

Wolters-Noordhoff

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars

Vakblad voor de wiskundeleraar

Euclides

816
357
492

jaargang 65 1989 | 1990 oktober

Redactie

Drs H. Bakker
Drs R. Bosch
G. Bulthuis
Drs J. H. de Geus
Drs M. C. van Hoorn (hoofredacteur)
N. T. Lakeman (beeldredacteur)
Drs A. B. Oosten (voorzitter)
P. E. de Roest (secretaris)
Ir. V. Schmidt (penningmeester)
Mw. Drs A. Verweij (eindredacteur)
A. van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f55,- per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f37,50; contributie zonder Euclides f30,-. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Sloep 102, 9732 CE Groningen. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f55,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f35,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers f9,- (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 63 79. Telefaxnr. 01720-9 32 70.

● Inhoud ● ● ● ● ●

Actualiteit 34

P. E. de Roest *Rapport in Uitleg, uitleg in rapport* 34

Rapport van de Werkgroep Differentiaalvergelijkingen 35

Het onderwerp differentiaalvergelijkingen is terug in het eindexamenprogramma vwo. Maar de inhoud wordt vernieuwd: met toepassingen, inclusief het zelf opstellen van een differentiaalvergelijking. George Schoemaker *Kolom 11 W12/16* 39

Bijdrage 40

J. G. M. Donkers *De XXIXe Internationale Wiskunde Olympiade 1988*

Een verslag met speciale aandacht voor de verrichtingen van de Nederlandse deelnemers in Australië. Ook hun reisimpressies komen aan bod en natuurlijk de opgaven.

Boekbespreking 42

Bijdrage 43

Heleen B. Verhage *Mediageniek wiskundeonderwijs*

Alle mogelijke hulpmiddelen, te gebruiken in het wiskundewerklokaal, passeren de revue. Tenslotte een futuristische beeldplaatfantasie in vier thema's, vertolkt door een serie dia's.

Werkbladen 48

Patronen in vierkanten en Patronen in cirkels

Verschenen 54

Serie 'Wiskundeonderwijs aan ...' 55

A. Algra *Ideaal*

Een brede scholengemeenschap in Almere werd opgebouwd door polderpioniers met levensbeschouwelijke en onderwijskundige idealen. Zes jaar na de start wordt beschreven hoe deze idealen in het wiskundeonderwijs gestalte kregen.

Mededeling 59

Serie 'De zakrekenmachine' 60

Frans Bouman *Zakrekenmachine: wiskunde anders?*

Waarin voorgesteld wordt het manipuleren met wortels uit de onderbouw te weren. Een pleidooi voor decimale benaderingen, aandacht voor nauwkeurigheid en iteratieve methoden.

Recreatie 62

Postzegels 63

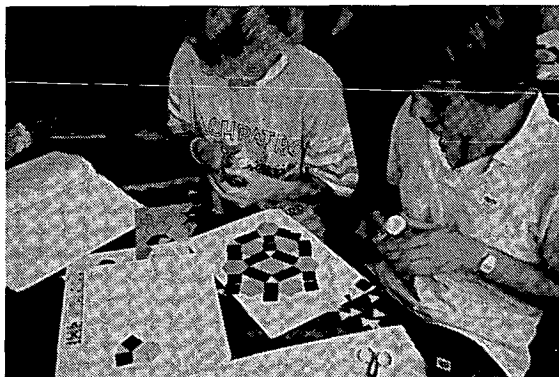
Leonardo da Vinci

Verenigingsnieuws 63

Voorlichtingsbijeenkomsten Hawex voor wiskundeleraren lbo/mavo 63

Jaarvergadering/Studiedag 64

Kalender 64



... leerlingen, die zijn bij voorkeur bezig.

► **Rapport in Uitleg, uitleg in rapport**

P. E. de Roest

In dit nummer staat het rapport van een werkgroep ingesteld door de NVvW op verzoek van de Hewetbegeleidingscommissie. De werkgroep heeft zich gebogen over het onderwerp differentiaalvergelijkingen. Het rapport heeft een tijd in de la van een bureau op het ministerie gelegen, maar is nu bij de Cevo aangeland. Die zal te zijner tijd conform dit rapport examenopgaven maken. Dat hebt u kunnen lezen in Uitleg nr. 13, 24 mei 1989.

Ik vind het vreemd dat de Hewetbegeleidingscommissie de vereniging vraagt een werkgroep te vormen. Een werkgroep die dan direct een definitief rapport produceert en de verspreiding daarvan ook nog eens op kosten van de vereniging laat geschieden.

Een normale gang van zaken is toch:

- de Hewetcommissie stelt een werkgroep in, met daarin o.a. leden op voordracht van de vereniging,
- de werkgroep stelt een voorlopig rapport op, dat door de Hewetcommissie wordt verspreid,
- na verwerking van de reacties wordt een definitief rapport door de commissie naar de scholen gestuurd. Of in Uitleg gepubliceerd.

De secretaris van de vereniging heeft het druk genoeg en in Euclides zou een kort berichtje kunnen verwijzen naar Uitleg.

In het examenprogramma wiskunde B staat heel summier iets over differentiaalvergelijkingen. Dat is vijftien jaar onderwerp van kritiek geweest, zie het rapport en Euclides (vooral jrg. 57, '81/'82).

Er staat: differentiaalvergelijkingen, lijnelementenveld, oplossen van eenvoudige differentiaalvergelijkingen.

Gelukkig heeft niemand het eerste woord zo uitgelegd, dat vwo-leerlingen alles over differentiaalvergelijkingen zouden moeten weten. De werkgroep adviseert om de eenvoudige differentiaalvergelijkingen op te vatten als zijnde één van de eerste orde en daar heb ik ook geen bezwaar tegen, maar...

Maar de werkgroep stelt verder voor dat de leerling ook uit een eenvoudige probleemsituatie een differentiaalvergelijking moet kunnen opstellen en dat lees ik nergens in het examenprogramma, dat lijkt mij onjuist. Dan zou dat met zoveel woorden aan het examenprogramma moeten worden toegevoegd. Dit is een uitbreiding van het toch al overladen examenprogramma, zelfs de Cevo bereiken daarover signalen.

Nu hoeft men mij niet te overtuigen van het belang van het kunnen opstellen van differentiaalvergelijkingen, maar er zal moeten worden gekozen. Het liefst in overleg met wiskundeleraren, voorzover die nog bereid zijn dat in hun vrije tijd te doen.

Maar er zal moeten worden gekozen, of het opstellen van differentiaalvergelijkingen of een ander ongetwijfeld belangrijk onderwerp.

Het programma is al zwaar overladen!

► Rapport van de Werkgroep Differentiaalvergelijkingen

Differential equations – the heart of analysis
(Morris Kline in Mathematics and the Physical World)

1 Inleiding

Onderwerpen uit de wiskunde, eens voorbehouden aan de universiteit, sijpelen na verloop van tijd door naar omlaag. Nadat zo'n drie en halve eeuw differentiaal- en integraalrekening tot de hogere wiskunde werd gerekend, deed het vak analyse zijn intrede in de school. Aanvankelijk schoorvoetend in het gymnasium, later wat brutaler in de hbs, en sinds 1968 in het vwo in een zodanige omvang dat het ogenschijnlijk kan wedijveren met propaedeutische programma's in het hoger onderwijs van nog niet zo lang geleden. Daarbij werd het nuttig geoordeeld om de vwo-leerling, als afsluiting van het analyse-curriculum, kennis te laten maken met differentiaalvergelijkingen. Argumenten om dit als moeilijk erkende onderwerp op school in te voeren werden ontleend aan het belang van differentiaalvergelijkingen voor vakken als natuur- en scheikunde.

De omschrijving van het onderwerp in de examenprogramma's wiskunde I en B is wel zeer globaal:

differentiaalvergelijkingen, lijnelementenveld, oplossen van eenvoudige differentiaalvergelijkingen, en zegt hoegenaamd niets over de interpretatie van dit onderwerp.

Die interpretatie is de afgelopen vijftien jaar onderwerp van kritiek geweest in de vakpers voor de wiskundeleraar. Niet zelden werden stijl en inhoud van examenopgaven, alsmede de wijze van behandeling van differentiaalvergelijkingen in de diverse schoolboeken, aan de kaak gesteld. Het scherpst sprak Nienhuys (Euclides jrg. '81/82) zich uit:

(...)Tenslotte, het vak heeft – zoals nu gegeven – geen intellectuele bekoring. Hoe kan van zo'n samenraapsel van halfverteerde differentiaalmeetkunde en negentiende eeuwse differentiaalvergelijkingen, afgekookt en naverteld voor de jeugd, nu enige inspiratie uitgaan?

F. D. Veldkamp, voorzitter van de toenmalige Sectie Wiskunde van de Academische Raad, sprak in een brief aan de Hewetbegeleidingscommissie (december '83) de bezorgdheid van de sectie uit over de schoolpraktijk van het onderwerp differentiaalvergelijkingen. In de brief worden twee punten van zorg genoemd:

- a. De wijze waarop met differentiëren wordt omgesprongen;
- b. Het ontbreken van toepassingen in de behandeling van het onderwerp.

Veldkamp vroeg de Hewetbegeleidingscommissie om bezinning op de inhoud en om onderzoek naar een vernieuwde invulling.

Hoewel de Hewetbegeleidingscommissie de door Veldkamp vertolkte zorg deelde, was zij niet bij machte directe actie op dit punt te ondernemen. Wel verzocht zij de inspectie bij de invoering van wiskunde A en B het onderwerp differentiaalvergelijkingen enige jaren te bevriezen, hetgeen geschiedde. De ontthooing zou naar de visie van de begeleidingscommissie gepaard moeten gaan met een verandering van zienswijze en zij verzocht in 1986 de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars een Werkgroep te vormen die zich over de problematiek zou buigen.

Die Werkgroep kwam er begin 1987 en stond onder voorzitterschap van Martin Kindt (medewerker vakgroep OW & OC en bestuurslid NVvW). De

andere leden van de Werkgroep waren: Bert Boon (auteur Sigma), Dik Bos (auteur Wiskunde Lijn), Leon van den Broek (auteur Wageningse Methode), Jan van de Craats (hoogleraar KMA), Jan Donkers (vakdidacticus TU Eindhoven), Jan Dijkhuis (auteur Getal en Ruimte), Paul Drijvers (docent Interstudie Nijmegen), Wim Kleijne (inspector en lid CEVO), Henk Schuring (medewerker CITO), Ferdinand Verhulst (hoofddocent RU Utrecht), Bert Zwaneveld (auteur Moderne Wiskunde).

De Werkgroep stelde zich tot doel:

- voorstellen te doen met betrekking tot een vernieuwde interpretatie van het onderwerp differentiaalvergelijkingen;
- een verzameling vraagstukken te produceren ter verduidelijking van die voorstellen.

De verzameling vraagstukken zal worden opgenomen in de bundel voorbeeldopgaven wiskunde B van de NVvW.

2 Waarom differentiaalvergelijkingen?

De Werkgroep heeft zich allereerst de vraag gesteld of het wenselijk is het onderwerp differentiaalvergelijkingen na de onderbreking van de jaren '87 en '88 weer in het examenprogramma op te nemen. Zij is tot de conclusie gekomen dat er voldoende argumenten zijn om het onderwerp in de toekomst bij wiskunde B te houden. Daarbij heeft de Werkgroep zich laten leiden door de volgende overwegingen:

- Het onderwerp differentiaalvergelijkingen sluit aan op het hoofdbestanddeel van wiskunde B: de zogeheten analyse; het is een directe toepassing en uitbreiding daarvan. In dit verband is het interessant op te merken dat de 'analyse' en de 'theorie der differentiaalvergelijkingen' hand in hand zijn ontstaan. Het is didactisch van belang dat de meest essentiële technieken uit de analyse functioneren bij differentiaalvergelijkingen.
- Differentiaalvergelijkingen worden gebruikt in wetenschap, techniek en maatschappij. Denk bij-

voorbeeld aan groeimodellen in de biologie, economie, natuurkunde en scheikunde. Via differentiaalvergelijkingen kan het praktische nut van de analyse goed duidelijk worden gemaakt.

- De wiskunde levert niet alleen de oplossingstechniek, maar ook de taal waarin problemen uit toepassingsgebieden kunnen worden aangepakt. Om dergelijke problemen op te lossen moet de leerling leren vertalen, leren een differentiaalvergelijking op te stellen.

Voorbeelden hiervan:

1. Een patiënt krijgt via een infuus een medicijn toegediend met een constante snelheid van 12 mg/uur. Door het lichaam wordt dit medicijn afgebroken met een snelheid die evenredig is met de in het bloed aanwezige hoeveelheid.

Stel $H(t)$ is de in het bloed aanwezige hoeveelheid (in mg) van het medicijn t uur na het begin van de toediening.

Laat zien dat er een positieve constante c bestaat

$$\text{zodat geldt: } \frac{dH}{dt} = 12 - cH$$

2. Door verdamping nemen omvang en gewicht van een mottebal snel af. Hierbij wordt verondersteld dat het gewichtsverlies op elk moment evenredig is met de oppervlakte van het bolletje. Het gewicht G (in grammen) is een functie van de tijd t (in weken).

Laat zien dat er een constante c is zodat geldt:

$$\frac{dG}{dt} = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$$

Opgaven waarbij een differentiaalvergelijking door de leerling moet worden opgesteld, kunnen in de visie van de Werkgroep worden gevraagd op het CSE. Omdat een dermate ingrijpende verandering van interpretatie niet in alle redelijkheid in het examenjaar '89 kan worden ingevoerd en omdat het evenmin verstandig leek nog één jaar de 'oude stijl' te hanteren, verzocht het bestuur van de NVvW de voorzitter van de CEVO de come-back van de differentiaalvergelijkingen uit te stellen met ten minste één jaar. Dit verzoek werd zonder opgaaf van reden afgewezen. Wel heeft de CEVO in Uitleg (nr 12, 1988) bekend gemaakt dat het onderwerp differentiaalvergelijkingen de eerste tijd niet

'te uitgebreid' op het CSE aan de orde zal worden gesteld. In dat bericht werd kort de tijdelijke interpretatie omschreven; ter adstructie werden een aantal voorbeeldopgaven toegevoegd. De Werkgroep is bij het opstellen van de voorbeeldopgaven en de omschrijving van de interpretatie ingeschakeld.

3 Over het gebruik van differentialen

In de eerste paragraaf van dit rapport wordt verwezen naar de jarenlange discussie die vooral in het blad *Euclides* is gevoerd over de differentiaalvergelijkingen op school. De discussie spitste zich veelal toe op het gebruik van differentialen. De artikelenreeks begon in 1973 met een stuk van Van Tiel ('Differentiaal-calculus'). Nadien volgden bijdragen van o.a. Moet, Drijvers, van Rooy, Cheng, Nienhuys. De laatste drie auteurs stelden onomwonden voor om geen differentialen op school te hanteren. Daarentegen wierp Freudenthal zich in de *Nieuwe Wiskrant* op als pleitbezorger van het gebruik van differentialen. In zijn artikel 'Een standbeeld voor Leibniz' sluit van de Craats zich aan bij Freudenthal (zie *Euclides* 64-4, blz. 100-108).

Ook in de Werkgroep differentiaalvergelijkingen waren de meningen over het al of niet gebruiken van differentialen verdeeld. In grote lijnen kan de controverse als volgt worden gekarakteriseerd.

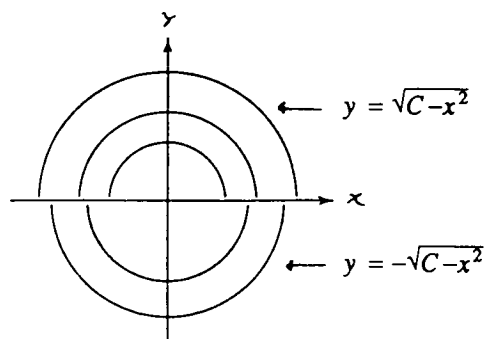
- De tegenstanders van het gebruik van differentialen wensen te werken met differentiaalvergelijkingen waarin de ene variabele geacht wordt een functie van de andere te zijn.

Neem als voorbeeld: $x + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

Gezocht wordt dan naar een functie y van x die tezamen met zijn afgeleide $\frac{dy}{dx}$ aan de differentiaalvergelijking voldoet voor alle relevante waarden van de variabele x .

Of, algemener, men zoekt naar *alle* functies met die eigenschap.

Strikt genomen worden de oplossingen in deze opvatting gerepresenteerd door halve cirkels; figuur 1.



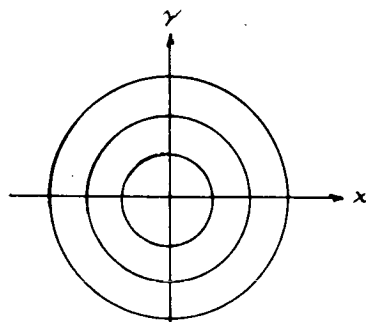
Figuur 1

- De voorstanders van het gebruik van differentialen accepteren ook differentiaalvergelijkingen waarin differentialen voorkomen.

Voorbeeld: $x \cdot dx + y \cdot dy = 0$

Bij deze opvatting kan men in het midden laten of men y als functie van x , dan wel x als functie van y wil beschouwen.

De oplossing kan dan ook in vorm $F(x, y) = C$ (C constant) worden gegeven, in dit voorbeeld: $x^2 + y^2 = C$, figuur 2.



Figuur 2

Op de argumenten van voor- en tegenstanders wil de Werkgroep in dit rapport niet ingaan. De geïnteresseerde lezer wordt verwezen naar de eerder genoemde reeks artikelen.

Om tegemoet te komen aan beide partijen stelt de Werkgroep voor bij het CSE de differentiaalvergelijkingen te presenteren in een vorm waarbij differentialen uitsluitend in een quotiënt voorkomen. In een examenopgave kan bovenstaand voorbeeld

●
dus wel genoteerd worden in de gedaante:

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = -x \text{ of } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \text{ maar niet in de vorm:}$$

$$x \cdot dx + y \cdot dy = 0$$

De Werkgroep neemt aldus een neutraal standpunt in. Immers, het differentiaalquotiënt kan naar believen worden opgevat als quotiënt van differentiaal of als afgeleide.

Bij elke opvatting past een oplossingstechniek. Gedemonstreerd aan de hand van bovenstaande differentiaalvergelijking:

● **Oplossing met differentialen.**

$$y \cdot dy = -x \cdot dx$$

$$d(\frac{1}{2}y^2) = -d(\frac{1}{2}x^2)$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$

● **Oplossing zonder differentialen.**

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = -x$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}y^2) = -x$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$

De leerling die de eerste methode hanteert, zal vertrouwd moeten zijn met rekenregels voor differentialen.

Bij de tweede methode zal de leerling vertrouwd moeten zijn met het differentiëren van impliciet gegeven functies.

Als in de vergelijking $x^2 + y^2 = 2C$ ($C > 0$) de variabele y lokaal wordt opgevat als functie van x , levert differentiëren naar x de differentiaalvergelijking

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ op.}$$

Differentialen komen niet als zelfstandig onderwerp in het examenprogramma wiskunde B voor. De consequentie van het standpunt van de Werkgroep is, dat leraren en schoolboekauteurs kunnen kiezen of ze wel of niet met differentialen willen omgaan. Het al of niet gebruiken van differentialen wordt op die manier een didactische keuze.

Het spreekt haast vanzelf dat de Werkgroep voorstelt om bij het examen ook oplossingen van differentiaalvergelijkingen in impliciete vorm goed te rekenen, tenzij uitdrukkelijk naar de expliciete vorm (y als functie van x of omgekeerd) wordt gevraagd. Daarbij komt dat lang niet van elke differentiaalvergelijking de oplossingen in expliciete vorm kunnen worden beschreven.

$$\text{Neem als voorbeeld: } \frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{\ln y}$$

De oplossingen laten zich bijvoorbeeld beschrijven door: $y \cdot \ln y - y = x \cdot \ln x - x + C$ en elke poging om de ene variabele in de andere uit te drukken, is hier tot falen gedoemd.

4 Interpretatie en nomenclatuur

Bij een opgave over differentiaalvergelijkingen op het CSE wiskunde B, dient volgens de Werkgroep van de kandidaten te worden verwacht dat zij

a. in een eenvoudige probleemsituatie (van bijvoorbeeld analytische, meetkundige of natuurwetenschappelijke aard) een differentiaalvergelijking kunnen opstellen of van een gegeven differentiaalvergelijking kunnen aantonen dat deze de probleemsituatie beschrijft.

b. met behulp van een lijnelementenveld zekere kenmerken (extreme waarden, asymptotisch gedrag, ...) van een oplossing van een differentiaalvergelijking kunnen bepalen.

c. kunnen nagaan of een gegeven functie (de functies van een gegeven verzameling voldoet(voldoen) aan een gegeven differentiaalvergelijking.

d. een eenvoudige differentiaalvergelijking (met te scheiden variabelen) kunnen oplossen; daarbij hoort ook het bepalen van een oplossing die aan een nevenvoorwaarde voldoet.

Op het CSE zullen geen vragen gesteld worden over singuliere punten en zal niet gevraagd worden naar een 'volledige' verzameling van oplossingen van een differentiaalvergelijking.

Bij het formuleren van de examenopgaven stelt de Werkgroep voor de volgende uitdrukkingen te gebruiken:

- *differentiaalvergelijking*, en niet bijvoorbeeld beginwaardeprobleem;
- *lijnelement* en *lijnelementenveld*, en niet bijvoorbeeld richtingsveld;
- *oplossing* en *grafiek van een oplossing*, en niet bijvoorbeeld integraalkromme.

Hoewel dit niet uitdrukkelijk in het examenprogramma is vermeld, adviseert de Werkgroep om in het vwo de term 'differentiaalvergelijking' op te vatten als 'gewone differentiaalvergelijking van de eerste orde'.

Zo'n vergelijking zal op het CSE in de vorm

$\frac{dy}{dx} = \phi(x, y)$ beschreven worden, of eenvoudig tot deze vorm te herleiden zijn.

Bij een gegeven differentiaalvergelijking kan aan de gezochte oplossing een beperkende voorwaarde (nevenvoorwaarde) worden opgelegd. Deze voorwaarde kan blijken uit de gegeven probleemsituatie of kan aan de oplossing worden opgelegd in wiskundige termen, bijvoorbeeld: geef de oplossing waarvan de grafiek door het punt (a, b) gaat.

5 Besluit

Het onderwerp differentiaalvergelijkingen kan in de ogen van de Werkgroep een fraaie afsluiting zijn van het analyse-onderwijs op het vwo, mits er serieuze aandacht wordt besteed aan toepassingen van natuurwetenschappelijke aard. Om het met Freudenthal te zeggen: 'het opstellen van differentiaalvergelijkingen mogen wij niet afwentelen op de toepassers, het zou een miskening van onze taak als wiskundige zijn'.

Het gebruik van differentiaalvergelijkingen binnen de schoolwiskunde is dermate controversieel gebleken, dat de Werkgroep op dit punt de grootst mogelijke vrijheid voorstaat.

De examenvraagstukken over dit onderwerp volgens de mode van de eerste helft van de jaren '80 hebben vaak een gekunsteld karakter. In een serie voorbeeldopgaven, op te nemen in de bundel vraagstukken wiskunde B van de NVvW, laat de Werkgroep zien hoe naar haar mening die mode zou moeten veranderen.

● Actualiteit ● ● ● ● ●



► Kolom 11

George Schoemaker

In het project W 12-16 werken we samen met vier experimenteerscholen. Op twee van die scholen doen mavo- en lbo-leerlingen in 1990 examen C of D. Hun examenprogramma is het programma dat in heel Nederland van kracht is. Deze leerlingen hebben gedurende de afgelopen twee jaren af en toe met nieuwe materialen gewerkt, ze moesten daarbij steeds laten zien hoe ze hadden nagedacht. Daarbij konden ze zelfs bij sommige opdrachten zeggen: 'Ik ga ervan uit dat ...'. Sterker nog, zonder dergelijke 'declaraties' is hun antwoord niet goed. Hun manier van denken wordt gerespecteerd, mits die op papier komt en interne consistentie vertoont. Bij dit uitgangspunt wordt de deur geopend naar vragen dicht bij problemen die in het dagelijks leven om een wiskundige aanpak vragen. Dan spreekt het vanzelf dat dit aspect van wiskunde ook in het examen tot uiting komt. Deze leerlingen krijgen een aangepast examen waarin naast contextopgaven ook gewone kale sommen zitten. Samen met de docenten van de scholen worden proefexamens opgesteld. Leerlingen maken deze oefenexamens. De ervaringen daarbij leiden tot verbetering van zo'n proefexamen en ook tot meerdere kennis over wat we ze over zeven maanden in alle redelijkheid mogen vragen. Nog een effect: verdere ideevorming over de manier van examineren in volgende jaren. Als bijproduct van de experimenten verschijnt aan het eind van dit cursusjaar een bundel met oefenexamens. De ervaringen met een andere examenvoorbereiding geven ook voeding aan het ontwikkelwerk voor een nieuw programma dat er in '92 moet liggen.

► **De XXIXe Internationale Wiskunde Olympiade 1988**

J. G. M. Donkers



De 29e Internationale Wiskunde Olympiade werd gehouden van 9 tot 21 juli 1988 in Canberra, Australië. De olympiade stond onder auspiciën van de Australische regering en was een onderdeel van de activiteiten in het kader van de 'bicentennial'. Er waren 268 deelnemers uit 49 landen. De Nederlandse ploeg bestond uit de volgende leerlingen: Ronald Blaak (17), Etten-Leur Harm Derksen (18), Ven-Zelderheide Maarten Hilferink (19), Zeist Joris van der Hoeven (17), Amsterdam Richard Huveneers (17), Amersfoort Jeroen Paasschens (18), Bladel. Harm, Richard en Jeroen behaalden een derde prijs.

Op 15 en 16 juli was de wedstrijd en kregen de deelnemers 4½ uur voor drie opgaven. Slechts 5 deelnemers wisten de maximale score van 42 punten te behalen. Aan 130 deelnemers werd een prijs (medaille + oorkonde) uitgereikt: 17 goud (32 t/m 42 punten), 48 zilver (23 t/m 31 punten) en 65 brons (14 t/m 22 punten). Een speciale prijs werd toegekend aan Emanouïl Atanassou uit Bulgarije voor zijn bijzonder elegante oplossing van de zesde opgave. In het officieuze landenklassement werd de Sovjet-Unie eerste met 217 punten, gevolgd door Roemenië en China met ieder 201 punten. Nederland kwam op de 21e plaats met 85 punten. Onder de deelnemers bevonden zich 17 meisjes, waarvan er drie een zilveren en één een bronzen medaille behaalden.

De Internationale Wiskunde Olympiade 1989 is gehouden in Braunschweig, West-Duitsland. Voor de jaren 1990 t/m 1996 hebben resp. China, Zweden, Oost-Duitsland, Turkije, België, Canada en Brazilië aangeboden de organisatie van de Olympiade op zich te nemen.

De Nederlandse ploeg in 1988

Drs. J. M. Notenboom (Hogeschool Nederland, Utrecht) en drs. J. G. M. Donkers (Technische Universiteit Eindhoven) waren de begeleiders van het Nederlandse team en hadden voor Nederland zitting in de internationale jury. Prof. dr. H. J. A. Duparc, voorzitter van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, maakte ook dit jaar weer als waarnemer deel uit van de Nederlandse delegatie. De Nederlandse ploeg was geselecteerd uit de prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1987. De voorbereiding op de internationale olympiade door middel van lesbrieven werd verzorgd door J. Donkers. Alle leden van de Nederlandse ploeg hebben in 1988 hun eindexamen van de middelbare school gedaan en zijn daarna begonnen met een universitaire studie (twee wiskunde, drie natuurkunde en één econometrie). Een lid van de ploeg zet zijn studie (wiskunde) voort in Frankrijk, de anderen studeren aan Nederlandse universiteiten. De scores van de Nederlandse deelnemers waren als volgt.

Opgave	1	2	3	4	5	6	Score
Ronald Blaak	1	7	0	0	0	1	9
Harm Derksen	4	6	6	1	4	0	21
Maarten Hilferink	1	5	1	0	1	1	9
Joris v.d. Hoeven	4	5	1	0	3	0	13
Richard Huveneers	1	0	7	6	0	0	14
Jeroen Paasschens	7	7	1	0	4	0	19
Totaal	18	30	16	7	12	2	85
Gem. Ned.	3,0	5,0	2,7	1,2	2,0	0,3	14,2
Gem. alle deelnemers	3,9	3,2	1,7	2,3	3,3	0,6	15,1

Rondom de olympiade

Na een vermoeiende reis van ongeveer 36 uren kwamen we op zondag 10 juli in Sydney aan. We werden ondergebracht in het Basser-college van de University of New-South-Wales in Sydney. Het duurde enkele dagen voordat iedereen zich weer volledig fit voelde. Er was voor de deelnemers aan de olympiade een grote excursie georganiseerd langs de belangrijkste bezienswaardigheden van de stad. Donderdags werden we per bus naar Canberra (± 300 km) gebracht, waar we logeerden in het Canberra College of Advanced Education. Hier vond nog dezelfde dag de openingsplechtigheid plaats in aanwezigheid van de Australische minister van onderwijs. De accommodatie en organisatie in Canberra waren voortreffelijk. Er was voldoende gelegenheid tot contacten met deelnemers uit andere landen. Er heerste een gezellige sfeer. Canberra, de hoofdstad van Australië, is een nog jonge en geheel planmatig gebouwde stad, met veel ruimte en veel groen. We bezochten er o.a. het onlangs gereedgekomen indrukwekkende parlamentsgebouw, dat het stadsbeeld domineert, de mooie ambassade-wijk, de Black Mountain, vanwaar je een mooi uitzicht hebt over de stad, het nationale sportcentrum en het Tidbinbilla National Park.

Woensdag 20 juli brachten we 's ochtends een bezoek aan de Nederlandse ambassade, waar we hartelijk zijn ontvangen. Daarna was er 's middags in het Canberra Theater de prijsuitreiking en de sluitingsplechtigheid. Een van de sprekers bij deze plechtigheid was minister-president Hawke van Australië. Donderdags werden we teruggebracht naar Sydney.

Op de terugreis hebben we van de gelegenheid gebruik gemaakt om Indonesië te bezoeken. Drie dagen verbleven we op Bali, bezochten er verschillende tempels en zagen er de beroemde Balinese dansen. Daarna waren we enkele dagen in Bandoeng waar we o.a. naar theeplantages, heetwaterbronnen en de vulkaan Tangkuban Perahu zijn geweest. Tenslotte zijn we met een busje van Bandoeng via de Puncak-pas naar Jakarta gegaan. Onderweg bezochten we de prachtige tuinen van Buitenzorg in Bogor. De week Indonesië heeft een onvergetelijke indruk achtergelaten.

Uitgeteld kwamen we zaterdag 30 juli op Schiphol aan.

Hieronder volgen nog het landenklassement en de opgaven. De zes opgaven zijn voorgesteld door resp. Luxemburg, Tsjecho-Slowakije, Groot-Brittannië, Ierland, Griekenland en West-Duitsland.

1 Sovjet-Unie	217	26 Columbia	66
2 Roemenië	201	27 Turkije	65
China	201	Griekenland	65
4 West-Duitsland	174	Finland	65
5 Vietnam	166	30 Luxemburg (3)	64
6 Verenigde Staten	153	31 Marokko	62
7 Oost-Duitsland	145	32 Peru	55
8 Bulgarije	144	33 Polen (3)	54
9 Frankrijk	128	34 Nieuw-Zeeland	47
10 Canada	124	35 Italië (4)	44
11 Groot-Brittannië	121	36 Algerije (5)	42
12 Tsjecho-Slowakije	120	37 Mexico	40
13 Zweden	115	38 Brazilië	39
Israël	115	39 IJsland	37
15 Oostenrijk	110	40 Cuba	35
16 Hongarije	109	41 Spanje	34
17 Australië	100	42 Noorwegen	33
18 Singapore	96	43 Ierland	30
19 Joegoslavië	92	44 Filipijnen (5)	29
20 Iran	86	45 Koeweit	23
21 Nederland	85	Argentinië (3)	23
22 Korea	79	47 Cyprus	21
23 België	76	48 Indonesië (3)	6
24 Hong Kong	68	49 Equador (1)	1
25 Tunesië (6)	67		

Opgaven

1 In een vlak zijn gegeven twee concentrische cirkels met stralen R en r ($R > r$). P is een vast punt op de kleinste cirkel en B is een variabel punt op de grootste cirkel. De lijn BP snijdt de grootste cirkel nog eens in C . De loodlijn l op BP in punt P snijdt de kleinste cirkel nog eens in A (als l raaklijn is aan de cirkel, dan $A = P$).

I Bepaal de waarde(n) die $BC^2 + CA^2 + AB^2$ kan aannemen.

II Bepaal de verzameling van de middens van AB .

2 Zij n een positief geheel getal ($n \neq 0$); verder zijn $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ deelverzamelingen van een verzameling B .

Er geldt:

(a) elke deelverzameling A_i bevat precies $2n$ elementen,

(b) voor alle i, j ($1 \leq i < j \leq 2n + 1$) bevat $A_i \cap A_j$ precies één element,

(c) elk element van B zit in tenminste twee van de deelverzamelingen A_i .

Voor welke waarden van n is het mogelijk om aan elk element van B één van de getallen 0 of 1 toe te kennen, zodanig dat elke A_i precies n elementen bevat waaraan het getal 0 is toegekend?

3 Op $N, N = \{1, 2, 3, \dots\}$, is een functie f als volgt gedefinieerd:

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3,$$

en voor alle $n \in N$

$$f(2n) = f(n),$$

$$f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n),$$

$$f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n),$$

Bepaal het aantal getallen $n \in N$ met $n \leq 1988$ waarvoor geldt $f(n) = n$.

Beschikbare tijd: 4,5 uur.

Voor elke opgave maximaal 7 punten.

4 Bewijs dat de verzameling van alle reële getallen x die voldoen aan de ongelijkheid

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

de vereniging is van een aantal disjuncte intervallen, waarbij de som van de lengten van die intervallen gelijk is aan 1988.

5 In een rechthoekige driehoek ABC is D het voetpunt van de hoogtelijn uit A op de hypotenusa BC . De lijn door de middelpunten van de ingeschreven cirkels van de driehoeken ABD en ACD snijdt de zijden AB en AC respectievelijk in K en L .
Bewijs:

Oppervlakte $ABC \geq 2$ Oppervlakte AKL .

6 Gegeven zijn positieve gehele getallen a en b waarvoor geldt: $ab + 1$ is een deler van $a^2 + b^2$.

Bewijs dat $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ het kwadraat van een geheel getal is.

Beschikbare tijd: 4,5 uur

Voor elke opgave maximaal 7 punten.

Boekbespreking

Lothar Collatz: *Differential Equations: An Introduction with Applications*, John Wiley and Sons Ltd; 386 blz., \$ 22,35.

Deze Engelse editie is een vertaling van de oorspronkelijke, Duitse, zesde editie van dit boek.

De inhoud omvat een introductie in het oplossen van differentiaalvergelijkingen, waarbij de nadruk wordt gelegd op toepassingen. Er wordt behalve aan gewone differentiaalvergelijkingen van eerste en hogere orde ook aandacht geschonken aan rand- en eigenwaardeproblemen, partiële differentiaalvergelijkingen en enkele speciale differentiaalvergelijkingen. In een appendix wordt ingegaan op numerieke benaderingen van oplossingen. Verder is een tijdschema opgenomen met wiskundigen, die zich met differentiaalvergelijkingen hebben beziggehouden.

Het boek bevat veel voorbeelden en tekeningen, die verhelderend werken. Verder bevat het meer dan 80, soms pittige, opgaven. Van alle opgaven zijn antwoorden en, indien nuttig, uitwerkingen opgenomen. Mede daardoor is dit overzichtelijke boek zeker geschikt voor zelfstudie.

Z. E. Warmelink

► Mediageniek wiskundeonderwijs*

Heleen B. Verhage

Bij de voorbereiding van deze lezing ben ik om te beginnen in het woordenboek gaan kijken wat het woord mediageniek eigenlijk betekent. Niet geheel tot mijn verbazing bleek het er niet in te staan. (Ik keek in de dikke van Dale van 1970). Media vond ik wel, dat betekent stemhebbende explosief (bdg). Het is een vakterm uit de fonologie. Ik keek verder op de bladzijde of er iets van mijn gading bij was. En met succes, want vlak na media stond mediaan, een woord met een verrassende rijkdom aan betekenissen met een wiskundig karakter (fig. 1).

I. mediaan' (<Lat.), bn., gelegen evenwijdig met of vóór de as t.o. waarvan de ligging bepaald wordt.

II. mediaan', I. v. (m.) (medianen), 1. zwaartelijn in een driehoek; — 2. (statistiek) de verticale lijn die een scheve frequentieverdeling zodanig in tweeën verdeelt, dat de door de curve ingesloten oppervlakken aan beide zijden ervan aan elkaar gelijk zijn, zodat de kans dat een waarnemingsgetal links of rechts van deze lijn valt gelijk is; — 3. lettersoort ter hoogte van elf punten, de grootste der zogenaamde broodletters, in grootte op de dessendiaan volgende; — ook als maat: *deze regels waren anderhalf mediaan korter* (v. Looy); — II. o., zeker formaat van drukpapier, groter dan gewoon formaat: *in cm is klein mediaan 40 × 53; groot mediaan post 43½ × 56½; druk mediaan 47 × 56; groot mediaan 47 × 61; dubbel klein mediaan 54 × 80; dubbel groot mediaan 60½ × 92*; — *ader*, v. (m.), middelader van de arm; — *letter*, v. (m.) (-s); — *lijn*, v. (m.) (-en), lijn die ondersteld wordt het lichaam overlangs in twee gelijke delen te verdelen; — *papier*, o.

Figuur 1

Even verder vond ik nog een wiskundig woord: mediant (fig. 2).

mediant'e (It.), v. (-n), 1. (wisk.): *de mediant van 2 breuken is een breuk, waarvan de teller de som der tellers in de noemer de som der noemers is. De mediant van $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ = $\frac{2}{5}$; — 2. (muz.) derde trap van de toonladder.*

Figuur 2

Leest u *De mediant van $\frac{3}{8}$ en $\frac{2}{5}$ = $\frac{5}{13}$* vooral niet als $\frac{3}{8} + \frac{2}{5} = \frac{5}{13}$, want die vlieger gaat niet op. Uit het breukenonderwijs heb ik wel begrepen dat veel leerlingen dol zijn op het uitrekenen van medianten... Het blijkt dat de mediant van twee breuken altijd tussen die twee inligt. Wanneer u dat voor het algemene geval uitschrijft, komt er wat algebra om de hoek kijken.

Bij medium vond ik eindelijk wat ik zocht: naast de betekenissen 'het midden', 'oplosmiddel', en 'persoon door wie geesten of bovenaardse krachten zich openbaren' stond er ook 'hulpmiddel'. Mediageniek stond er dus niet in, maar mediamiek weer wel: 'betrekking hebbend op, werkend als of geschiedend door een medium' (in de betekenis van spiritistisch persoon). Maar daar gaat het vandaag verder niet over.

Intussen heeft u van mij de eerste praktische tip gehad: laat de leerlingen eens wat woorden opzoeken in woordenboek of encyclopedie. Zoals u zojuist gezien heeft, kan dat aardige resultaten opleveren, want de vele betekenissen van het woord mediaan en de toevallige ontdekking van mediant waren toch wel verrassend. Enkele suggesties voor woorden om op te zoeken: modus, gemiddelde, variabele, functie, integraal, differentiëren, symmetrie, hoek, draai, straal, cirkel, bol, enzovoort.

Terug naar waar ik het eigenlijk over wilde hebben: media. Dat betekent dus hulpmiddelen. Toch is dat niet de eerste associatie die ik bij het woord media heb. Ik denk dan vooral aan: dé media, audiovisuele media en tegenwoordig ook: nieuwe media. Laat ik eens op een rijtje zetten wat voor media we zoal hebben. Op sommige ga ik in het vervolg van mijn betoeg nader in.

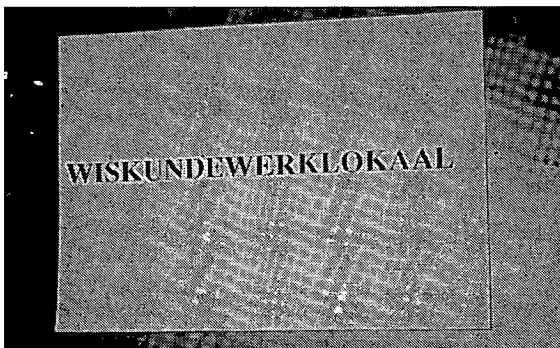
* Lezing gehouden op de studiedag van de NVvW, zaterdag 29 oktober 1988 te Bilthoven.

Mijn lijstje media:

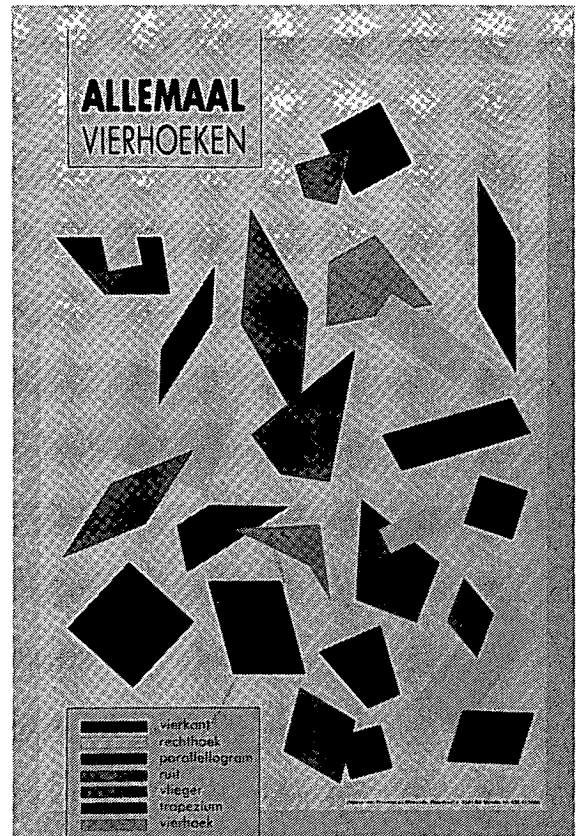
- Schoolbord en krijtjes, schoolboeken en schriften;
- rekenmachines;
- attributen om vast te houden en te laten zien, bijvoorbeeld modellen voor ruimtemeetkunde;
- materialen om mee te experimenteren;
- verbruiksmaterialen voor knippen en plakken en dergelijke;
- lees- en bronnenboeken;
- overheadprojector;
- audio-visuele media: video, film, geluidscassette, diaprojector;
- dé media: radio, televisie, krant, tijdschriften;
- computers met bijbehorende apparatuur (o.a. OHP en viewer);
- Nieuwe media: beeldplaattechnologie, interactieve video.

Met dit lijstje heb ik geenszins de pretentie volledig te zijn. Het gaat er mij in de eerste plaats om, duidelijk te maken dat ik het begrip media ruim wil opvatten.

Waar treffen we die media nu aan? In het W12-16 project hebben we om dat probleem op te lossen een nieuw woord bedacht, namelijk *wiskundewerklokaal*. We denken dat het een goede zaak is als voor wiskunde ook een traditie zou ontstaan dat het een vak is waarbij je hulpmiddelen gebruikt en experimenten doet. Om in de stemming te komen, leid ik u aan de hand van enkele dia's het wiskundewerklokaal binnen (fig. 3, 4 en 5).



Figuur 3 We treden het wiskundewerklokaal binnen

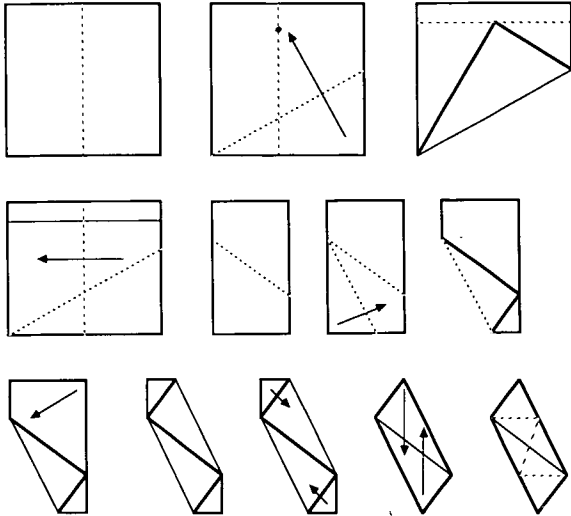


Figuur 4 Het wiskundewerklokaal ziet er aantrekkelijk uit. Er hangen een paar mooie affiches aan de muur, bijvoorbeeld het affiche 'Allemaal vierhoeken' dat is uitgegeven door de Werkgroep Vrouwen en Wiskunde.



Figuur 5 In het wiskundewerklokaal zitten ook leerlingen, die zijn bij voorkeur bezig.

Nu we toch in dat wiskundewerklokaal zijn, wordt het tijd zelf ook iets te doen. Ik nodig u uit om met mij uit een vierkant vouwblaadje de uitslag van een regelmatig viervlak te vouwen. We doen dit op z'n Japans, volgens de eeuwenoude papiervouwkunst die origami heet. De vouwinstructies staan in figuur 6.



Figuur 6

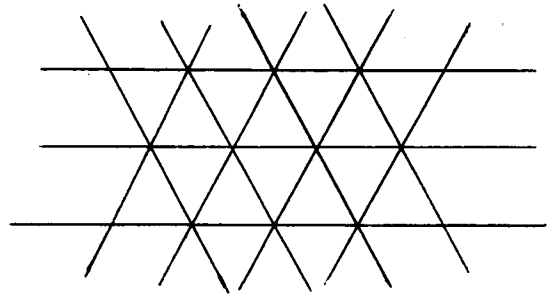
Er is nog een andere manier om viervlakken te vouwen. Die is wat ingewikkelder, maar het resultaat is een echt viervlak dat stevig in elkaar zit, in plaats van alleen een uitslag.

Het aantrekkelijke van origami vouwen is, dat er geen schaar en lijm aan te pas komen. Dat betekent geen geklieder en geen afval, een aantrekkelijke bijkomstigheid voor in de les. Het originele origami-papier is van een mooie kwaliteit, maar daarvoor wel vrij duur. Het spreekt vanzelf dat u ook met gewone vouwblaadjes kunt werken.

Is hier, behalve dat het leuk is, nu ook nog wiskunde aan te bedrijven? De eerste vraag die zich opdringt, luidt: is het echt een viervlak? De basis hiervoor wordt gelegd bij de tweede vouw, waarbij het hoekpunt rechtsonder naar het midden gevouwen wordt. De hoek die aldus ontstaat is er één van 60 graden.

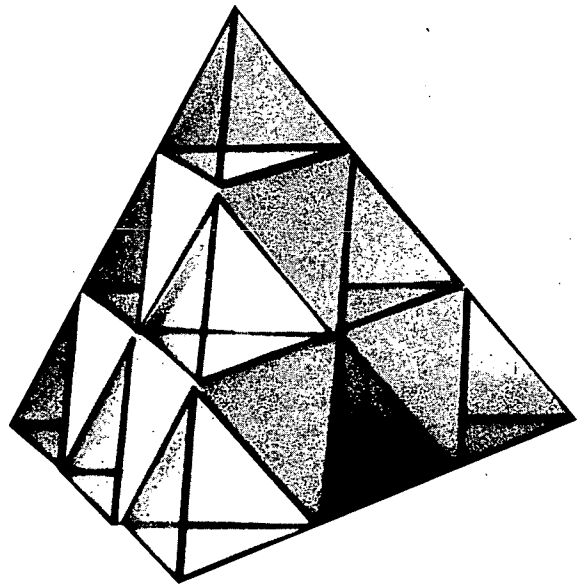
Maar er is meer wiskunde mogelijk. Als we heel veel viervlakken hebben, en met een volle klas van

dertig leerlingen is dat gauw gebeurd, kunnen we ze gaan stapelen. Laten we uitgaan van isometrisch papier (fig. 7).

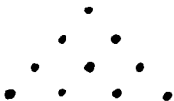
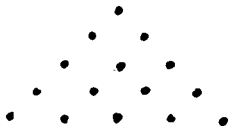
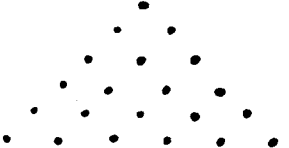


Figuur 7

Als we op elke driehoek een viervlak plaatsen, is het vlak wel gevuld, maar de ruimte komen we er niet mee in. Er blijven wigvormige gaten over, waar helaas geen viervlakken in passen. Dat moet anders. Ik plaats nu om-en-om een viervlak, en dat een paar laagjes boven elkaar zodat ik een groot viervlak (met ribbe 3) krijg. In de gaten die overblijven, passen heel verrassend precies regelmatige achthoeken! (fig.8).

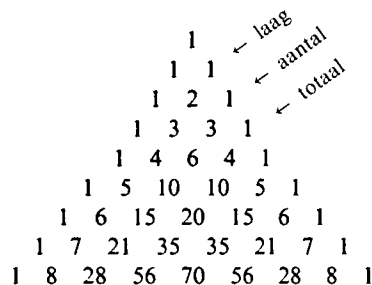


Figuur 8

laag		aantal	totaal
1		1	1
2		3	4
3		6	10
4		10	20
5		15	35
6		21	56

Figuur 9

Ongetwijfeld herkent u hierin getallen uit de driehoek van Pascal. Laagnummer, aantal en totaal zijn daar achtereenvolgens in terug te vinden (fig. 10).

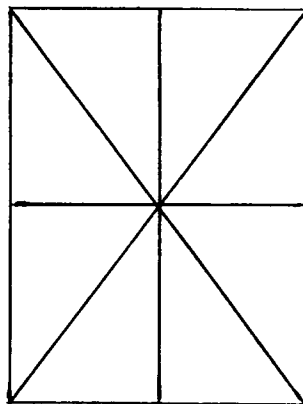


Figuur 10 De driehoek van Pascal

Voor het maken van al deze viervlakken is wel wat huisvuil nodig geweest. Ook met eenvoudige afvalmaterialen is echter al heel wat te doen, zonder dat daar veel werk aan vast zit. Ik geef u een paar eenvoudige tips, waarvan een aantal wellicht al vrij bekend is.

Cilinders en schroeflijnen:

- Op de huls van een eenvoudige closetrol ('het afval van het afval...') treft u een fraaie schroeflijn aan. Wat zal de oorspronkelijke vorm van het kartonnetje geweest zijn?
- Voorzie een transparant voor de OHP als volgt van lijnen (lieft elk in een andere kleur) (fig. 11).



Figuur 11

Wat zien we als de transparant opgerold wordt tot een cilinder? Dit oprollen kan in twee richtingen.

A4-tje vouwen:

– Van een velletje A4-papier kunnen we op twee manieren een ‘melkpak’ vouwen (zonder bodem/deksel). Vergelijk de inhoud van de twee vormen met elkaar. Wel of niet hetzelfde?

Verpakkingsmateriaal:

– Aan verpakkingsmateriaal is in het algemeen veel wiskunde te bedrijven. Denk bijvoorbeeld aan de inhoud van blikjes en aan de produktinformatie die op veel verpakkingen gegeven wordt. Op het AH-zakje van de vleeswarenafdeling treffen we een intrigerende vlakvulling aan (fig. 12).



Figuur 12

Tijdschriften kunnen ook een bron van wiskunde-onderwijs zijn. Vooral grafieken en statistieken treffen we daar veelvuldig aan. Alhoewel op dit gebied al veel gedaan is, laat ik toch een voorbeeld zien. Het artikeltje in figuur 13 trof ik gisteren, op weg van SLO naar OW&OC, aan in ‘Die Schöne Welt’, de

‘Tussen de Rails’ van de Duitse Bundes Bahn.

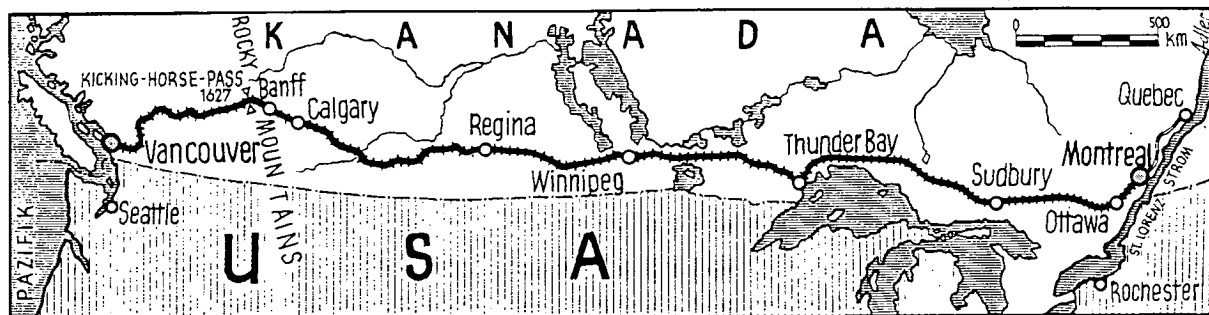
Bij nadere beschouwing blijken enkele eigenaardigheden. De kop luidt ‘76 Stunden bis Montreal’, maar uit de tabel die volgt, leiden we af dat de aankomsttijd 79 uur na de vertrektijd valt. Verklaring? U raadt het al, tijdzones spelen hier een rol. Om uit te zoeken waar de klok verzet moet worden, hebben we een atlas nodig. Een tweede eigenaardigheid is het traject van Winnipeg naar Thunder Bay. Volgens de tabel een traject van ruim 300 km, met een reistijd van ruim 11 uur! Wel heel onwaarschijnlijk, zelfs als we op dat traject de klok een uur moeten verzetten (Wat inderdaad het geval is). Die

76 STUNDEN BIS MONTREAL

Der „Canadian“ startet täglich um 15.10 Uhr ab Vancouver oder um 9.50 Uhr in Montreal zu seiner 76-Stunden-Fahrt quer durch den Kontinent. Unterschiede zwischen der Fahrplanzeit und der realen Reisezeit ergeben sich daraus, daß der Zug auf dieser langen Strecke zwischen den Meeren vier Zeitzonen passiert. Auf der Reise von Vancouver nach Montreal muß man dreimal die Uhr jeweils eine Stunde vorstellen, bei der Fahrt von Montreal nach Vancouver entsprechend dreimal um eine Stunde zurück.

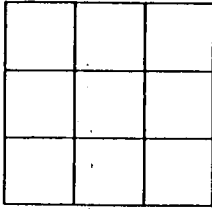
Hier der Fahrplan von West nach Ost:

Vancouver	ab 15.10
Banff	901 km an 12.05
Calgary	1031 km an 14.25
Winnipeg	2731 km an 9.25
Thunder Bay	3046 km an 20.40
Sudbury	3934 km an 11.35
Ottawa	4458 km an 20.05
Montreal	4645 km an 22.25

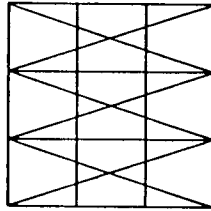


Figuur 13

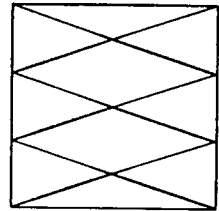
● Werkblad ●



het vierkant met een erin getekend rooster



een aantal roosterpunten is verbonden



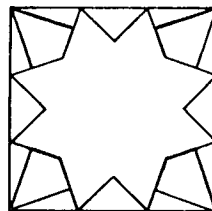
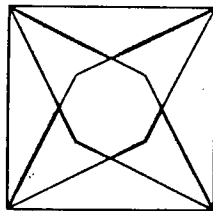
de roosterlijnen zijn weggeveegd

► Patronen in vierkanten

Uitgaande van een vierkant dat in 9 kleinere vierkanten is verdeeld kunnen heel wat verschillende patronen worden getekend.

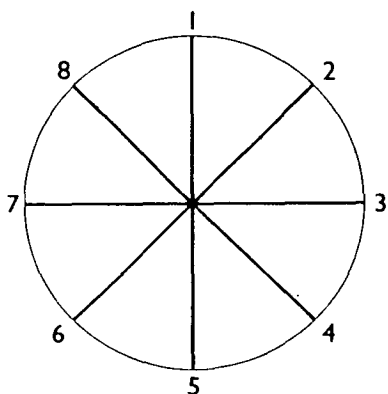
De drie tekeningen laten zien hoe zoiets in zijn werk gaat.

a Zoek uit hoe de volgende patronen zijn verkregen, uitgaande van een vierkant, dat in 9 kleinere vierkanten is verdeeld.

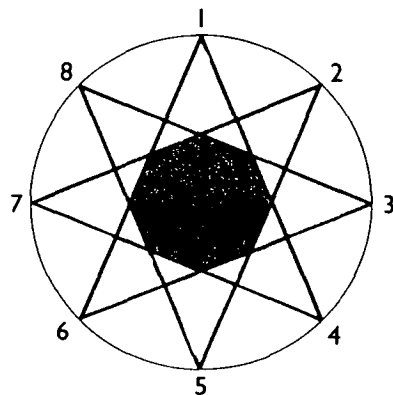


b Ontwerp meer zulke patronen.

● Werkblad ●



8 punten op een cirkel



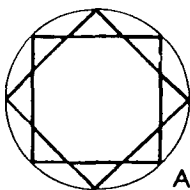
het eerste patroon

► Patronen in cirkels

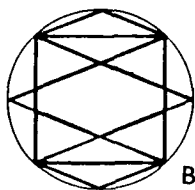
Uitgaande van 8 punten, die op gelijke afstanden op een cirkel getekend zijn, kunnen eveneens vele patronen worden getekend.

Het hierboven als eerste getekend patroon is verkregen door de punten 1-4-7-2-5-8-3-6-1 (in deze volgorde) te verbinden.

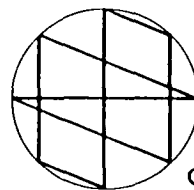
- Welk patroon krijg je als je de verbindingen 1-3-5-1 en 2-4-6-8-2 tekent?
- Onderzoek hoe de patronen A, B en C zijn verkregen.



A



B



C

- Ontwerp meer patronen, uitgaande van 8 punten op een cirkel.

300 km klopt trouwens ook niet met de kaart, waarop duidelijk te zien is dat het langer dan 500 km is.

Rond een artikeltje als dit, is een stukje leerstof te maken over tijd-afstandsgrafieken. In de loop der jaren zijn al heel wat van dergelijke voorbeelden uitgewerkt, met name in de Grafiekenlijn van de SLO.

Een ander chapter is het gebruik van de computer bij het onderwerp Funkties en Grafieken. Ik kies ditmaal geen contextrijk onderwerp dat ver van het huidige programma af staat, maar juist een sober en kaal onderwerp dat een belangrijke plaats inneemt in het programma van nu: de lineaire functie. Het nieuwe dat ik hier te berde wil brengen, is het gebruik van de computer. Er bestaan tegenwoordig grafiekenprogramma's waarmee in een handomdraai alle mogelijke grafieken getekend kunnen worden. Het bekendste op dit gebied in Nederland is het programma VU-grafiek.

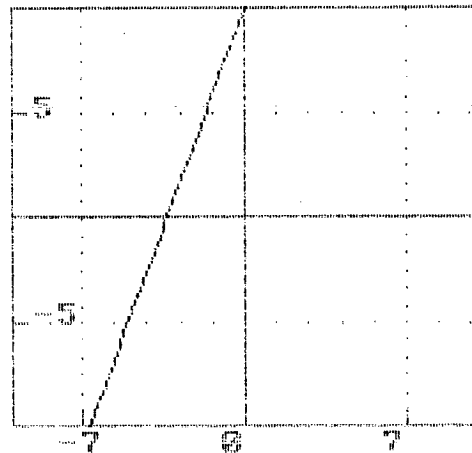
Vorig jaar heb ik eens enkele lessen met dit programma bijgewoond. Het was een les bij Nanda Querelle in een 4-mavo klas, waar de leerlingen geacht worden alles te weten van de lineaire functie. Ze moesten de computer grafieken van lineaire functies laten tekenen, die aan bepaalde voorwaarden voldeden.

Een greep uit de opdrachten:

- Stel een functievoorschrift op voor een grafiek die gaat door het eerste en het derde kwadrant.
- Nog één, maar zorg ervoor dat de grafiek dicht bij de y-as ligt.
- Nu één vlak langs de x-as.
- Geef een functievoorschrift voor een grafiek die gaat door het tweede en het vierde kwadrant.
- $f(x) = ax$; Wat kun je zeggen van de a voor alle grafieken die gaan door het tweede en het vierde kwadrant?
- Stel een functievoorschrift op voor een grafiek, die door drie kwadranten gaat.

De grafieken die op het bleedscherm verschenen, vormden voor de leerling de feedback op de functievoorschriften die ze hadden ingetoetst. Het

$$f(x) = 3x + 10$$



Tekenen Clear X-waarde
Functie Domein Menu Groot

Figuur 14 'Gaat deze grafiek alleen door het tweede en derde kwadrant?'

kwam geregeld voor, dat ze heel andere plaatjes te zien kregen dan ze verwachtten. Daardoor stelden ze hun ideeën over de lineaire functie en de betekenis van de parameters a en b waar nodig bij, zonder dat ze voortdurend geconfronteerd werden met zelfvertrouwen ondermijnende boodschappen als 'Dit is niet goed' of 'Dit is fout'.

Het programma VU-grafiek kan heel wat meer dan grafieken van (lineaire) functies tekenen. Een ander programma onderdeel dat veel mogelijkheden biedt, is *Uitvergroten*. Het uitgangspunt is weer de grafiek van een functie, maar nu kan een stukje daaruit verder uitvergroot worden. Snijpunten met de assen bijvoorbeeld, een belangrijke exercitie bij de kwadratische functie, kunnen zo door inzoomen bepaald worden. Een tweede belangrijke toepassing van het uitvergroten betreft het besef dat de meeste functies op hele kleine intervallen bij benadering lineair zijn. Om de grilligheid van de wiskunde te illustreren, zijn echter ook enkele functies in het programma opgenomen die deze eigenschap nu juist niet hebben.

In de toekomst zal een computer voor dit doel wellicht niet meer nodig zijn. Er zijn nu al de zogenaamde graphic calculators, waarmee *in principe* bijna hetzelfde kan. Zo'n apparaat, met het uiterlijk van een gewone rekenmachine, heeft een piepklein LCD-schermpje, waarop grafieken getekend kunnen worden. De bediening is op dit moment nog omslachtig, maar als ontwikkeling is het een belangrijke trend. Een subcommissie van de Mathematical Association of America heeft een voorstel gemaakt voor de 'ideale' graphic calculator voor studenten. Denk hierbij aan het niveau van wiskunde B van de bovenbouw en hoger. De hoofdpunten uit het verlanglijstje van die commissie:

- Het apparaat zal met betrekking tot de volgende onderwerpen standaardberekeningen moeten kunnen uitvoeren:

- Met dit laatste wordt een nieuw terrein bedoeld, dat ook wel wordt aangeduid met computeralgebra. Er zijn op dit moment al computerprogramma's die kunnen rekenen met letters, in plaats van te werken met numerieke benaderingen. In de voorbeelden in figuur 15 staat achter het vraagteken de opdracht aan de computer (SOLVE...). Het antwoord dat de computer teruggeeft, staat achter het teken@.

- Algebraic transformations of expressions involving variables and operations (+, -, *, /, ^):
 - ? SOLVE ($M \cdot X - X = 5, X$);
 - @ $[X == 5/(-1 + M)]$
 - ? SOLVE ($(X - 2)/(X + 4) + (X - 1)/(X - 2) = 15/7, X$);
 - @ $[X == 3,$
 $X == -40]$
 - ? EXPD $((X + 2) \cdot (X - 3))$;
 - @ $-6 - X + X \wedge 2$
 - ? $(18 \cdot (A \wedge 3)) \wedge (1/2)$;
 - @ $3 \cdot A \cdot (2 \cdot A) \wedge (1/2)$
 - ? SOLVE ($X \wedge 2 - 5 \cdot X + 3 == 0, X$);
 - @ $[X == 5/2 + 13 \wedge (1/2)/2,$
 $X == 5/2 - 13 \wedge (1/2)/2]$
- Operations on matrices with numeric and nonnumeric elements; for instance, if $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & X \end{bmatrix}$, muMath calculates $A \wedge -1$ as $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/X & 1/X \end{bmatrix}$
- Logarithmic simplifications and trigonometric transformations:
 - ? LN ($\#E \wedge X \wedge 2$);
 - @ $X \wedge 2$
 - ? TAN (A) * COS (A) + 1/CSC(A);
 - @ $2 \cdot \sin(A)$

Maar er is ook een trend naar het dure en het grote, zoals geïllustreerd in figuur 16.

INFORMATIETECHNOLOGIE



Laten we het volgende citaat uit het artikel over informatietechnologie en onderwijs waar ook de vorige figuur aan ontleend is eens nauwkeurig analyseren:

(...) Tot slot nog een voorbeeld van onderwijs met informatietechnologie: in plaats van het afdrukken van klokstempels om daarin wijzers te tekenen om de klok te leren, laten we nu op het kleurentv-scherm een klok zien die we telkens andere tijden kunnen geven, kunnen laten tik-takken en laten spelen op hele en halve uren.

Het gebruik van de klokstempels wordt gemotiveerd met een *leerdoel* (het leren van de klok) en met een *activiteit* voor de leerlingen (het intekenen van de wijzers). Het gebruik van informatietechnologie wordt geïllustreerd met *franje* (een klok die kan tik-takken en spelen op de hele en de halve uren).

Als het één en ander theoretisch verantwoord moet worden, is de vakliteratuur niet geheel vrij van jargon. Soms valt dat wel erg zwaar op de maag, getuige het volgende citaat uit hetzelfde artikel:

(...) Het didaxorama van de informatietechnologie maakt het enerzijds aantrekkelijk deze technologie onderwijskundig aan te wenden vanwege het verbeteringsperspectief en het vervangingsperspectief, en anderzijds stelt het ons professioneel voor nieuwe eisen en uitdagingen om de juiste keuzen te doen, deze onderling te relateren en derhalve onderwijskundig het maximum te benutten waarover de informatietechnologie potentieel beschikt om nog beter te onderwijzen, opdat anderen daardoor nog beter leren.

In gewoon Nederlands vertaald staat hier ongeveer: de informatietechnologie biedt nieuwe mogelijkheden, waar we over na moeten denken en die we met verstand moeten benutten. Eén van de mogelijkheden die wel eens interessant zou kunnen worden, is de beeldplaat. Een beeldplaat heeft het formaat van een grammofoonplaat en het glimmende uiterlijk van een compact disc. De beeldplaat is geschikt als opslagmedium voor zowel losse

plaatjes als filmfragmenten. De opslagcapaciteit is ruim 50.000 dia's. Elk plaatje afzonderlijk is direct toegankelijk. De beeldplaat kan aangestuurd worden met een computer. Nu heb ik helemaal geen beeldplaat, anders dan om even omhoog te houden, maar ik kan wel fantaseren over toepassingen voor wiskundeonderwijs. Ik ben me bewust van het feit dat het een erg kostbaar medium is en om die reden misschien minder geschikt. Toch neem ik de vrijheid om aan de hand van een serie dia's een impressie te geven van enkele thema's die op een beeldplaat uitgewerkt zouden kunnen worden. Trouwens, nu ik het toch over dia's heb, dat is een medium dat we óók bij wiskundeonderwijs zouden kunnen gebruiken. Natuurlijk, u kunt allerlei tekenwerpingen maken van praktische aard. Maar laten we ons wel realiseren dat we bereid zijn enorm veel praktische hobbels te nemen als het om moderne apparatuur gaat, terwijl we tegelijkertijd traditionele hulpmiddelen links laten liggen omdat het 'teveel gedoe' is. We meten wel eens met twee maten...

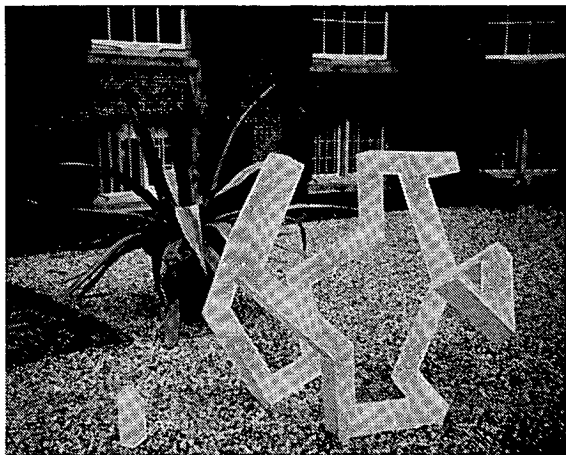
Dan nu aan de hand van vier thema's mijn beeldplaatfantasie. De thema's die ik heb gekozen zijn achtereenvolgens: *meetkunde; de wereld wordt geteld, gemeten, gecodeerd, ...; groot, groter grootst; tijd*.

(Opmerking: bij deze geschreven versie van mijn lezing is het uiteraard niet mogelijk om alle 35 dia's die ik vertoond heb, te bespreken).

Thema 1 - meetkunde

Op de ICME 6-conferentie deze zomer in Boedapest heb ik een beeldplaat gezien over (ruimte)-meetkunde. Ik was daarvan nogal onder de indruk, omdat een beeldplaat door de kwaliteit van de beelden voor meetkunde zoveel meer mogelijkheden biedt dan een microcomputer. De tekeningen geproduceerd door een MS-DOS computer zijn zo rafelig en primitief, dat ze eigenlijk niet om aan te zien zijn. Als we denken aan realistisch wiskundeonderwijs, dan zijn de computertekeningen een stap terug vergeleken met alle prachtige meetkundige vormen die we in de wereld om ons heen kunnen aantreffen. Omdat je natuurlijk niet voortdurend stadswandelingen met de klas kunt maken, biedt de beeldplaat hier een alternatief. Nogmaals, vindt u dit te futuristisch, vervangt u dan het woord

beeldplaat in mijn verhaal door dia. Ik laat u om te beginnen enkele voorbeelden zien van meetkundige vormen in kunst (fig. 17), dagelijks leven (fig. 18), natuur en architectuur.



Figuur 17 De kunstenaar Popke Bakker heeft zich bij het maken van dit werkstuk laten inspireren door het regelmatig twaalfvlak. Het is als het ware een minimale uitvoering van het twaalfvlak, één die net niet uit elkaar valt. Hoeveel ribben had de kunstenaar hiervoor nodig?

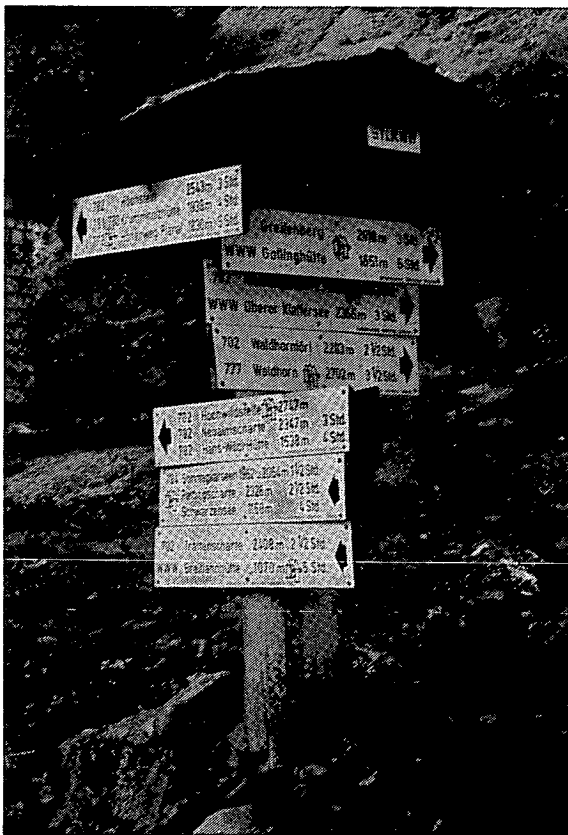
Bij het verzamelen en ordenen van de dia's drong de meetkunde zich pregnant naar voren. Andere onderwerpen uit de meetkunde die bij het sorteren naar bovenkwamen, zijn *perspectief* en *geometrische motieven en symmetrie*.



Figuur 18 Deze glashak trof ik aan in Parijs. Is het een regelmatig twaalfvlak?

Thema 2 - de wereld wordt geteld, gemeten en geco-deerd

Over mijn tweede thema heb ik minder plaatjes dan over meetkunde. Dit komt mede door de aard van het onderwerp, vermoet ik. Meetkunde haal je vooral uit de ruimtelijke wereld om ons heen, en niet zozeer uit de krant bijvoorbeeld. Kranten en tijdschriften zijn echter juist wel een goede bron voor dit tweede thema. Ik denk dan bijvoorbeeld aan allerlei vormen van statistieken en grafieken. Toch is het ook in the middle-of-nowhere verstandig om de camera in de aanslag te houden, want anders had ik de foto hieronder niet kunnen maken.



Figuur 19

Dit bordje staat bij een berghut in de Alpen. Er staat informatie op over looptijden, hoogtes en routenummers. Als je de bordjes van meer hutten hebt, zou je een kaart kunnen tekenen.

Het decoderen van allerlei informatie, op bordjes en dergelijke, reken ik dus ook tot dit thema.

Thema 3 - groot, groter, grootst

Het schatten van groottes, hoeveelheden, leeftijden, afstanden, enzovoort, is iets waar we voordurend mee geconfronteerd worden. We willen die dingen ook graag weten, denk maar aan het type informatie dat vaak bij rondleidingen wordt gegeven. De gids vertelt hoe hoog/oud/groot/zwaar/lang/duur/sterk het te bewonderen object is.



Figuur 20 Deze sequoia's staan in een National Park in de Verenigde Staten. Er bestaan sequoia's van meer dan 3000 jaar oud. De sequoia is niet de hoogste boom (dat is de sugar pine, met een hoogte tot 200 voet), maar wel de boom die het grootste volume kan behalen.

Kunt u een schatting maken van de diameter van de bomen op de foto? Hoeveel kinderen zijn nodig om in een kring de boom te omarmen?

Thema 4 - tijd

Het thema tijd biedt veel aanknopingspunten voor wiskunde-onderwijs. Door de eeuwen heen hebben mensen zich bezig gehouden met het tellen van jaren, maanden, dagen, uren. Op oude gebouwen komen we nog jaartallen in Romeinse cijfers tegen. Voor het bijhouden van de uren op een dag hebben we niet alleen klokken, maar bijvoorbeeld ook zonnewijzers. Die zijn er in allerlei soorten en maten. Zodenk ik dat rond het thema tijd onderwerpen variërend van Romeinse cijfers tot maandstanden en zonnestanden bij elkaar kunnen komen.

Figuur 21 De islamieten hanteren een andere kalender dan de christenen. Op de foto is te zien dat het in ons jaar 1987 volgens de islamitische jaartelling 1407 is. De maand Ramadan (de vastenmaand) begon dat jaar op 30 april. De aanvang van de vastenmaand wisselt per jaar, althans volgens onze kalender.

Als in 1992 de grenzen van Europa open gaan en het nieuwe wiskundecurriculum voor 12-16 klaar is, zou ik het wel weten. Werken aan een beeldplaat voor wiskunde-onderwijs met aparte geluidssporen voor alle talen van Europa, dat lijkt mij een mooi project.

Maar op dit moment is mijn tijd om, want mijn klokje wijst precies 16.15 uur.

Verschenen

R. Fletcher: *Practical Methods of Optimization*. John Wiley and Sons; £ 24,50; 436 blz.

Dit boek behandelt in twee delen de Unconstrained en Constrained Optimization. De nadruk ligt sterk op de toepasbaarheid en daardoor wordt de meeste aandacht besteed aan methoden die betrouwbaar en efficiënt zijn gebleken. Ieder hoofdstuk is voorzien van een forse verzameling opgaven.

T. Okubo: *Differential Geometry*. Marcel Dekker; \$ 150,00; 816 blz.

De auteur geeft een overzicht van de meest bekende onderwerpen uit de differentiaal meetkunde (differentieerbare variëteiten; Lie groepen; vectorvelden; Riemannse oppervlakken etc.). Het boek moet worden gezien als een tekstboek zowel als een naslagwerk voor dit uitgebreide gebied.

'Wiskundeonderwijs aan...'

► Ideaal

A. Algra

Het Baken is een brede scholengemeenschap – i.b.o., mavo, havo en v.w.o. – die in 1983 gestart is in de groeistad Almere. Niet gehinderd door bestaande tradities en verworven rechten konden de polderpioniers trachten, een school op te bouwen waarin een aantal onderwijskundige idealen optimaal verwezenlijkt worden. In dit artikel wordt kort de kern van die idealen aangegeven, en nagegaan hoe die kern binnen het wiskundeonderwijs gestalte kreeg. Daarnaast wordt op drie aspecten wat uitgebreider ingegaan. Dat zijn: de keuze van de relevant geachte inhouden en dan met name de plaats van het variabelen-begrip in het onderwijs, de keuze van een wiskundemethode, en de wijze waarop na de brede heterogene periode wordt gedetermineerd.

De idealen van de school

Drie hoofdpunten bepalen de idealen van Het Baken, zoals de oprichters die bij de start in 1983 voor ogen hadden.

In de eerste plaats is Het Baken een oecumenische school, waarbij men tracht de levensbeschouwelijke identiteit het gehele schoolgebeuren te laten doortrekken.

In de tweede plaats kiest de school ten behoeve van kansengelijkheid voor een zo lang mogelijk uitstel

van studie- en beroepskeuze. Dat wordt uitgewerkt door de leerlingen drie jaar lang in heterogene groepen bijeen te houden. Gedurende die drie jaar is het onderwijsprogramma voor de leerlingen gelijk, en moet dan ook langs andere wegen dan via de differentiatie in leerstofaanbod recht gedaan worden aan de verschillen tussen leerlingen. De heterogene jaren worden geacht een programma te hebben dat de voor ieder noodzakelijke basiskennis (basisvorming!) bevat.

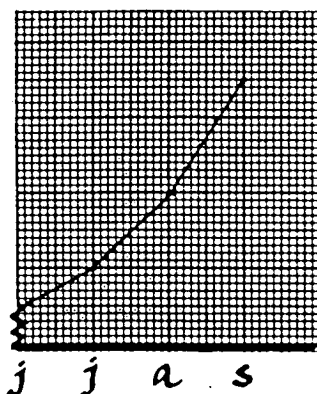
In de derde plaats stoelt het onderwijs op Het Baken op de beginselen van ontwikkelend onderwijs. Dat betekent, dat lesmateriaal en lesopbouw op de theorieën van Russische leerpsychologen zijn gebaseerd. Voor de onderwijsgevende houdt dit vooral in, dat hij bepaalde geconstateerde capaciteiten van leerlingen (of het gebrek daaraan) niet als een vast gegeven mag beschouwen maar dient te zoeken naar wegen om tot verdere ontwikkeling te komen.

Oecumenische identiteit

De oecumenische identiteit van de school moet, zo zeggen de uitgangspunten, niet slechts herkenbaar zijn in een paar uur godsdienstonderwijs. Het hele schoolgebeuren dient ervan doortrokken te zijn. Wat betekent dat nu voor het wiskundeonderwijs? Allereerst uiteraard, dat de docent als christen voor de klas staat, en zich ervan bewust is dat zijn overtuiging zijn handelen – dus ook zijn pedagogisch handelen naar de leerlingen toe – beïnvloedt. Daarnaast kan de identiteit invloed hebben op de leerstof. Na ampele overwegingen is de wiskundesectie tot de conclusie gekomen, dat die invloed beperkt is. Er is geen specifiek christelijk leerplan. Wel hebben wij ervoor gekozen, in de lessen aandacht te besteden aan de wijze waarop wiskunde als machtsmiddel kan worden gebruikt (misbruikt). Hierbij kan onder meer worden gedacht aan het manipuleren met de schaalverdeling op de assen bij het tekenen van grafieken (zie figuur 1), of met statistische gegevens. Wij hebben de keuze gemaakt op grond van onze levensbeschouwelijke overtuiging, maar zijn ons ervan bewust dat die zeker niet exclusief aan christenen is voorbehouden.

"Voor een reclamecampagne is het natuurlijk goed om kopers de indruk te geven dat BLITS steeds meer verkocht wordt. En, als ik zo naar de cijfers van de laatste paar maanden kijk, dan zit er wel weer enige stijging in. Daar kunnen we gebruik van maken! Kijkt U maar. Dat ziet er toch heel wat positiever uit!"

80.000
78.000
76.000



Figuur 1

Ontwikkeland onderwijs

Een gedetailleerde beschrijving van de leerpsychologische beginselen van ontwikkelend onderwijs valt buiten het bestek van dit artikel. Geïnteresseerden verwijs ik naar het boek van prof. Van Parreren met deze titel. Gelukkig kunnen wij constateren, dat de ontwikkelingen binnen het wiskundeonderwijs, destijds geïnitieerd door het IOWO en door vele anderen voortgezet, hier nauw bij aansluiten. Steeds meer immers worden de accenten verschoven van mechanistische hantering van algoritmes naar begripsvorming, terwijl aspecten zoals zingeving en reflectie meer aandacht krijgen:

Ontwikkeland onderwijs heeft niet alleen invloed op de leerstof, maar ook op de houding van de man of vrouw voor de klas. Te vaak nog zijn wij als docenten opgevoed met de overtuiging dat de één een wiskundeknobbel heeft en dat de ander die moet ontberen. Vanuit de idealen van de school is een dergelijke tweedeling verwerpelijk. Zonder te beweren dat iedereen uiteindelijk op hetzelfde hoge niveau kan uitkomen, gaan wij er toch van uit dat waar in eerste instantie bij leerlingen vooral wiskundige onvermogens aanwezig schijnen, die toch tot capaciteiten met een zekere wiskundige kwaliteit kunnen worden ontwikkeld. Wiskunde is leerbaar, de leerling kan zich ontwikkelen.

Basisvorming voor iedereen

De klassieke vraag die destijds door de rector aan sollicitanten voor wiskunde werd gesteld was: 'wat is volgens jou de wiskunde die ook de leerling die later naar het lno gaat, in de drie jaren van basisvorming moet hebben gehad?' In die vraag ligt de kern van een van de redenen voor de driejarige heterogene periode. Na de basisschool is de basisvorming van de leerling niet voltooid en moet nog een communaal programma volgen. Het antwoord op de vraag wat nu precies die voor eenieder essentiële basisvorming is, is echter arbitrair. In pessimistische ogenblikken denk ik wel eens dat dat niet veel meer is dan het vermogen om te rekenen met kloktijden en met huishouduitgaven. Dat betekent, dat al zo'n drie weken na de start van het eerste jaar de leerlingen zouden kunnen worden verdeeld in drie stromen, één waarin *mathematics for adult life* worden aangeboden, één met *mathematics for profession*, en één met *mathematics for higher education*. Hoewel zo'n indeling ongetwijfeld efficiënt onderwijs oplevert, kiest Het Baken er niet voor. De reden daarvoor is, dat na een paar weken voortgezet onderwijs nog niet kan worden uitgemaakt wie voor welke stroom geschikt is. Zelfs als wij erin zouden slagen objectieve tests te ontwerpen die de geschiktheid van leerlingen meten, dan nog zouden die tests alleen de situatie van dat moment aangeven. En zoals al eerder gesteld: wij gaan ervan uit,

dat leerlingen over veelal vooraf niet opgemerkte ontwikkelingsmogelijkheden beschikken. Wij stellen ons dan ook niet voortdurend de onmogelijk objectief te beantwoorden vraag of een bepaald stuk leerstof nu echt voor iedere burger noodzakelijk is. Wel is uiteraard ons streven, de relevantie van de leerstof zo groot én voor leerlingen zo duidelijk mogelijk te maken. Dat trachten we onder meer te bereiken door het hanteren van echt functionele contexten; dat wil zeggen, contexten waarin de te leren wiskunde 'levend' aanwezig is, en die niet slechts dienen als motiverende kapstok (instapprobleem).

In 'oude' wiskundemethodes kwam het voor dat eerst een pakkend praktisch voorbeeld werd gegeven: hoe bepaal je de hoogte van een toren vanaf de grond? Daarna volgden veertig lessen goniometrie waarin voortdurend in abstracte driehoeken werd gewerkt. In onze visie zou die praktische toepassing steeds moeten terugkeren, en kan zeker in de eerste jaren de hoeveelheid tijd die wordt besteed aan het werken los van de toepassing heel beperkt blijven. Ook op dit punt worden wij gelukkig weer geholpen door de ontwikkelingen in het onderwijs zoals die zich landelijk voltrekken.

Variabelen

Hoort het nu wel of niet bij de voor iedereen noodzakelijke basisvorming? Als het over variabelen gaat, kunnen de leerplanexperts bij wiskunde omtrent deze vraag verhitte discussies voeren. Ook de wiskundigen van Het Baken hebben zich hiermee bezig gehouden. Na enige discussie hebben we besloten, de verhitte discussies aan de experts over te laten. De vraag of variabelen nu wel of niet tot de basisvorming behoren, laten wij onbeantwoord. Ook op andere gronden kunnen wij namelijk een opname van variabelen in het programma verdedigen. De driejarige heterogene periode heeft niet alleen als doelstelling, de basisvorming van de leerlingen te voltooien, maar moet tevens groeikernen aanbrengen voor verdere studie én moet op verantwoorde wijze aan de leerling duidelijk maken wat voor hem of haar de meest geschikte vervolgstudie is. Op die laatste twee doelstellingen past een behandeling van het variabelenbegrip voortreffelijk.

De experts kunnen wij vanuit de praktijk meedelen dat variabelen door leerlingen als relevant en interessant worden ervaren (eindelijk eens echte wiskunde), terwijl zij er zich als geen ander onderwerp voor lenen om aan te geven wat voor wiskundevervolg het beste bij de leerling past: *mathematics for adult life, mathematics for profession, of mathematics for higher education*.

Determinatie

Voor het succes in de vervolgopleiding zijn niet zozeer de in de eerste fase geleerde feiten van belang, als wel de daar geleerde attitudes. Als voor die noodzakelijke attitudes voldoende aandacht is, is het mogelijk om leerlingen van lbo tot en met vwo gedurende de eerste drie jaren bijeen te houden, zonder dat één van deze groepen op termijn tegen een onoverkomelijke achterstand aanhikt.

Dit uitgangspunt van het onderwijs aan Het Baken bepaalde in de eerste jaren mede de wijze waarop de determinatie – het vaststellen van de voor de leerling meest gewenste vervolgopleiding – gestalte kreeg. Niet de feitelijke prestaties van leerlingen tijdens lessen en toetsen werden gemeten, maar gezocht werd naar de feiten overstijgende attitudes; bij wiskunde onder meer het vermogen tot probleemoplossend handelen. Voor de schoolpraktijk bleek dit principieel zeer juiste uitgangspunt evenwel niet hanteerbaar. Attitudes zoals het vermogen tot abstract denken of probleemoplossend handelen zijn moeilijk te operationaliseren. Wat veelal in de rapportage werd aangegeven, was niet meer dan een indruk van de docent. En zoals bekend, zijn indrukken, ook bij docenten die volledig te goeder trouw handelen, zeer vatbaar voor vooroordelen. Zelfs als een docent erin zou slagen deze klip te omzeilen, dan nog had hij te weinig feitelijke gegevens tot zijn beschikking, zodat ouders en leerlingen aan zijn oordeel soms maar weinig waarde hechtten.

Al vrij kort na de start van de school heeft Het Baken dan ook gebroken met deze determinatie-op-attitudes. Wij huldigen nog steeds het standpunt, dat bepaalde attitudes veel bepalender zijn voor het schoolsucces op bijvoorbeeld het vwo, dan de aangeleerde feiten. Maar dat succes uit zich in



het goed kunnen maken van de opgaven die op dat schooltype gangbaar zijn. Uiteraard proberen de opstellers van examenopgaven zoveel mogelijk gewenste attitudes in de opgaven te verwerken, maar voor de docent en de leerlingen is het beslist niet noodzakelijk, voortdurend bewust met die attitudes bezig te zijn. Deze gedachte vormt de basis van de determinatie zoals die op Het Baken de laatste jaren gestalte heeft gekregen. Er zijn attitudes die het schoolsucces bepalen. Die attitudes zijn door leerplanmakers en producenten van examenopgaven vertaald in opdrachten die geacht worden op de attitudes een beroep te doen. Welke attitudes dat zijn, daarover hebben we allemaal onze vrome gedachten. Maar voor de praktijk hoeven we die niet te benoemen.

Wij beschouwen het derde leerjaar, het leerjaar waarin de determinatie plaatsvindt, als een soort proeftuin voor de bovenbouw. In die proeftuin worden leerlingen geconfronteerd met onderwijscondities en opgaven die overeenkomen met het aanbod in de verschillende bovenbouwopleidingen, dus lbo t/m vwo. Dat betekent, dat leerstof opgesplitst is in verschillende lijnen, waarbij de ene lijn het karakter heeft van een havo-vwo-methode en de andere van een lbo-mavo-methode. En toetsen bevatten opgaven met verschillend karakter, lopend van lbo-niveau tot vwo-niveau. De punten die de leerling op deze verschillende vragen scoort, bepalen het oordeel van de wiskundesectie over de geschiktheid voor een vervolgonderwijs.

Ongetwijfeld wordt daarbij het aantal punten weer mede bepaald door de gewenste attitudes. Maar welke attitudes dat zijn, en in welke verhouding ze een rol spelen, daarover breken we ons het hoofd niet.

De gekozen determinatiemethoden maakt misschien een wat conservatieve indruk. Wij zijn ons er terdege van bewust, dat het systeem eerder wat pragmatisch dan idealistisch is te noemen, en maar weinig afwijkt van wat in het traditionele, categoriale onderwijs gebeurt. Het grote verschil zit echter hierin, dat bij ons de leerling eerst een aantal jaren de kans krijgt zich in alle rust te ontwikkelen, en dat hij zich pas op een bepaald niveau hoeft te bewijzen

als hij de consequenties van het wel of niet leveren van een prestatie kan overzien.

De methode

De ambitieuze idealen van Het Baken maakten, dat veel vaksecties het als vanzelfsprekend beschouwden dat eigen materiaal moest worden ontwikkeld. Immers, welke uitgever had een methode op de plank die strookte met de oecumenische identiteit van de school en met de beginselen van ontwikkelend onderwijs.

Op het glibberige pad van de ontwikkeling van eigen materiaal heeft de wiskundesectie zich echter heel terughoudend begeven. In de eerste plaats, omdat wij van mening zijn – en het befaamde OTO-onderzoek staft die opvatting – dat met een verantwoorde pedagogische begeleiding van de leerling en een goede begeleiding van het leerproces, de weektaak al meer dan gevuld is. Te veel tijd in materiaalontwikkeling steken zou betekenen, dat andere wezenlijke aspecten van het leraarschap in de knel komen. Daar kwam een argument bij, dat vooral in de eerste jaren telde, toen de wiskundesectie – de hele school trouwens – nog een zeer geringe omvang had. Het van dag tot dag zelf materiaal produceren zou tot een zeer kwetsbare situatie hebben geleid bij uitval van een docent. Waar vind je zo snel een invaller die de fakkel kan overnemen?

De wiskundesectie koos bij de start van de school voor de methode 'Passen en Meten', een methode die geacht werd goed aan te sluiten bij de mogelijkheden van een heterogene leerlingengroep. Voor de broodnodige aanvulling in de richting van ontwikkelend en contextrijk onderwijs werd dankbaar gebruik gemaakt van door de SLO ontwikkeld materiaal.

In de praktijk bleek die combinatie niet altijd te voldoen; niet zozeer door gebrek aan kwaliteit van een van de delen als wel door het verschil in stijl en aanpak. De voortdurende overgang van het meer op zelfwerkzaamheid gerichte Passen en Meten naar het op groepswerk geënte SLO-materiaal kostte de leerlingen zichtbaar moeite. Na een aantal jaren werd dan ook gekozen voor de productie van eigen katerns, waarin het SLO-materiaal de basis vormde en die werden aangevuld met eigen

materiaal voor de onderwerpen die naar onze mening in het SLO-materiaal onderbelicht bleven (variabelen!). Hoewel dit eigen materiaal een aantal zeer waardevolle elementen bevatte, voldeed het toch niet helemaal.

Typografisch kon het uiteraard de vergelijking met gedrukte methoden niet doorstaan, terwijl het samenrapen van toch weer qua karakter wisselend materiaal bij de leerlingen de indruk wekte, 'dat er maar wat werd geëxperimenteerd'. Nu kan dat gevoel op zichzelf heel stimulerend zijn voor zowel leerlingen als docenten, in de Almeerse situatie, waar alles in opbouw is en ook veel van de leerlingen en leraren in een nieuwe woonomgeving en werksituatie een positie moeten veroveren, versterkt dat gevoelens van onzekerheid die op termijn een leerproces behoorlijk kunnen frustreren. Vandaar dat besloten is om met ingang van de cursus 1988-1989 weer op een 'off-the-shelf' uitgave terug te vallen. Na onderzoek was naar het oordeel van de wiskundesectie de methode 'Wiskundelij' het boek dat het meeste recht deed aan enerzijds de schooluitgangspunten, en anderzijds de mogelijkheden en onmogelijkheden van onze schoolbevolking. Al voldoet de methode, zeker waar het gaat om contexten, niet helemaal aan de hoge eisen die Het Baken stelt, toch kunnen we constateren dat het boek wordt gebruikt tot volle tevredenheid van docenten en (vooral) leerlingen.

Heterogeniteit

Een aantal keren is het al zijdelings aan de orde gekomen: Het Baken werkt met een heterogene groep, die drie jaar bijeengehouden wordt. Hoe gaat de school met de verschillen tussen leerlingen om? In het kader van de diverse onderwijspolitieke discussies heeft de vraag naar het leren in heterogene groepen ruime aandacht gekregen. In dit artikel wil ik er dan ook maar kort op ingaan. Alle uit diverse publikaties (o.m. van SLO en Rijksuniversiteit Utrecht) bekende systemen worden op Het Baken gehanteerd. Het accent ligt daarbij vooral de eerste jaren op didactische differentiatie: het streven om leerlingen langs verschillende wegen tot hetzelfde onderwijsresultaat te leiden, zodat de leerwegen niet te vroeg uiteengaan en keuzemoge-

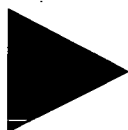
lijkheden niet voortijdig worden geblokkeerd. Met niveaueverschillen wordt rekening gehouden door een zo open mogelijke vraagstelling, die beantwoording op verschillend niveau mogelijk maakt. In het derde leerjaar is een meer programmatische differentiatie – niet alle leerlingen krijgen alle onderwerpen – geoorloofd.

Op grond van onze ervaringen menen wij, dat het gedurende drie jaar bijeenhouden van leerlingen de ontwikkelingsmogelijkheden van leerlingen positief beïnvloedt, terwijl het binnen de bestaande onderwijsinhouden (examenprogramma's) van de wiskunde mogelijk is. Wij realiseren ons wel, dat Het Baken daarbij profiteert van het feit dat de volle breedte van de bovenbouw in de eigen school aanwezig is, en dat de kansen voor een driejarige heterogene periode sterker afhankelijk zijn van de houding van de samenleving (ouders en leerlingen) dan van onderwijskundige hoogstandjes.

Over de auteur:

Ameling Algra (1952) was na de studie wiskunde aan de Vrije Universiteit in Amsterdam negen jaar als docent wiskunde verbonden aan de christelijke scholengemeenschap voor havo en atheneum 'De Lage Waard' in Papendrecht.

Vanaf de start van Het Baken in 1983, tot heden, geeft hij wiskunde aan deze school. Stoomtreinen vindt hij veel interessanter dan wiskunde.



Mededeling

VALO-conferentie

Op 18 en 19 maart 1990 wordt de VALO-conferentie 'Wiskunde in de onderbouw' gehouden in het EurOase hotel te Beekbergen.

Inlichtingen en aanmeldingsformulieren zijn op te vragen bij:

VALO W en I

Antwoordnummer 2041 (portvrij)

7500 VB Enschede

tel. 053 - 84 04 23.

'De zakrekenmachine'

► Zakrekenmachine: wiskunde anders?

Frans Bouman

Als een leerling(e) de oppervlakte van een vierhoek geeft als $\frac{1}{3} \cdot 5^3 + 7$ wordt er zuinig gekeken; $\frac{1}{2}\sqrt{2} + 7$ is wel acceptabel als antwoord. Ik vind beide antwoorden in die vorm onzin; de oppervlakte van een vierhoek is een getal, niet een aanwijzing hoe je dat getal zou kunnen berekenen. Wel zal natuurlijk aangegeven moeten worden, hoe nauwkeurig het antwoord moet zijn.

Toen ik mijn leerlingen het sommetje $1,53 + 0,3333 = \dots$ voorlegde, kreeg ik in zevenentwintig van de negenentwintig gevallen het antwoord 1,8633. De twee leerlingen die begrepen dat ik bepaalde bedoelingen had – ze zaten naast elkaar – kwamen met het antwoord $1 \frac{259}{300}$; ze redeneerden: $1,53 + 0,3333 = 1 \frac{53}{100} + \frac{1}{3} = 1 \frac{159}{300} + \frac{100}{300} = 1 \frac{259}{300}$.

Mijn conclusie is dan dat ze niet met decimale breuken kunnen rekenen. Diezelfde leerlingen schrijven wel te pas en te onpas ' $\wedge \times \in \mathbb{R}$ ' als ze vermoeden dat de situatie erom vraagt. Hoe kunnen we toch de leerlingen vertellen wat reële getallen zijn, als ze zo weinig notie hebben van wat rationale getallen en decimale breuken zijn?

Een voorbeeld: los op $x^2 - 2x - 7 = 0$.

Oplossing: $\left\{ \frac{2 + \sqrt{32}}{2}, \frac{2 - \sqrt{32}}{2} \right\}$

Overigens zullen veel van mijn collega's dit antwoord maar voor een deel goedkeuren; nee, het moet zijn $\{1 + 2\sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2}\}$. Over de juistheid van het antwoord $\{3,83; -1,83\}$ kunnen hele discussies ontstaan. Ik heb het vermoeden, dat de voorkeur voor het tweede antwoord twee redenen heeft:

1e. $1 + 2\sqrt{2}$ en $1 - 2\sqrt{2}$ zijn als zodanig nog reële getallen.

2e. Onze leraren wilden ons het opzoeken van de wortel besparen.

We leven in de tijd van HEWET, HAWEX, context-rijke wiskunde. We moeten toch de moed hebben om te zeggen: 'Nu we een ZRM tot onze beschikking hebben, kunnen de wortels weg!'. Er is toch nauwelijks een context te bedenken waarbij het antwoord in de vorm van een wortel gegeven kan worden.

De opgave 'Los op: $x^2 - 3x + 1 = 0$ met $x \in \mathbb{R}$ ' wordt door een groot aantal leerlingen moeiteloos opgelost. De opgave 'Laat zonder de vergelijking op te lossen zien dat $3/2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ een oplossing is van de vergelijking $x^2 - 3x + 1 = 0$ ' zal voor veel van diezelfde leerlingen een onoplosbaar probleem blijken te zijn.

We leren de leerlingen in het eenvoudigste geval voor wat betreft de wortels de volgende trucs:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \sqrt{12} = 2\sqrt{3} & \text{b. } \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \text{c. } \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} & \text{d. } \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} (= 6) \end{array}$$

ad a. Toen we nog geen rekenmachines tot onze beschikking hadden, werd het rekenwerk, als het al uitgevoerd werd, gedaan met tabellen. Zo'n tabel gaf dan de wortels van de natuurlijke getallen van 1 tot en met 1000 in b.v. drie decimalen.

Moest dan de wortel bepaald worden van 12300, dan ging dat als volgt: $\sqrt{12300} = \sqrt{100 \cdot 123} = 10 \cdot 11,091 = 110,91$. Het aanleren van truc a is hiermee gelegitimeerd.

Er zijn wel meer voorbeelden te bedenken:

$\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2} = 1,414$; ook hier was truc a rekenwerkbesparend.

$\frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$; zelfde commentaar!

ad b. Het voordeel van deze truc springt in het

oog. Het uitrekenen van $\frac{3}{1,414}$ is heel wat bewerke-

lijker dan het uitrekenen van $1,5 \cdot 1,414$; het was om die reden heel zinvol om wortels uit de noemer van een breuk te weren.

ad c. Ook hier springt het rekenvoordeel in het oog!

ad d. Idem.

Ik weet niet wat de argumenten zijn geweest om de wortelmanipulatie in ons leerplan op te nemen, maar ik vermoed dat het te maken heeft met:

a. het beperken van het rekenwerk.

b. het beperkt kunnen houden van tabellen.

Nu is dat evenwel niet meer nodig!

Ik zou er daarom voor willen pleiten het manipuleren van wortels uit de onderbouw te weren; zodra in een probleem een wortel voorkomt, moet deze vervangen worden door zijn decimale benadering. Dit laatste is, gegeven het feit dat de leerlingen over een ZRM beschikken, geen probleem. In verband hiermee zou ik ook willen voorstellen het onderwerp 'het reële getal' uit het leerplan voor de onderbouw te verwijderen: het is te moeilijk en niet strikt nodig. Het lijkt mij voldoende om leerlingen die het probleem zien, te vertellen dat hier te zijner tijd (in bovenbouw van vwo en havo) op teruggekomen zal worden.

Ik zou hieraan nog het volgende willen toevoegen:

1. De vraag 'Van welk getal is 7 het kwadraat?' zal vergezeld moeten gaan van de gewenste nauwkeurigheid.

Bovendien zullen de leerlingen moeten leren, wat er met de nauwkeurigheid gebeurt bij berekeningen. $100 \cdot 1,53 = 153$ en niet $153,0$ of nog erger $153,00$. $1,53 \cdot 1,53 = 2,34$ en niet $2,3409$.

Als het reële getal a weergegeven wordt door $1,53$, wil dat zeggen:

$a \in [1,525; 1,535]$;

dan geldt $a^2 \in [2,325625; 2,356225]$.

$2,3409$ representeert een getal dat element is van $[2,34085; 2,34095]$.

$2,34$ representeert een getal dat element is van $[2,335; 2,345]$.

$2,34$ is dus een betere 'benadering' van $1,53 \cdot 1,53$ dan $2,3409$.

De leerlingen zullen moeten leren hoeveel decimaal zinvol zijn. (Ik zie onze collega's natuurkunde al

blij kijken. ...). Deze 'nauwkeurigheid' zal voor de leerlingen en waarschijnlijk voor hun docenten een heel moeilijk hoofdstuk worden, maar het zal zeker niet moeilijker zijn dan het hoofdstuk 'het reële getal'.

2. Het proberen zou in ons onderwijs een kans moeten krijgen.

Ik vermoed dat de enige reden dat de vierkantsvergelijkingen in onze leerboeken zo'n prominente rol spelen is, omdat ze exact (sic!) oplosbaar zijn. Voor zover mij bekend komt de vierkantsvergelijking in de praktijk niet zo veel voor. Ze mogen wat mij betreft wel blijven, maar het zou veel zinniger zijn de leerlingen vertrouwd te maken met de iteratieve methode.

De zogenaamde *abc*-formule werkt alleen voor de vierkantsvergelijking, terwijl de iteratieve methode ook bruikbaar is voor hogeregraadsvergelijkingen. Het vele rekenwerk dat vroeger als argument tegen de iteratieve methode aangevoerd werd, is, nu de ZRM er is, geen bezwaar meer.

Een opdracht als: 'Benader in twee decimalen nauwkeurig de oplossing van $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ die tussen 2 en 3 ligt' lijkt mij heel aardig.

Ik zou ervoor willen pleiten, nu de ZRM tot onze beschikking staat, de iteratieve methode als oplossingsmethode van hogeregraadsvergelijkingen te introduceren. Ik weet dat ook deze methode zijn beperkingen heeft, maar wat heeft dat niet?

Ik ben me bewust dat ik in het bovenstaande heel wat overhoop haal. Enkele overwegingen die hieraan ten grondslag liggen wil ik nog even noemen.

* Het onderwerp 'het reële getal' is voor de meeste leerlingen uit de onderbouw te moeilijk. In het gunstigste geval kom je tot enig verbalisme.

* De ZRM is een machtig hulpmiddel; we kunnen het wiskunde-onderwijs verbreden en verdiepen door er gebruik van te maken. Hiervoor is wel nodig dat we de leerlingen echt vertrouwd maken met de ZRM, niet incidenteel, maar geïntegreerd in het totale lesgebeuren.

* Willen we niet alleen meer aandacht voor oplossingsmethoden (heuristieken) maar vooral ook meer bruikbare wiskunde voor alledag, dan zullen we moeten werken in en vanuit herkenbare contexten. Het gebruik van de ZRM kan daarbij behulpzaam zijn.

● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

► Opgave 612

Zoals de meeste puzzelaars weten, bestaan *pentomino's* uit 5 vierkantjes. Als we de stukjes ook mogen omdraaien, dan bestaan er 12 verschillende puzzelstukjes. Hiermee zijn in de loop der tijd al vele problemen gemaakt en daarna (als het mogelijk was) ook weer opgelost.

In 1907 is eigenlijk het allereerste pentomino-probleem verschenen. In 'The Canterbury Puzzles' gaf H. E. Dudeney als probleem 74 'The Broken Chessboard'. Hierin was een schaakbord in 13 stukken gebroken. De puzzelstukjes hebben dus zwarte en witte vierkantjes. In feite zijn het de 12 pentomino's en een vierkant tetromino.

In het Engelse tijdschrift 'Fairy Chess Review' verschijnen in de jaren 30 tot en met 50 vele problemen met polyomino's. Het worden echter 'dissection problems' genoemd.

Pas in 1953 geeft Solomon W. Golomb in een lezing aan de Harvard Mathematics Club er de naam *polyomino* aan.

Grote bekendheid kreeg deze puzzel pas na het artikel in Scientific American van Martin Gardner. In de 'Mathematical Games' rubriek van mei 1957 noemt Martin de lezing van Golomb. Vele lezers van deze rubriek reageren enthousiast.

Golomb zelf publiceert een reeks artikelen in 'Recreational Mathematics Magazine' in 1961 en 1962.

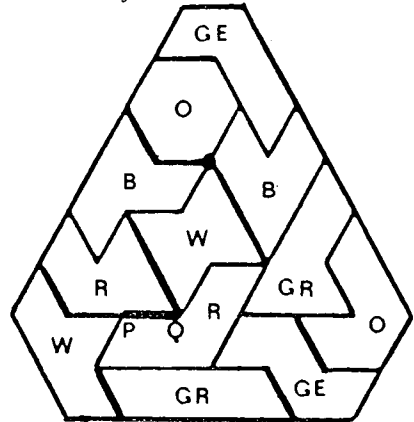
In Engeland is T. H. O'Beirne begonnen met een wiskundige puzzelrubriek in 'New Scientist'. Die serie zal 60 wekelijkse afleveringen beslaan, waarvan de eerste op 5 januari 1961 verscheen. Aflevering 44 op 2 november 1961 kreeg als titel 'Pentominoes and Hexiamonds'. Hij is degene die de naam *polyiamond* bedenkt: een diamond bestaat uit 2 gelijkzijdige driehoekjes, dan heet dus een figuur bestaande uit 3 gelijkzijdige driehoekjes een triamond. Na telling zien we dan dat er 12 verschillende hexiamonds zijn. (Merk op dat we de stukjes mogen omdraaien!).

In 1965 wordt alle kennis van dat moment gebundeld in het door Solomon W. Golomb geschreven boek 'Polyominoes'.

De speelgoedindustrie ontdekt ook deze puzzelstukjes en al spoedig verschijnen er allerlei doosjes met de polyomino's en de polyiamonds. Grote bekendheid kreeg de Japanse firma Tenyo met haar serie 'Beat the computer', die ook hier bij de Bijenkorf

verkrijgbaar was. Zo nu en dan zie ik er nog weleens exemplaren van liggen.

De puzzel van deze maand gaat over No. 6 van de 'Beat the computer' serie. Weet iemand al het exacte aantal manieren waarop dit doosje gevuld kan worden met de 12 hexiamonds? Op de vrijmarkt in Amsterdam kocht ik op koninginndag echter een doosje met verschillend gekleurde stukjes erin. Verder geen enkele naamsaanduiding. Weet iemand een firmanaam of titel van deze puzzel? De puzzel zoals ik hem kocht kunt u in de figuur zien. Hierin ziet u ook de vorm van de 12 stukjes. Als u het van karton wilt namaken, dan moet u er op letten dat de achterkant dezelfde kleur heeft, want de stukjes mogen omgedraaid worden. De kleuren van de stukjes zoals ik hem kocht zijn: B(lauw), G(E)l, G(R)oen, O(ranje), R(ood) en W(it). Van iedere kleur twee stukjes.



Doordat deze stukjes verschillend gekleurd zijn kunnen er vele nieuwe puzzels gemaakt worden, waarvan ik er in de literatuur nog niet veel ben tegengekomen. Als stukjes van dezelfde kleur elkaar raken, dan kunnen we het begrip *raaklengte* definiëren. De eenheid is de lengte van een basisdriehoekje. Raken in een hoekpunt stel ik als een half.

Bekijken we de figuur, dan zien we:

De rode stukjes raken elkaar in lijnstuk PQ: raaklengte = 1. De blauwe stukjes raken elkaar in een hoekpunt: raaklengte = 1/2. De totale raaklengte in deze figuur is dus anderhalf.

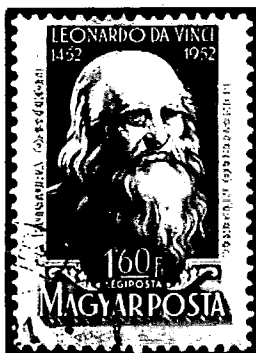
De vraag van deze maand is dan: 'Geef een voorbeeld van de minimale raaklengte en een voorbeeld van de maximale raaklengte.'

Is raaklengte = 0 mogelijk? Dat zou betekenen dat elke kleur geïsoleerd ligt.

Een ieder die de minimale en maximale waarde vindt maakt kans op de boekenbon van vijftig gulden. De inzendingstermijn sluit een maand na het verschijnen van dit nummer.

De inzendingstermijn is expres een maand om u de kans te geven om er ook eens in de klas over te praten. Als de tijd het toelaat moet u de leerlingen eens deze puzzelstukjes laten maken en ze er ook mee laten spelen. In het verleden heb ik daar leuke ervaringen mee opgedaan. Misschien zijn er een paar slimmerikken in bovenbouw vwo die het probleem kunnen programmeren. Eventueel ontdekt nu eindelijk iemand op hoeveel manieren het 'gewone' doosje te vullen is. De handleiding zegt: 'meer dan 5000 manieren'!

Leonardo da Vinci



Leonardo da Vinci (1452-1519), veelzijdig genie, gebruikte in zijn schilderijen het principe van het perspectieftekenen. Wij kennen dit principe uit de tekenles: er is een horizon, waarop een centraal verdwijnpunt ligt, en waarop ook links en rechts nog verdwijnpunten liggen; hierdoor convergeren evenwijdige lijnen naar eenzelfde punt.



Op de Franse postzegel is het perspectieftekenen in de praktijk gebracht. Het 'geheim' van deze manier van tekenen is, dat wat we zien niet statisch is, maar verandert, zodra de positie van waaruit we kijken verandert.

► Voorlichtingsbijeenkomst Hawex voor wiskundeleraren lbo/mavo

Vanaf augustus 1987 wordt op een aantal havo-scholen het zogenaamde Hawex-project uitgevoerd. Op deze groep van scholen is/wordt het huidige vak wiskunde in 4 en 5 havo vervangen door twee nieuwe vakken wiskunde A en wiskunde B.

Met ingang van het cursusjaar 1990/1991 zullen deze nieuwe programma's landelijk worden ingevoerd. Mavo-leerlingen die van plan zijn in 1990 door te stromen naar het havo zullen in het huidige cursusjaar moeten worden voorgelicht over de pakketkeuze, in het bijzonder over de verschillende aspecten van wiskunde A en wiskunde B.

Daarom organiseert de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren in november 1989 een twaalf-tal studiebijeenkomsten, speciaal bestemd voor wiskundeleraren verbonden aan het lbo/mavo. Op die bijeenkomsten zal uitgebreide informatie worden gegeven over de ervaringen met het Hawex-project. Een belangrijke plaats zal worden ingeruimd voor een inhoudelijke kennismaking met de vakken wiskunde A en B.

De bijeenkomsten zullen worden gehouden op maandag 20, dinsdag 21 en donderdag 23 november 1989, steeds van 16.00 h tot 20.00 h.

Voor een eenvoudige maaltijd wordt gezorgd.

De plaatsen zijn:

► Jaarvergadering/ Studiedag 1989

maandag 20 november 1989

ALKMAAR
R.S.G. N. Kennemerland
Robonsbosweg 11
072-122477

'S-HERTOGENBOSCH
Jeroen Boschcollege
Rompertsebaan 63
073-412350

'S-GRAVENHAGE
St. Janscollege
Colijnplein 9
070-687670

LEEWARDEN
Mavo Nylan
Prinsessenweg 4
058-884202

dinsdag 21 november 1989

GELDROP
Strabrecht College
Grote Bos 2
040-867715

UTRECHT
College De Klop
Orinocodreef 7-9
030-615727

MIDDELHARNIS
S.G. Prins Maurits
Kon. Julianaweg 5
01870-2745

ZWOLLE
R.S.G. Zwolle
Lassuslaan 230
038-225202

donderdag 23 november 1989

GRONINGEN
Roling College
Melisseweg 2
050-421000

KERKRADE
St. Antonius Dr. College
Mgr. van Gilsstraat 2
045-455941

HAARLEM
Schoterlyceum
Sportweg 9
023-258491

ZUTPHEN
Baudartiuscollege
Isendoornstraat 1
05750-15041

Aanmelding voor 15 november 1989:

voor *leden* door overmaking van f5,- per persoon naar giro 143917 t.n.v. NVvW te Amsterdam o.v.v. aantal personen, Hawex en plaats van keuze; voor *niet-leden* door overmaking van f15,- per persoon naar giro 143917 t.n.v. NVvW te Amsterdam o.v.v. aantal personen, Hawex en plaats van keuze.

Nadere inlichtingen: 076-653218.

Zoals eerder in Euclides aangekondigd, wordt op **28 oktober 1989** in het Nieuwe Lyceum te Bilthoven de jaarvergadering/studiedag van de NVvW gehouden. Aanvang: 10.00 uur.

Het thema van de studiedag is: **Begeleiden, motiveren en adviseren in de wiskundeles.**

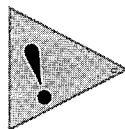
Verskillende aspecten van dit thema worden belicht in een centrale lezing en twee rondes van keuzegroepen.

De lezing, getiteld 'De driehoek: zorg, techniek en wiskunde', wordt verzorgd door Kees Blase (APS). De keuzegroepen zijn:

1. 'Drie jaar bij elkaar in één klas, dat kan echt niet.'
2. Moet wiskunde en intercultureel onderwijs?
3. LHNO-leerlingen kiezen wiskunde.
4. Over de keuzebegeleiding bij wiskunde A en B op de havo.
5. Hawex-actualiteiten.
6. 'Op zoek naar... een weg van selectie naar determinatie.'
7. Toetsen!
8. Uitgerekende meiden.
9. **GELIJK OP** in het lesmateriaal.
10. Open leercentrum voor volwassenen.

In de middag praten mensen met heel verschillende achtergrond over de rol die wiskunde in hun leven speelt (of gespeeld heeft).

Aanmelden kan nog: zie Euclides jrg. 65 nr. 1.



Kalender

- 11 oktober 1989: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
28 oktober 1989: Bilthoven, Jaarvergadering/Studiedag NVvW. Zie Euclides 65,1 blz. 25 t/m 28.
15 november 1989: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
20, 21 en 23 november 1989: Diverse plaatsen, Voorlichtingsbijeenkomsten Hawex voor wiskundeleraren lbo/mavo. Zie blz. 63 en 64 van dit nummer.
13 december 1989: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
18 en 19 maart 1990: Beekbergen, VALO-conferentie 'Wiskunde in de onderbouw'. Zie de mededeling op blz. 59.

**Gebruikt u Exact Wiskunde?
Of wilt u zomaar zien of ook u
met deze eigentijdse wiskunde-
methode goed kunt werken?**

Zo ja, dan willen wij u uitnodigen op
maandag 30 oktober a.s. een studie-
bijeenkomst rondom Exact Wiskunde
bij te wonen.

Deze bijeenkomst wordt gehouden in
de Eenhoorn, Stationsplein te Amersfoort
van 17.00 uur tot ca.20.30 uur.

Onderwerpen die aan bod komen zijn:

- ◆ met Exact Wiskunde op weg naar
het nieuwe onderbouwprogramma
mavo, havo en vwo
- ◆ Exact Wiskunde op het mavo
- ◆ toetsen en differentiëren met
Exact Wiskunde

In verband met de te reserveren ruimte en
maaltijden kunt u alleen deelnemen als u
zich tevoren schriftelijk hebt aangemeld
d.m.v. onderstaande bon.

Deelname is gratis. Uw reiskosten worden
vergoed op basis van kosten openbaar
vervoer.

naam

adres

postcode/plaats

telefoon

leraar aan

wenst deel te nemen aan de bijeenkomst
over Exact Wiskunde.

(in open enveloppe zonder postzegel
opsturen naar: Meulenhoff Educatief,
t.a.v. T.van Welie, Antwoordnummer 1191,
1000 PA Amsterdam)

Inhoud

Inhoud 33

P. E. de Rosset: Rapport in Uitleg,
uitleg in rapport 34

Rapport van de Werkgroep 'Differentiaal-
vergelijkingen' 35

George Schoemaker: Kolom 11
W12/16 39

J. G. M. Dankers: De XXIXe Internationa-
le Wiskunde Olympiade 1988 40

Boekbespreking 42

Helen B. Verhagen: Mediatiek wiskun-
deonderwijs 43

Werkbladen 48

Verschoenen 54

A. Aigrat: Lese! 55

Mededeling 59

Frans Bouman: Zekere reacties op wiskun-
de anders? 60

Recreatie 62

Postzegels 68

Voorlooptingsbijkomsten HNWK voor
wiskundelingen lba/mavo 69

Jaarvergadering/Studiedag 1988 66

Kalender 64

*