

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Vakblad
voor de
wiskundeleraar

64e jaargang
1988 | 1989
april

Euclides 7

Wolters-Noordhoff

Redactie

Drs H. Bakker
 Drs R. Bosch
 G. Bulthuis
 Drs M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
 N. T. Lakeman (beeldredacteur)
 Drs A. B. Oosten (voorzitter)
 P. E. de Roest (secretaris)
 Ir. V. Schmidt (penningmeester)
 Mw. H. S. Susijn-van Zaale
 Mw. Drs A. Verweij (eindredacteur)
 A. van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en led-administratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f55,- per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f37,50; contributie zonder Euclides f30,-. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f52,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f32,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949. Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers f8,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan: Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 39731 (Samsy).

Actualiteit 190

Juul ten Hove *Kolom 8 W12/16* 190

M.C. van Hoorn *Huiswerk voor de C.O.W* 191

Denkpgaven 191

Bijdrage 192

Rijkje Dekker *ICME-6, Ethnomathematics* 192

Een andere kijk op 'Boedapest': de wiskunde van het alledaagse leven in verschillende culturen.

Victor Schmidt *Overgangsmatrices I* 194

Hoe matrices gebruikt kunnen worden om het betalingsgedrag van klanten van een gemeentelijk gasbedrijf te beschrijven. Matrixrekening toegepast op de vraag naar het lange-termijn-effect van een afsluitingsbeleid dat gebaseerd is op incidentele maatregelen.

Boekbeschouwing 199

Fred Goffree *The politics of mathematics education*

Over Stieg Mellin-Olsen en zijn boek dat de lezer meevoert op de weg naar het 'politiseren' van het wiskundeonderwijs. Op zoek naar een theorie van de wiskundige activiteit.

Shortliner 203

Pythagorische drietallen

Werkbladen 204

Figuren met gelijke oppervlakte en De stelling van Pick

Serie 'Auteurs in beeld' 206

Bas van Cranenburgh *Wiskunde voor het middelbaar beroepsonderwijs*

Een gesprek met vier van de vijf auteurs van een nog jonge wiskundemethode voor het mbo. Over Instappen-Oefenen-Toepassen en de motivatie van leerlingen, over leesbaarheid, het gebruik van illustraties en de rekenmachine.

Mededeling 209

Boekbeschouwing 210

S. P. van 't Riet *Wiskundeonderwijs nu*

Van het boek van Bram Lagerwerf verscheen de tweede druk. Aanleiding voor een uitgebreide bespreking van dit praktische boek over het werk van de wiskundeleraar.

Recreatie 215

Verenigingsnieuws 217

Eindtermen Basisvorming Wiskunde 217

Examenbesprekingen georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars 218

Mededeling 220

Kalender 220



... en ik zie allemaal wiskunde ...

► Kolom 8



Juul ten Hove

'Heb je wel eens tegen de wind in moeten fietsen, op een lange, rechte weg? Misschien heb je dan ook wel eens gespeeld met het ritme van je trappers.

Links - rechts - links - rechts - ... En dan tellen hoeveel keer je rechter trapper naar beneden wijst tussen twee bomen in:

een - en - twee - en - drie - en - vier-... Als je die lange, rechte weg vaak moet fietsen, weet je misschien al hoeveel trappers het is van die ene boom tot het eerstvolgende huis.'

Dit verhaal gaat verder: afstanden in meters omrekenen tot afstanden in trappers (of andersom), vergelijken van verschillende fietsen (en verschillende versnellingen), grafieken tekenen, formules maken en in spreadsheets stoppen om te kijken hoe ze werken. Het wordt een pakket dat in de derde klas mavo van één van de experimenteerscholen zal worden uitgevoerd.

Ik kan me voorstellen dat er leerlingen zijn die het verhaal aanvullen:

'Nou, ik weet niet hoeveel trappers het is van huis naar school, maar ik weet wel dat ik met één trapper meer dan twee autolengtes haal. Behalve als ik in de eerste versnelling rijd. Dan moet ik ook veel vaker rondraaien tussen de stoplichten en de hoek. En in een hogere versnelling kom ik met één ronde gemakkelijk de bocht om.' Of zo:

'Ik fiets nooit. Maar als ik op de stoep loop doe ik wel eens spelletjes met de tegels. Dan probeer ik vier tegels te halen, het hele schoolplein over. Dat zullen

ongeveer dertig van die grote stappen zijn. Nee, het zijn niet van die grote grinttegels, die haal ik niet in één stap, vier van die tegels.'

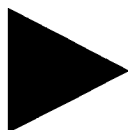
Het lijkt er op dat de context 'fietsen' veel mogelijkheden in zich heeft: een paar zinnen zijn voldoende om een doos vol associaties te openen; leerlingen kunnen zelf deel worden van de situatie: het denken in termen van variërende afstanden en variërende trappers ligt voor het oprapen. Daarmee is het een uitstekend startpunt voor wiskundige activiteit.

De situatie wordt hier gebruikt als ondersteuning voor het ontwikkelen van wiskundige concepten rondom lineaire verbanden.

Maar de context kan ook een probleemgebied zijn, waar problemen opgelost kunnen worden met behulp van wiskundige technieken. Bijvoorbeeld als je vragen stelt zoals: wat kost meer energie: tegen een helling van 10% op fietsen, of tegen de wind in fietsen bij windkracht 5?

Ik merk bij het werken hieraan dat die twee functies van een context heel snel door elkaar gaan lopen en dat het nodig is een keuze te maken. Voor deze context en deze werkbladen heb ik de keuze gemaakt. De leerlingen kunnen voortdurend terugvallen op hun ervaringen bij het fietsen, terwijl ze bezig zijn met abstracte formuleringen en bewerkingen van evenredige verbanden.

Het is nu alleen nog de kwestie: hoe zal het gaan in de klas? Reageren leerlingen zoals ik verwacht, wat doen ze ermee? En dan is er nog de ham-vraag: is dit de wiskunde die we hen willen leren? Tenslotte moeten we over ruim drie jaar uitspraken hierover doen. Ik heb nu even het gevoel de wind mee te hebben, maar wie weet draait de wind en moet ik een ander verzet kiezen.



► Huiswerk voor de C.O.W.

M. C. van Hoorn

Vorig jaar zond de C.O.W. – de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs – een eindtermenontwerp voor het vak wiskunde in de onderbouw naar het ministerie. Zulks moest evenzo gedaan worden door de andere eindtermencommissies.

Maar: de staatssecretaris heeft de C.O.W. laten weten dat het ingezonden eindtermenontwerp niet voldoet aan de gestelde eisen. Er zijn twee hoofdpunten van kritiek:

- een uitwerking in algemene en concrete doelen ontbreekt;
- het ontwerp richt zich niet op twee niveaus – zoals in de basisvorming nagestreefd – maar op meerdere niveaus.

De C.O.W. heeft tot 1 oktober 1989 de tijd gekregen een herzien eindtermenontwerp in te zenden. Intussen zal nu – toch – het ‘veld’ geraadpleegd worden; zie het Verenigingsnieuws achterin dit nummer. Hopelijk legt de C.O.W. dan ook haar Raamplan aan de leraren voor.

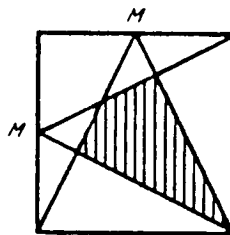
Het ligt voor de hand dat het Ontwikkelteam zich zal moeten bezinnen op de tot nu toe gevolgde werkwijze. Ook hierover zou het veld een zegje kunnen doen.

Voor een verklaring van de hierboven gebezigde namen: zie Euclides 64-2 (oktober 1989), bladzijde 34-36.

7a

Een vierkant. Twee middens van aaneengelegene zijden zijn elk verbonden met de beide tegenoverliggende hoekpunten.

Het hoeveelste gedeelte van het vierkant is gearceerd?

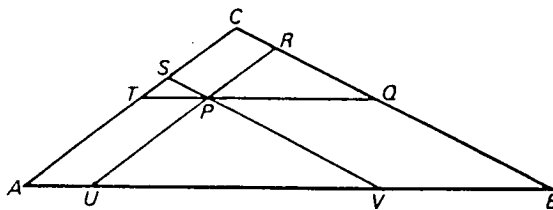


7b

Een driehoek ABC .

$AB = 180$, $AC = 90$, $BC = 120$. Binnen de driehoek zijn drie lijnstukken, elk met lengte 80, getrokken; de eindpunten van deze lijnstukken liggen op de zijden van de driehoek en elk van deze lijnstukken is evenwijdig met een zijde.

Gaan deze drie lijnstukken door één punt?



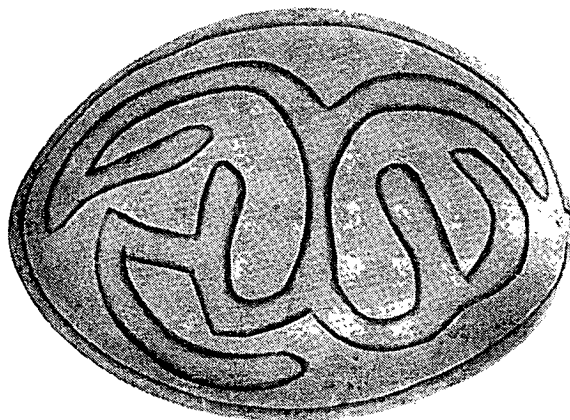
► ICME-6, Ethnomathematics

Rijkje Dekker

Boedapest, 31 juli 1988

De zaal is vol. Op het podium staat een kleine vrouw. Ze zegt onder de indruk te zijn van de belangstelling. Jarenlang heeft ze zich een roepende in de woestijn gevoeld.

Claudia Zaslavsky, in de vijftiger jaren gaf ze les aan een van de weinige scholen in het Amerika van toen met zwarte en witte kinderen door elkaar. Maar ze merkte dat vooral haar zwarte leerlingen, zodra het kon, wiskunde lieten vallen.



Met de groeiende belangstelling van zwarte Amerikanen voor Afrika is ze toen wiskundemateriaal gaan verzamelen en ontwikkelen gebaseerd op Afrikaanse kunst, huizenbouw, spelletjes en talstelsels. Maar ook de wereld van haar zwarte leerlingen ging ze verkennen en ze bracht gokspelletjes mee om met de hele klas te analyseren.

Ethnomathematics, wiskunde van het alledaagse leven en allerlei culturen, een nieuwe mode in wiskundeland, maar Claudia was daar dus al 35 jaar geleden mee bezig.

Munir Fashed, Palestijns wiskundige in Amerika, houdt een emotioneel betoog over de omslag in zijn houding tegenover wiskunde. Geschokt door de oorlogen in zijn land van herkomst keert hij zich af van een wiskunde die in zijn ogen gebruikt wordt om mensen te beheersen, te controleren en te ontmenselijken. Hij richt zich op de wiskunde van het alledaagse leven in de gemeenschap waar hij uit voortgekomen is, op de wiskunde van zijn moeder. Munirs moeder, die lezen noch schrijven kan, maakt van stukjes stof op bestelling jurken die altijd blijken te passen. Aan dit werk ligt volgens Munir een dieper wiskundig inzicht ten grondslag

dan hij zichzelf met al zijn scholing toe in staat voelt. Hij denkt dat vooral de praktische kant van het werk, het feit dat het in een context geplaatst is en op productie gericht, dit wiskundig inzicht hebben doen ontstaan.

Suriname, 30 juni 1985

Met Asooi, een Saramakaaanse bosnegervrouw, zit ik in haar kookhut. We zijn omringd door allerlei kalebassen die ze aan de binnenkant bewerkt heeft. Prachtig zijn ze en ik zie allemaal wiskunde: draaisymmetrische vormen, spiegelsymmetrische figuren, zacht gebogen evenwijdige lijnen. Vaak is het de uitgeschaapte vorm die in het oog springt, maar soms juist de uitgespaarde. Ik wil Asooi zeggen hoe mooi ik ze vind en wat ik er allemaal in zie. Ik wil weten wat ze er allemaal mee bedoeld heeft, maar ik spreek haar taal niet.

Asooi laat het me zien.



Ze pakt het stukje glas waarmee ze de vormen aangebracht heeft. Ze doet voor hoe ze eerst vlak onder de rand rondom een inkerving maakt die door zijn diepte een mooie schaduwrand geeft.

De grootste kalebassen met eenvoudige esthetische lijnen zijn voor rijst. Dan pakt ze twee kleinere met mooie in elkaar grijpende vormen en geeft ze me. Om thuis bier uit te drinken met mijn man, begrijp ik.



Boedapest, 1 augustus 1988

Ik ga naar de bijeenkomst van de studiegroep Ethnomathematics, maar ik voel reserves.

Zullen er alleen maar witte mensen zijn die de wereld van zwarte mensen willen leren kennen? Misschien een enkeling op zoek naar de wereld die hij achtergelaten heeft?

De zaal is vol. Tussen vrouwen en mannen van allerlei kleur ontdek ik Claudia en Munir. De voorzitter, een oudere zwarte vrouw, neemt rustig maar beslist de leiding.

Ze heeft de ogen van Asooi.

Ik denk dat ik lid word.



► **Overgangsmatrices 1**

Victor Schmidt

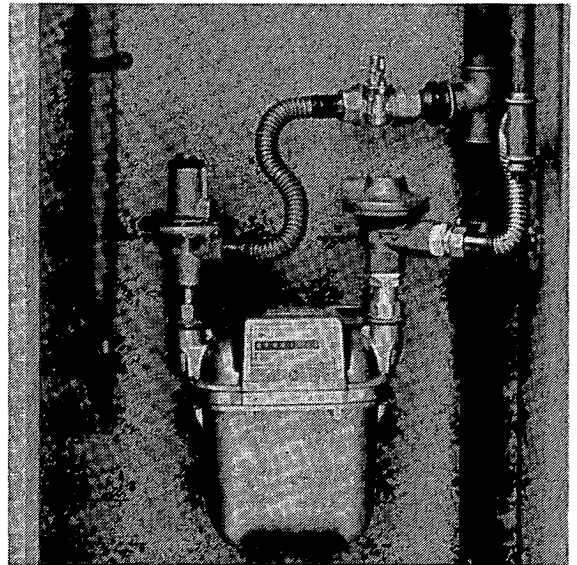
Een van de onderwerpen, waarin de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs het nadrukkelijkst naar voren komt, is de matrixrekening. Werd in het oude wiskunde II een matrix nog gezien als een voorstelling van een lineaire afbeelding tussen twee vectorruimten, bij een vak als wiskunde A is een matrix niet meer dan een getallenschema, waarin de getallen een bijzondere betekenis hebben. Matrices lenen zich er dan goed voor om eenvoudig ogende modellen te beschrijven. Een bijkomend voordeel is, dat berekeningen met matrices betrekkelijk eenvoudig zijn uit te voeren, zeker als men beschikt over een personal computer met een zogenaamd spreadsheet-pakket. Een pakket als bijvoorbeeld PC-Calc, dat meegeleverd is met de NIVO-apparaatuur, kan zeer goed gebruikt worden om matrixmodellen door te rekenen.

Matrixmodellen komen onder andere voor in de demografie. De overlevingskans en het gemiddeld aantal nakomelingen per jaar van een aantal levende organismen kunnen in een matrix worden opgenomen.

De matrix die zo ontstaat heet een Leslie-matrix. Gegeven de leeftijdsverdeling van een groep individuen in een jaar kan met behulp van de Leslie-matrix de leeftijdsverdeling van dezelfde groep (inclusief nakomelingen) in het volgende jaar worden berekend. Zo'n Leslie-matrix beschrijft hoe de toestand van een groep individuen in een bepaald jaar

overgaat naar een nieuwe toestand. Matrices, die een toestandsverandering beschrijven worden in het algemeen overgangsmatrices genoemd. In dit artikel komt een economisch getint voorbeeld van een overgangsmatrix aan de orde.

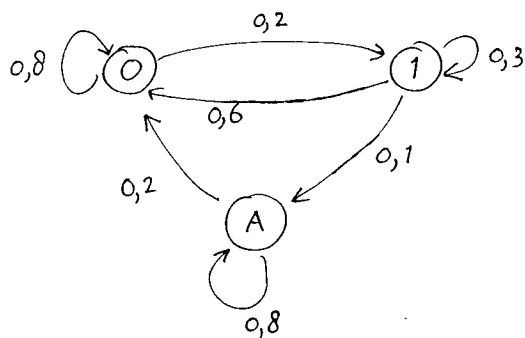
In een fictieve middelgrote gemeente zijn 50 000 woningen op het gasnet aangesloten. De levering van gas wordt verzorgd door het gemeentelijk gasbedrijf. Zoals in veel gemeenten laat het gasbedrijf zijn klanten maandelijks een voorschotbedrag betalen. De klantenadministratie houdt nauwkeurig bij wie zijn of haar rekening al dan niet betaalt. De wanbetaler krijgt eerst een aanmaning om het openstaand voorschotbedrag te voldoen. Blijft de wanbetaler in gebreke, dan wordt de levering van gas aan deze klant stopgezet. Slechts nadat alle rekeningen plus een extra bedrag zijn betaald wordt de afgesloten klant weer voorzien van gas. Op zeker moment hebben 35 000 klanten geen betalingsachterstand, hebben 10 000 klanten wel betalingsachterstand maar zijn nog niet afgesloten en zijn 5 000 klanten afgesloten van gasvoorziening. Het gasbedrijf probeert een meer sociaal beleid te voeren en meent dat de hoeveelheid afgesloten klanten te hoog is. Om deze hoeveelheid te reduceren kan het gasbedrijf twee soorten maatregelen nemen, namelijk structurele of incidentele maatregelen.



Bron: Gemeente-energiebedrijf Amsterdam

gelen. Onder de eerste categorie vallen maatregelen als het coulanter optreden bij wanbetaling of het afgesloten klanten makkelijker maken zich weer te laten aansluiten. Onder de tweede categorie vallen maatregelen als het eenmalig kwijtschelden van alle betalingsachterstanden of het eenmalig aansluiten van alle afgesloten klanten. In het vervolg zal blijken dat dergelijke incidentele maatregelen alleen op korte termijn enig effect sorteren.

Om het effect van te nemen maatregelen te kunnen voorspellen laat de directie een onderzoek verrichten naar het betalingsbedrag van haar klanten. De resultaten van dit onderzoek worden gepresenteerd in een zogenaamd toestandsdiagram, zoals dat in figuur 1 is getekend.



Figuur 1

Dit toestandsdiagram moet als volgt worden gelezen. Een klant van het gasbedrijf kan zich aan het begin van een maand in drie toestanden bevinden, namelijk in

- toestand 0: de klant heeft geen betalingsachterstand,
- toestand 1: de klant heeft wel betalingsachterstand maar is nog niet afgesloten en
- toestand A: de klant is afgesloten van de gasvoorziening.

Van de klanten die zich nu in toestand 0 bevinden gaat 20% naar toestand 1 en blijft 80% in toestand 0. In gewoon Nederlands houdt dat in, dat van alle klanten, die nu geen betalingsachterstand hebben 80% ook de volgende maand zijn of haar voorschot betaalt en dat 20% van deze klanten dat niet doet. Van de nog niet afgesloten wanbetalers blijkt 60% de openstaande rekeningen te voldoen, blijkt 10%

afgesloten te moeten worden en blijkt 30% zijn of haar openstaande rekeningen niet of gedeeltelijk te voldoen zonder te worden afgesloten. Deze getallen vormen een weerspiegeling van het afsluitingsbeleid van het gasbedrijf. Van de afgesloten klanten maakt 20% de afsluiting weer ongedaan en komt daarmee weer in toestand 0. Een pijl van toestand 0 naar toestand A ontbreekt, omdat iemand zonder betalingsachterstand niet zomaar kan worden afgesloten. Een pijl van toestand A naar toestand 1 ontbreekt, omdat een eenmaal afgesloten klant alleen dan weer wordt aangesloten als hij of zij alle openstaande rekeningen voldoet.

Zoals beschreven bevinden zich op zeker moment 35 000 klanten in toestand 0, 10 000 klanten in toestand 1 en 5 000 klanten in toestand A. Met behulp van het toestandsdiagram kan de situatie over een maand berekend worden.

In toestand 0 bevinden zich dan
 $0,8 \cdot 35\,000 + 0,6 \cdot 10\,000 + 0,2 \cdot 5\,000 = 35\,000$ klanten.

In toestand 1 bevinden zich dan
 $0,2 \cdot 35\,000 + 0,3 \cdot 10\,000 = 10\,000$ klanten en

in toestand A bevinden zich dan
 $0,1 \cdot 10\,000 + 0,8 \cdot 5\,000 = 5\,000$ klanten.

Het blijkt dat de huidige verdeling een evenwichtstoestand is. Als het gasbedrijf haar beleid ten aanzien van wanbetaling niet verandert, dan blijft deze verdeling bestaan.

Worden alle afsluitingen eenmalig ongedaan gemaakt, dan bevinden er zich op dat moment 35 000 klanten in toestand 0 en 15 000 klanten in toestand 1. Hierbij wordt er van uit gegaan, dat de betalingsachterstand van de zojuist weer aangesloten klanten blijft bestaan. Met een spreadsheet-pakket kan nu worden doorgerekend hoe de verdeling over de drie toestanden zich gedurende een aantal maanden ontwikkelt (tabel 1).

De getallen geven aan, dat na enige tijd de oorspronkelijke toestand terug lijkt te keren. Een incidentele maatregel als het opnieuw aansluiten van alle afgesloten klanten heeft alleen op korte termijn effect, aangenomen dat het toestandsdiagram geldig blijft.

maand	0	1	2	3	10	20
toestand 0	35 000	37 000	36 800	36 420	35 229	35 017
toestand 1	15 000	11 500	10 850	10 615	10 098	10 007
toestand A	0	1 500	2 350	2 965	4 673	4 976

Tabel 1

Als de directie van het gasbedrijf ook nog eens eenmalig alle betalingsachterstanden kwijtscheldt, dan bevinden op dat moment alle klanten zich in toestand 0. Gedurende de daarop volgende maanden ontwikkelt de verdeling van de klanten over de drie toestanden zich als in tabel 2. Ook nu blijkt weer, dat de oorspronkelijke toestand zich herstelt, zo lang het toestandsdiagram geldig blijft.

maand	0	1	2	3	10	20
toestand 0	50 000	40 000	38 000	37 200	35 350	35 026
toestand 1	0	10 000	11 000	10 900	10 149	10 011
toestand A	0	0	1 000	1 900	4 501	4 963

Tabel 2

Uit beide berekeningen rijst het vermoeden dat elke verstoring van de oorspronkelijke toestand teniet wordt gedaan. Als dat bewezen kan worden, dan doet het gasbedrijf er verstandig aan geen incidentele maatregelen te nemen. Dit bewijs kan met behulp van de matrixrekening geleverd worden.

Als op zeker moment zich x_0 klanten in toestand 0, y_0 klanten zich in toestand 1 en z_0 klanten zich in toestand A bevinden, dan kan men de nieuwe toestand berekenen aan de hand van de volgende formules

$$x_1 = 0,8x_0 + 0,6y_0 + 0,2z_0$$

$$y_1 = 0,2x_0 + 0,3y_0$$

$$z_1 = 0,1y_0 + 0,8z_0$$

De variabelen x_1 , y_1 en z_1 stellen de aantallen klanten voor, die zich een maand later in toestand 0, 1 respectievelijk A bevinden. Een toestand, die wordt weergegeven met de variabelen x , y en z is een evenwichtstoestand als

$$x = 0,8x + 0,6y + 0,2z$$

$$y = 0,2x + 0,3y$$

$$z = 0,1y + 0,8z$$



Bron: Gemeente-energiebedrijf Amsterdam

ofwel als

$$-0,2x + 0,6y + 0,2z = 0$$

$$0,2x - 0,7y = 0$$

$$0,1y - 0,2z = 0$$

Als de eerste twee vergelijkingen bij elkaar worden opgeteld, dan volgt $-0,1y + 0,2z = 0$. Deze vergelijking stemt op een factor -1 na overeen met de derde vergelijking. Het stelsel vergelijkingen voor x , y en z is daarom afhankelijk. Uit de derde vergelijking volgt, dat $y = 2z$ en uit bijvoorbeeld de tweede vergelijking volgt, dat $2x = 7y$. Voor x geldt dan $2x = 7y = 14z$, dus $x = 7z$. In de evenwichtstoestand verhouden zich de hoeveelheden klanten in toestand 0, 1 en A als 7:2:1. Omdat er 50 000 woonhuisaansluitingen zijn, volgt, dat 35 000 klanten zich in toestand 0, 10 000 klanten zich in toestand 1 en 5 000 klanten zich in toestand A bevinden.

Rest nu nog de vraag waarom een verstoring van deze toestand teniet wordt gedaan. Om dit te verklaren is enige kennis nodig van de eigenwaarden en eigenvectoren van een matrix.

De verdeling van de klanten over de drie toestanden kan ook als een vector worden weergegeven. Zo kan een verdeling x_0, y_0, z_0 worden weergegeven met de vector

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

De drie formules, waarmee de nieuwe toestand x_1, y_1, z_1 kan worden berekend, kunnen worden geschreven als

$$\underline{x}_1 = A\underline{x}_0, \text{ waarbij } A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} \text{ en}$$

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

In het algemeen geldt, dat $\underline{x}_{n+1} = A\underline{x}_n$, waarbij $\underline{x}_n$ de toestand in maand n en $\underline{x}_{n+1}$ de toestand een maand later weergeeft. Past men deze formule herhaald toe, dan blijkt dat $\underline{x}_n = A^n \underline{x}_0$. In principe kan $\underline{x}_n$ berekend worden voor een aantal waarden van n en voor een zekere begintoestand, die wordt beschreven met de vector $\underline{x}_0$. Ook is het mogelijk een formule af te leiden voor $\underline{x}_n$ in termen van $\underline{x}_0$ en n . In het tweede geval worden de zogenaamde eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren van de matrix A berekend. Eigenwaarden van A zijn getallen k , waarvoor geldt, dat het stelsel vergelijkingen $A\underline{x} = k\underline{x}$ meer oplossingen heeft dan de voor de hand liggende oplossing $\underline{x} = \underline{0}$.

In het voorgaande is ongemerkt al een eigenwaarde van A aan de orde geweest. Omdat $A\underline{x} = \underline{x}$ oneindig veel oplossingen $\underline{x}$ heeft, waarvan de componenten zich verhouden als 7:2:1, is $k = 1$ een eigenwaarde van A .

De eigenvectoren bij een eigenwaarde k zijn die vectoren $\underline{x}$, die oplossing zijn van het stelsel $A\underline{x} = k\underline{x}$. Per definitie is $\underline{0}$ nooit een eigenvector. Bij de eigenwaarde $k = 1$ zijn alle vectoren $\underline{x}$ van de

vorm $\underline{x} = a \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ een eigenvector, waarbij a ongelijk is aan 0.

Men zegt vaak, dat de vector $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ de eigenvector is bij $k = 1$.

De –eventuele– andere eigenwaarden van A zijn ook getallen k , waarvoor het stelsel $A\underline{x} = k\underline{x}$ meer oplossingen heeft dan $\underline{x} = \underline{0}$. Om deze eigenwaarden te berekenen schrijft men het stelsel vergelijkingen in de vorm

$A\underline{x} - k\underline{x} = \underline{0}$, ofwel als $(A - kI)\underline{x} = \underline{0}$, waarbij I de zogenaamde eenheidsmatrix is.

Een dergelijk stelsel heeft meer dan één oplossing als de determinant van de coëfficiëntenmatrix gelijk is aan 0. Dit komt overeen met

$$\begin{vmatrix} 0,8 - k & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 - k & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 - k \end{vmatrix} = 0$$

ofwel met

$$(0,8 - k) \cdot \begin{vmatrix} 0,3 - k & 0 \\ 0,1 & 0,8 - k \end{vmatrix} +$$

$$- 0,2 \cdot \begin{vmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 - k \end{vmatrix} = 0$$

ofwel met

$$(0,8 - k)(0,3 - k)(0,8 - k) +$$

$$- 0,2(0,6(0,8 - k) - 0,1 \cdot 0,2) = 0$$

ofwel met

$$(0,8 - k)(0,3 - k)(0,8 - k) +$$

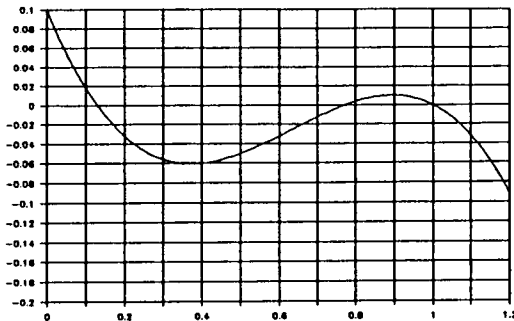
$$- 0,12(0,8 - k) + 0,004 = 0.$$

Het uiteindelijke resultaat is een derdegraads vergelijking voor k , die niet zo eenvoudig op te lossen is. Eén oplossing is echter bekend, namelijk $k_1 = 1$. Eventuele andere oplossingen k_2 en k_3 kunnen worden gevonden door het linkerlid van de vergelijking volgens de factorstelling te ontbinden in een factor $k - 1$ en een tweedegraadsfactor. De andere eigen-

waarden k_2 en k_3 zijn dan de eventuele nulpunten van de tweedegraadsfactor.

Wie tevreden is met een minder nauwkeurige benadering van de andere eigenwaarden kan de computer een grafiek laten tekenen van het linkerlid van de bovenstaande vergelijking. Het resultaat staat in figuur 2.

Uit deze figuur blijkt, dat de andere twee eigenwaarden ongeveer gelijk zijn aan 0,13 en 0,77.



Figuur 2

Bij de drie eigenwaarden k_1 , k_2 en k_3 horen de drie eigenvectoren e_1 , e_2 , respectievelijk e_3 .

De eigenvector e_1 is in het voorgaande al eens berekend. De andere eigenvectoren zijn

$$e_2 = \begin{bmatrix} 5,7 \\ -6,7 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ en } e_3 = \begin{bmatrix} -0,7 \\ -0,3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Een belangrijk resultaat uit de lineaire algebra is nu, dat de drie eigenvectoren onafhankelijk zijn, zodat elke vector geschreven kan worden als een lineaire combinatie van de drie eigenvectoren. Dit geldt ook voor de vector x_0 , die de begintoestand weergeeft. Men kan dus schrijven

$$x_0 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3.$$

Nu is $Ae_1 = k_1 e_1 = e_1$, $Ae_2 = k_2 e_2$

en $Ae_3 = k_3 e_3$ en daarom volgt

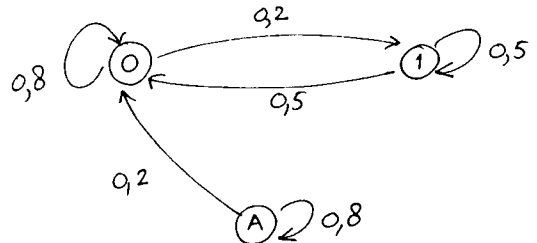
$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 = c_1 Ae_1 + c_2 Ae_2 + c_3 Ae_3 \\ &= c_1 e_1 + c_2 k_2 e_2 + c_3 k_3 e_3 \end{aligned}$$

Als x_n bepaald moet worden, dan vermenigvuldigt men x_0 n maal met A . Het resultaat is

$$x_n = A^n x_0 = c_1 e_1 + c_2 k_2^n e_2 + c_3 k_3^n e_3$$

Omdat $k_2 \approx 0,13$ en $k_3 \approx 0,77$ volgt, dat voor grote waarden van n k_2^n en k_3^n heel dicht bij 0 komen. Dat houdt in, dat $x_n \approx c_1 e_1$. De uiteindelijke hoeveelheden klanten in elk van de drie toestanden verhouden zich derhalve als 7 : 2 : 1. Dit resultaat is onafhankelijk van de keuze van x_0 , tenzij de vector x_0 gelijk is aan een van de eigenvectoren e_2 of e_3 . Dit laatste is nooit het geval, omdat in deze beide eigenvectoren tenminste één element negatief is. Geconcludeerd mag worden, dat elke verstoring van de evenwichtstoestand teniet wordt gedaan.

Wil het gasbedrijf daadwerkelijk de evenwichtstoestand wijzigen, dan moet ze er voor zorgen, dat de elementen van de matrix A aangepast worden. Zo kan de directie bijvoorbeeld besluiten soepeler op te treden bij wanbetaling. De meest coulante maatregel is af te zien van afsluiting. Als gevolg van deze maatregel zullen er maandelijks minder klanten, die al een betalingsachterstand hebben, hun openstaande rekeningen afbetalen. Zo kan er bijvoorbeeld het volgende toestandsdiagram ontstaan (figuur 3).



Figuur 3

De bijbehorende matrix, die hier B wordt genoemd, is dan gelijk aan

$$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Duidelijk zal zijn, dat toestand A leeg zal lopen. Dit blijkt ook uit de bepaling van de evenwichtstoestand aan de hand van de vergelijking $Bx = x$. Dit stelsel komt overeen met

$$0,8x + 0,5y + 0,2z = x$$

$$0,2x + 0,5y = y$$

$$0,8z = z$$

ofwel met

$$\begin{aligned} -0,2x + 0,5y + 0,2z &= 0 \\ 0,2x - 0,5y &= 0 \\ -0,2z &= 0 \end{aligned}$$

De oplossingen van dit stelsel kunnen worden beschreven als $z = 0$ en $2x = 5y$. De aantallen klanten in de evenwichtstoestand verhouden zich daarom als $5:2:0$. Hieruit volgt, dat uiteindelijk 71% van alle klanten hun rekeningen op tijd betalen en dat 29% van de klanten dat niet doet. Deze conclusie gaat alleen op als de andere eigenwaarden van B in absolute waarde kleiner zijn dan 1, zo ze bestaan.

In dit artikel zijn twee voorbeelden aan de orde geweest van overgangsmatrices. In beide voorbeelden gaat het om gesloten systemen, dat wil zeggen systemen, waarbij het totaal aantal klanten constant blijft. Er is geen sprake van een toe- of afname van het aantal klanten. Dit is ook te zien aan de overgangsmatrices A en B . De som van de elementen in elk van de kolommen van A en B is gelijk aan 1. Dergelijke systemen hebben als eigenschap, dat er tenminste één evenwichtstoestand bestaat. Deze eigenschap kan aangetoond worden door te laten zien dat $k = 1$ een eigenwaarde van de overgangsmatrix A is. Er moet dan worden aangetoond, dat het stelsel vergelijkingen $A\bar{x} = \bar{x}$ ook andere oplossingen heeft dan $\bar{x} = \underline{0}$. Dit is in te zien door van het stelsel vergelijkingen alle vergelijkingen bij elkaar op te tellen. Omdat de som van de elementen van elk van de kolommen van A gelijk is aan 1, ontstaat er door deze optelling een vergelijking, waarvan het linker- en het rechterlid gelijk zijn. Het stelsel vergelijkingen $A\bar{x} = \bar{x}$ is daarom een afhankelijk stelsel en heeft daarom meer oplossingen dan alleen $\bar{x} = \underline{0}$.

Interessant wordt het te onderzoeken of het mogelijk is, dat er bij de eigenwaarde $k = 1$ meer eigenvectoren zijn. Welke consequentie heeft dat voor de evenwichtstoestand?

Ook is het interessant te kijken naar niet-gesloten systemen. Als het aantal woonhuisaansluitingen door bijvoorbeeld nieuwbouw toeneemt, neemt daardoor dan ook het aantal gedwongen afsluitingen van de gasvoorziening toe? En zo ja, in welk tempo: sneller of minder snel dan de groei van het aantal nieuwbouwwoningen?

In een volgend artikel wordt nader op deze vragen ingegaan.

● Boekbeschuwing ●

► The Politics of Mathematics Education

– op zoek naar een theorie
van de wiskundige activiteit –

Fred Goffree

Stieg Mellin-Olsen is docent aan de lerarenopleiding in het Noorse Bergen. Een geëngageerd wiskundeleraar sinds de zestiger jaren, en voortdurend op zoek naar wegen om de wiskunde toegankelijk te maken voor velen. Hij is het typische voorbeeld van een 'man van de praktijk' die ook in staat is met regelmatige tussenpozen afstand te nemen. Dan reflecteert hij, en legt verbanden, enerzijds met praktijksituaties uit andere culturen en anderzijds met hoopvolle theorievorming in voor wiskundeleraars onverwachte domeinen. Steeds gaan zijn gedachten uit naar die leerlingen, die er niet toe komen zich iets van het wiskundige denkgereedschap eigen te maken. En daar in zijn opvatting iedere leerling mogelijkheden bezit om dat wel te doen, zoekt en vindt hij belangrijke oorzaken van de optredende weerstanden. Tijdens die onderzoekstochten in de eigen praktijk en in die van anderen, en gedurende gedachtenexperimenten langs de sleutelbegrippen uit eigen en verwante theorie, stijgt hij uit boven de positie van de wiskundeleraar. Niet de individuele leerling is dan in de eerste plaats object van beschouwing of kritiek, maar juist diens sociale omgeving, de verschillende

culturen waar hij mede door beïnvloed wordt, de schoolse context, het onderwijs, het leerplan, de schoolboeken.

Wat Stieg Mellin-Olsen in de afgelopen twintig jaar in het bovengeschetste kader deed en dacht, schreef hij op tijdens een 'sabbatical' in Cambridge. Het is een boek geworden waarvan niet alleen de titel tot nadenken stemt: *The Politics of Mathematics Education*¹. Want voortdurend wordt de lezer uitgedaagd om het wiskundeonderwijs vanuit een ander standpunt opnieuw in ogenschouw te nemen. Stieg, interactief² tijdens zijn wiskundelessen, is dit ook als auteur van dit boek. Hij laat de geïnteresseerde lezers niet met rust, hij wil dan ook dat zij er iets van opsteken om met hem verder te kunnen gaan op de weg naar het 'politiceren' van het wiskundeonderwijs. En LEREN, dat staat voor Mellin-Olsen als een paal boven water, geschiedt door AKTIVITEIT. Wie het wil, kan dit boek trouwens ook lezen als een uitwerking van de 'Theorie over Aktiviteit' ten behoeve van het wiskundeonderwijs.

Wat te vertellen van een boek waarin je als lezer steeds weer geprikkeld wordt om je in te leven in de gepresenteerde praktijksituaties en van je onbehagen of instemming blijkt te geven? Hoe anderen te laten ervaren wat het is om door de auteur meegevoerd te worden buiten de grenzen van de wiskundedidactiek, daar ingeleid te worden in op het eerste gezicht veelbelovende theorievorming en dan geconfronteerd te worden met een feilloze diagnose van de beperkingen? Ik zou het niet weten. In de hoop collega's wiskundeleraren en educatieve ontwerpers voor wiskunde te kunnen inspireren ook de discussie met Stieg Mellin-Olsen aan te gaan, beperk ik me tot wat voor mij hoogtepunten waren. Ik kan ze niet allemaal vermelden, dat spreekt vanzelf. Maar wat zeker is, de inleiding van dit boek mag niet onvermeld blijven. Want het is daarin dat de schrijver terugkijkt op zijn eigen geschiedenis. Daarin kan men hem leren kennen, zijn ontwikkeling meemaken en de kernvraag van deze studie plaatsen. *SETTING THE SCENE*, gaf Stieg terecht zijn *INTRODUCTION* als ondertitel mee.

'Ik kan ze nog gemakkelijk voor de geest halen, mijn vriendjes uit de steegjes van Bergen in de jaren vijftig. De avonden waren gewoonlijk donker en vochtig, en we zaten in de kelder van een van hen, meestal trekkend aan dunne sigaretjes in een poging om een beetje warm te worden.

Hé Prof, riepen ze als ze mij bedoelden. Ik was namelijk de enige van het stel die uitzichten had op het gymnasium. Hé Prof, ik snap niet dat jij het kan uithouden in dat gekkenhuis. (...)'.

Zo begint Stieg Mellin-Olsen zijn terugblik. Blijkbaar is hij van de naoorlogse generatie. In het vervolg blijkt dat hij als leerling en als leraar in het onderwijs geconfronteerd wordt met voor-oorlogse omstandigheden. Vooral de schoolse context, een van de 'wereld' afgesloten ('totalitair') systeem met een 'autoritaire' leraar en een 'autoritair' wiskundeonderwijs, prikkelt hem. Maar de wereld 'van buiten' is veranderd, dat lieten de leerlingen destijds ook al goed blijken.

'Ik', zo gaat leerling Mellin-Olsen verder, 'kwam ze tien jaar later weer tegen. Nu als leraar aan de Middenschool in Bergen, speciaal voor leerlingen van de "onderstroom"'. Hé Meester, zeiden ze toen, krijgen we vandaag weer die rottige vergelijkingen? Ok, jij bent ook de kwaaieste niet. Ik ga al aan het werk, vandaag heb ik een goede bui.

Zelden kon het na een les wel eens voorkomen dat een van die kornuiten zei: Verdraaid meester! Als het zo gaat als vandaag denk ik dat ik op deze school nog wat kan leren. Fantastisch meester, denk je dat je nog een keer zo een les kunt geven? Maar in de volgende les waren we weer op het oude spoor terug. Dan waren er weer nieuwe vergelijkingen, en op mijn rug voelde ik zweetdruppeltjes gaan als ik liet zien hoe "je de tekens moest verwisselen". De laatste helft van de les spraken we over dingen uit het werkelijke leven, over wat mensen in onze samenleving bezighield in die dagen (...)'.

Net als tien jaar eerder blijken ook deze kinderen dan ineens wel de potentie te bezitten om wiskunde als denkgereedschap te gebruiken. Sterker nog, ze raken enthousiast en worden daardoor actief en zelfs reflectief.

Nu ontmoet de leraar van weleer dit soort kinderen ook nog, maar de afstand is groter. Hij zit achter in

de klas, als lerarenopleider soms, of als onderzoeker. De kinderen zijn nog hetzelfde, en hun verhalen versterken hem in zijn opvatting dat wiskunde-onderwijs heel wat te bieden heeft, als het tenminste gelukt om de noodzakelijke veranderingen aan te brengen. Eigenlijk, zo realiseert Mellin-Olsen zich nu, was de beginperiode van zijn leraarschap in het midden van de jaren zestig, een gouden tijd. Een geweldige golf van New Math beroerde de wiskundewereld, men dacht na over democratisering in het onderwijs en de idee van een Middenschool met gelijke kansen voor iedereen, leek gerealiseerd te worden. Overal in de Westerse Wereld ging men over tot het ontwerpen van nieuwe en mooie materialen. De glans van het nieuwe lag over het wiskunde-onderwijs, maar het was niet alles goud wat er blonk. Er waren momenten van twijfel: binnen de school, als toch bleek dat ook de nieuwe wiskunde niet die leerlingen van zojuist (en vele anderen) echt in beweging kon krijgen, en van buiten de school op momenten dat men maatschappij-kritische geluiden tot zich liet doordringen. Het was de tijd van Habermas en Marcuse, van de Frankforter School.

Van beide kanten liet Stieg, de beginnende leraar, zich van zijn stuk brengen. Zijn eerste 'bovenmeester', tevens voorzitter van de plaatselijke arbeiderspartij, opende hardhandig maar goedbedoeld zijn ogen voor de feitelijke problematiek van de school en haar bevolking. Wat hem vooral is bijgebleven uit die jaren is het onverdraaglijke gevoel van onmacht als kinderen de officiële wiskundige leerstof uit de schoolboeken en van de examens gewoonweg als nutteloos van de hand wezen. Slechts op basis van de extrinsieke motivatie die van eindexamens uitging, waren enkelen bereid de stof te bestuderen en de sommen te oefenen. De energie ging in die gevallen dan eerder op aan het vinden van strategieën om te overleven, de door de leraar gewenste antwoorden naar voren te brengen met zo weinig mogelijk inspanning, dan aan het verwerven van wiskundige inzichten en vaardigheid om die te gebruiken.

In de jaren zeventig werkt de auteur enige tijd samen met Richard Skemp³. Ook in Nederland zullen velen inmiddels de in die tijd geëxpliciteerde onderscheiding tussen 'instrumenteel' en 'relatio-

neel' (begrijpen en uitleggen) kennen, en wellicht gebruikt hebben om eigen ervaringen met leerlingen beter in te schatten. Als Skemp verder gaat op de ingeslagen weg, en het relationele begrijpen nader onderzoekt, kiest Mellin-Olsen een andere richting. Hij laat zich inspireren door mensen als John Holt⁴, die schitterende reflectieve beschrijvingen van het gebeuren in de klas publiceerden. Steeds wordt het hem duidelijker dat de instrumentele en relationele antwoorden van de leerlingen twee kanten van dezelfde medaille betreffen: het gaat er eigenlijk alleen maar om hoe ze de context van het onderwijs interpreteren. In de school als 'werkplaats' doe je natuurlijk anders dan in een school, die je slechts ziet als een 'instrument' om op een niet al te moeilijke wijze een prettige toekomst te creëren.

De onderwijspsychologie van die tijd had weinig te bieden. 'Wij zoeken', stelt de auteur, 'naar leertheorieën die de leerling begrijpen als een actieve, interpreterende, waarderende, medewerkende of tegenpartelende deelnemer aan de leersituatie, wiens gedrag in belangrijke mate beïnvloed wordt door het werken in een beschouwen van die situatie'.

De werkwijze van de onderwijspsychologie in die tijd was evenwel anders gericht. Mellin-Olsen noemt hier de compensatieprogramma's. Net als bij bepaalde remedial programma's voor 'zwakke' leerlingen en 'afhakkers', werd de oorzaak van de gesignaleerde problematiek direct bij de individuele leerling gezocht. Wie ergens niet goed in is als hij net op school komt, ontbreekt het aan 'readiness', aan schoolrijpheid. Dat zal dan moeten liggen aan het sociaal milieu waaruit men afkomstig is. Wat daar ontbroken heeft, kan gecompenseerd worden, was de gedachte. Dat er iets ontbrak aan het nieuwe milieu, dat van de school, of dat de beide milieus botsten en een conflict opriepen, was een gedachte die destijds niet opkwam.

Mellin-Olsen trekt daar, terugblikkend en analyserend, lering uit: 'Het is eerder de moeite waard om een theorie van het wiskunde-onderwijs te bedenken', waarin CULTUUR als basisbegrip is opgenomen, dan om steeds opnieuw pogingen te ondernemen om de invloed van cultuur op het leren van wiskunde te neutraliseren.'

Wat ligt dan meer voor de hand om nu na te gaan hoe wiskunde wordt beoefend in andere culturen? De vraag is dan in hoeverre de inhoud van de wiskunde, de toepassing van en de opvattingen over wiskunde in zo'n ander cultuurgebied verschillen van hoe men elders daarover denkt. Voor een dergelijk onderzoek kun je 'ver van je bed' gaan, en ook dicht bij huis blijven; in het laatste geval wordt bijvoorbeeld 'maatschappelijke klasse' gesubstitueerd voor 'cultuur'.

Stieg Mellin-Olsen beschrijft zeer interessante studies op dit gebied. Ik kan het niet nalaten om hier even Pinxten te noemen. Mellin-Olsen gaat ver in op Pinxtens in 1983 verschenen *THE ANTHROPOLOGY OF SPACE*, over hoe de Navajo-Indianen meetkunde bedrijven. Door zijn aandacht voor de relatie tussen cultuur en wiskunde komt hij vervolgens tot een 'nieuw' concept: *VOLKSWISKUNDE*. En volkswiskunde is volledig bepaald door de cultuur waarin het tot stand is gekomen en gebruikt wordt. Voor het denken over wiskundeonderwijs, vooral door hen die het denken willen laten volgen door ontwerpen van wiskundeonderwijs, acht Mellin-Olsen dit een cruciaal begrip. Want als we menen dat wiskunde slechts verworven kan worden door de eigen activiteit van leerlingen, dan moet de wiskunde op school minstens ook kenmerken vertonen van de volkswiskunde, die bij de cultuur van die school past. Conflictuerende culturen op de achtergrond van het wiskundeonderwijs leiden hoogstens tot instrumenteel begrepen kennis, dus, vanuit het standpunt van Mellin-Olsen, tot niets.

Hier eindigt de 'voorgeschiedenis' zo ongeveer, en begint dus het boek. De voorbereidingen ervoor zijn getroffen, de lezer weet wat de schrijver beweegt, hoe hij zich reflectief en studicus tussen praktijk en theorie opstelt, en kan bevroeden welke verwachtingen hij mag hebben met betrekking tot de opbrengt van Stieg Mellin-Olsens inspanningen. Of men zijn verwachtingen in vervulling zal zien gaan? Het antwoord op die vraag laat ik graag aan de lezer zelf over.

- 1 Stieg Mellin-Olsen, *The Politics of Mathematics Education*, Mathematics Education Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1987, ISBN 90-277-2350-8.
- 2 Het begrip interactie wordt momenteel te pas en te onpas gebruikt om computer-software te karakteriseren. 'Interactief' staat dan voor 'goed'. Zodra er een mogelijkheid is gecreëerd om op door het programma gestelde vragen te antwoorden, is er al sprake van een interactief programma. Bij Stieg Mellin-Olsen is interactie genuanceerder ingevuld en ondermeer gebaseerd op diepgaande kennis van het onderwerp, inzicht in de wijze waarop mensen de betreffende kennis verwerven en betrokkenheid op zijn leerlingen. Door zijn manier van spreken, door de voorbeelden die hij aanhaalt en door goed geplaatste pauzes prikkelt hij de aanwezigen deel te nemen aan zijn gedachtengang en daagt hij ze uit eigen denkbeelden erin naar voren te brengen. De visie op wiskundeonderwijs, die hij in dit boek naar voren brengt, laat geen andere benadering toe.
- 3 Richard R. Skemp was wiskundeleraar en werd psycholoog aan de universiteit van Warwick in het Verenigd Koninkrijk. Zijn eerste onderzoeken golden natuurlijk het leren van wiskunde. In Nederland verwierf hij enige bekendheid met het boek *The Psychology of Learning Mathematics* (Penguin, 1971) dat ook vertaald werd: *Wiskundig Denken* (Utrecht, 1973). In 1979 verscheen zijn laatste grote werk: *Intelligence, learning and action* (J. Wiley, Londen). Het proefschrift *Leren reflecteren als basis van de lerarenopleiding* (SVO-reeks nr. 67) van Fred Korthagen is voor een deel gebaseerd op Skemps theorie van het reflectieve denken. Skemp gaf bekendheid aan het onderscheid dat Mellin-Olsen maakte tussen 'instrumenteel' en 'relationeel' begrijpen en uitleggen. (R. R. Skemp, *Relational and Instrumental Understanding*, in *Mathematics Teaching*, nr. 77 1977).
- 4 John Holt deed vele observaties tijdens ondermeer rekenwiskundelessen op Engelse scholen. Zijn publicaties dateren van omstreeks 1965 en bestaan niet louter uit de neerslagen van hetgeen hij waarnam, maar zijn veeleer een bundeling van reflectieve notities. Wat hij als bezoeker zag, doorzag hij onmiddellijk als ervaren leraar en wist hij vervolgens te typeren in het grotere geheel van opvoeding en onderwijs. Nu nog zeer actueel en dus lezenswaard zijn:
How Children Fail, Penguin Books 1977
How Children Learn, Penguin Books 1979
Escape From Childhood, Penguin Book 1974
Het eerstgenoemde boekje is vertaald in het Nederlands: *Het Kind. Een Mislukking?* (Bert Bakker, 1971).

● Shortliner ●

► Pythagorische drietallen

Arjan van de Ven (13 jaar) uit Boekel, Noord-Brabant, zond ons een shortliner voor het bepalen van Pythagorische drietallen. Onder een Pythagorisch drietal verstaan we in dit verband een drietal gehele getallen a, b, c, die geen gemeenschappelijke factor hebben en waardoor geldt $a^2 + b^2 = c^2$, en $0 < a < b < c$.

Het bekendste Pythagorische getal is 3, 4, 5, maar er zijn er oneindig veel. Een algoritme om ze alle te vinden luidt: kies twee natuurlijke getallen m en n ($m > n > 0$, één even en één oneven) en neem $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$.

Arjan van de Ven heeft ook hiervoor een shortliner opgesteld, waarin a en b zonodig worden verwisseld om het kleinste getal voorop te krijgen.

```

0 REM pythagorische drietallen
5 CLS
10 INPUT "Wat is de bovengrens";VER
20 DIM A(VER*2),B(VER*2),C$(VER,VER)
30 FOR T=3 TO VER :FOR G=1 TO VER
40 IF SQR((G*G)+(T*T))-INT(SQR((G*G)+(T*T))) THEN X=X+1:A(X)=G:B(X)=T
50 NEXT G,T
60 FOR T=1 TO X
70 MIN=A(T):IF B(T)<MIN THEN MIN=B(T):SWAP A(T),B(T)
80 FOR G=MIN TO 1 STEP -1
90 IF A(T)/G=INT(A(T)/G) AND B(T)/G=INT(B(T)/G) THEN A(T)=A(T)/G:B(T)=B(T)/G
100 NEXT
110 C$(B(T),A(T))=STR$(A(T))+","+STR$(B(T))+","+STR$(SQR((A(T)*A(T))+(B(T)*B(T))))
120 NEXT
130 FOR G=1 TO VER:FOR T=1 TO VER
140 IF C$(T,G)<>" " THEN PRINT C$(T,G):F=F+1
150 NEXT T,G:PRINT F;" drietallen":END

```

```

0 REM pythagorische getallen
5 KEY OFF:CLS
10 LOCATE 25,1:PRINT"Druk op een toets om te stoppen";:LOCATE 1,1:M=1
20 WHILE INKEY$="": M=M+1
30 FOR N=M-1 TO 1 STEP -2:FOUT=0
40 FOR G=2 TO N
50 IF M MOD G=0 AND N MOD G=0 THEN FOUT=1
60 NEXT G
70 IF FOUT=1 THEN GOTO 100
80 A=(M*M)-(N*N):B=2*M*N:C=(M*M)+(N*N):AANTAL=AANTAL+1
90 IF B<A THEN PRINT B,A,C:ELSE PRINT A,B,C
100 NEXT N
110 WEND
120 PRINT "Gevonden : ",AANTAL

```

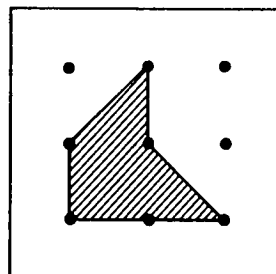
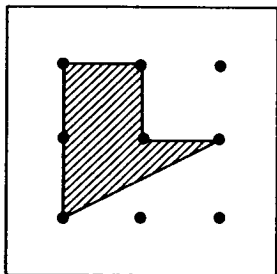
```

Wat is de bovengrens? 25
3, 4, 5
5, 12, 13
7, 24, 25
8, 15, 17
20, 21, 29
5 drietallen
Ok

```

3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
Gevonden :	4	
Ok		
Druk op een toets om te stoppen		

● Werkblad ●



► Figuren met gelijke oppervlakte

Getekend zijn twee figuren, elk op een spijkerbord van 3 bij 3.

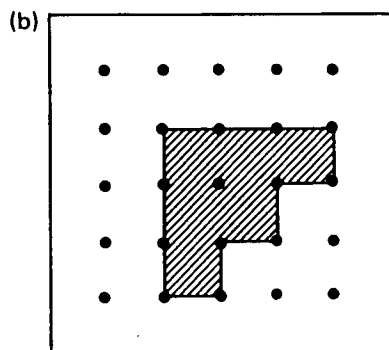
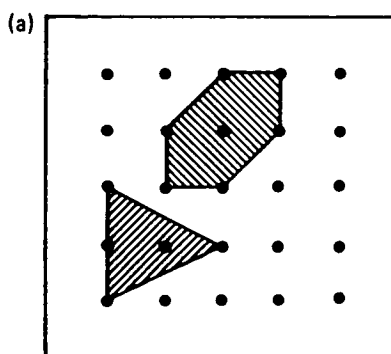
Als de oppervlakte-eenheid gelijk is aan de oppervlakte van één klein vierkantje, dan hebben de getekende figuren elk een oppervlakte van 2 eenheden.

Leg uit dat dat inderdaad zo is.

Zoek nu op een spijkerbord van 3 bij 3 alle mogelijke verschillende figuren die een oppervlakte van 2 eenheden hebben. Teken al deze figuren.

Als je een spijkerbord van 5 bij 5 zou hebben, zouden er méér figuren met een oppervlakte van 2 eenheden zijn. Teken ook deze.

● Werkblad ●



► De stelling van Pick

De twee figuren op het 5×5 – spijkerbord (a) bevatten elk één spijker binnen de omtrek. Zoek andere figuren op een 5×5 – spijkerbord die ook één spijker binnen hun rand (omtrek) bevatten. Teken ze.

Noteer bij elke figuur de oppervlakte (neem als oppervlakte-eenheid de oppervlakte van één klein vierkantje); geef met een formule aan hoe de oppervlakte O van zo'n figuur afhangt van het aantal spijkers R in de rand.

De figuur op spijkerbord (b) heeft 12 rand-spijkers en één 'inwendige spijker'. Zoek figuren met telkens 12 rand-spijkers, en achtereenvolgens 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... inwendige spijkers.

Hoeveel inwendige spijkers kunnen er zijn?

Vind een formule die de oppervlakte O van een figuur met 12 rand-spijkers uitdrukt in het aantal inwendige spijkers I .

Het is mogelijk om de oppervlakte O van een willekeurige spijkerbord-figuur uit te drukken in het aantal rand-spijkers R en het aantal inwendige spijkers I . De formule die dit weergeeft heet de stelling van Pick.

Hoe luidt de stelling van Pick?

'Auteurs in beeld'

► Wiskunde voor het middelbaar beroepsonderwijs

Bas van Cranenburgh

Acht jaar geleden zijn ze begonnen met het schrijven:

Th. Bulthuis, docent wis- en natuurkunde en informatica op een laboratoriumschool in Groningen, J. A. Eggenkamp, verbonden aan de middelbare

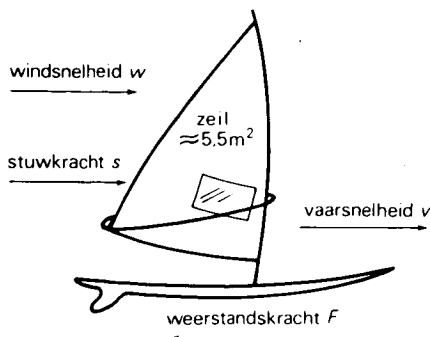
agrarische school te Boxtel, H. Mensonides, wis- en natuurkunde – en informaticaleleraar op een laboratoriumschool te Deventer, J. Rossen, docent wiskunde aan de Pedagogisch Technische Hogeschool te Eindhoven, A. J. van Vloten, wis- en natuurkundeleraar op een MTS te Hilversum.

In 1984 kwamen de eerste drie delen op de markt: één voor middelbaar technisch, één voor middelbaar agrarisch en één voor middelbaar laboratorium onderwijs. Drie delen uit een serie van acht, uitgegeven bij Wolters-Noordhoff. Boeken die er aantrekkelijk uitzien, rijk aan foto's en illustraties. Achter deze boeken gaat een gedachte schuil, daar moest eerst overeenstemming over bestaan. Het idee ontstond de boeken de IOT-vorm te geven: Instappen-Oefenen-Toepassen. Niet met kale wiskunde een hoofdstuk beginnen maar een praktische context ter introductie van een stuk wiskunde. En wanneer daar voldoende mee geoefend is, volgen vraagstukken die de wiskunde toepassen in het specifieke beroepsgebied.

Een gesprek met vier van de vijf auteurs over de haken en ogen die er aan het schrijven vastzitten, de wiskundige problemen van een mbo-leerling, motivatie en het gebruik van de rekenmachine.



gemeenschappelijke filosofie ...



Instap

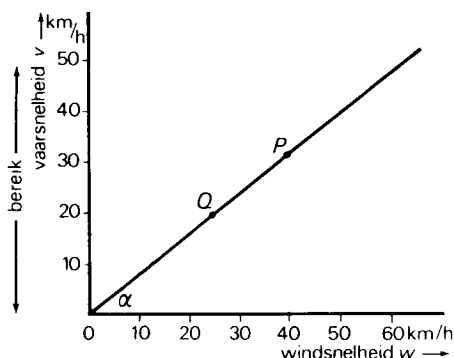
Van Vloten: 'We begonnen toen met een hele nieuwe methode. Op de eerste bijeenkomsten bekeken we of we op een gemeenschappelijke filosofie kwamen'.

Bulthuis: 'Kijk, in de traditionele wiskundeboeken wordt een stukje theorie gevolgd door een rij sommetjes. Dat leek ons voor het mbo niet de goede manier, dan ontbreekt de samenhang tussen de theorie en de praktijk. De leerlingen leren wiskunde, maar weten niet waar ze mee bezig zijn. In onze boeken begint elk hoofdstuk met een praktische instap. Zo beginnen we het hoofdstuk over eerste-grads functies met een kort stukje tekst over surfplanken. Er wordt gezocht naar verbanden tussen windsnelheid, vaarsnelheid en weerstandskracht. Dit probleem mondt uit in wiskunde. Zo wordt een lineair verband gevonden tussen wind- en vaarsnelheid. Na dit instapprobleem volgt een aantal oefeningen met die wiskunde. En daarna gaat de leerling deze wiskunde toepassen'.

Levert een praktische instap geen probleem op als de formele wiskunde nog niet begrepen is?

Mensonides: 'We werken met leerlingen die meestal van het mavo komen. Ze beheersen de elementaire grondbeginselen van de wiskunde, daar gaan we wel van uit. Wat die leerlingen gemist hebben is: wat doe je met wiskunde? Wij willen dat ze leren om de wiskunde te herkennen in hun omgeving'.

Er zijn leerlingen die op mavo en lbo bij wiskunde veel gewerkt hebben met uit het hoofd geleerde formules. Geeft dat geen problemen?



Van Vloten: 'Ja, als ze dan bij ons op het mbo komen, blijkt de meest eenvoudige wiskunde moeilijk voor ze. In praktische voorbeelden zijn het plotseling niet meer x en y maar bijvoorbeeld t en v . Dan is het volgens hen geen wiskunde meer. Zelfs leerlingen van het havo, die deze wiskunde toch zouden moeten beheersen, zien water branden als je met praktijkvoorbeelden begint'.

Motivatatie is een belangrijk begrip in het gesprek. Wanneer je leerlingen confronteert met de dagelijkse praktijk van de wiskunde, snapt hij wellicht beter waarom hij het leert.

Bulthuis: 'Tegenwoordig moet je de leerling veel meer motiveren. Een van de belangrijkste zaken daarbij is dat je ze laat zien waarom je ze iets laat leren. Praktijkvoorbeelden zijn daarvoor zeer geschikt'.

Lezen

De boeken zijn zo geschreven dat ze de rol van de docent een beetje naar achteren schuiven. De leerlingen kunnen voor een deel zelfstandig aan het werk. Bij problemen kan de docent ingrijpen.

Er moet tamelijk veel gelezen worden. Dat zou wel eens moeilijkheden kunnen geven?

Rossen: 'Je kunt daar twee kanten mee op: de leerlingen kunnen het niet, dus we laten ze niet lezen. Ik denk dat het beter is om er juist één van je

doelstellingen van te maken om ze het lezen te leren. Je zult je dan als auteur niet uit het veld moeten laten slaan door tegenvallers die je met name in het begin hebt.

Maar je zult er voor moeten waken dat je de leerlingen te veel prikkelt. Ze moeten geen tegenzin krijgen in dat lezen'.

Van Vloten: 'je zult als docent met deze boeken dan ook vaak te horen krijgen: meneer, dit is toch geen wiskunde? Pas na enige tijd gaan ze het leuk vinden'.

Bij het leesbaar maken van de boeken is kritiek op elkaar een van de belangrijkste dingen. Wat voor de een helder en duidelijk klinkt, blijkt voor de ander vaak warrig. Maar er is meer dan kritiek van elkaar.

Mensonides: 'We hebben kritieken van lerengroepen van allerlei mbo's gekregen. Na daar uitvoerig over gepraat te hebben, zijn inmiddels veel verbeteringen aangebracht. Er komen ook veel docenten met leuke ideeën. Bovendien horen we veel reacties van onze leerlingen'.

Bulthuis: 'Als je van iemand commentaar krijgt, dan is het zeker ook van je eigen leerlingen'.

Om de leerlingen te helpen met het goed leren lezen staan er na elke tekst vragen en opdrachten die teruggrijpen op de tekst.

Rossen: 'Het is een trend geweest te zeggen, dat contexten alleen goed zijn als ze rijk gevuld zijn. Dit houdt vaak in dat ze lang zijn en een overvloed aan gegevens bevatten. Onze boeken zijn daarentegen rijk aan contexten. Veel verschillende contexten, die vrij kort zijn. Soms krijgen we de kritiek dat de context alleen maar een verhaaltje is, zonder dat er veel wiskunde in zit. Ik denk dat we daar wel gevoelig voor zijn'.

Er wordt op deze manier vrij veel gevraagd van de mbo-leerling. Is men bijvoorbeeld op het havo klaar als men de grafiek heeft getekend, hier komt nog wat meer bij kijken.

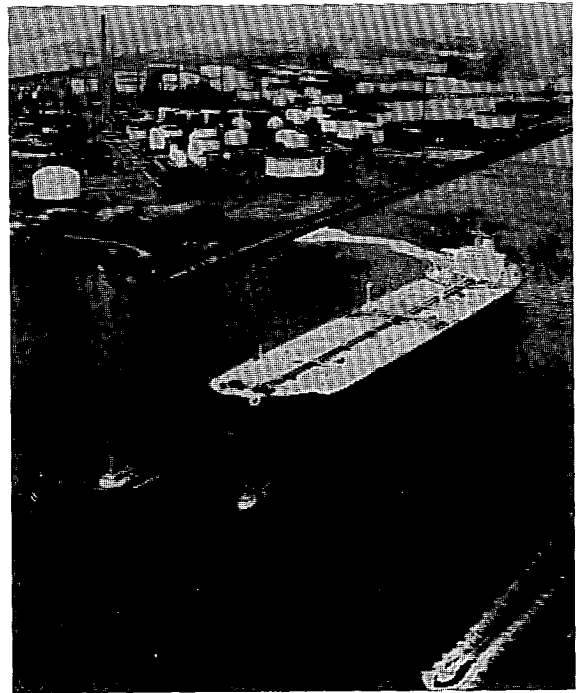
Rossen: 'Voordat je een grafiek tekenen kunt, moet je een praktijksituatie tot wiskunde omvormen. Als de grafiek dan getekend is, heb je nog niet het

eindstation bereikt. Er komt nog een verhaal achteraan, je moet de grafiek interpreteren'.

Illustraties

Een illustratie kan zeer verhelderend werken. Bovendien wordt het geheel er wat vrolijker door. Maar een foto is vaak meer dan een illustratie alleen.

Bulthuis: 'Deze leerlingen zijn voor een groot deel visueel ingesteld. Daar moet je op inspelen. Je kunt de situatie herkenbaar maken met een foto van bijvoorbeeld twee sleepboten die een schip voorttrekken. Bovendien scheelt dat weer aanzienlijk in de tekst'.



Rossen: 'Op het moment dat je uit een foto gegevens kunt halen die je nodig hebt voor het oplossen van je probleem, is er sprake van méér dan een illustratie'.

Bulthuis: 'Indertijd, tijdens mijn didaktische opleiding heb ik geleerd: als je het hebt over een koe dan moet je met de klas naar het weiland. Dat zou

natuurlijk ideaal te zijn. Dat wordt natuurlijk wel moeilijk als je in Groningen lesgeeft over sleepboten in de Maashaven'.

Van Vloten: 'De auteur van een wiskundeboek moet een docent niet een bepaalde werkvorm opdringen. Sommige leraren willen of kunnen gewoon niet naar buiten met hun klas om de hoogte van een gebouw te meten'.

Op deze wijze laat de methode tamelijk veel ruimte aan de docent. Zo zal hij ook bepaalde hoofdstukken die hij voor de desbetreffende afdeling van het mbo niet belangrijk vindt, kunnen overslaan. Ook de volgorde van de hoofdstukken kan veranderd worden. Toch is de opbouw in de boeken niet willekeurig.

Het is een concentrische leergang. Eerst grafieken, dan meetkunde, dan formules en daarna goniometrie. Die vier onderwerpen komen in die volgorde, elke vier hoofdstukken weer terug.

Rekenmachine

Een onmisbaar hulpmiddel bij het gebruik van deze boeken is de rekenmachine. Elk boek begint met een paragraaf met richtlijnen voor het gebruik ervan. Blijkbaar is de calculator volledig geaccepteerd. Geen lange staartdelingen meer, maar enkele eenvoudige aanslagen op het elektronische rekenwonder.

Mensonides: 'Waarom zou je de leerlingen met cijferen lastigvallen? Veel belangrijker is dat de leerlingen begrijpen wat hun uitkomst voorstelt. Bovendien moeten ze begrijpen dat een groot aantal decimalen vaak geen zin heeft'.

Van Vloten: 'We proberen ze te leren hun antwoord kritisch te bekijken. Ze moeten van te voren al een idee hebben van de orde van grootte van de uitkomst'. Er zijn onderdelen van het rekenen die extra aandacht verdienen. De boeken worden daarom aangevuld met een nieuw hoofdstuk om in die leemte te voorzien, hoofdstuk 0.

Mensonides: 'In de nieuwe druk komt een hoofdstuk te staan dat zal gaan over breuken, wetenschappelijke notatie en eenheden. Deze onderwerpen geven altijd problemen. Vooral breuken zijn en blijven een struikelblok'.

Inspiratie

Wat zijn de hindernissen die je als auteur telkens op je weg tegen komt?

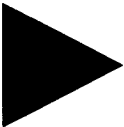
Mensonides: 'Natuurlijk heb je ups en downs maar daar help je elkaar doorheen. Het kost vooral veel tijd om te schrijven, daar lijdt het gezinsleven ook wel eens onder'.

Van Vloten: 'Mijn grootste probleem ligt in het op het juiste moment hebben van inspiratie. Het zoeken naar een instapprobleem, daar loop je dag en nacht mee rond. Soms heb je een idee helemaal uitgewerkt en blijkt het achteraf toch niet bruikbaar. Dat hoort er allemaal bij'.

Rossen: 'Ik zie daar wel een probleem in. Je zoekt een context bij een wiskunde-onderwerp. Dat is eigenlijk de omgekeerde wereld. We willen juist de wiskunde uit de praktijk halen, niet andersom. Er bestaat dan het gevaar van een gekunstelde situatie. Bovendien blijf je altijd nog met de vraag zitten: als ik het realistisch vind, vinden de leerlingen dat dan ook? Het zou wel eens goed zijn van meer leerlingen te horen wat ze van onze contexten vinden'.

Over de auteur:

Bas van Cranenburgh is leraar wis- en natuurkunde aan het Haarlemmermeer Lyceum te Hoofddorp en het Erasmus College te Haarlem.



Mededeling

- Op vrijdag 28 april 1989 organiseert de Werkgroep Vrouwen en Wiskunde in samenwerking met de VALO W/I een studiedag 'WISKUNDE IN HET LHNO' in Amsterdam.
 - Op vrijdag 19 mei organiseert de VALO W/I een studiedag 'LOGO EN ONDERWIJS, NU EN STRAKS' in Utrecht.
- Voor beide studiedagen kan men zich schriftelijk aanmelden bij: VALO Wiskunde en Informatica, Postbus 2061, 7500 CB Enschede.

► Wiskundeonderwijs nu

S. P. van 't Riet

Inleiding

Recensies en boekbesprekingen zeggen meestal minstens zo veel over de opvattingen van de recensent, als over de inhoud van het besproken boek en de ideeën van degene die het schreef. In dat licht moet men ook onderstaande bespreking lezen van het boek 'Wiskundeonderwijs nu' van Bram Lagerwerf, in 1982 uitgegeven bij Wolters-Noordhoff en inmiddels voor de tweede maal gedrukt. Ik heb slechts mijn eigen indruk weergegeven, wat ik in het boek gevonden heb en wat ik er in gemist heb, wat mij enthousiast maakte en wat mij teleurstelde. Wie werkelijk wil weten wat er voor hem of haar in het boek te vinden is, zal het zelf moeten lezen.

De inhoud van het boek

Het boek 'Wiskundeonderwijs nu' is een boek over het werk van wiskundeleraars. Het biedt, zoals de auteur in zijn inleiding schrijft, allerlei ideeën over hoe een wiskundeleraar zijn werk al of niet zou kunnen aanpakken. Het boek is vooral praktisch van aard. Voor zover er theorie in voorkomt, wordt deze aan de hand van vaak vele concrete voorbeelden direct toegepast op het werk van de leraar in de klas. Dat werk, dat een leraar doet in en ter voorbereiding op de les, vormt de belangrijkste optiek van

het boek. Steeds wordt de vraag gesteld: wat doe je als leraar met deze kennis?¹ Dat is de verdienste van dit boek, maar tegelijkertijd ook zijn beperking. Verdienste, omdat niet eerder een Nederlands boek over wiskundendidactiek geschreven werd zo nauw aansluitend bij de klaspraktijk.

Vele voor elke leraar zeer goed herkenbare situaties, problemen en vragen passeren al lezend de revue. De tekst is nergens saai of droog door een te veel aan abstracte speculatie. Eerder hebben de voorbeelden een enkele keer door aantal of uitweiding de neiging wat langdradig te worden, maar echt storend is dat niet.

Om het boek zo concreet te kunnen maken heeft Lagerwerf het geschreven op het huidige wiskundeonderwijs, zoals de titel al duidelijk verwoordt. Veelvuldig wordt in de voorbeelden lesmateriaal uit bestaande wiskundemethoden gebruikt, waarbij stukken tekst van die methoden worden afgedrukt. We komen leerstof tegen uit o.a. Moderne Wiskunde, Getal en Ruimte, Van A tot Z en Passen en Meten. Dat maakt het boek levendig. Maar gezien de snelheid waarmee wiskundemethoden vandaag de dag veranderen, vraagt men zich af, hoe lang dit boek in zijn huidige vorm actueel zal blijven. Hier treffen we dan ook een van de voornaamste beperkingen van dit boek aan. De aandacht voor de ontwikkeling waarin het wiskundeonderwijs zich momenteel bevindt is niet afwezig, gezien bijvoorbeeld de verwijzing die af en toe plaats vindt naar nieuwer lesmateriaal², maar erg veel zicht geeft het boek niet op deze 'macro'-kant van het wiskundeonderwijs. We moeten de verdienste van het boek daarom vooral zoeken in het feit, dat hier een verdiepend beeld wordt gegeven van de dagelijkse lespraktijk van de wiskundeleraar.

De behandelde onderwerpen

In negentien hoofdstukken worden vele aspecten van het lesgeven in wiskunde behandeld. De auteur begint daarbij met vier hoofdstukken over leerstof, het punt waar ook vele leraren zullen beginnen bij het nadenken over hun onderwijs. Die hoofdstukken gaan achtereenvolgens over getallen, vergelijkingen, verzamelingen en functies. Dit is naar mijn

indruk niet een willekeurige keuze van de auteur. Deze onderwerpen gaan stuk voor stuk over centrale begrippen in het huidige wiskundeonderwijs, centraal soms tot verdriet van Lagerwerf, zoals in het geval van verzamelingen, die hem zelfs een oproep tot een soort burgerlijke ongehoorzaamheid ontlokken³. Naast een ‘instap’-functie hebben deze vier hoofdstukken nog een andere functie in het boek. De auteur verwijst er in zijn verdere tekst van tijd tot tijd naar om zijn betoog te illustreren. Ook ten aanzien van andere onderwerpen is er de tendens de verschillende delen van het boek op elkaar te betrekken. Dat maakt mede het boek tot een geheel, waarin alles met alles samenhangt, maar heeft tevens tot gevolg dat men het boek in een betrekkelijk korte tijd moet lezen om er profijt van te kunnen hebben.

De tien hoofdstukken die daarna volgen, gaan allemaal over het onderwijsleerproces in de klas, het proces van interactie en communicatie, waarbij de leraar de zaken zo regelt dat de leerling op een zinvolle manier wiskunde leert. Onder andere komen aan de orde:

- voorbeelden geven,
- wiskunde tastbaar maken,
- denkschema’s,
- het beginnen van een les,
- de niveautheorie van Van Hiele,
- leerlingactiviteiten,
- uitleggen,
- verwerken van leerstof.

Steeds komt naar voren dat het in het onderwijs gaat om het leren van de leerling en dat het onderwijzen van de leraar daaraan ten dienste moet staan. Of, om Lagerwerf te citeren: ‘de school is een leerinstituut en geen werkgelegenheidsproject voor leraren.’ En: er zijn leraren die ‘vergeten dat onderwijzen een karwei is voor twee. Ze vergeten de leerlingen in te schakelen bij wat ze doen... Een leerling kan alleen iets leren als hij iets doet dat tot leren leidt.’ Dit uitgangspunt loopt als een rode draad door het verdere van het boek en de auteur werkt dit thema op allerlei manieren uit. Na deze tien hoofdstukken komen er twee over:

- lesplan maken en
- doelen van wiskundeonderwijs.

Daarna zijn er nog drie hoofdstukken die dieper ingaan op onderwerpen die al eerder behandeld

zijn:

- voorbeelden geven;
- denkschema’s;
- niveautheorie.

Het boek bevat voorts een literatuurlijst en een index.

Ondanks de veelheid aan belangrijke onderwerpen die in het boek besproken worden, zijn er ook een aantal die voor elke leraar van grote betekenis zijn, maar nauwelijks of alleen zijdelings aan de orde komen. Zo wordt bijvoorbeeld aan het onderwerp ‘toetsing’ slechts heel terloops aandacht besteed, terwijl het daarbij toch om een invloedrijk aspect van het onderwijs gaat. Ook bij het onderwerp ‘differentiatie’ wordt nergens uitgebreid stilgestaan, hetgeen te betreuren is aangezien juist op dit punt de huidige wiskundemethoden vaak zo heel verschillende wegen bewandelen. Het boek beperkt zich grotendeels tot het onderwijsleerproces in engere zin. Maar dat wordt dan ook van allerlei kanten doorgelicht.

Persoonlijke stellingname en stijl

Een van de meest opvallende kenmerken van ‘Wiskundeonderwijs nu’ is, dat het op een zeer persoonlijke manier geschreven is. Het boek is door Lagerwerf voor het grootste deel gesteld in de ik-vorm. Daarbij spreekt hij de lezer vaak rechtstreeks aan, alsof deze bij hem in de kamer of in het lokaal zit. Dat maakt het boek niet alleen tot een boek over wiskundeonderwijs en wiskundendidactiek, maar ook tot een persoonlijk document van een wiskunde- en vakdidactiekdocent die op een intensieve wijze met zijn professie bezig is. Zo zet Lagerwerf zich van tijd tot tijd af tegen bepaalde tendensen in het vroegere en in het huidige wiskundeonderwijs⁴, plaatst vraagtekens bij alledaagse gewoonten in het onderwijzen van wiskunde⁵, en neemt in heel wat kwesties stelling of trekt persoonlijke conclusies, die vele lezers lang niet altijd vanzelfsprekend zullen vinden en die ook niet altijd grondig onderbouwd worden. Daarbij kan men soms saillante uitspraken noteren, zoals bijvoorbeeld: ‘Het is met relaties eigenlijk net zo als met verzamelingen: ze zijn per ongeluk in het voortgezet onderwijs te-

rechtgekomen...⁶. In hetzelfde betoog zegt Lagerwerf er geen goed woord voor over te hebben dat sommige schoolboeken eerst relaties en daarna functies als een bijzonder soort relaties behandelen⁷.

Deze persoonlijke stijl en stellingname kunnen zeer geschikt zijn voor wat de auteur zegt met het boek te beogen: 'Een op de praktijk gerichte didactische handreiking aan wiskundeleraars' (aldus de ondertitel van het boek). De lezer zal veel aan dit boek kunnen hebben, als hij die hand wil aannemen en met dit boek het gesprek over het onderwijzen van wiskunde wil aangaan. En daar beginnen dan bij mij enige aarzelingen te rijzen omtrent de bedoelingen van Lagerwerf, want aan het slot van een paragraafje van het inleidende nulde hoofdstuk, waarin wordt uitgelegd dat 'Wiskundeonderwijs nu' een leerboek is en geen wetenschappelijke verhandeling, leest men⁸:

'Dit boek is geen discussiestuk. Als u het hier of daar niet eens bent met wat u leest, of als u helemaal niet snapt wat er staat, dan kunt u dat stuk beter overslaan. Het gaat er niet om dat ik niet voor kritiek vatbaar zou zijn, integendeel. Ik denk echter dat het handiger is uw energie te steken in passages waar u wel iets aan hebt.'

Als ik als wiskundeleraar dit boek ter hand zou nemen, zou ik dat niet op me laten zitten. De kritische zin die ik mijn leerlingen zou willen bijbrengen en de vasthoudendheid te willen begrijpen wat niet direct begrepen wordt, is een leereigenschap die ik mij zelfs door een didactiekdocent niet zou laten ontzeggen. Openbaart zich hier al vroeg in het boek een zekere tweeslachtigheid, die men al lezende vaker lijkt te kunnen bespeuren? Het boek is uitgegeven voor (ervaren) wiskundeleraars (gezien de ondertitel), maar duidelijk geschreven vanuit de opleiding tot wiskundeleraar en daar kennelijk mede weer voor bedoeld. Studenten in opleiding kan men wellicht een leerboek aanbieden en daarbij het al te snel overgaan tot discussie afraden, maar ervaren docenten die hun vak willen bijhouden of hun functioneren willen verbeter-

ren... Daarbij komt dat discussie een uitstekend middel tot leren kan zijn, temeer als het gaat om zaken waarover men verschillend kan denken en waarop verschillende visies mogelijk zijn. En met dergelijke zaken houdt 'Wiskundeonderwijs nu' zich – terecht – regelmatig bezig. Want ook didactiek van de wiskunde is een vorm van sociale wetenschap en daarin zijn strijdige theorieën mogelijk!⁹ Het is nu juist de zeer persoonlijke stijl van dit boek die het boeiend maakt. Een leerboek echter dat niet geschreven wordt voor onmiddellijke discussie, veronderstelt meer distantie van de schrijver tot zijn stof. Bij een leerboek behoort de schrijver niet geregeld hinderlijk tussen de lezer en de leerstof in te staan. Begrijp mij goed: ik vind het meestal niet hinderlijk Lagerwerf om de andere bladzijde van dit boek tegen te komen, want zijn ideeën en stellingnamen zijn de moeite waard om mee bezig te zijn, maar daardoor is dit boek mijns inziens als leerboek minder geschikt. Hinderlijk wordt de aanwezigheid van de auteur in de tekst echter wel als hij niet alleen maar zijn eigen opvattingen geeft, maar ook nog eens de lezer op zijn nek gaat zitten met opmerkingen, hoe deze het boek zou moeten gebruiken¹⁰. In een voorwoord kan dat nog op zijn plaats zijn, maar in de tekst niet. Vanaf halverwege het boek begint deze neiging steeds vaker voor te komen. En als het verantwoordelijkheidsgevoel van de auteur voor het overkomen van zijn pennevrucht zo ver gaat, dat hij opmerkt zijn stof liever mondeling met u te willen doornemen en verwerken¹¹, dan overschrijdt hij mijns inziens een grens die de lezer als een te grote bemoeizucht maar door de vingers moet zien.

Daarom zou ik er voor willen pleiten dit boek wel degelijk tegen de bedoeling van de auteur in als een discussiestuk op te vatten. Eerst dan komt het naar mijn oordeel tot zijn volle recht. Men kan dit boek geen slechtere dienst bewijzen dan het maar voor zoete koek te slikken. En dat niet alleen in de studeerkamer, maar ook in de lerarenopleiding.

Een zeer concreet boek

Men late zich dus door bovenstaande oneffenheden niet terugschrikken het boek van Lagerwerf ter hand te nemen, want als men er tegen kan eens

dingen te lezen of te horen die ingaan tegen allerlei dat men jarenlang voor vanzelfsprekend heeft gehouden, dan zal men van de aanwezigheid van de auteur in de tekst geen last hoeven te hebben. Het boek zet sterk aan tot nadenken over bestaande praktijken binnen het huidige wiskundeonderwijs en staat desondanks stevig met beide benen op de grond van datzelfde huidige wiskundeonderwijs. In dat opzicht dekt de titel van het boek de inhoud in grote mate. 'Meer pragmatisch dan idealistisch' noemt Lagerwerf dat zelf¹². En daarmee heeft hij de Nederlandse literatuur op het gebied van de didactiek van de wiskunde ontegenzeggelijk verrijkt.

Het boek staat vol met praktijkvoorbeelden van hoe de dingen gaan in het wiskundeonderwijs of hoe de leraar het ook zou kunnen doen. Elk hoofdstuk heeft een duidelijk onderwerp. De belangstelling van de auteur gaat met name uit naar de wijze waarop leerlingen wiskunde leren. Daarom is er veel aandacht voor de leerpsychologische aspecten van het wiskundeonderwijs. Het werken aan de voorstelling, mentale schema's, de aanschouwing leidt bijvoorbeeld bij de invoering van het wortelbegrip tot de keuze van het schema 'lengte van de zijde van een vierkant bij gegeven oppervlakte'¹³. Aandacht voor het materialiseren van wiskunde is aanwezig¹⁴. Hoofdstuk 6 is zelfs geheel gewijd aan 'handwerk' en in hoofdstuk 15 wordt de methode van Galperin toegepast op merkwaardige producten. De aandacht voor dit aspect van wiskundelezen is toe te juichen, aangezien het tot op heden onderbelicht is geweest in de didactiek van het voortgezet wiskundeonderwijs.

In het boek zijn verder vele concrete ideeën en aanbevelingen te vinden over hoe bepaalde leerstof behandeld zou kunnen worden. Ik noem bijvoorbeeld het vertellen van miniverhaaltjes bij rekenommen en bij lineaire vergelijkingen, of zoals Lagerwerf het noemt het heen en weer pendelen tussen concreet en abstract¹⁵. Ook de behandeling van de niveautheorie van Van Hiele is erg concreet, hoewel niet steeds even helder. Met name geldt dat voor hoofdstuk 10 en het is mijns inziens een gevolg van de verhaaltrant waarmee Lagerwerf vele onderwerpen behandelt. Het betoog is daardoor niet altijd even duidelijk van opzet. Paragraaf 2 van hoofdstuk 19, waarin de theorie van Van Hiele nogmaals

wordt behandeld, is daarentegen veel helderder en zou ik aanraden te lezen direct na hoofdstuk 10. Overigens past Lagerwerf naar mijn indruk de niveautheorie van Van Hiele niet alleen toe op de wiskunde van het voortgezet onderwijs, maar ook op de stof van zijn eigen boek. Het concrete ervan en de vele voorbeelden erin bedoelen vooral een basisniveau te leggen. De bespreking die in het algemeen op de voorbeelden volgt kan dan gezien worden als een eerste-niveaubehandeling van de stof. Het tweede, meer theoretische niveau bereikt het boek zelden, maar dat wil de schrijver kennelijk ook niet. De bespreking die bijvoorbeeld in hoofdstuk 16 gewijd wordt aan de doelen van het wiskundeonderwijs vertoont sterk de trekken van een soort basisniveau en men kan zich afvragen of zo'n aanpak wel altijd terecht is als men voor ervaren wiskundeleraars schrijft. Fraai is het scala van vijf stijlen van lesgeven in hoofdstuk 13. Geschikt ook om een discussie tussen collega wiskundeleraars op gang te brengen over de vraag welke rol de leraar nou eigenlijk in de klas zou moeten spelen. En zo zijn er nog veel meer onderwerpen te noemen.

Visie op wiskundeonderwijs

In het boek wordt nergens uitgebreid en expliciet een visie op het wiskundeonderwijs gegeven. Maar zelfs als de auteur opmerkt dat het allemaal niet zo heel anders hoeft¹⁶, dan wil dat nog niet zeggen dat hij geen visie zou hebben op waar het in het wiskundeonderwijs om gaat. Alleen moet men die visie hier en daar uit de tekst bijeenbrengen. In die visie staan de leerlingen zeer centraal. Het onderwijs is er voor hen en moet daarom uitgaan van problemen die hen aanspreken en vragen waar zij zelf mee komen¹⁷. Ook zal de leraar er op uit moeten zijn de leerling te helpen zelf zijn probleem op te lossen. Voordoen en voorzeggen maakt de leerling afhankelijk van de leraar. Daarom doet de leraar er beter aan hints te geven of vragen te stellen die de leerling een klein beetje verder helpen. Ook vragen over de manier van werken van de leerling kunnen hem helpen zelf verder te komen¹⁸. Duidelijk is dat de leerstof gepresenteerd moet worden op een wijze die nauw aansluit bij de manier waarop kinderen

leren. Dus niet de logica van de wiskunde, maar de psychologie behoort de keuze en ordening van de leerstof te bepalen¹⁹. Een ander terugkerend thema dat hierbij aansluit is de bevordering van zelfstandigheid van de leerlingen. Of zoals Lagerwerf het formuleert: 'Zó te onderwijzen dat de leerlingen het elke volgende keer een beetje beter zonder u kunnen'²⁰. Maar erg diep gaat hij op dit laatste onderwerp niet in en dat is jammer, want daardoor komt het niet echt uit de verf. Daarnaast wordt ook het leren samenwerken van leerlingen als een belangrijk onderwijsdoel op lange termijn gezien. Hieraan wordt een korte, maar handzame bespreking gewijd²¹.

Hoewel er veel goede elementen in deze visie zitten, kan men er toch een aantal discussievraagtekens bij plaatsen. Is het onderwijs er eigenlijk wel alleen voor de leerling als individu al of niet samenwerkend met anderen? Of is het er minstens zo zeer voor de gemeenschap, de maatschappij, de cultuur? Van welk mensbeeld moet het wiskundeonderwijs en in het algemeen het onderwijs uitgaan? Helpen we de leerlingen echt als we altijd maar voor hen klaar staan om aan te sluiten bij hun eigen vragen en problemen? Of moeten we juist de vragen- en problemenhorizon van de leerlingen doelbewust vergroten? Is samenwerking wel steeds nuttig voor het leren van wiskunde? Of is een individuele benadering van leerlingen soms voordeliger voor hun ontwikkeling? Ik wil door deze vragen te stellen niet suggereren dat ik de visie van de auteur onjuist of verwerpelijk zou vinden, maar ben wel van mening dat er vanuit een breder kader over deze dingen nagedacht en gediscussieerd moet worden. Dit zijn zaken van schoolwerkplanontwikkeling die het klassegebeuren en het werk van de individuele leraar te bovengaan.

Het gebruik van het boek

Hoe men het boek 'Wiskundeonderwijs nu' wil gebruiken, moet ieder natuurlijk zelf weten. Ik zou in deze paragraaf echter een suggestie willen doen. Zoals reeds vermeld wil ik het boek met name zien

als een discussiestuk. Vooral als het door leraren wordt gelezen en gebruikt, die enkele tot vele jaren ervaring hebben in het wiskundeonderwijs. Zeer bruikbaar is het boek als het met een groep leraren, bijvoorbeeld een hele sectie, wordt besproken. Men kan dan de volgende werkwijze volgen.

Elke bijeenkomst wordt één hoofdstuk van het boek besproken. Iedere deelnemer leest dit hoofdstuk van te voren grondig door en formuleert naar aanleiding van de tekst één of meer vragen of gesprekspunten. Aan het begin van het gesprek wordt een ronde gehouden en ieder deelt zijn vragen of gesprekspunten mee en licht die eventueel toe. Deze worden door de andere deelnemers genoteerd en tijdens de discussie zo nodig geraadpleegd om verbanden te leggen, elkaar nader te bevragen of om nieuwe onderwerpen in het gesprek te brengen. Men begint de discussie echter pas als men de ronde gemaakt heeft en de vragen of opmerkingen van alle deelnemers op tafel zijn gelegd. De discussieleider ziet er op toe dat alle deelnemers zo veel mogelijk aan hun trekken komen en stimuleert de groep de belangrijkste van de aangedragen vragen en punten te selecteren en te bespreken. Men kan dergelijke gesprekken voeren uitsluitend met de bedoeling dat de deelnemers elk er hun voordeel mee doen. Men kan mijns inziens dergelijke gesprekken beter niet voeren om tot consensus te komen, bijvoorbeeld ten aanzien van een schoolwerkplan. Wel zou op basis van dergelijke discussies doorgegaan kunnen worden om tot een groeps- of sectiestandpunt te komen in allerlei zaken die het wiskundeonderwijs betreffen. Maar dan moet men zich al van het boek van Lagerwerf hebben 'losgemaakt'.

Bovenstaande werkwijze volgde ik zelf met vierdejaars studenten wiskunde in de lerarenopleiding. De meeste studenten, die allen reeds een aantal schoolpraktika achter de rug hadden, ervoeren deze werkwijze als een zinvolle manier van leren nadenken en discussiëren over eigen onderwijs. Natuurlijk kan men het boek op nog vele andere manieren gebruiken. Het bovenstaande is slechts een idee om ook wiskundeleraren niet al te individueel met hun onderwijs te laten bezig zijn. Tenslotte is het onderwijs geen zaak van individuele leraren, maar van schoolgemeenschappen.

Er zou over het boek 'Wiskundeonderwijs nu' nog veel meer zijn te zeggen. De discussie die ik erover bepleit tussen wiskundeleraren onderling, behoort echter niet alleen in een tijdschrift te worden gevoerd, maar vooral in het klaslokaal en in de docentenkamer. Ik hoop dat de eerste druk van dit boek reeds veel gespreksstof heeft doen opwaaien en dat de tweede druk dat minstens zo veel zal doen. Dat zal het wiskundeonderwijs in Nederland ten goede komen.

Noten

- 1 Titel van par. 5 van hoofdstuk 8, p. 54.
- 2 Enkele van de weinige wijzigingen in de 2e druk t.o.v. de 1e hebben met dit aspect te maken. Zo is op pag. 61 de vermelding van IOWO-materiaal vervangen door de vermelding van 'contextrijk leermateriaal'. Op pag. 54 is 'onvoldoende lesmateriaal' dat uitgaat van problemen die de leerlingen aanspreken, vervangen door 'waar gelukkig steeds meer materiaal voor beschikbaar komt'.
- 3 Pag. 24.
- 4 B.v. op pag. 9 en 21 e.v.
- 5 Pag. 10-12
- 6 Pag. 30
- 7 Pag. 30
- 8 Pag. 8
- 9 Pag. 52
- 10 B.v. pag. 112
- 11 Pag. 99 en 166
- 12 Pag. 7
- 13 Pag. 9-11
- 14 Pag. 11
- 15 Pag. 14 en 17
- 16 Pag. 12
- 17 Pag. 54, 59 en 142
- 18 Pag. 48 en 62
- 19 Pag. 30, 95 en 127
- 20 Pag. 108. Vergelijk ook pag. 126
- 21 Pag. 147-148

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

► Opgave

603. Iemand heeft twee stukken vloerbedekking: één vierkant stuk van 8 bij 8 meter en één reep van 1 bij 6 meter. Hij heeft een rechthoekige kamer van 10 bij 7 meter. Met deze stukken wil hij zijn kamer beleggen. Hij mag daarbij het grote stuk door knippen in twee delen verdelen. De drie stukken die hij dan krijgt, moeten de kamer precies kunnen beleggen. Hoe doet hij dat?

► Oplossingen

599. Van nr. 599 (zie nr. 4, blz. 126) ontving ik van dr. K. A. Post (TUE) een verrassend fraaie oplossing, die ik de lezers niet wil onthouden.

Soortgelijke oplossingen heb ik gekregen van C. A. M. van der Linden ('s-Hertogenbosch), J. Meerhof (Schoonhoven) en H. Boertien (Cito).

Noem in het complexe vlak $P_0 = P = 0$ en $P_1 = 1$.

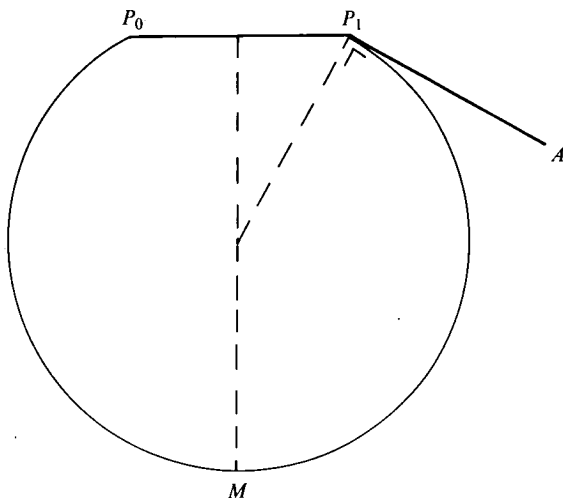
Dan is P_n de som van de eerste n termen van de meetkundige reeks

$$1 + a\varepsilon + a^2\varepsilon^2 + a^3\varepsilon^3 + \dots$$

waarin $\varepsilon = e^{-\pi i/6}$. Deze reeks is convergent dan en slechts dan als $|a\varepsilon| < 1$, dus als $0 \leq a < 1$. De som van deze reeks is $S = (1 - a\varepsilon)^{-1}$.

Omdat $(S - P_n)/(S - P_{n-1}) = a\varepsilon$, dus een argument $-\pi/6$ heeft voor alle n , is S het punt van waaruit de voerstralen $SP_0, SP_1, SP_2, \dots$ opvolgend over -30° draaien. Met andere woorden S is het punt van waaruit we P_0P_1 en P_1P_2 beide onder 30° zien. Bijgevolg is S het snijpunt van de twee cirkelbogen van 300° op P_0P_1 en P_1P_2 .

In de figuur op de volgende bladzijde is $P_1A = P_0P_1$ en is M het snijpunt van de twee cirkelbogen van 300° op P_0P_1 en P_1A . P_2 doorloopt het lijnstuk P_1A , exclusief punt A . S doorloopt dus de cirkelboog P_1M , exclusief M .



600. Een geledpootmonster bestaat uit poten, armen en stokken. De enige restrictie daarbij is dat geen twee poten direct op elkaar volgen. Hoeveel dergelijke monsters met 25 ledematen zijn er mogelijk?

a Neem aan dat er 18 niet-poten, dus armen of stokken, zijn en 7 poten. Zet eerst de 18 niet-poten op een rij. Dat kan op 2^{18} manieren, want elke niet-poot kan een arm maar ook een stok zijn. Zet nu de 7 poten zo erbij dat er geen twee poten direct op elkaar volgen. We moeten de 7 poten dan verdelen over 19 plaatsen. Dat kan op $\binom{19}{7}$ manieren. In totaal dus $2^{18} \binom{19}{7}$ manieren.

Het aantal niet-poten kan zijn 12, 13, ..., 25. Het aantal monsters met 25 ledematen dus

$$\sum_{a=12}^{25} 2^a \binom{a+1}{25-a}$$

Met geduld of rekentuig kunt u dit uitrekenen.

b Nu een veel fraaiere algemene oplossing. Ik vond deze in het betreffende collegedictaat.

We leiden een recurrente formule af voor het aantal beesten met n ledematen. Noem dit aantal t_n .

Het aantal beesten met n ledematen waarvan de laatste een poot is, noemen we a_n , het aantal waarvan de laatste geen poot is b_n . Het is duidelijk dat

$$t_{n+1} = 2a_n + 3b_n$$

Omdat $a_n + b_n = t_n$, kunnen we hiervoor schrijven $2t_n + b_n$. Wegens $b_n = 2t_{n-1}$, vinden we dan ten slotte

$$t_{n+1} = 2t_n + 2t_{n-1}$$

Hetgeen we liever schrijven:

$$t_{n+2} = 2t_{n+1} + 2t_n \quad (1)$$

Zijn f_n en g_n functies die aan deze betrekking voldoen, dan voldoen ook pf_n en $f_n + g_n$. De oplossingen van (1) vormen dus een lineaire ruimte. De oplossingen zijn bepaald door t_1 en t_2 . De dimensie van deze ruimte is dus 2.

We zoeken oplossingen van de vorm $f_n = x^n$. $f_n = x^n$ is een oplossing, is gelijkwaardig met

$$x^2 = 2x + 2$$

dus $x = 1 + \sqrt{3}$ of $x = 1 - \sqrt{3}$.

We hebben zo twee oplossingen gevonden, namelijk

$$t_n = (1 + \sqrt{3})^n \text{ en } t_n = (1 - \sqrt{3})^n$$

Deze vormen een basis van de lineaire ruimte van alle oplossingen. Alle oplossingen zijn dus de functies

$$t_n = p(1 + \sqrt{3})^n + q(1 - \sqrt{3})^n$$

Om p en q te bepalen, berekenen we voor ons geval t_1 en t_2 . $t_1 = 3$ en t_2 is het aantal van alle opvolgende paren ledematen met uitzondering van poot-poot, dus $t_2 = 8$. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} p(1 + \sqrt{3}) + q(1 - \sqrt{3}) &= 3 \\ p(4 + 2\sqrt{3}) + q(4 - 2\sqrt{3}) &= 8 \end{aligned}$$

dus

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ en } q = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

zodat

$$t_{25} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)(1 + \sqrt{3})^{25} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)(1 - \sqrt{3})^{25}$$

Waarna geduld of rekentuig het antwoord oplevert.



► Eindtermen basisvorming wiskunde

Als het aan mevrouw Ginjaar ligt en als de Tweede Kamer het met haar eens is, dan wordt de basisvorming met ingang van het schooljaar 1990/91 ingevoerd. In januari van dit jaar zijn daarvoor de eerste eindtermenontwerpen gepubliceerd. Ook die van wiskunde. Bij het opstellen van deze eindtermen zijn de docenten nog nauwelijks betrokken geweest. Tot oktober 1989 krijgt de eindtermencommissie de tijd om een herziene versie te leveren. Het woord is nu dus aan de praktijk van het onderwijs.

Hieronder volgt een aantal vragen over keuzen en onduidelijkheden van het ontwerp. De lijst is niet volledig en is alleen maar bedoeld om de discussie op gang te helpen.

Wat verandert er eigenlijk?

Aan het eind van drie jaar voortgezet onderwijs worden leerlingen getoetst en wordt vastgesteld welk niveau ze bereikt hebben: het hogere, het lagere of geen van beide. Afhankelijk van de uitkomst kan dan een keuze gemaakt worden tussen de gebruikelijke onderwijstypen. In principe komt er één programma voor die drie jaar, waarbij leerlingen die het hogere niveau nastreven extra dingen kunnen doen. Betekent dit dat alle klassen de eerste drie jaar heterogeen zijn? Dat je in de klas maar moet zien de verschillen tussen leerlingen te honoreren?

Drie stromen of twee niveaus, wat is het nou?

In het ontwerp wordt gesproken over 3 stromen, verge-

lijikbaar met het huidige lbo A/B of mavo zonder wiskunde, het mavo C/D en de onderbouw havo/vwo. In de lijst van onderwerpen worden echter 2 niveaus aangegeven. Hoe zit het nou? Het verschil tussen stroom en niveaus is niet zomaar een woordenspel. Achter de indeling in stromen zit de gedachte dat je de leerlingen benadert vanuit hun eigen capaciteiten en daar de inhoud van het wiskunde-onderwijs op afstemt. Achter de niveau-indeling zit het idee dat je leerlingen in principe hetzelfde programma aanbiedt en aan het eind kijkt hoe hoog de drempel is die de leerling kan nemen.

Is wiskunde zonder formules wel wiskunde?

De tendens bestaat om formele aspecten zoveel mogelijk naar het hogere niveau te schuiven. Voor het algemeen niveau gaat het meer om praktische toepassingen en inzichten en minder om kale algoritmen en letterrekenen. Straks kan *iedereen* het spoorboekje gebruiken en daarna in de trein de Consumentengids lezen, maar weet men ook nog wat van wiskunde?

Rekenen in de basisvorming? dat horen ze toch op de basisschool te doen

Voortgezet rekenen is een apart leergebied geworden. Lopen we dan niet in de val dat de basisschool nog minder aan rekenen gaat doen?

Nogmaals: de vragen zijn suggestief. Zo is dat ook bedoeld. We willen u daarmee **uw advies over het eindtermenontwerp ontlokken**. Daarvoor is een aantal bijeenkomsten georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, de VALO Wiskunde en Informatica en het SIO-project Wiskunde.

Er zijn vijf regionale bijeenkomsten, namelijk één op 27 april in het De Bruijne Lyceum te **Utrecht** en vier op 10 mei en wel in: **Amsterdam**, het Caland Lyceum; **Eindhoven**, de Pedagogische Technische Hogeschool; **Rotterdam**, het Citycollege; **Zwolle**, het Carolus Clusius Lyceum. De tijd is voor **alle** bijeenkomsten: **15.00-17.30 uur**. U wordt van harte aangemoedigd aan één van deze bijeenkomsten deel te nemen. Graag vóór 22 april even een briefkaart met uw naam, uw adres en de plaats van de bijeenkomst naar **F. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda**. U ontvangt dan nadere bijzonderheden, een exemplaar van het eindtermenontwerp en aanvullende informatie over de eindtermen.

► **Examenbesprekingen georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren**

Examenbesprekingen wiskunde voor lbo/mavo c en d op vrijdag 26 mei 1989 van 15.00 h – 18.00 h te:

Plaats	Gespreksleiders*):	Plaats	Gespreksleiders*):
ALKMAAR Bram Daaldermavo Rubenslaan 14 072-11 34 38	1 T. Dunselman 075-28 40 42 2 C. Gaykema 020-12 91 85	LEEWARDEN Mavo Nylan Prinsessenweg 4 058-88 42 02	1 F. de Boer 05170-36 10 2 J. Tuinstra 05133-26 57
AMSTERDAM Caland Lyceum Hoekenes 61 020-19 83 99	1 E. G. Doevendans 020-36 20 49 2 G. H. Dekker 02993-7 12 26	MIDDELBURG Oranje Nassau Mavo Oranjelaan 11 01180-2 52 74	1 C. J. Beimers 01180-3 51 16 2 A. Kammeraat 01185-22 31
ARNHEM Thorbecke S.G. Thorbeckestraat 17 085-42 30 28	1 J. F. Laaper 2 P. B. van Tongerloo 08338-5 37 94	ROTTERDAM Mavo Het Lage Land Kromhoutstraat 1-7 010-4 20 53 93	1 A. B. T. Hazenberg 01727-1 37 74 2 L. Bozuwa 078-14 55 22
EMMEN Openb. S.G. De Dissel Smedingeslag 1 05910-2 34 56	1 en 2 J. F. Struik 05919-1 27 90	SITTARD S.G. Sint Catharina Broeksittarderweg 45 04490-1 01 12	1 E. M. A. M. vd Vring 04490-1 19 05 2 R. J. M. Rouschop 04490-2 83 73
'S-GRAVENHAGE S.G. Johan de Witt Stadhouderslaan 82 070-54 77 71	1 L. C. M. van Wijk 070-60 75 95 2 B. van Klaarbergen 070-45 93 03	TEGELEN S.G. L.B.O. De Breuken 7 077-73 05 44	1 J. K. M. Verheesen 04754-54 87 2 H. van de Steeg 04780-8 25 39
GRONINGEN Zernike College Parkweg 128 050-26 03 45	1 S. Kooiman 050-25 12 89 2 J. C. Borst 05960-2 54 64	TILBURG HS Kath. Leergangen Pyrenecëenweg 3 013-39 46 70	1 en 2 F. J. Mahieu 04116-7 34 68
HAAKSBERGEN RK Mavo De Raahorst Van Brakelstraat 1 05427-1 32 85	1 en 2 G. Nijenmanting 05427-1 32 13	UTRECHT K.S.G. Lunetten Kampereiland 6 030-88 35 51	1 J. Beckman 03430-1 40 16 2 R. J. Roukema 03465-6 04 29
HOOGEZAND Dr. A. Jacobs S.G. Nieuweg 4 05980-2 68 00	1 en 2 E. G. van den Handel 05900-1 32 68	ZWOLLE Thorbecke S.G. Dr. v. Heesweg 1 038-54 66 77	1 G. J. Scheppink 05291-35 26 2 S. R. Zwaan 038-65 25 30

*) 1: c-examen
2: d-examen

Examenbesprekingen wiskunde voor havo op vrijdag 26 mei 1989 van 16.00 h – 18.00 h te:

Plaats	Gespreksleider:	Plaats	Gespreksleider:
AMSTERDAM St. Nicolaaslyceum Prinses Irenestraat 21 020-44 51 51	Drs. G. W Fokkens 020-43 84 47	ROTTERDAM Citycollege E.F. Beukelsdijk 91 010-4 77 00 33	B. L. G. P. Hillebrand 01807-1 52 10
GRONINGEN Rölingcollege Melisseweg 2 050-42 10 00	C. H. G. Hegeman 050-77 54 90	SITTARD R.K.S.G. Serviam Deken Haenraetsstraat 1 04490-1 01 59	W. J. G. Goossens 04490-1 02 11
HENGELO Twickelcollege Woolderesweg 130 074-42 44 25	J. P. Scholten 053-76 87 91	TILBURG HS Kath. Leergangen Pyreneeënweg 3 013-39 46 70	F. L. G. Esser 01623-1 64 89

Examenbesprekingen wiskunde voor vwo A op vrijdag 26 mei 1989 van 16.00 h – 18.00 h te:

Plaats	Gespreksleider:	Plaats	Gespreksleider:
AMSTERDAM St. Nicolaaslyceum Prinses Irenestraat 21 020-44 51 51	Drs. S. T Min 02290-3 77 56	ROTTERDAM Citycollege E.F. Beukelsdijk 91 010-4 77 00 33	C. Rijke 01807-2 17 40
ARNHEM Thorbecke S.G. Thorbeckestraat 17 085-42 30 28	Drs. W. H. M. Kremers 08306-2 26 07	SITTARD R.K.S.G. Serviam Deken Haenraetstraat 1 04490-1 01 59	Ir. W. J. M. Laaper 040-12 33 54
GOES Buys Ballotcollege Bergweg 4 01100-1 30 10	Drs. S. H. P. Garst 01874-21 77	TILBURG HS Katholieke Leergangen Pyreneeënweg 3 013-39 46 70	Drs. J. J. Verboom
's-GRAVENHAGE St-Janscollege Colijnplein 9 070-68 76 70	Drs. J. W. Maassen 070-68 79 98	UTRECHT Dr. F. H. de Bruijne Lyceum Koningsbergerstraat 2 030-93 23 41	G. Stroomer 08365-19 95
GRONINGEN Mathematisch Instituut W. S. N – gebouw Landleven 5 050-63 39 69	Drs. J. V. Jansen 05900-1 30 43	ZWOLLE Chr. HS Windesheim Campus 2-6 038-69 92 50	Dr. J. van Lint 038-65 12 04

Examenbesprekingen wiskunde voor vwo B:

Zie volgende bladzijde.

Examenbesprekingen wiskunde voor havo op vrijdag 26 mei 1989 van 16.00 h – 18.00 h te:

Plaats	Gespreksleider:	Plaats	Gespreksleider:
AMSTERDAM St. Nicolaaslyceum Prinses Irenestraat 21 020-44 51 51	Drs. G. W Fokkens 020-43 84 47	ROTTERDAM Citycollege E.F. Beukelsdijk 91 010-4 77 00 33	B. L. G. P. Hillebrand 01807-1 52 10
GRONINGEN Rölingcollege Melisseweg 2 050-42 10 00	C. H. G. Hegeman 050-77 54 90	SITTARD R.K.S.G. Serviam Deken Haenraetsstraat 1 04490-1 01 59	W. J. G. Goossens 04490-1 02 11
HENGELO Twickelcollege Woolderesweg 130 074-42 44 25	J. P. Scholten 053-76 87 91	TILBURG HS Kath. Leergangen Pyreneënweg 3 013-39 46 70	F. L. G. Esser 01623-1 64 89

Mededeling

Anne van Streun

Op 10 maart j.l. promoveerde Anne van Streun te Groningen op het proefschrift *Heuristisch Wiskunde-onderwijs*. We feliciteren hem hiermee van harte!

Een bespreking van zijn proefschrift zit inmiddels in de pen; als altijd slaagt de auteur er in gemengde gevoelens op te roepen – dat moge te zijner tijd blijken uit de bespreking van het proefschrift.

Twee van zijn stellingen mogen alvast genoemd worden: *stelling 4*. Het leren opstellen van een analytisch model van een reële situatie versterkt in hoge mate de transferwaarde van de verworven wiskundige kennis in de richting van toegepaste problemen.

(Bent u daar nog?)

stelling 5. In verband met stelling 4 is het hoogst verontrustend en tevens een miskenning van de gehele ontwikkeling van de wiskunde door de eeuwen heen, dat in de voorgestelde eindtermen wiskunde van de basisvorming de rol van variabelen en formules wordt geminimaliseerd.

Daar kan men het moeilijk mee oneens zijn, dus... We wachten af.

M. C. van Hoorn

Kalender

6 april 1989: Utrecht, Eerste bijeenkomst Werkgroep Informatiecadidactiek. Nadere inlichtingen bij Trude Maas-de Brouwer, tel. 030-91 15 11, en Fred Mulder, tel. 045-76 23 57.

6 en 7 april 1989: Amsterdam, VELON-congres 'Schoolvak-in-ontwikkeling'. Zie Euclides 64,5 blz. 141.

8 april 1989: Veertiende landelijke dag Werkgroep Vrouwen en Wiskunde. Zie Euclides 64,6 blz. 188.

12 april 1989: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

27 april 1989: Utrecht, Regionale bijeenkomst 'Eindtermen Basisvorming Wiskunde'. Zie blz. 217 van dit nummer.

28 april 1989: Amsterdam, Studiedag 'Wiskunde in het LHNO'. Zie de mededeling op blz. 209 van dit nummer.

10 mei 1989: Amsterdam, Eindhoven, Rotterdam, Zwolle, Regionale bijeenkomsten 'Eindtermen Basisvorming Wiskunde'. Zie blz. 217 van dit nummer.

19 mei 1989: Utrecht, Studiedag 'LOGO en onderwijs, nu en straks'. Zie de mededeling op blz. 209 van dit nummer.

26 mei 1989: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen wiskunde voor lbo/mavo, havo, vwo A. Zie blz. 218 en 219 van dit nummer.

29 mei 1989: Diverse plaatsen, Examenbesprekingen wiskunde B voor vwo. Zie de aankondiging elders op deze bladzijde.

14 juni 1989: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW, met de inspecteurs voortgezet onderwijs.

22 juni 1989: Utrecht, Tweede bijeenkomst Werkgroep Informatiecadidactiek.

1,2 en 3 juli 1989: Oostende, Zesde tweejaarlijks congres VVWL.

Getal en Ruimte: de constante factor voor een geslaagde wiskundeles

Voor meer informatie en voor het aanvragen van de nieuwe documentatie kunt u zich richten tot:

Educaboek, Postbus 48, 4100 AA Culemborg,
tel.: 03450-71880.

Getalen Ruimte: zekerheid in het kwadraat



● Inhoud ● ● ● ● ●

Inhoud 189

Juul ten Hove: Kolom W12/16 190

M. C. van Hoorn: Huiswerk voor de C.O.W. 191

Denkopgaven 191

Rijkje Dekker: ICME-6, Ethnomathematics 192

Victor Schmidt: Overgangsmatrices I 194

Fred Goffree: The politics of mathematics education 199

Shortliner 203

Werkbladen 204

Bas van Cranenburgh: Wiskunde voor het middelbaar beroeps-
onderwijs 206

Mededeling 209

S. P. van 't Riet: Wiskundeonderwijs nu 210

Recreatie 215

Eindtermen Basisvorming Wiskunde 217

Examenbesprekingen georganiseerd door de Nederlandse
Vereniging van Wiskundeleraren 218

Mededeling 220

Kalender 220

● Adressen van auteurs

B. van Cranenburgh, p/a Wolters-Noordhoff bv,
Postbus 58, 9700 MB Groningen

Mw. R. Dekker, p/a Rijksuniversiteit Utrecht,
Vakgroep Onderwijskunde, Postbus 80140, 3508 TC Utrecht

F. Goffree, Bremlaan 16, 3735 KJ Bosch en Duin

M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen

Mw. J. ten Hove, p/a SLO, Postbus 2041, 7500 CA Enschede

S. P. van 't Riet, Vordensebeek 88, 8033 DG Zwolle

V. E. Schmidt, Galkemaheerd 67, 9736 BG Groningen