het boekje "Nanda, lerares Wiskunde" abusievelijk vermeld: f25,-. De juiste prijs is echter f17,50 (inclusief verzendkosten).

Kalender

7 april 1990: Zestiende landelijke dag Vrouwen en Wiskunde.
Zie Euclides 65,6 blz. 184.
11 april 1990: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
25 april 1990: Conferenties LPC-project Vakwerk Wiskunde.
Zie Euclides 65,6 blz. 184.
9 mei 1990: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
18 mei 1990: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen wiskunde voor lbo/mavo, havo en vwo B. Zie blz. 214 en 215 van dit nummer.
28 mei 1990: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen wiskunde A voor vwo. Zie blz. 215 en 216 van dit nummer.
13 juni 1990: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW, met de inspecteurs voortgezet onderwijs.
23 t/m 30 juli 1990: Bielsko Biala, Polen, CIEAM-conferentie.
Zie Euclides 65,5 blz. 160.

M
MEULENHOF
EDUCATIEF



Postbus 100
 1000 AC Amsterdam
 Telefoon 020 26 26 90

EXACT WISKUNDE

mavo
 havo
 vwo



Meulenhoff Educatief

1 mavo
 havo
 vwo

EXACT WISKUNDE heeft een uniek concept. De thema's gaan uit van de leefomgeving van de leerlingen. Er wordt dus gewerkt van concreet naar abstract, waardoor de stof voor praktisch iedereen te volgen is.

En: bij EXACT WISKUNDE moeten de leerlingen wiskundige problemen binnen een context isoleren. Daardoor ontwikkelen ze wiskundige capaciteiten, ook als ze van huis uit minder aanleg hebben.

EXACT WISKUNDE, dat is wiskunde op niveau.

NU GEREED VOOR DE ONDERBOUW

MEULENHOF
 IN ELKE SCHOOL



Inhoud

Inhoud 185

Anne van Streun: Wishful thinking en
nieuwe leerplannen 186

Verschenen 189

George Schoemaker: Kolom 16
W12/16 189

Drs. G. Bakker, Dr. J. G. Nijenhuis: De
wiskunde-examens lbo/mavo van
1989 I 190

Boekbespreking 195

K. A. Post: De stelling van Moess-
ner 196

Werkbladen 200

Adolf Klaming: Bierviltjes als cirkels 202

Simon T. M. Gribling: Lineair programme-
ren met de computer 204

Boekbespreking 209

Piet van Wingerden: Exact 210

Recreatie 212

Havo-examenprogramma's 213

Examenbesprekingen 214

Mededeling 216

Kalender 216

Postzegels 216