

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Vakblad
voor de
wiskundeleraar

64e jaargang
1988 | 1989
december

Euclides 4

Wolters-Noordhoff

Redactie

Drs H. Bakker
Drs R. Bosch
G. Bulthuis
Drs M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
N. T. Lakeman (beeldredacteur)
Drs A. B. Oosten (voorzitter)
P. E. de Roest (secretaris)
Ir. V. Schmidt
Mw. H. S. Susijn-van Zaale
Mw. Drs A. Verweij (eindredacteur)
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)
Ar van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f55,- per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f37,50; contributie zonder Euclides f30,-. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden f52,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f32,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949. Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers f8,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan: Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 39731 (Samsy).

● Inhoud ● ● ● ● ●

Actualiteit 98

George Schoemaker *Kolom 5 W12/16* 98

M. C. van Hoorn *Korrel* 99

Denkopeningen 99

Bijdrage 100

Jan van de Craats *Een standbeeld voor Leibniz*
Hoe met kleine toenames de kloof tussen wiskundig model en werkelijkheid te overbruggen is. Een pleidooi voor het gebruik van differentiaal op school.

Shortliner 109

Lissajous-figuren

Boekbespreking 110

Th. J. Korthagen *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen*

Verschenen 111

Werkbladen 112

Magische driehoeken en De anti-afval-campagne

Serie 'Auteurs in beeld' 114

Leon van den Broek *De Wageningse Methode*
Over een wiskunde-methode, in het begin van de zeventiger jaren verwekt om gestalte te geven aan de ideeën van het IOWO. Een van de eerste auteurs blikt terug op dracht en geboorte en laat zien dat het geesteskind, inmiddels volwassen geworden, de IOWO-beginselen trouw is gebleven.

Bijdrage 121

Douwe Kok en Cor van der Pijl *Over de rol van korte programma's in het voortgezet onderwijs*
Shortliners: een uitdaging voor leraar en leerling. Een verslag van een wiskundeles met de computer en informatie over VU-KORT, een omgeving voor korte BASIC-programma's.

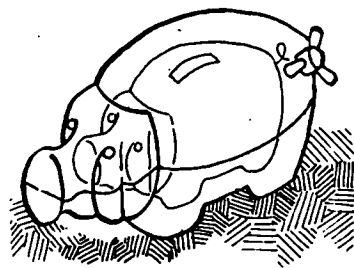
Recreatie 126

Mededeling 127

Verenigingsnieuws 127

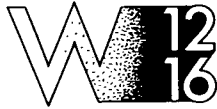
Van de bestuurstafel

Kalender 128



Een moderne brandkast is dubbelwandig...

► Kolom 5



George Schoemaker

Mijn eerste auto was een VW kever met bouwjaar '56. De kevers uit die tijd onderscheidden zich van elkaar door de grootte van de achterraut. Aanvankelijk had de kever twee kleine ruitjes, de benaming van dat type was 'het brilletje', de mijne had al één achterraut. Vanaf '57 kwamen pas de grote achterrauten. Mijn kever had nog 'echte' richtingaanwijzers. Ik meen dat de kever met de grote achterraut, de 57er, voor het eerst een clignoteur had. De richtingaanwijzer aan mijn VW was afgeleid van de arm die je uitstak om richting aan te geven. Het was een beweegbaar armpje met een rood lampje. De clignoteur viel me toen nog niet op als een duidelijke stap voorwaarts waarbij de technologie functioneel was en niet voortborduurde op de bestaande vorm van je hand uitsteken.

Bij het gebruik van de computer in het wiskundeonderwijs moet ik vaak aan die oude richtingaanwijzer denken. We verkeren bij het ontwikkelen van software en leerlingenmaterialen nog in het tijdperk van de richtingwijzer die gelijkenis vertoont met een armpje, terwijl de clignoteurs nog niet worden opgemerkt.

In het wiskundeprogramma komt de kwadratische functie voor. Leerlingen hebben moeite met tekenen van kwadratische functies. Met behulp van een programma kan de computer het tekenwerk overnemen. Als het daarbij blijft, is dat slechter dan gewoon met je arm je richting aangeven. Een leerling moet eerst met potlood en papier een parabool kunnen tekenen, al verifiërend komen tot een para-

bool die niet meer zo lijkt op een V of een U. Pas daarna zou deze leering moeten worden uitgedaagd na te gaan met behulp van een tekenprogramma hoe zo'n parabool eruit ziet buiten dat kleine stukje dat we altijd tekenen, wat er gebeurt als je één parameter laat wandelen en de andere vasthoudt. De leerling moet met het programma kunnen inzoomen en uitzoomen. Dit is allemaal mogelijk met het programma VU-GRAFIEK.

Binnen W12-16 is al gewerkt aan de inrichting van wiskundewerklokalen op de experimenteerscholen. Daarbij hoort een computer met viewer. Dit vraagt aanpassingen aan bestaande software en vooral aan bijbehorende leerlingenmaterialen. In Deventer worden op de experimenteerschool – het Revis – aanpassingen aan een programma over globale grafieken – BADKUIP – uitgetoetst in het wiskundewerklokaal. Maar het team W12-16 krijgt op dit gebied extra hulp.

De vakgroep OW & OC heeft sinds kort een nieuw project, COWO genaamd: Computer Ondersteuning Wiskunde Onderwijs. Dit momenteel door NIVO en volgend jaar via PRINT gefinancierde project levert steun aan HAWEX en W12-16 bij het ontwikkelen en aanpassen van software voor het wiskundeonderwijs. Het is een project voor vier jaar. Vanaf de aanvang van W12-16 is aangedrongen op een dergelijke hulpbron.

Een van de eerste producten van COWO is een programma dat goed van pas komt bij ruimtemeetkunde. Er wordt gebruikgemaakt van de dynamische mogelijkheden van de computer, zoals bijvoorbeeld het maken van een ruimtefiguur die ontstaat uit het stijgen en verkleinen van een driehoek. Een ander werkstuk is de ontwikkeling van een programmeeromgeving voor leerlingen. Hiermee willen we proberen het begrip variabele breed te onderbouwen. In de technische opzet van deze software is er al rekening mee gehouden dat er op grond van ervaringen in de klas nog wat aan zal moeten veranderen. Zo'n programmeeromgeving moet aan hoge eisen voldoen, het begrip variabele moet op een heel brede manier geëxploreerd kunnen worden. Er moet eigenlijk een continue overgang mogelijk zijn van variabelen in rekenachtige naar meetkundige situaties en terug.

Of het al een clignoteur is of nog zo'n richtingpijl-tje, is in het tijdperk van het armpje nog moeilijk aan te geven.



Denkopgaven

► Korrel

M. C. van Hoorn

Het afgelopen jaar zijn voor alle vakken die in de Basisvorming aan bod komen zgn. eindtermencommissies werkzaam geweest. Deze maand, december 1988, moeten alle eindtermenontwerpen naar de Staatssecretaris gestuurd worden.

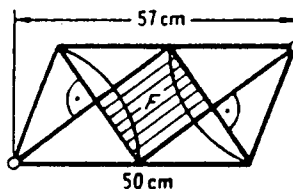
Voor het vak wiskunde was de COW (de Commissie-Van der Blij) tevens de eindtermencommissie. In juni j.l. werd reeds een ontwerp ingezonden, dat echter 'vertrouwelijk' bleef (zie 'Uit de COW, Euclides 64, nr. 2, oktober j.l., blz. 36). Aldus werden noch docenten, noch vakdidactici, noch anderen in staat gesteld mee te praten over de op te stellen eindtermen. Nou ja: de COW bestaat uit 26 personen, zodat er al heel wat mensen meepraatten. Dat het wel degelijk anders kan, bewijst de gang van zaken bij natuur- en scheikunde (waarvoor één commissie opereerde). In drie ronden, met tussentijdse raadpleging van enkele LBO-docenten, van vakdidactici en van kring-vertegenwoordigers van de NVON (= Nederlandse Vereniging voor het Onderwijs in de Natuurwetenschappen), welke laatsten op 8 november een speciaal aan de eindtermen gewijde conferentie konden bezoeken, krègen de eindtermen vorm.

De COW heeft het druk met het opstellen van een leerplan voor de onderbouw. Dat blijkt.

4a

Een parallellogram, met zijden van 50 en 25 cm. De hoekpunten zijn verbonden met het midden van een lange zijde; de betreffende verbindingslijnstukken snijden elkaar loodrecht.

Hoe groot is de oppervlakte van het gearceerde vlakdeel?

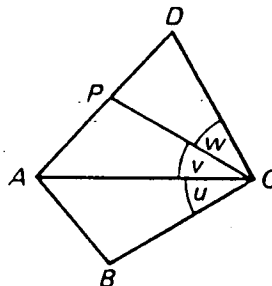


4b

Een vierhoek $ABCD$.

$AB = 40$, $AC = 80$, $AD = 70$, $BC = CD = 60$, $AP = 40$.

Zijn de drie hoeken bij C aan elkaar gelijk?



► Een standbeeld voor Leibniz

Jan van de Craats

Een pleidooi voor het gebruik van differentialen

Er is een flinke dosis moed voor nodig – misschien wel overmoed – om nòg eens te schrijven over het onderwerp differentialen op school. Velen hebben er immers hun licht al over laten schijnen en daarbij liepen de discussies vaak hoog op. In Euclides en daarbuiten betoogden veel auteurs dat differentiaal-moeilijke dingen zijn en dat ze niet in de wiskundeles thuishoren. Maar in het kamp der voorstanders bevindt zich niemand minder dan Freudenthal, die bijvoorbeeld in zijn boek *Mathematics as an Educational Task* het gebruik van differentialen bepleit. In de Nieuwe Wiskrant heeft hij zelfs geschreven: ‘Een analyse-onderwijs dat de leerlingen niet eens met differentialen vertrouwd maakt, hoeft van mij niet.’

De discussie over differentialen laaide ook weer op in een Werkgroep Differentiaalvergelijkingen van de N.V.v.W., waar voor- en tegenstanders elkaar geregeld (in figuurlijke zin) in de haren zijn gevlogen. Ik heb me daarbij als lid van die commissie ook niet onbetuigd gelaten en me opgesteld als een vurig pleitbezorger van het gebruik van differentialen in het onderwijs. Juist omdat ik gemerkt heb hoe diep het wantrouwen tegen differentialen is bij veel leraren – als ze ze al gebruiken, dan vaak met een

kwaad geweten: ze kennen de truukjes, maar naar eigen zeggen snappen ze niet goed wat ze doen – wil ik er ook in breder verband wat over zeggen. Dit op gevaar af te herhalen wat anderen al eens eerder, en soms veel beter, naar voren hebben gebracht.

Om maar meteen met de deur in huis te vallen, een paar duidelijke uitspraken.

1 Er is niets mysterieus aan differentialen. Althans, ze zijn niet mysterieuzer dan de limieten en de afgeleiden waar iedereen op school mee vertrouwd is.

2 Een ‘formeel correcte’ behandeling van differentialen op school is net zo moeilijk of gemakkelijk als een formeel correcte behandeling op school van de begrippen ‘limiet’ en ‘afgeleide’.

3 Bij vrijwel alle toepassingen van de differentiaal- en integraalrekening komt het werken met differentialen het inzicht ten goede.

4 Differentialen vormen een voortreffelijk didactisch instrument bij het opstellen van bepaalde eenvoudige differentiaalvergelijkingen. Bij het oplossen van die differentiaalvergelijkingen voorkomt het werken met differentialen gekunstelde moeilijkheden.

De rest van het verhaal kan opgevat worden als een illustratie van deze stellingen.

Wat is een afgeleide?

Alles begint met het bepalen van de afgeleide en daar ligt ook precies de kern van de zaak. Waar denk je aan bij het woord ‘afgeleide’? Ik durf er heel wat onder te verwedden dat de meeste leraren en de meeste leerlingen direct beelden voor ogen krijgen van methodes om uit een *functie* een andere *functie* te maken:

$$x^n \rightarrow n x^{n-1}$$

$$e^x \rightarrow e^x$$

$$\sin x \rightarrow \cos x$$

$$\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$$

enzovoorts. En ik ben er van overtuigd dat dit begripmatig volstrekt verkeerd is. Als je op die manier over het begrip afgeleide denkt, mis je de essentie. Begripmatig is de routine van het diffe-

rentiëren van functies *secundair*, hoe belangrijk het ontwikkelen van die routine in de praktijk ook is. Wat is dan wel het wezenlijke van het begrip afgeleide? Aan de hand van een voorbeeld zal ik dat proberen duidelijk te maken. Een voorbeeld waarin 'snelheid' de hoofdrol speelt.

Snelheid

Waar denkt een doorsnee mens aan bij het woord snelheid? Aan de snelheidsmeter van zijn auto, aan de maximumsnelheid van 50 km/u in de stad en 120 km/u op de meeste autosnelwegen. Wat betekent het als je 120 rijdt? Dat je op die manier voortrazend in één uur 120 km kunt afleggen. Maar die snelheid van 120 zegt niet zo zeer iets over het lange tijdsbestek van één uur, als wel iets over de *momentane* toestand waarin je je bevindt als je de wijzer van je snelheidsmeter op 120 ziet staan. Die wijzer vertelt je iets over het verband tussen twee fysische grootheden: de *tijd* (gemeten in uren) en de *afgelegde weg* (gemeten in kilometers). Namelijk:

$$\Delta s = 120 \Delta t. \quad (1)$$

In woorden: in een klein tijdsinterval ter lengte Δt legt de auto een afstand van $\Delta s = 120 \Delta t$ kilometer af.

Klein tijdsinterval? Waarom klein en wat moeten we in dit verband onder 'klein' verstaan? Dat ligt er aan. Als je lang op de snelweg rijdt met een constante snelheid, hoeft je Δt niet zo klein te nemen. De relatie (1) blijft correct zolang de wijzer op 120 blijft staan. Maar als je extra gas geeft of op de rem trapt, zal (1) slechts voor kleine Δt 's waar zijn; eigenlijk is (1) dan ook nog maar een *benadering* die des te beter is naarmate Δt kleiner genomen wordt. Als je bijvoorbeeld afremt van 150 naar 80, zal op het tijdstip t_0 dat de wijzer de 120 passeert, de benadering

$$\Delta s \approx 120 \Delta t \quad (2)$$

geldig zijn voor kleine tijdsintervalletjes die in t_0 beginnen (of eindigen). Of zelfs voor alle kleine intervalletjes die t_0 bevatten. Nogmaals, de benadering is des te beter naarmate Δt kleiner is. Voor

kleine intervallen is de toename Δs van de afgelegde afstand (gemeten in kilometers) dan ongeveer 120 maal zo groot als de lengte Δt van het tijdsinterval (gemeten in uren) waarin die afstand wordt afgelegd.

Ik denk dat hier begripsmatig de kern van de zaak ligt. De snelheid op een bepaald moment is een *getal* dat de *verhouding* aangeeft tussen kleine, bij elkaar horende veranderingen Δs en Δt . Wil je het nog preciezer geformuleerd hebben, dan kun je er een limiet bijhalen:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 120. \quad (3)$$

Hier staat in formule precies hetzelfde als wat we eerder in woorden omschreven hebben. Een wiskundige die bij de analyse-colleges goed heeft opgelet, kan (3) met epsilons en delta's in nog geleerder jargon vertalen. Interessant, vooral ook voor het onderzoek van pathologisch speciale gevallen en voor het aftasten van de grenzen van wat nu wel, en wat niet onder die definities valt, maar de doorsnee-leerling zal er niets wijzer van worden.

Differentialen

Nogmaals, *begripsmatig* denk ik dat (2) het dichtst staat bij de essentie. Eigenlijk ben ik al niet zo gelukkig met de limietnotatie (3). Veel eenvoudiger en duidelijker is het volgende:

$$ds = 120 dt. \quad (4)$$

Het enige verschil met (2) is dat de golflijntjes zijn rechtgetrokken tot een gelijktteken en dat de delta's door d's zijn vervangen. Laten we *afspreken* dat de limietovergang in deze notatie is opgenomen. *Per definitie* betekent (4) dus niets anders dan (3); het is alleen een eenvoudiger notatie. 'ds' en 'dt' zijn nu gekoppelde symbolen geworden. We noemen ze *differentialen*.

Het is duidelijk dat het zinloos is om ze los van elkaar te beschouwen, net zoals het zinloos is om in de limietformule (3) te vragen naar de losse betekenis van de drie letters 'lim' of de losse betekenis van

het pijltje. Formule (4) vormt één geheel, een compacte notatie voor iets dat anders in een lange volzin moet worden omschreven.

Didactisch en begripsmatig heeft (4) het voordeel onmiddellijk aan te sluiten bij de realiteit die in wiskundige termen is gemodelleerd. Je kunt 'ds' en 'dt' in eerste benadering interpreteren als gekoppelde kleine veranderingen van s en t . In werkelijkheid zit er nog een limietovergang achter, maar dat is een kwestie van techniek; met begrip heeft het niets te maken.

In de wiskunde abstraheren we van de werkelijkheid. De fysische grootheden t en s worden dan reële variabelen zonder fysische dimensies ('tijd', 'afstand') en fysische eenheden ('uren' en 'kilometers'). Het verband tussen die variabelen drukken we uit door een *functie*

$$t \rightarrow s = s(t).$$

Maar wat we hierboven in een fysische context gedaan hebben, kunnen we ook in de geabstraheerde versie naspelen. Op een bepaald moment t_0 'staat er een wijzer op 120'.

Wat bedoelen we daarmee? Dat, uitgaande van de waarde t_0 , voor kleine, gekoppelde toenames Δt en Δs geldt dat

$$\Delta s \approx 120 \Delta t.$$

Uitgedrukt met een limiet krijgen we formule (3) weer terug, en in de taal van de differentiaal wordt het formule (4).

Afgeleide

Het vervolg is bekend: het getal 120 heet de *afgeleide* van de functie $s(t)$ in $t = t_0$, en de meest gebruikelijke notaties ervoor zijn $s'(t_0)$, $\frac{ds}{dt}(t_0)$, of, korter,

$\frac{ds}{dt}$. In de eerste twee komt tot uitdrukking dat de afgeleide afhangt van de *functie* $s = s(t)$ en van het *centrum* t_0 van waaruit de toenames van t en $s = s(t)$

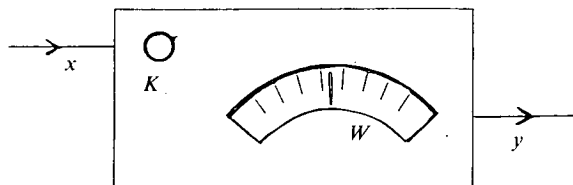
genomen worden. De eerste notatie loopt al vooruit op het vervolg waarin we de afgeleide als *functie* van het centrum gaan opvatten, m.a.w. waarin we het centrum t_0 gaan variëren. Dan ontstaat de *afgeleide functie* $t \rightarrow s'(t)$; we komen daar nog op terug.

De van Leibniz afkomstige notatie $\frac{ds}{dt}$ sluit nauwer aan bij de differentiaal, en laat ook duidelijk zien hoe de afgeleide ontstaat, namelijk als de (limiet van de) verhouding tussen kleine toenames van s en t .

Didactisch verdient deze notatie in het beginstadium waarin de leerling met de afgeleide kennismaakt, dus de voorkeur.

Motivatie en illustratie

Die eerste kennismaking moet in de klas uitgebreid geïllustreerd en gemotiveerd worden. Bijvoorbeeld met zo'n verhaal over de snelheid van een auto. Of met een iets algemenere voorstelling van een functie $x \rightarrow y = f(x)$ als een 'black box' met 'input' x en 'output' $y = f(x)$ (zie figuur 1). De input kun je regelen door aan een knop K te draaien, de output y lees je af via een wijzer W . Voor 'nette' functies zal een kleine draaiing aan knop K ook een kleine verplaatsing van de wijzer tot gevolg hebben: nette functies zijn continu. Sterker nog, de wijzerverandering zal voor *kleine* verdraaiingen *evenredig* zijn met die verdraaiing: $\Delta y \approx A \Delta x$ voor zekere evenredigheidsfactor A . Slordig gezegd: een twee maal zo kleine verdraaiing van de knop heeft ook een twee maal zo kleine wijzerverplaatsing tot gevolg. Welnu, die evenredigheidsfactor A is de afgeleide $\frac{dy}{dx}$ die hoort bij de betreffende stand van de knop.



Figuur 1

Iedereen kan zich zo iets met schakelingen, knoppen en wijzers voorstellen en ook het *bestaan* van zo'n evenredigheidsfactor in 'normale' situaties kent iedereen uit de praktijk: *nette functies zijn differentieerbaar*.

Experimentele wiskunde

Tegenwoordig heeft elke leerling z'n eigen 'wiskundelaboratorium' in z'n tas: de zakrekenmachine. Die bevat een heel arsenaal van functies: kwadraten, worteltrekken, sinussen, cosinussen, exponentiële functies, logaritmen, noem maar op. Neem zo'n functie $x \rightarrow y = f(x)$, kies een centrum x_0 en zet in een tabel voor een serie steeds kleiner wordende toenames Δx de bijbehorende toenames $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Heel handig is het om Δx achtereenvolgens

$\pm 0,1$, $\pm 0,01$, $\pm 0,001$, $\pm 0,0001$, te nemen. Delen door Δx komt dan gewoon neer op het verplaatsen van de komma. Je kunt het achterwege laten; de evenredigheidsfactor zie je vanzelf verschijnen. (Let op: als je Δx te klein neemt, kunnen afrondfouten roet in het eten gooien!)

Ik denk dat het geen tijdsverspilling is om een klas hiermee een tijdje aan het werk te zetten. Deel de leerlingen in groepjes in en laat elke groep een paar maal 'experimenteel' de afgeleide van een functie in een bepaald punt bepalen. Het is goed dat iedereen er op deze wijze van doordrongen wordt dat een afgeleide een *getal* is dat ontstaat als resultaat van een limietovergang met gekoppelde kleine toenames:

Daarna kan ook nog de *grafiek* van de functie er bij worden gehaald en dat leidt tot de interpretatie van afgeleide als richtingscoëfficiënt van de raaklijn. Vroeger was dat de enige 'tastbare' voorstelling van afgeleide die we hadden; met de rekenmachine kunnen we limietovergangen heel concreet illustreren en nauwkeurig numeriek uitrekenen; dat is een groot didactisch voordeel.

Als wiskundige kun je je vervolgens nog uitleven op zaken als 'afgeleide oneindig', existentiekwesties en afzonderlijke linker- en rechterafgeleiden. Je kunt hiertoe de experimenten uitstrekken tot functies als $|x|$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{|x|}$ en $\sqrt[3]{x}$ die in $x = 0$ merkwaardig

gedrag vertonen. Maar uiteindelijk is dat niet de hoofdzak. Die wordt gevormd door de 'reguliere' afgeleiden en daar moet dus het leeuwendeel van de aandacht op gericht blijven.

Rekenregels

De rekenregels voor afgeleiden die iedereen kent en die op de gebruikelijke wijze met limieten kunnen worden afgeleid, kunnen we vertalen in rekenregels voor differentialen. Als bijvoorbeeld y en z functies zijn van x en in een zeker punt x_0 geldt $\frac{dy}{dx} = A$,

$\frac{dz}{dx} = B$, dan bewijs je met limieten op de bekende

wijze dat $\frac{d}{dx}(y + z) = A + B$.

In termen van differentialen: als in x_0 geldt dat $dy = A dx$, $dz = B dx$, dan is daar $d(y + z) = (A + B)dx$. Een simpeler notatie hiervoor is natuurlijk

$$d(y + z) = dy + dz.$$

Evenzo: als α een constante is en in x_0 is $dy = A dx$, dan is daar $d(\alpha y) = \alpha A dx$. Simpeler genoteerd: $d(\alpha y) = \alpha dy$.

De produktregel luidt $\frac{d}{dx}(y \cdot z) = y_0 B + A z_0$ met A

en B als boven, en $y_0 = y(x_0)$, $z_0 = z(x_0)$.

In termen van differentialen wordt dit $d(y \cdot z) = (y_0 B + A z_0) dx$. Met de rekenregels die zojuist zijn opgesteld, kunnen we dit eenvoudiger schrijven als

$$d(y \cdot z) = y_0 dz + z_0 dy.$$

In een later stadium, als afgeleiden *functies* worden, zullen we de nulletjes weglaten.

Tenslotte de kettingregel. Als $y = y(x)$, $z = z(y) = z(y(x))$, $y_0 = y(x_0)$, $z_0 = z(y_0) = z(y(x_0))$,

$\frac{dy}{dx} = A$ in x_0 en $\frac{dz}{dy} = B$ in y_0 , dan geldt in x_0 dat

$\frac{dz}{dx} = B \cdot A$. Het bewijs met limieten kan iedereen in de boeken naslaan. In termen van differentialen wordt de kettingregel:

als $dy = A dx$ in x_0 en $dz = B dy$ in y_0 dan is $dz = B \cdot A dx$ in x_0 .

Korter en overzichtelijker:

$$dz = \frac{dz}{dy} dy = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} dx.$$

Je ziet ook hier weer hoe Leibniz' notatie je het werken gemakkelijk maakt en hoe ideaal de notatie aansluit bij de interpretatie met kleine toenames.

De afgeleide als functie

Nu wordt het tijd om een stap te zetten die in veel leerboeken en in veel lessen te vroeg wordt gedaan: varieer het centrum x_0 . Dan ontstaat een *functie* $f'(x)$, de *afgeleide functie*. De 'accentnotatie' is daarbij vaak erg handig. Het *functievoorschrift* voor de afgeleide functie is voor de meeste elementaire functies heel gemakkelijk te vinden, de limieten zijn eenvoudig te bepalen, in de leerboeken staat hoe dat gaat. Voorbeelden, nu weer met differentialen geschreven:

$$\begin{aligned} d(x^n) &= n x^{n-1} dx \\ d(\sin x) &= \cos x dx \\ d(e^x) &= e^x dx \\ d(\ln x) &= \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

Integreren

Het omgekeerde van differentiëren: het terugvinden van de oorspronkelijke ('primitieve') functie als de afgeleide functie gegeven is, is in het algemeen een lastig probleem. Het kan zelfs onmogelijk zijn om een functievoorschrift te vinden in termen van elementaire functies. Een berucht voorbeeld is het vinden van een primitieve van e^{-x^2} . In de gevallen dat het wél lukt, neemt de gebruikelijke integraalnotatie $\int f(x) dx$ van Leibniz je veel werk uit handen. De regels voor het integreren sluiten dan



Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716

naadloos aan bij de rekenregels voor differentialen. Zo corresponderen bijvoorbeeld de substitutieregel:

$$z(y) + c = \int \frac{dz}{dy} dy = \int \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} dx$$

en de regel voor het partieel integreren:

$$\int y dz = y \cdot z - \int z dy$$

met resp. de kettingregel en de produktregel. Zeer betreurenswaardig vind ik het dat er nog steeds leraren zijn die Leibniz' notatie en de techniek van het 'achter de d brengen' versmaden. Zij laten hun leerlingen integreren volgens onhandige, omslachtige regels, en dat resulteert vrijwel altijd in onnodige schrijf- en rekenfouten bij de leerlingen, zeker als de integralen wat ingewikkelder worden. Erger is het dat die leerlingen later problemen

krijgen als ze merken dat de rest van de wereld andere notaties gebruikt.

De bepaalde integraal

Ik moet de verleiding weerstaan om uitgebreid aandacht te schenken aan de bepaalde integraal. Laat ik slechts vermelden dat de bepaalde integraal

$$\int_a^b f(x)dx$$

ontstaat via een limietovergang uit sommen van de vorm

$$\sum_i f(x_i) \Delta x_i.$$

Je krijgt zo'n som als je het interval $[a, b]$ verdeelt in kleine stukjes, de lengte Δx_i van zo'n stukje vermenigvuldigt met een functiewaarde ter plaatse en de uitkomsten optelt. Leibniz' notatie is hier ook van afkomstig: zijn integraalteken is een langgerekte S (van 'som'), en de dx is afkomstig van de kleine toenames Δx . Het verband tussen bepaalde integraal en primitieve functies volgt uit het feit dat de afgeleide van de functie

$$x \rightarrow \int_a^x f(t)dt \quad (5)$$

gelijk is aan $f(x)$. Geformuleerd in termen van differentialen:

$$d\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)dx.$$

Ook deze regel en het bewijs ervan worden intuïtief duidelijk als je de differentialen opvat als kleine toenames. De kleine toename van de functie (5) die hoort bij een toename van x naar $x + \Delta x$ is dan eenvoudig de integraal

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

en die is voor kleine Δx vrijwel gelijk aan $f(x)\Delta x$. (Zoals steeds werken we met 'nette' functies; hier veronderstellen we dat $f(t)$ op het kleine interval tussen x en $x + \Delta x$ nauwelijks van waarde verandert.)

Altijd maar weer kleine toenames

Er gaapt een diepe kloof tussen de wiskunde op school en de natuurkunde op school. In de natuurkundeles kunnen leerlingen een vergelijking niet oplossen als de onbekende niet x heet. Trouwens, sommige wiskundeleraren hebben het niet over het oplossen van een vergelijking, maar over het 'bepalen van de oplossingsverzameling', liefst nog afgekort met O.V. En als er geen accolades om staan rekenen ze het fout. De differentiaal- en integraalrekening die de leerlingen bij wiskunde krijgen, heeft nauwelijks enig verband met de fysische toepassingen. Hoe komt dat? Ik heb er-al op gezinspeeld. Voor veel wiskundeleraren zijn differentiëren en integreren procedures om uit functies andere functies te maken. Met toepassingen en interpretaties buiten de wiskunde bemoeien ze zich niet.

Kleine toenames komen in hun lessen niet voor, variabelen variëren niet, maar zijn slechts symbolen waar je getallen voor mag invullen. Ze hebben de mond vol over continuïteit, epsilon- en delta-omgevingen, linker- en rechterlimieten, functies die wel continu, maar niet differentieerbaar zijn, en soms voeren ze zelfs de *middelwaardestelling* ten tonele. Het is een valse wereld van schijnexactheid en opgeblazen geleerddoenerij, want echte bewijzen van de resultaten die ze uit de analyse gebruiken, kunnen op school niet gegeven worden. Die vallen ver buiten het kader van wat in de klas haalbaar en wenselijk is.

Er is – om maar een voorbeeld te noemen – geen enkel schoolboek waarin op een exacte en formeel correcte wijze trigonometrische, exponentiële en logaritmische functies worden ingevoerd en behandeld. Gelukkig maar! Van tijd tot tijd moet de oprechte schoolboekenschrijver zijn toevlucht nemen tot zinsneden als 'men kan bewijzen dat...' 'het is aannemelijk dat...'. Daar is niets op tegen; een didactisch verantwoorde behandeling is iets heel anders dan een streng deductieve opbouw. Maar in het licht hiervan is het vreemd om sommige wiskundeleraren te horen fulmineren tegen fysici die zonder scrupules met differentialen werken om de fysische realiteit in wiskundige formules te vatten. Die wiskundeleraren zouden wel eens mogen bedenken dat differentiaal- en integraalrekening op school alleen maar worden onderwezen omdat het

zulke *nuttige* vakken zijn. Nuttig, vooral voor de toepassingen. Niet in de eerste plaats voor het vak wiskunde als wetenschappelijke discipline. Want als dat het doel zou zijn, zouden andere onderwerpen eerder in aanmerking komen: algebra, combinatoriek, getallentheorie, topologie, grondslagen van de analyse, om er maar een paar te noemen. Met als consequentie dat het vak dan alleen een keuzevak voor liefhebbers zou worden volgens het model van de inmiddels weer ter ziele gegane Wiskunde II.

Onderwijs in de differentiaal- en integraalrekening op school dient gericht te zijn op de toepassingen, en in die toepassingen gaat het *altijd* om *kleine* veranderingen, *kleine* toenames, *kleine* verschillen. Hoe klein? Dat moet de context uitmaken. De natuurwetten en het gezonde verstand vertellen je iets over het verband tussen gekoppelde kleine veranderingen van grootheden. Dat leidt tot het *opstellen* van afgeleiden, integralen en differentiaalvergelijkingen. Als je daarbij met differentialen werkt, sta je het dichtst bij de realiteit die je aan het modelleren bent. Dat is een enorm didactisch voordeel en elke natuurkundeleraar maakt daar dan ook gebruik van. Terecht! Met wiskundige technieken kun je daarna de situatie verder analyseren en de problemen die zich voordoen proberen op te lossen.

Drie voorbeelden

Niet alleen in de fysica werk je op die manier. Hier zijn drie voorbeelden met een minder fysische achtergrond.

1 Exponentiële groei

De grootte van een populatie op tijdstip t geven we aan met $p = p(t)$. In veel gevallen lijkt het redelijk om te veronderstellen dat de toename Δp gedurende een klein tijdsinterval Δt evenredig is met de op dat moment aanwezige populatiegrootte en natuurlijk ook met Δt :

$$\Delta p = \alpha \cdot p \cdot \Delta t$$

voor zekere constante α .

De evenredigheidsfactor die aangeeft hoe Δp en Δt samenhangen, is hier dus het produkt $\alpha \cdot p$.

Maken we van deze praktijksituatie een wiskundig model, dan introduceren we reële variabelen voor de tijd en de populatiegrootte. We noemen ze natuurlijk weer t en p . De vergelijking voor p en t wordt in het wiskundige model nu een *differentiaalvergelijking*:

$$dp = \alpha p dt$$

Omdat dit zo'n eenvoudige differentiaalvergelijking is, kunnen we het verband tussen p en t hieruit direct afleiden en zelfs p expliciet als functie van t schrijven (met α en een nog nader te bepalen 'integratieconstante' β als parameters):

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} dp &= \alpha dt \\ d(\ln p) &= d(\alpha t) \\ \ln p &= \alpha t + \beta \\ p &= e^{\alpha t + \beta}.\end{aligned}$$

In het model is er dus sprake van *exponentiële groei*.

2 Begrensde groei

Een realistischer model voor populatiegroei ontstaat als we inbouwen dat voedselschaarste en ruimtelijke beperkingen grenzen aan de groei stellen. De toename Δp in een klein tijdsinterval Δt zal dan minder worden naarmate p dichterbij een stabiele grenswaarde G komt.

Een eenvoudig model hiervoor is

$$\Delta p = \alpha \cdot p(G - p) \Delta t$$

hetgeen leidt tot de differentiaalvergelijking

$$dp = \alpha \cdot p(G - p) dt$$

die via breuksplitsen kan worden opgelost.

$$\begin{aligned}\frac{dp}{p(G - p)} &= \alpha dt \\ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{G - p}\right) dp &= \alpha G dt\end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{p}{G-p}\right) = \alpha G t + \beta$$

en dit kan worden omgewerkt tot

$$p = \frac{G e^{\alpha G t + \beta}}{1 + e^{\alpha G t + \beta}}$$

3 Inhoud van een omwentelingslichaam

Een lichaam ontstaat door de grafiek van een op $[a, b]$ gedefinieerde continue, positieve functie

$$x \rightarrow y = f(x)$$

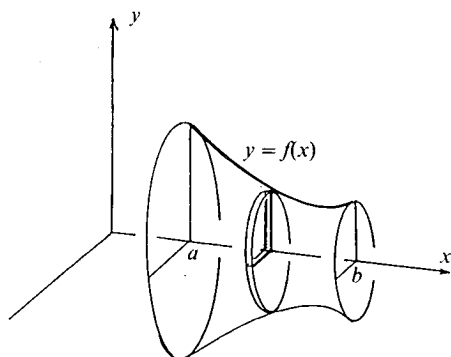
om de x -as te wentelen. Bepaal de inhoud. (Fig. 2) Oplossing: verdeel het interval $[a, b]$ in kleine stukjes ter lengte Δx_i , en snijd het lichaam (loodrecht op de as) volgens die verdeling in dunne cirkelvormige plakjes. De inhoud van zo'n plakje is dan bij benadering gelijk aan $\pi y_i^2 \Delta x_i$ (oppervlakte maal dikte), waarbij y_i (de straal van het plakje) een functiewaarde ter plaatse is, bijvoorbeeld de waarde van f in het midden van het deelinterval, of in welk ander punt van dat deelinterval dan ook: op het kleine intervalletje verandert f nauwelijks van waarde. De totale inhoud is dan gelijk aan de som

$$\sum_i \pi y_i^2 \Delta x_i$$

en dit leidt via een limietovergang tot de integraal

$$\int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

Zo levert bijvoorbeeld de functie $y = \sqrt{(R^2 - x^2)}$ op $[-R, R]$ de inhoud $\frac{4}{3}\pi R^3$ van een bol met straal



Figuur 2

R , en de functie $y = \frac{r}{h}x$ op $[0, h]$ de inhoud $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ van een cirkelkegel met basisstraal r en hoogte h . Er zitten heel wat wiskundige finesses verborgen in de bovenstaande 'intuïtieve' afleiding van de inhoudsintegraal. Een streng deductief bewijs ervan valt ver buiten hetgeen op school behandeld kan worden. Van wiskundig standpunt uit bezien is het natuurlijk mooi dat zulke bewijzen er zijn, maar je moet je wel realiseren dat ze nog maar zo'n 150 jaar oud zijn. Iemand als Euler deed het gewoon op de 'intuïtieve' manier en een wiskundeleraar hoeft zich niet te schamen als hij het net zo doet.

'Het kan toch ook zonder differentiatie!'

Als je met tegenstanders van het gebruik van differentiaal in de wiskundeles praat, krijg je steevast te horen: 'Waarom zou ik ze in de klas behandelen? Ik heb al zo weinig tijd en het kan net zo goed zonder!' Ik hoop dat mijn tegenargumenten zo langzamerhand duidelijk zijn.

Ten eerste: het kost helemaal niet meer tijd, zeker niet als je differentiaal introduceert zodra je met afgeleiden begint. Een tweede, belangrijker argument is echter dat differentiaal de kloof overbruggen tussen werkelijkheid en wiskundig model. De leraar die zegt dat hij het ook wel zonder kan, sluit zich waarschijnlijk ook af van de toepassingsgebieden; als hij al toepassingen behandelt, komen de afgeleiden bij hem uit de lucht vallen. Voor zijn leerlingen blijft het een raadsel waar ze vandaan komen. Snelheid van een auto, groeisnelheid van een populatie, uitstroomsnelheid van een vloeistof, het zijn woorden waarvan de leerlingen leren dat ze met afgeleiden te maken hebben, maar ze verdiepen zich nooit in de vraag *waarom* dat verband er is.

Scheidbare variabelen

Als je kunt integreren, kun je ook eenvoudige differentiaalvergelijkingen met scheidbare variabelen oplossen. We hebben er al twee voorbeelden van gezien. In het algemeen doelen we op vergelijkingen die geschreven kunnen worden in de vorm

$$f(x)dx = g(y)dy. \quad (6)$$

Ook hier wordt de brug naar de realiteit geslagen door de interpretatie van dx en dy als kleine toenames van x en y . Als we weer met $\int f(x)dx$ en $\int g(y)dy$ de primitieve functies aangeven van $f(x)$ en $g(y)$, dan wordt de oplossing van (6) gegeven door

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy,$$

een relatie tussen de variabelen x en y waarin in het algemeen nog een integratieconstante als parameter voorkomt. Lang niet altijd zal het mogelijk zijn om uit zo'n relatie y expliciet als functie van x op te lossen, of x als functie van y . Dat hoeft ook niet. Uit relaties van de vorm

$$F(x, y) = C \quad (7)$$

kan men meestal alle benodigde informatie over het verband tussen x en y direct afleiden. In het (x, y) -vlak stelt (7) voor elke waarde van C i.h.a. een *kromme* voor, een *oplossingskromme* of *integraalkromme* van de differentiaalvergelijking.

Soms veroorzaakt het schrijven van de ene variabele als functie van de andere variabele alleen maar gekunstelde moeilijkheden. Neem als voorbeeld de simpele differentiaalvergelijking

$$xdx = ydy. \quad (8)$$

De oplossingskrommen zijn de hyperbolen

$$x^2 = y^2 + C. \quad (9)$$

Tegenstanders van differentialen schrijven (8) in de vorm

$$x = y \frac{dy}{dx} \quad (10)$$

en als oplossing geven ze de functies

$$x \rightarrow y = \pm \sqrt{(x^2 - C)}. \quad (11)$$

De gekunstelde moeilijkheden waar ik het ook in mijn inleiding over had, komen nu voort uit het gedrag van de oplossing in de buurt van $(x, y) = (\pm \sqrt{C}, 0)$ waar de oplossingsfuncties niet differentieerbaar zijn. De betreffende punten zijn echter fatsoenlijke reguliere punten van de oplossingskrommen (9). Het is duidelijk dat de vorm (8) voor de differentiaalvergelijking de voorkeur verdient en dat alle informatie over het door die differentiaalvergelijking beschreven verband tussen x en y in formule (9) op de overzichtelijkste wijze gepresenteerd is.

Differentiaalvergelijkingen op school

Ik denk dat het niet goed is om op school veel verder te gaan met het onderwerp differentiaalvergelijkingen. Tijd voor meer dan een allereerste kennismaking is er toch niet en het is nuttiger om als er nog tijd over is, wat meer te doen aan functies van twee en drie variabelen. Via de totale differentiaal van zulke functies kom je dan gemakkelijk op begrippen als gradiënt, niveaulijn, niveauvlak, raaklijn en raakvlak. Ook daarbij is het didactisch en begripsmatig het beste om steeds te werken met *kleine* toenames van alle in het spel zijnde variabelen.

Concluderend:

Houd de differentialen in ere! Ze vergroten het inzicht en door hun handige notatie nemen ze je veel werk uit handen.

En laten we in ieder wiskundelokaal een standbeeld oprichten voor Leibniz, de man die deze voortreffelijke notaties voor afgeleiden en integralen heeft bedacht!

Literatuur

H. Freudenthal, *Mathematics as an Educational Task*, Reidel, Dordrecht, 1973

De schrijver dankt dr. P. G. J. Vredenduin voor zijn uitgebreide commentaar op de eerste versie van het manuscript.

► Lissajous-figuren

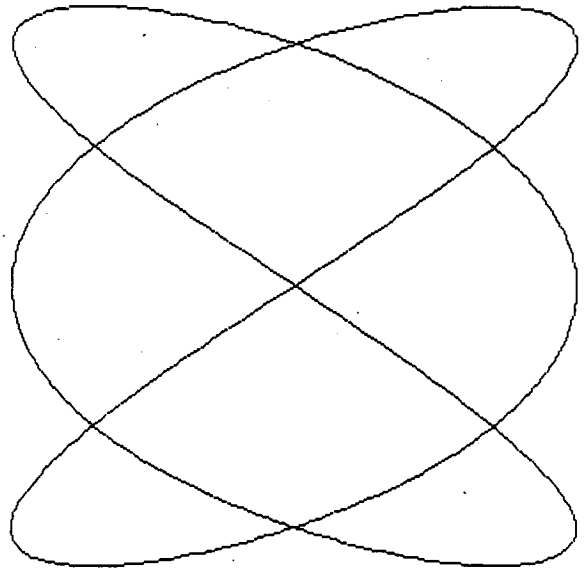
De Fransman Jules-Antoine Lissajous (1822-1880) heeft zijn naam gegeven aan de vaak fraaie figuren, die ontstaan als een punt deelneemt aan twee periodieke bewegingen, één in horizontale en één in verticale richting. De periodieke bewegingen worden beschreven door eenvoudige goniometrische functies.

In het vrije veld kan men een Lissajous-achtige beweging ontwaren aan een boomtak, die in de wind zwaait (Minnaert, De natuurkunde van het vrije veld, deel 3).

Door voor de in het programma voorkomende A en B waarden te kiezen wordt een Lissajous-figuur verkregen.

```
10 PI=3.14159
20 CLS
30 WINDOW (-1.4,-1)-(1.4,1)
40 INPUT A,B
50 PRESET (1,0)
60 FOR T=0 TO 2*PI STEP .01
70 X=COS(A*T)
80 Y=SIN(B*T)
90 LINE -(X,Y)
100 NEXT T
```

? 3,2
Ok



► **Zij mogen uiteraard
daarbij de zuivere
wiskunde niet
verwaarlozen**

Th. J. Korthagen

Onder deze ietwat merkwaardige titel verscheen het jubileumboek ter gelegenheid van het veertigjarige bestaan van het Centrum voor Wiskunde en Informatica. Het behandelt de oprichting en de beginjaren van het Mathematisch Centrum, zoals de naam vele jaren luidde, alsmede de achtergronden waartegen deze oprichting plaatsvond.

De vier oprichters, de hoogleraren J. G. van der Corput, J. F. Koksma, J. A. Schouten en D. van Dantzig hadden allen een verschillende visie op de wiskunde. Deze visies worden in het boek uitvoerig weergegeven. De meest extreme zijn die van Van der Corput en die van Van Dantzig.

Van der Corput beschouwde de wiskunde als cultuurgoed zonder meer. De bijdrage aan de cultuur is het beoefenen van de wiskunde op hoog niveau. Bovendien is het taak anderen in contact te brengen met dit cultuurgoed. In het contact met andere wetenschappen is de wiskunde volstrekt autonoom.

Van Dantzig had oog voor het feit dat de wiskunde een groeiende maatschappelijke rol vervulde, er waren veel nieuwe gebieden waar wiskunde van nut zou kunnen zijn.

Het gemeenschappelijke van beide standpunten is

‘maatschappelijke dienstbaarheid’.

In de stichtingsacte van 11 febr. 1946 worden de zuivere en de toegepaste wiskunde in een adem genoemd:

‘teneinde daardoor enerzijds de bijdragen van deze gebieden van wetenschap tot de verhoging van het welvaarts- en beschavingspeil in Nederland, anderzijds de bijdrage van Nederland tot de internationale cultuur te vergroten’.

Uit de eerste taakomschrijving voor de Raad van Beheer (najaar 1946) wordt duidelijk, dat maatschappelijke dienstbaarheid het hoofdmotief is geworden.

De leden van de Raad van Beheer dienen zich op de hoogte te stellen van de behoeften, die op aangrenzende gebieden worden gevoeld t.a.v. de wiskunde. ‘Uiteraard betekent dit voor de directeur (Van der Corput) en de secretaris (Koksma), die zich nu op het gebied der zuivere mathesis bewegen, dat zij zich moeten oriënteren en inwerken. Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen...’.

Met het zich ‘oriënteren en inwerken’ wordt door de voorzitter en de secretaris van de Raad van Beheer met grote voorzichtigheid begonnen. Ze onderzoeken de toepassingsmogelijkheden van hun zuiver wiskundig werk. Het is dan ook niet verwonderlijk dat Van der Corput en Koksma de leiding krijgen van de afdeling Zuivere Wiskunde die eind 1947 wordt ingesteld. Tegelijkertijd worden ingesteld de afdeling Toegepaste Wiskunde onder leiding van Van der Waerden, de Statistische afdeling onder leiding van Van Dantzig en de Rekenafdeling onder leiding van Van Wijngaarden. In het tweede deel van het boek komen de beginjaren (1946-1954) van het Centrum aan de orde.

Bij de Statistische afdeling is de eerste opbouwfase in 1950 voltooid. De meest eervolle opdracht krijgt de afdeling van de Deltacommissie die opgericht is na de watersnoodramp van 1953. Ook de afdeling Toegepaste Wiskunde wordt bij deze opdracht betrokken.

Aan de rekenafdeling werden aanvankelijk twee taken toegewezen, het uitvoeren van opdrachten in gecompliceerd rekenwerk en het ontwikkelen van een grote rekenmachine.

Er worden verschillende typen rekenautomaten ontwikkeld, maar het blijkt dat het Centrum niet de

juiste instelling is om de serie-produktie van redelijke machines ter hand te nemen. Hiertoe wordt een particulier bedrijf opgericht. De ontwikkeling van de rekenafdeling in de richting van de computerbouw is hiermee geëindigd.

Op de rekenafdeling zijn vele belangrijke opdrachten uitgevoerd, de belangrijkste waren voor de vliegtuigbouw.

Een bijzonder charmant gedeelte van het boek vormen de interviews met een aantal betrokkenen en medewerkers van het eerste uur. Hierdoor kan de lezer iets ervaren van het enthousiasme, dat in de beginjaren op het Centrum heerste.

Hoewel het onderwerp niet expliciet aan de orde wordt gesteld, komen we toch iets te weten over de relatie tussen het M.C. en de wiskundeleraren.

Onder de wiskundeleraren bestond ook in de beginjaren van het Centrum de behoefte het vak bij te houden. Uit verschillende plaatsen komen verzoeken aan het Centrum om cursussen te verzorgen in de Moderne Algebra, de Topologie etc. Aan deze verzoeken wordt voldaan. Ook de vakantiecursussen worden druk bezocht.

Kortom het contact met de leraren is, zeker in de beginjaren, een van de meest succesvolle activiteiten van het Mathematisch Centrum.

In de loop van de jaren verminderde de belangstelling van de leraren voor de wiskunde. De belangstelling verschuift naar de didactiek van het vak. Hoewel Van Dantzig hier wel belangstelling voor heeft, speelt het Centrum op dit terrein geen belangrijke rol.

Eén activiteit van het centrum voor de wiskundeleraren is nog springlevend, het organiseren van de jaarlijkse vakantiecursus. De eerste vakantiecursus was in 1946.

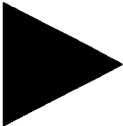
De lijst van onderwerpen die aan de orde zijn geweest is indrukwekkend. Werden in de beginjaren uitsluitend thema's uit de zuivere wiskunde gekozen, de laatste jaren hebben die cursussen het meest succes, waarvan het onderwerp nauw aansluit bij de schoolwiskunde. De vakantiecursussen zijn de oudste traditie van het Mathematisch Centrum. Het is te hopen dat deze traditie nog lang zal worden voortgezet.

Het grootste gedeelte van het boek is geschreven door G. Alberts. M.i. is zijn stijl ietwat wijdlopieg. Er komen nogal wat herhalingen in de tekst voor,

zelfs citaten worden soms herhaald. Toch is het een interessant boek.

G. Alberts, F. van der Blij, J. Nuis (redactie). *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen.*

Amsterdam. Centrum voor Wiskunde en Informatica. 1987, f 40,-



Verschenen

S.L.O., *Leermiddelengids Wiskunde/Rekenen/Informatica*, f12,75.

De Centrale Registratie Leermiddelen geeft jaarlijks voor het voortgezet onderwijs overzichten uit per vakgebied. De bovengenoemde gids geeft leraren wiskunde etc. een volledig overzicht van wat er aan methoden, leerboeken en educatieve software verkrijgbaar is.

Een titel- en auteursregister maken de gids op verscheidene manieren toegankelijk.

Berry c.s., *Mathematical Modelling Courses*, Ellis Horwood, 36.50, 281 blz. en Berry c.s. *Mathematical Modelling Methodology. Model and Micros*, Ellis Horwood, £ 38,50, 318 blz.

Deze twee boeken van dezelfde auteurs teams beschrijven het opzetten van cursussen Wiskundige Modellen, waarbij het eerstgenoemde boek de meer theoretische aspecten behandelt terwijl het tweede meer de praktische kant benadert. Veel aandacht wordt besteed aan de werkelijkheidswaarde van de te ontwikkelen modellen.

Dirickx, Baas, Dorhout, *Operationele Research*, Adademic Service, f60,-, 373 blz.

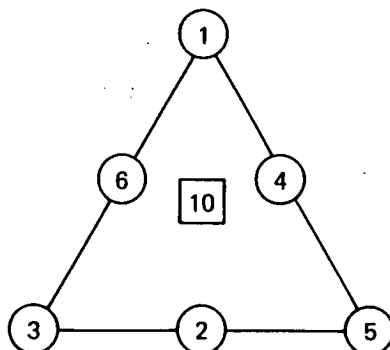
De belangrijkste methoden en technieken uit de OR, zoals (niet-)lineaire programmering, netwerkproblemen en geheeltalige programmering komen in dit boek aan de orde. Aan de hand van praktijkvoorbeelden wordt uitvoerig ingegaan op de modelmatige aspecten. Per hoofdstuk is een flink aantal opgaven opgenomen.

C. F. Gardiner, *Algebraic Structures*, Ellis Horwood, £ 14,50, 280 blz.

Na een algemene inleiding over groepen, ringen en lichamen richt de auteur zich grotendeels op concrete toepassingen van de ontwikkelde abstracte theorieën. Zo ontstaat een boek dat ook voor niet algebraïci interessant is.

Opmerkelijk is het gebruik van computeralgoritmen binnen de algebra die tot verrassende resultaten leiden.

● Werkblad ●



► Magische driehoeken

De getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6 zijn zó langs de zijden van een driehoek gerangschikt dat de som langs elke zijde steeds gelijk is aan 10.

Laat zien dat dezelfde getallen op een andere manier langs de zijden kunnen worden gerangschikt, zó dat toch de drie sommen langs de zijden aan elkaar gelijk zijn. Er zijn, naast het geval dat getekend is, nog drie mogelijkheden.

Als er op een dergelijke manier zes getallen langs de zijden van een driehoek gerangschikt zijn, spreken we van een *magische driehoek*.

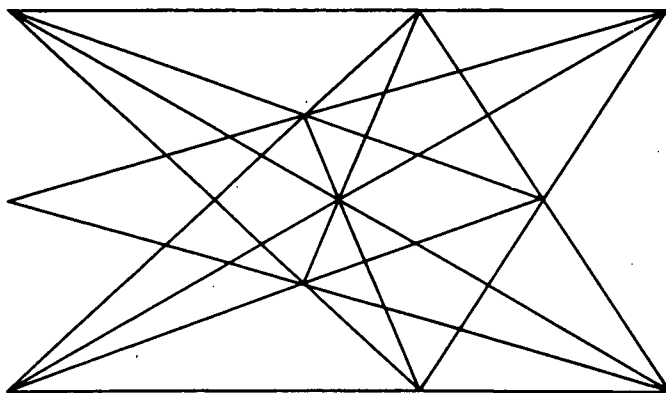
Probeer nu de volgende verzamelingen getallen te rangschikken tot een magische driehoek:

(1) 1, 2, 3, 5, 6, 7

(2) 1, 2, 3, 4, 6, 7

In beide gevallen zijn er twee rangschikkingen mogelijk.

● Werkblad ●



► De anti-afval-campagne

De plantsoenendienst begon zich grote zorgen te maken over de hoeveelheid afval die in het fraaie stadspark werd achtergelaten. Om dit kwaad te bestrijden besloot het hoofd van de plantsoenendienst om een aantal afvalbakken te plaatsen, en wel zo strategisch mogelijk.

Het park werd doorsneden door een ingewikkeld stelsel van 14 rechte paden, zoals in de plattegrond aangegeven, en het hoofd oordeelde dat er langs elk pad tenminste 3 afvalbakken zouden moeten worden geplaatst.

Zijn baas, de directeur van openbare werken, leek dat te duur, omdat er dan $14 \times 3 = 42$ afvalbakken nodig zouden zijn, zo meende hij. De directeur was dan ook aangenaam verrast toen het hoofd van de plantsoenendienst hem kwam uitleggen dat het met heel wat minder afvalbakken ook wel zou kunnen; de afvalbakken zouden immers bij kruispunten van paden kunnen worden geplaatst.

Wat is het kleinst mogelijke aantal afvalbakken, en waar moeten deze worden geplaatst? Voorts moet er op elk pad een toezichthouder zijn, om te bevorderen dat de bezoekers inderdaad hun afval in de bakken zullen deponeren.

Hoeveel toezichthouders zijn er nodig?

'Auteurs in beeld'

► **De Wageningse Methode**

Leon van den Broek

Inleiding

Laat ik beginnen de Wageningse Methode aan u voor te stellen: 'een wiskunde-methode voor havo en vwo, geschreven vanuit de ideeën van het IOWO; dat wil zeggen met realistische contexten, aansluitend op de beleavingswereld van het kind, met zinvolle, toepassingsgerichte wiskunde en met een minimum aan formele wiskunde'.

Zo'n typering klinkt mooi maar zegt natuurlijk niet zo veel. In dit artikel willen wij vertellen wie wij zijn, hoe wij als auteurs over wiskundeonderwijs denken, en hoe wij bovenstaande uitgangspunten concreet in de Wageningse Methode hebben uitgewerkt.

Maar eerst wat zakelijke informatie. Er zijn twee edities van de onderbouw en wiskunde A: de werkboekjes-editie (uitgever Meijer en Siegers te Oosterbeek) en de uitgave in boekvorm (Educaboek te Culemborg). Dat komt omdat Educaboek om markttechnische redenen niet gelooft in een werkboekjes-versie, terwijl wij om onderwijskundige redenen (zeker in de onderbouw) juist werkboekjes prefereren.

Inhoudelijk zijn de versies hetzelfde. Het enige verschil is de uitvoering: de werkboekjes zijn verbruiksmateriaal, de Educaboek-versie is gebruiks-

materiaal (met een knipblok bij elk leerjaar). De boeken voor mavo en de bovenbouwboeken voor zowel wiskunde A als B zijn in voorbereiding.

De dracht en de geboorte

De Wageningse Methode heet zo omdat hij verwekt is op het Wagenings Lyceum. Dat is rond 1973 gebeurd. Toen zijn de wiskundeleraars van die school begonnen naar eigen inzichten lesmaterialen te ontwerpen, eerst voor de eerste klas en aanvankelijk als losse stencils. Het IOWO begeleidde het 'Differentiatie-project Wageningen' en gaf materiële steun in vorm van taakuren en typewerk. Bovendien stelde het Wagenings Lyceum taakuren beschikbaar en gaf het roosterfaciliteiten voor overleg in de sectie wiskunde. Na afloop van de experimenten werd er een schrijversgroep gevormd: Leon van den Broek, Simon Schoone, Anje Stolp (van het Wagenings Lyceum), Wim Kremers (van het Liemers College te Zevenaar) en Ad van den Broek (illustrator). Hoewel verschillende uitgeverijen zich geïnteresseerd toonden, besloot deze groep de werkboekjes in eigen beheer uit te geven bij een bevriende drukker, Wim Siegers te Oosterbeek. Dit kun je beschouwen als de geboorte van de Wageningse Methode: 1980. Voor wiskunde A en B werd de auteursgroep uitgebreid: Jacques Fellinger, Gerard Stroomer (Liemers College) en Dolf van den Hombergh (Elzendaal College te Boxmeer), Jan Smit en Stef Tijs (Mathematisch Instituut, KUN).

In de rest van dit artikel wil ik u een beeld geven van onze werkwijze en hoe wij de IOWO-uitgangspunten in de Wageningse Methode hebben uitgewerkt. Daarvoor heb ik een keuze moeten maken. Ik hang mijn verhaal op aan één werkboekje: Inhouden voor klas 4 van het vwo.

Allereerst zal ik vertellen hoe dat boekje tot stand is gekomen.

De reacties van de leerlingen wegen zwaar

Het weegt voor ons zwaar hoe de leerlingen reage-

ren op een tekst. Als hun reactie ongunstig is, is er in het algemeen iets fout: de bedoeling komt niet over, de behandeling is te abstract, het verhaal is te flauw, de opgaven zijn te gemakkelijk, of Als docent/schrijver merk je dat heel goed. Het is dan de kunst om het zwakke punt in je tekst aan te kunnen wijzen. Als je weet waar de schoen wringt, kom je in de tweede versie dicht bij wat het zijn moet. En de derde versie is dan helemaal goed.

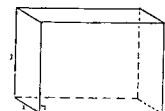
Zo hebben we in 1983 de eerste versie van Inhouden geschreven. Na drie try-outs konden we de definitieve versie maken (1986). De eerste en de laatste versie verschillen nogal wat.

Op deze manier hebben we al onze boekjes in fasen geschreven: steeds zagen we in de klas hoe het materiaal uit de vorige fase functioneerde. En dat kan ook niet anders als je de zelfwerkzaamheid van de leerling centraal stelt.

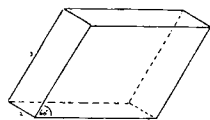
Zelfwerkzaamheid van de leerlingen

Toen wij in de jaren zeventig begonnen met het ontwikkelen van lesmaterialen, waren de schoolboeken nog op het ouderwetse onderwijsmodel geschreven. Het model waarin de leraar voordeed hoe het moest en de leerlingen vervolgens een rij bijna identieke oefeningen tot een goed einde brachten. Maar wij wilden lesgeven op een heel andere manier. Dus moesten we zelf leerlingen teksten schrijven, in eerste instantie alleen voor eigen gebruik.

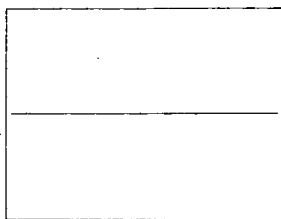
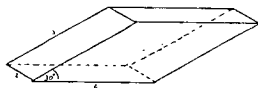
Heel grof gezegd komt onze didactiek op het volgende neer. Wij bieden de leerlingen problemen aan, die hen steeds verder in het te behandelen onderwerp invoeren. De oefeningen achteraf zijn gevarieerd, en zeker niet routinematig.



Een balk van 2 bij 3 bij 4 cm wordt van opzij scheefgedrukt. Vier vlakken blijven onveranderd: voor- en achtervlak worden steeds plattere parallelogrammen. We bekijken twee tussenstanden, die bij 60° en bij 30° .



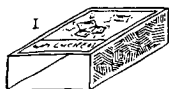
>> Bereken voor beide gevallen de inhoud. (Laat eventuele wortels in je antwoord staan).



(uit: eerste versie Inhouden)

12

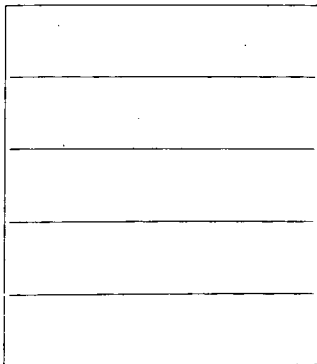
cilinders, balken, prisma's



Een luciferdoosje meet 1 bij 3 bij 5 cm. We duwen het omhulsel scheef. In stand I is de opening nog rechthoekig. In stand II is de opening een parallellogram met een hoek van 60° . In stand III is die hoek 45° , in stand IV 30° . In stand V is het omhulsel helemaal platgedrukt.



Bereken de inhoud binnen het omhulsel in elk van deze standen. (Laat eventuele wortels in je antwoord staan.)



(uit: definitieve versie Inhouden)



We nemen ook het peuterbad nog onder de loep. Dat is rond; de diameter is 20 meter. Natuurlijk loopt ook hiervan de bodem gelijkmatig af: de diepte neemt toe van 10 tot 50 cm.

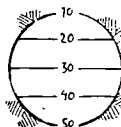
Hoeveel m^3 water zit er in het peuterbad?

Bereken de hellingshoek van de bodem.



Er zijn op de bodem drie fel-gekleurde lijnen geverfd. De groene lijn geeft aan waar het badje 20 cm diep is, de blauwe waar het 30 cm diep is, de rode waar het badje 40 cm diep is.

Hoe lang is elk van de lijnen?



De meetkundelijn in de Wageningse Methode

Wij vinden meetkunde in het wiskundeonderwijs heel belangrijk. Vóór het boekje Inhouden hebben de leerlingen dan ook al een heleboel meetkunde gehad. De kennis en het inzicht die ze hebben opgedaan moeten in de vierde klas weer geactiveerd worden. Bovendien moeten de leerlingen dan kennismaken met het onderwerp Ruimte meetkunde zoals dat in de bovenbouw bij wiskunde B zal worden aangeboden.

Maar ook bij wiskunde A is meetkunde nodig. Denk maar aan lineair programmeren. Coördinaten in de ruimte zijn al in de tweede klas geïntroduceerd, zijn in de derde herhaald en krijgen in Inhouden hun vervolg.

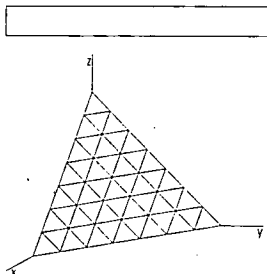
mohammeds kamelen

Mohammed laat bij zijn overlijden 7 kamelen na, welke onder zijn drie zonen verdeeld worden. Verdeelplannen zijn van de vorm (x, y, z) , waarbij x het aantal kamelen is dat de oudste zoon krijgt, y het aantal kamelen voor de middelste en z het aantal voor de jongste.

Aan welke voorwaarden moeten de toelaatbare verdeelplannen voldoen?

Ga na dat alle toelaatbare verdeelplannen in de Oxyz-ruimte in een driehoek D liggen.

Schrijf de coördinaten bij de hoekpunten van D.



Hoeveel toelaatbare verdeelplannen zijn er?

We definiëren op D een "eerlijkheidsfunctie": $E(x, y, z) = 3x - y + 2z - 1$.

Maak een tabel voor E. De verdelingen $(7, 0, 0)$, $(0, 7, 0)$ en $(0, 0, 7)$ zijn van hetzelfde type. Hiervan vermelden we er maar één en noteren het aantal: 3.

Kleur alle niveauegebieden van E.

Hoe eerlijker de verdeling, des te kleiner is de waarde van E. Vandaar de naam "eerlijkheidsfunctie".

Waar neemt E zijn minimum aan en hoe groot is dat?

Merk op dat dit een geheelgetal is.

	E	aantal		E	aantal
$(7, 0, 0)$	14	3			
$(6, 1, 0)$					
$(5, 2, 0)$					

Op deze manier brengen we de leerlingen geleidelijk verder. Dat werkt beter dan steeds afgeronde eenheden stof aan te bieden.

Onze filosofie

De leerlingen moeten de wiskundelessen als zinvol ervaren. Dat, vinden wij, komt op de eerste plaats. Dat betekent dat de opgaven niet ver gezocht maar voor de hand liggend moeten zijn. Dat ze niet in een fantasie-wereld moeten spelen maar in het dagelijks leven, niet formeel/abstract geformuleerd moeten worden maar in gewone mensen-taal. Dan weet de leerling waar hij mee bezig is. En dat motiveert hem het best.

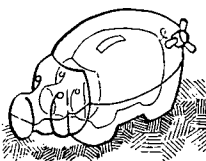
Overigens mogen de situaties in de opgaven best uit de werkelijkheid geabstraheerd zijn. Zo zijn in de volgende opgave allerlei details over brandkasten weggelaten. Maar de vraag ligt voor de hand.

Een moderne brandkast is dubbelwandig: tussen de buiten- en binnenwand zit isolatie-materiaal dat bestand is tegen zeer hoge temperaturen (tot 1000 °C).

Waarvoor dient dit materiaal?

Van een brandkast zijn de buitenmaten 102, 62 en 62 cm en de binnenmaten 88, 48 en 48 cm. Het plaatstaal is 1 cm dik.

Bereken hoeveel dm³ ruimte er tussen de wanden zit.

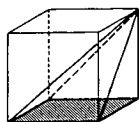


Wij leggen in de Wageningse Methode weinig nadruk op formele wiskunde, zeker in de eerste leerjaren. De leerling is daar vaak nog niet aan toe en zou dan afhaken omdat hij de tekst niet kan lezen en niet omdat de wiskunde inhoudelijk te moeilijk zou zijn. De behoefte aan formele notaties of bewijzen ontstaat vanzelf.

Het zal inmiddels duidelijk zijn dat wij in plaats daarvan het begrip centraal stellen. Bijvoorbeeld bij de afleiding van de formule voor de inhoud van een piramide. Later volgt dan een wiskundig nettere afleiding.

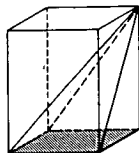
Deze laatste afleiding is minder geschikt voor toekomstige A-leerlingen. Een mogelijkheid tot differentiatie dus in vwo 4.

(uit wiskunde A: Optimaliseringsproblemen)



Op bladzijde 14 hebben we een speciale piramide in een kubus bekeken:

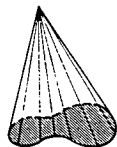
de inh. van deze piramide $= \frac{1}{3} \times$ de inh. van de kubus.



We vermenigvuldigen de kubus en de piramide in de hoogte met een zekere faktor. Opnieuw geldt:

de inh. van de piramide $= \frac{1}{3} \times$ de inh. van de balk.

Een soort kegel heeft een top en een grondvlak. Dit lichaam en de piramide hierboven hebben gelijke hoogte en hun grondvlakken hebben even grote oppervlakte. Noem die oppervlakte A.



Teken bij de "kegel" en bij de piramide de doorsnede op halve hoogte.

Hoe groot is de oppervlakte van deze doorsnedes (uitgedrukt in A)?

We doorsnijden de "kegel" en piramide ook op $\frac{1}{2}$ hoogte van de top.

Hoe groot is de oppervlakte van deze doorsnedes (uitgedrukt in A)?

Volgens de bierviltjes-methode hebben de "kegel" en de piramide even grote inhoud: $\frac{1}{3} \times$ hoogte $\times$ A.

Conclusie

INHOUD $= \frac{1}{3} \cdot$ OPP. GRONDVLAK $\cdot$ HOOGTE

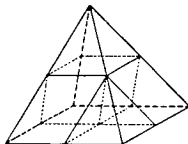
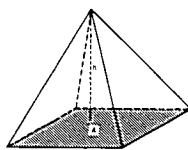
Deze formule geldt voor een piramide en ook als het grondvlak een cirkel is of een ander kromlijng begrensd gebied.



Differentiatie

Wij geloven niet in een basisstof-herhalingsstof-verrijkingsstof-model, omdat daarin de basisstof op zich ongeschikt is voor zowel de zwakkere leerling als voor de betere leerling. Wij bieden de leerlingen in één klas dus één tekst aan. Geen differentiatie? Toch wel! Wij houden met onze opzet namelijk voortdurend rekening met individuele verschillen. Immers onze leerlingen kunnen in hun eigen tempo werken, kiezen zelf hun formuleringen, kunnen een abstracte (vaak snelle) aanpak volgen maar ook een concrete (met meer uitschrijven).

Verdere mogelijkheden om te differentiëren worden geboden door de paragrafen Extra Werk (oefening en herhaling) en Extra Sterk (verdieping, soms met een puzzelkarakter).



Een vierzijdige piramide heeft hoogte h; de oppervlakte van het grondvlak is A. Op bladzijde 18 heb je geleerd dat dan de inhoud gelijk is aan: $\frac{1}{3} \cdot h \cdot A$. We gaan deze formule nog eens afleiden, op een heel andere manier. (Om een overzichtelijker plaatje te krijgen hebben we een parallelogram als grondvlak genomen; de afleiding kan echter bij elke vierhoek als grondvlak gehouden worden.)

Vanuit de middens van de ribben verdelen we de piramide in vijf stukken: 2 kleinere piramides, 2 prisma's en 1 parallellepipedum.

Druk de inhoud van het ppd en van de prisma's uit in h en A.

De bovenste kleine piramide ontstaat uit de hele piramide door vermenigvuldiging vanuit een zeker centrum, met een zekere faktor.

Welk centrum? En welke faktor?

Dezelfde vraag voor de andere kleine piramide.

We noemen de inhoud van de hele piramide: I.

Wat is dan de inhoud van elk van de kleinere piramides?

Is gelijk aan de som van de inhouden van de vijf stukken.

Welke vergelijking geldt dus voor I?

Laat zien dat hieruit volgt: $I = \frac{1}{3} \cdot h \cdot A$.

Eerst inzicht aanbrengen, dan pas algoritmen aanbieden

Wiskundeonderwijs is pas zinvol als de te leren algoritmen begrepen zijn. Wij proberen dat te bereiken door gevarieerde opdrachten in steeds nieuwe situaties en weinig routine-opgaven. Bij een meetkunde-onderwerp ligt dat voor de hand, maar ook bij hoofdstukken uit de algebra volgen we deze aanpak.

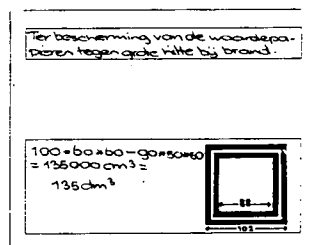
Een gevolg hiervan is dat wij een actieve werkhouding van de leerling en van de docent vragen. De leerling moet de probleemstelling aanpakken; hij kan dus niet wachten totdat de leraar hem wel vertelt hoe het algoritme uitgevoerd dient te worden. De moed om problemen op te lossen en het

vertrouwen dat dat zal lukken, is hetgeen de leerling nodig heeft. Kinderen moeten in de brugklas wel even aan deze (voor de meesten nieuwe) werkhouding wennen. Maar dan blijkt ook dat ze veel kunnen, en dat ze zo met veel plezier wiskunde doen.

De werkwijze in de klas

Onze werkwijze in de klas hangt natuurlijk sterk samen met de aard van het materiaal. Meestal zijn de leerlingen zelf aan het werk, individueel of in kleine groepjes. De docent begeleidt: hij bespreekt de essentie van een paragraaf, beantwoordt vragen

(soms klassikaal, meestal per groepje), geeft het tijdschema aan, stimuleert, enz. De leerlingen corrigeren zelf hun werk met behulp van correctieboekjes.



(het correctieboekje over het brandkast-probleem)

Dit alles houdt in dat we de leerling nogal vrij laten. Het is dan ook goed om achteraf nog eens de

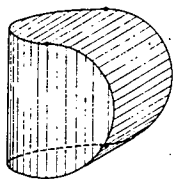
34

extra werk



In Philadelphia (USA) is in 1976 een gigantische wasknijper gebouwd door de kunstenaar Claes Oldenburg. Totale hoogte: 14 meter. Een normale wasknijper is 7 cm hoog en weegt 6 gram. Veronderstel dat de reuze-knijper van dezelfde materialen is vervaardigd als zijn kleine voorbeeld.

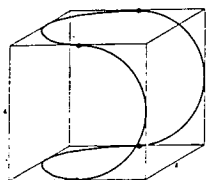
Hoe zwaar is de gigant dan?



Een ruimtelijk lichaam past precies in een kubus met ribbe 4. In het tweede plaatje zie je getekend hoe de rand loopt: vier halve cirkels met straal 2, één in het bovenvlak, één in het voor-, één in het achter- en één in het ondervlak.

Als je de vorm bij de dikgetekende punten (eerste plaatje) doorzaagt, krijg je twee congruente delen.

Bereken de lengte van de rand, de totale oppervlakte en de inhoud. Laat π in je antwoord staan.

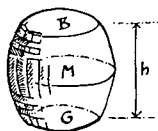


Heb je ontdekt, hoe je deze ingewikkelde vorm kunt maken? Zaag van een bezemsteel een stuk, waarvan de hoogte gelijk is aan de diameter. Zaag dit stuk door de as in twee symmetrische helften. Draai de ene helft een kwartslag en lijm hem aan de andere vast.....

36

extra sterk

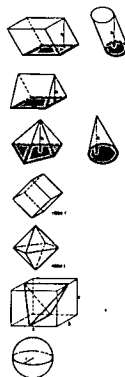
een superformule?



De inhoud van een wijnvat laat zich goed door de volgende formule benaderen: $\frac{1}{2} \cdot h \cdot (G + 4M + B)$. Hierin is h de hoogte en zijn G, M en B achtereenvolgens de oppervlakte van het grond-, midden- en bovenvlak. De doorsnede op halve hoogte telt dus 4 keer zo zwaar als die van grond- en bovenvlak.

Bereken de inhoud als h=7 en grond-, midden- en bovenvlak achtereenvolgens straal 3, 4 en 3 hebben.

Ontzoek of deze formule de juiste inhoud oplevert voor de volgende bekende lichamen:



parallelepipedum en cilinder

driezijdig prisma

piramide en kegel

gekantelde kubus (2 een ribbe op tafel)

regelmatig achthoek

viervlak van extra werk (blz. 32)

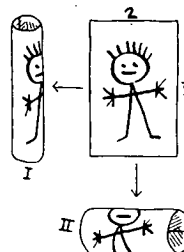
bol (blz. 35)

Dat deze formule ook klopt voor een afgeknotte piramide en een afgeknotte kegel, is lastiger na te gaan.

Natuurlijk is het geen superformule: je kunt hem niet op elk lichaam toepassen. Maar, hij geeft wel vaak een goede benadering.

- 1 Met een rechthoekig vel papier van 2 bij 3 dm kun je op twee manieren een cilinder maken.

>> Welke cilinder heeft de grootste inhoud?



- 2 De diameter van de maan is 27 % van die van de aarde.

>> Vul in:

de oppervlakte van de maan is _____ % van die van de aarde.

de inhoud van de maan is _____ % van die van de aarde.

berekening



- 3 In een assenstelsel is een kubus met ribbe 6 getekend.

>> Geef een vergelijking van het vlak door de punten A, C en H.

$x + y + z =$

De drie coördinaten van het zwaartepunt (= middelpunt) van driehoek ACH zijn gelijk.

>> Geef die coördinaten.

>> Kleur de doorsnede van de kubus met het vlak met vergelijking $x+y+z = 3$.

Het deel van de kubus tussen de twee vlakken is een ruimtelijke figuur.

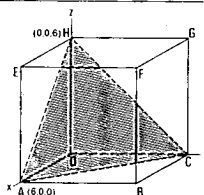
>> Hoe noem je zo'n figuur?

>> Hoeveel symmetrie-vlakken heeft de figuur?

>> Welke punten liggen in al deze symmetrie-vlakken? (, ,) met

(, ,) met

>> Bereken de inhoud van de ruimtelijke figuur.



leerpunten uit het boekje op een rijtje te zetten. In onze stijl van werken hebben we dat opgelost door na elk hoofdstuk een zogenaamde zelftoets af te nemen. Aan de hand daarvan kun je de stof nog eens doorspreken en kunnen de laatste misverstanden uit de weg worden geruimd. En dan kan een proefwerk worden afgenomen.

Bij geïnspireerd onderwijs hoort een goede toets

Een apart probleem is het samenstellen van toetsen. Een toets moet overeenstemmen met het lesmateriaal wat betreft diepgang, variatie, stijl en sfeer. Dus moet je contextopgaven in de toets stop-

pen en je kunt betrekkelijk weinig kale sommen vragen. Hoe kom je aan geschikte opgaven? Het

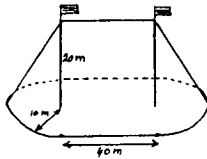
zoeken en formuleren van toepassingen is erg arbeidsintensief en vraagt veel creativiteit. Maar, als je er goed voor gaat zitten, blijkt je elk jaar opnieuw aardige opgaven te kunnen bedenken. En dat geeft veel voldoening.

39-INHOUDEN V4b 1vdb 27-5-88 NAAM:

1. Een circustent heeft twee masten. Het grondvlak bestaat uit twee halve cirkels met daartussen een rechthoek. De afmetingen staan in het plaatje.

>> Bereken de inhoud van de tent (in m^3).

4

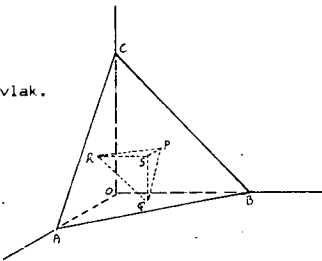


2. Hiernaast is het viervlak getekend met hoekpunten $O=(0,0,0)$, $A=(3,0,0)$, $B=(0,3,0)$ en $C=(0,0,3)$. We nemen van elk van de vier zijvlakken het zwaartepunt: $P=(0,1,1)$, $Q=(1,1,0)$, $R=(1,0,1)$ en $S=(1,1,1)$. Door deze zwaartepunten met elkaar te verbinden ontstaat een kleiner regelmatig viervlak.

>> Wat is de verhouding van de oppervlakte van $\triangle ABC$ en de oppervlakte van $\triangle PQR$?

4

2



>> Wat is de verhouding van de inhoud van de grote piramide en het kleine piramidetje?

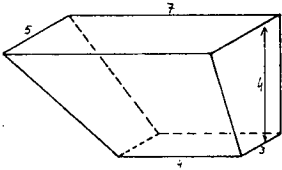
2

3. Het lichaam hiernaast heeft een rechthoekige boven- en onderkant. De bovenkant meet 5 bij 7, de onderkant meet 3 bij 4. Boven- en ondervlak zijn evenwijdig, en liggen op afstand 4 van elkaar.

Het lijkt wel een afgeknotte vierzijdige piramide, maar is dat niet!

>> Hoe kun je dat uit de afmetingen afleiden?

2



Om de inhoud te berekenen van het lichaam, mag je aannemen dat het achtervlak en het rechterzijvlak vertikaal zijn (d.w.z. dat ze loodrecht op boven- en ondervlak staan).

8

>> Waarom mag je dat zomaar aannemen?

2

>> Bereken de inhoud van het lichaam.

4

Verdeel het lichaam in een balk, twee prisma's en een piramide.

(Voor de docent hebben we voorbeeld-proefwerken opgenomen in de handleiding en is er een opgavenmap.)

```

40 FOR A=1 TO N
50   FOR K=A TO N
60     X1=COS(A*2*PI/N):Y1=SIN(A*2*PI/N)
70     X2=COS(K*2*PI/N):Y2=SIN(K*2*PI/N)
80     LINE (X1,Y1)-(X2,Y2)
90   NEXT K
100 NEXT A

```

Wie het programma draait, moet de vraag beantwoorden 'aantal hoekpunten?'. Typt men 10, dan verschijnt een veelhoek op het scherm (zie figuur 1).

► Over de rol van korte programma's in het voortgezet onderwijs

Douwe Kok en Cor van der Pijl

Inleiding

Dit artikel heeft de volgende opbouw: eerst worden wat opmerkingen gemaakt over zgn. korte programma's. Daarna volgt er een verslag van een wiskundeles in vwo-4 waarin een kort programma een belangrijke rol speelde. Tot slot wordt er enige informatie verstrekt over VU-KORT, een omgeving voor en een verzameling van korte programma's.

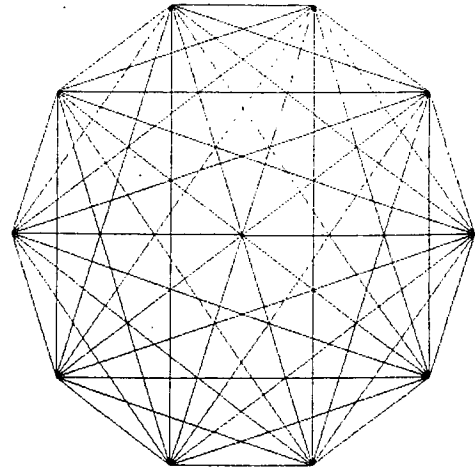
Een voorbeeld vooraf

Korte Basic-programma's kunnen veel meer dan de meeste mensen denken. Dat geldt ook als we, zoals in ons voortgezet onderwijs, de beschikking hebben over een niet zo'n geavanceerde Basic als BASICA of GWBASIC. Neem het volgende programma:

```

1  PI = 3.14159
10 CLS
20 SCREEN 2
30 WINDOW (-1.4,-1)-(1.4,1)
35 INPUT "aantal hoekpunten?";N
36 CLS

```



Figuur 1

Onder korte programma's verstaan we programma's

- die uit niet meer dan 20 regels bestaan;
- die betrekking hebben op één onderwerp;
- die een structuur hebben die in een oogopslag duidelijk is.

Korte programma's komen tegemoet aan de leraar die nog niet regelmatig de beschikking heeft over voldoende computers, die ook nog geen goeie software heeft en toch in zijn lessen de computer wil benutten. Maar ook voor leerlingen kunnen korte programma's een uitdaging betekenen: de ervaring van meerdere leraren heeft geleerd dat leerlingen niet alleen de computer willen gebruiken via toepassingspakketten, ze willen ook 'de baas zijn over de computer'. Dat gevoel wordt sterk opgeroepen door zelf een programma te maken.

De NIVO-nascholingscursus 'Wiskunde en de Computer' heeft dan ook het thema 'Korte pro-

gramma's' als onderdeel van het pakket opgenomen, zoals enige tijd geleden in Euclides te lezen was¹. Dit thema is uitgeprobeerd in de proefcursus, die gegeven werd door een van de schrijvers van dit artikel. De tweede auteur raakte door dit thema geïnspireerd en ging binnen zijn eigen school aan het werk. Hier volgt zijn verslag:

Korte programma's in de nascholing

Het leek niet één van de meest aantrekkelijke cursusmiddagen te worden. Het thema 'Korte programma's' deed mij veel denken aan hogere programmeerkennis, waarmee ik mijzelf nooit heb willen lastig vallen.

Met enige scepsis begon ik dan ook aan het practicumgedeelte van die cursusmiddag. Samen met een collega experimenteerde ik met een programma dat in staat bleek een fraaie sinusoïde op het scherm te toveren. Het programma zag er als volgt uit:

```
1  CLS
5  INPUT "welke stapgrootte"; H
20 SCREEN 2: WINDOW (-10,-2)-(10,2)
30 LINE (-10,0)-(10,0)
40 LINE (0,-10)-(0,10)
100 DEF FNF(X)=SIN(X)
110 FOR X=-10 TO 10 STEP H
120     X1=X:X2=X+H
130     LINE (X1,FNF(X1))-(X2,FNF(X2))
140 NEXT X
```

Met dit programma als basis konden wij verschillende experimenten uitvoeren die allemaal betrekking hadden op functies en grafieken. Bijbehorende opdrachten waren:

a Pas het programma aan zodat een cosinus wordt getekend.

b Kunt u twee grafieken tegelijk tekenen, bijvoorbeeld $\sin x$ en $\sin 2x$?

c Met SCREEN 1: COLOR 1,1,1 wordt een mooie blauwe achtergrond gemaakt. Probeer ook aan de lijnen een verschillende kleur te geven, met LINE...,1 of LINE...,2 of LINE...,3.

d Definieer een tweede functie als het differentiequotiënt van $f(x) = \sin x$. Laat van beide functies

de grafiek tekenen.

e. Verander het programma zodanig dat een tabel ontstaat van $f(x) = \sin x$ en zijn differentiequotiënt.

We raakten onder de indruk van de aardige mogelijkheden van dit toch vrij eenvoudige programma en kregen de smaak te pakken.

Enthousiast geworden door het gemak waarmee we sinusoïden over het scherm konden laten rollen, nam ik direct het (overmoedige) besluit om de volgende dag een wiskunde-les met computers te geven. Het moest er toch eens van komen en eigenlijk was er geen beter moment denkbaar. Juist de vorige week was ik in vwo-4 begonnen aan een lessenserie over periodieke functies. De leerlingen hadden reeds kennisgemaakt met de sinusgrafiek en de cosinusgrafiek en twee lessen over transformaties op grafieken (verticaal en horizontaal verschuiven dan wel rekken en krimpen) waren juist achter de rug: het moment om in te breken met de computer.

Ik realiseerde mij die avond wel, toen ik nadacht over de organisatie van de les, dat ik er geen idee van had of mijn leerlingen konden omgaan met computers. Met enige instructie vooraf diende ik dus wel rekening te houden. Voorts moesten de leerlingen natuurlijk beschikken over een werkblad met opdrachten. Zo'n werkblad was met de tekstverwerker snel gemaakt.

Ik vond het noodzakelijk het programma op drie onderdelen aan te passen:

- een vaste i.p.v. een variabele stapgrootte;
- een definitie van het getal π en
- het gebruik van kleuren.

De school waar ik lesgeef (Het Hermann Wesselink-College in Amstelveen) beschikt over een computerlokaal met 15 IBM-computers voorzien van kleurschermen; zodat de leerlingen in groepjes van twee zouden kunnen werken.

De les

De leerlingen waren niet minder opgewonden dan ik. De niet van te voren aangekondigde les met computers was voor hen een aangename verrassing (ze stormden enthousiast op de computers af) en gaf mij even het gevoel weer voor het eerst voor de

klas te staan. Ik begon met mondelinge toelichting over het hoe en waarom van deze les. Vervolgens gaf ik een korte instructie hoe de computer gestart

moest worden en hoe je BASICA kon inladen. Daarna konden de leerlingen aan de slag met behulp van het uitgedeelde werkblad.

WERKBLAD VWO-4 Hoofdstuk 7 Moderne wiskunde

★★★★★★

Type het onderstaande programma nauwkeurig over (na elke regel op de ENTER-toets drukken!)

```
10 CLS
20 PI=4*ATN(1)
30 H=0.1
40 SCREEN 1:COLOR 1,1,1:WINDOW (-10,-3)-(10,3)
50 LINE (-10,0)-(10,0),3
60 LINE (0,-10)-(0,10),3
100 DEF FNF(X)=SIN(X)
110 DEF FNG(X)=COS(X)
120 FOR X=-10 TO 10 STEP H
130 X1=X:X2=X+H
140 LINE (X1,FNF(X1))-(X2,FNF(X2)),1
150 LINE (X1,FNG(X1))-(X2,FNF(X2)),2
160 NEXT X
```

Controleer eerst of het programma goed werkt, d.w.z. RUN het programma door op de functie-toets F2 te drukken.

Vervang nu in het programma de functie $fng(x) = \cos(x)$ door:

1. $fng(x) = -\sin(x)$, d.w.z.

LIST eerst het programma: druk op de F1-toets, ga dan met de pijltjes-toets naar de c van $\cos(x)$ in het programma en type gewoon $-\sin(x)$ over $\cos(x)$ heen, daarna eerst op de ENTER-toets drukken, dan op de ESC-toets en tenslotte het programma opnieuw RUNNEN.

- Bestudeer beide grafieken nauwkeurig.
- Neem de grafieken over in je schrift.
- Omschrijf ook telkens de verandering in het functievoorschrift en het gevolg daarvan voor de grafiek.

Doe nu hetzelfde met de volgende functies:

- | | |
|---|--|
| 2. $fng(x) = \sin(x - 1/6 \cdot \pi)$ | zie opgave 27 |
| | (hoofdstuk 7, moderne wiskunde bovenbouw 4v) |
| 3. $fng(x) = \sin(x - \pi)$ | zie opgave 28 |
| 4. $fng(x) = \cos(x - 1/2 \cdot \pi)$ | zie opgave 29 |
| 5. $fng(x) = 1/2 + \sin(x + 1/4 \cdot \pi)$ | zie opgave 30 |
| 6. $fng(x) = \sin(2 \cdot x)$ | zie opgave 31 |
| 7. $fng(x) = \sin(1/2 \cdot x)$ | zie opgave 32 |
| 8. $fng(x) = 3 \cdot \sin(2 \cdot x)$ | zie opgave 34 |
| 9. $fng(x) = -3 \cdot \cos(x) + 2$ | zie opgave 35 |

Maak ook de overige onderdelen van de vraagstukken.

★★★★★★

Tijdens de les viel het op dat de leerlingen van meet af aan geconcentreerd bezig waren en bleven. Het overtypen van het programma nam weinig tijd in beslag en gaf nauwelijks problemen. Veel hulp was ook niet nodig bij het werken met het programma, ze kwamen er door samenwerking en onderling overleg wel uit. Ze hadden er duidelijk plezier in en dat gaf mij een ontspannen gevoel.

Wel moesten de leerlingen regelmatig worden aangespoord de grafieken zo nauwkeurig mogelijk over te nemen in de schriften.

Het ontbreken van een schaalverdeling op het scherm werkte een globale benadering van de transformatie-problematiek in de hand. Regelmatig werden er geodriehoeken op de monitoren gedrukt om te passen en te meten en enige hulp van mijn kant was wel geboden.

Omdat er niet voldoende tijd was om alle vraagstukken te maken en de leerlingen de volgende les graag met het programma verder wilden werken, was er voor mij gelegenheid om het programma voor de tweede les uit te breiden met een schaalverdeling:

```
41  FOR X=-3*PI TO 3*PI STEP PI
42      LINE (X,-10)-(X,10),1
43  NEXT X
44  FOR Y=-10 TO 10 STEP 1
45      LINE (-10,Y)-(10,Y),1
46  NEXT Y
```

Dit bleek voor de leerlingen een verbetering. Er viel zo met het programma prettiger te werken.

Na afloop

Natuurlijk wil je als leraar weten wat de leerlingen er van vonden, of ze er iets van hadden opgestoken en of de manier van werken hen beviel. Vandaar dat ik een paar schriftelijk te beantwoorden vragen stelde. Hier volgt een aantal fragmenten uit de reacties:

– je kon goed zien hoe een bepaalde functie een uitwerking had op de standaardfunctie, omdat je de grafieken door elkaar zag.

– ik heb gezien hoe de grafieken verschoven; waardoor dat zo was, was vaak verwarrend omdat je de functie intoetste maar eigenlijk niet precies wist wat je intoetste, de functie was niet zichtbaar.

– ik vond het zo makkelijker, want nu kon je iets uitproberen en dan zag je het resultaat in grafiek-vorm.

– ik heb niet zoveel geleerd, want je ziet wel hoe die grafieken zo lopen, maar je ziet niet waarom.

– ik heb geleerd hoe je wiskunde kunt leren met behulp van de computer.

– je bent eigenlijk meer met de computer bezig dan met wiskunde, het intypen en veranderen kost een hoop tijd.

– leuk, je ziet een goeie grafiek, mooie grafiek, hoe de grafieken er echt uitzien.

– doordat je steeds twee grafieken in één assenstelsel had, kon je duidelijk de verschillen zien tussen de sinusgrafiek en de andere.

– door zelf te prutsen m.b.v. de computer leer je het beter.

– ik ben blijven zitten en wist nog wel ongeveer hoe het allemaal zat en door die paar lessen was ik weer helemaal bij, hartstikke leuk, je kon zo alle grafieken even zien lopen, lekker makkelijk, dat getekend is zo lastig en tijdrovend en je kon het zo even uitproberen.

– de manier waarop was leuk, omdat je veel zelf na moet denken hoe het in elkaar zat, waardoor je het beter onthoudt.

– de computer tekent voor je, maar doordat je alleen maar iets in hoefde te typen wist je niet echt wat je aan de grafiek veranderde: de computer denkt voor je.

– het programma was eenvoudig dus goed te begrijpen.

Voorlopige conclusies

De didactische voordelen van de geschetste benaderingswijze van het onderwerp transformaties lijken duidelijk:

Leerlingen kunnen, zonder veel reken- en tekenwerk, hun vermoedens over de vorm van de grafiek meteen toetsen. Al experimenterend kunnen ze zich een helder beeld vormen van waar het bij transformaties om gaat. Wat voor gevolgen een bepaalde

transformatie heeft voor het functievoorschrift. De didactische werkvorm motiveert leerlingen en stimuleert de onderlinge samenwerking. Hun kritische opmerkingen doen daaraan nauwelijks iets af. Veel leerlingen hebben een behoorlijke kennis van de programmeertaal BASIC. Deze kennis blijkt veelal door middel van een programmeercursus op school te zijn opgedaan. Nogal wat leerlingen beschikken thuis over een computer. De drempel voor het werken met korte Basicprogramma's is daarom laag te noemen.

En hoe nu verder? Het welslagen van dit experiment nodigt mij uit tot herhaling en verdieping. Voorts is het belangrijk dat zulke experimenten ook door collega's uit de vaksectie worden ondernomen. Je moet elkaar daartoe inspireren en enthousiasmeren.

De reacties van de sectieleden zijn positief, ook over de mogelijkheden van de korte programma's. Meerdere experimenten zullen dan ook volgen, mede gebaseerd op de ideeën voor korte programma's die verzameld zijn binnen VU-KORT².

Over dit programma gaat het laatste onderdeel van dit artikel.

VU-KORT

Door de vakgroep Didactiek van de Wiskunde aan de Vrije Universiteit in Amsterdam is een zgn. 'omgeving' voor korte BASIC-programma's ontwikkeld. Binnen die omgeving is een verzameling van zo'n 70 shortliners ondergebracht.

Met deze VU-KORT-omgeving kan men BASIC-programma's gemakkelijk bewaren, ordenen, wijzigen en demonstreren. De programma's worden bewaard via een boom-structuur: men kan groepen invoeren, die elk weer bestaan uit een aantal programma's. De gebruiker is vrij in het kiezen van de namen van de groepen en, uiteraard, in het vullen van de 'omgeving'. Onze verzameling is als volgt geordend:

Algebra	Statistiek
Analyse	Toepassingen
Informatica	Universiteit
Meetkunde	Varia
Plaatjes	

De groep Analyse bestaat uit de volgende programma's

DIF.BAS Print een tabel van $f(x) = \sin x$ met zijn afgeleide.

DIFFQ.BAS Lijkt op DIF.BAS maar nu wordt de limiet van het differentie-quotiënt voor een bepaalde x (n.l. $x = 0$) nagebootst.

INTEGR.BAS Het integreren van $f(x) = -x^2 + 4$ via een eenvoudige benadering. Er wordt gevraagd om de ondergrens, de bovengrens en de stapgrootte.

NULPUNT.BAS Berekent $\sqrt{2}$ via Newton's algoritme voor het vinden van een nulpunt van een functie.

NEWTON.BAS Een grafische demonstratie van zojuist genoemde Newton's methode.

TABEL.BAS Toont een tabel van $x, f(x)$. De eenvoud zelf.

RAAKLIJN.BAS Tekent eerst $f(x) = \sin(x)$. Vervolgens worden m.b.v. de cosinus raaklijntjes getekend, samen met de echte cosinusfunctie.

FUN-PLOT.BAS Plot even snel een functie.

VELDLIJN.BAS Toont de veldlijnen van de differentiaalvergelijking. In het voorbeeld luidt de differentiaalvergelijking: $y' = x + y$.

Tot zover deze korte toelichting. VU-KORT draait op computers met een CGA- of EGA-kaart. VU-KORT is te bestellen door een briefje te schrijven naar:

D. Kok

Vakgroep Didactiek van de Wiskunde en Algemene Vorming,
Faculteit Wiskunde en Informatica,
Vrije Universiteit,
De Boelelaan 1081,
1081 HV Amsterdam.

De prijs bedraagt f100,-. Men ontvangt daarvoor een diskette plus een uitvoerige handleiding, waarin o.a. alle shortliners kort beschreven staan.

Noten

1 Douwe Kok. De computer in het wiskunde-onderwijs. Euclides, 63,8, mei 1988, en 63,9, juni/juli 1988.

2 VU-KORT is ontwikkeld door Erwin Kalvelagen en Douwe Kok.

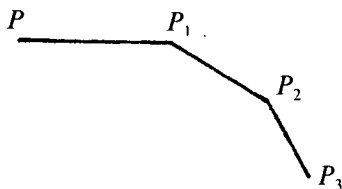
● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

► Opgave

599. Een punt P wordt onderworpen aan een translatie met vector $\overrightarrow{PP_1}$. P_1 wordt op zijn beurt onderworpen aan een translatie met vector $\overrightarrow{P_1P_2}$. De richting van deze vector krijgt men door $\overrightarrow{PP_1}$ te draaien over 30° in negatieve richting. Voor de grootte geldt $|\overrightarrow{P_1P_2}| = a|\overrightarrow{PP_1}|$. P_2 wordt onderworpen aan een translatie met vector $\overrightarrow{P_2P_3}$. De richting is weer 30° in negatieve zin gedraaid t.o.v. die van $\overrightarrow{P_1P_2}$ en de grootte is gelijk aan a maal die van $\overrightarrow{P_1P_2}$. Enz.

Wordt gevraagd tot welke limietstanden P_n kan naderen voor $n \rightarrow \infty$ en a variabel.



► Oplossingen

595. n personen beklimmen aangeliind een berg. Een (d.w.z. minstens één) is met alle andere verbonden, een met $n-2$ andere, ..., een met 1 andere. Hoeveel paren zijn door een touw verbonden?

Bij wijze van voorbeeld kiezen we eerst $n = 21$. We nummeren de klimmers 1 tot en met 21, op een manier die straks zal blijken. De leider geven we het nummer 1; hij is verbonden met alle andere, dus met 2-21. Een van hen is met slechts 1 andere verbonden; die geven we het nummer 21. Dus is 21 alleen met 1 verbonden.

Een is met 19 andere verbonden; die krijgt het nummer 2. Dus is 2 verbonden met 1 en met 3-20. Van hen is er een met slechts 2 andere verbonden; die krijgt nummer 20. Dus is 20 verbonden met 1-2.

Zo gaan we door. We krijgen dan:

1 is verbonden met	2-21
2	1, 3-20

10	1-9, 11-12
12	1-10

20	1-2
21	1

Nu is aan de eis voldaan, maar blijft alleen nummer 11 nog over. We zien dat deze noodzakelijk verbonden is met tien andere, nl. met 1-10.

Neem nu $n = 20$. We krijgen dan:

1 is verbonden met	2-20
2	1, 3-19

10	1-9, 11
12	1-9

19	1-2
20	1

En weer is de resterende nummer 11 verbonden met 1-10.

Het aantal verbonden paren is dus in het algemeen

$$\frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1)) + \frac{1}{2}E(\frac{1}{2}n) = \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}E(\frac{1}{2}n).$$

596. Bij een bowlingkampioenschap spelen vijf topspelers een eindronde. Door het lot wordt aangewezen wie nr. 1, nr. 2, ..., nr. 5 is. Eerst speelt nr. 5 tegen nr. 4; de verliezer krijgt de vijfde prijs, de winnaar speelt tegen nr. 3. Nu krijgt de verliezer de vierde prijs en speelt de winnaar tegen nr. 2, enz.

Op hoeveel manieren kunnen de vijf prijzen over de vijf deelnemers verdeeld worden?

Er worden vier wedstrijden gespeeld. Elke wedstrijd kan, nadat de uitslag van de vorige vaststaat, twee verschillende uitslagen hebben. In totaal dus $2^4 = 16$ mogelijke prijsverdelingen.

Speler nr. 5 heeft een kans van 2^{-1} op de vijfde prijs. Voor de vierde prijs moet hij eerst winnen, dan verliezen. Kans hierop is 2^{-2} . Analoog heeft hij een kans van 2^{-3} op de derde prijs, een kans van 2^{-4} op de tweede en ook een kans van 2^{-4} op de eerste.

Zo redenerend krijgen we het volgende schema voor de kans dat speler nr. p de q^e prijs krijgt.

	prijs				
	5e	4e	3e	2e	1e
speler					
nr. 5	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-4}
nr. 4	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-4}
nr. 3	—	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-3}
nr. 2	—	—	2^{-1}	2^{-2}	2^{-2}
nr. 1	—	—	—	2^{-1}	2^{-1}

Onderstel de q^e prijs is a^{-q+1} . Dan is de verwachtingswaarde

voor de prijs die nr. 5 krijgt:
 $(2^{-4} + 2^{-4}2^{-1} + 2^{-3}2^{-2} + 2^{-2}2^{-3} + 2^{-1}2^{-4})a = \frac{3}{16}a$

Net zo vinden we:

verwachtingswaarde prijs nr. 4 is $\frac{3}{16}a$

nr. 3 is $\frac{5}{16}a$

nr. 2 is $\frac{1}{2}a$

nr. 1 is $\frac{3}{4}a$.

Onderstel $a = 64$ (gulden). Dan is voordat de loting plaats heeft gehad, voor ieder de verwachtingswaarde:

$$\frac{1}{5} \left(\frac{3}{16} + \frac{5}{16} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) 64 = 24,8$$

Na de loting is de verwachtingswaarde voor nr. 1 48 gulden.

Degeen die er een tientje voor over had nr. 1 te mogen zijn, had het dus slim bekeken, zelfs wat erg slim.

● Verenigingsnieuws ●

► Van de Bestuurstafel

Op de vergaderingen van 14 september en 12 oktober j.l. beraadde het Bestuur zich over tal van zaken, waarbij actuele onderwerpen als de organisatie van de jaarvergadering en de inhoud van de jaarrede veel aandacht eisten.

Hier volgen nog enkele punten.

Mededeling

Wiskunde en onderwijs

Gaarne vestig ik nogmaals de aandacht op het tijdschrift van onze Vlaamse zustervereniging, de VVWL. Het verschijnt vier keer per jaar en heeft een totale omvang van ongeveer 500 bladzijden.

Natuurlijk is het tijdschrift gewijd aan didactiek. Daarnaast is echter een zeer ruime plaats, zelfs soms het overgrote deel gewijd aan onderwerpen van wiskundige aard. Voor vele Nederlandse leraren zal dit blad dan ook interessante informatie bevatten.

Men kan zich abonneren tegen de gereduceerde prijs van 550 BF (incl. 100 BF portokosten), indien men lid is van de NVvW. Wie zich abonneert, is daardoor tevens lid van de VVWL, ontvangt het Mededelingenblad en heeft toegang tot de bijeenkomsten van de VVWL. Men kan zich opgeven door overschrijving door middel van een normaal girobiljet van BF 550 op postgiro 000-1116247-68 t.n.v. VVWL, postbus 63, B-2080 Kapellen (België). Wilt u op het biljet vermelden 'nieuw lid'? Verder dient men op het biljet bovenaan en op de giro-enveloppe te vermelden 'buitenland'. Ook eventuele adreswijzigingen gaarne zenden aan dit adres. Het verenigingsjaar van de VVWL loopt van 1 januari tot en met 31 december.

De huidige abonnees hebben reeds per brief bericht gekregen van de nieuwe wijze waarop de contributie betaald wordt.

P. G. J. Vredenduin

1. Wiskunde verplicht?

Dit is een belangrijk discussiepunt binnen het Bestuur. Onze uiteindelijke stellingname luidt als volgt.

Een leerling die in staat zou zijn om een eindexamen op een bepaald niveau te halen zonder wiskunde in zijn pakket, moet op hetzelfde niveau een redelijke kans hebben om ook voor wiskunde voldoende te scoren. Dit is, zolang de Hawex- en COW-programma's niet geruime tijd gefunctioneerd hebben, nog niet mogelijk, zodat naar onze mening wiskunde vooralsnog niet verplicht kan worden gesteld.

Wij vragen ons af of de door staatssecretaris Ginjaar-Maas beoogde brede vorming uitsluitend bereikt wordt door een verplicht examen in wiskunde. Het lijkt ons doelmatiger om het aantal uren voor wiskunde in de basistabel zo groot te maken (óók in het lbo) dat iedere leerling voldoende wiskundige vorming voor zijn toekomst krijgt. Daarbij moeten dan de programma's een zodanige inhoud hebben dat bijna alle leerlingen wiskunde als eindexamen vak zullen willen en kunnen kiezen.

2. PR-zaken

Onze vereniging heeft zich bij de landelijke en regionale examenbesprekingen nadrukkelijk gepresenteerd als de organisator van deze bijeenkomsten. Elke voorzitter beschikte over een door de PR-commissie opgesteld stuk met verenigingsnieuws en een oproep aan de niet-leden om lid te worden, hetgeen 24 nieuwe leden heeft opgeleverd. De docenten die te kennen gaven géén lid te willen worden hebben een uitnodiging ontvangen voor de jaarvergadering/studiedag en konden tevens kennis maken met een 'vernieuwd' Euclides. Voorlopig leverde dit 6 nieuwe leden op.

Op de jaarvergadering werden de deelnemende niet-leden persoonlijk benaderd.

Actueel is de vraag op welke wijze we gaan samenwerken met de NVON die ons een brief zond over de bezwaren die er binnen de NVON bestaan tegen de versnelde correctie en de 70-30 maatregel bij de C- en D-examens.

3. Logo

Het Bestuur dankt de inzenders van ideeën voor een herkenningsteken voor onze vereniging. Wij hopen op nog méér inzendingen. Ook op de jaarvergadering werd aan het logo aandacht geschonken.

4. Differentiaalvergelijkingen

Het rapport van de door onze vereniging ingestelde Werkgroep Differentiaalvergelijkingen is gereed en door het Bestuur aangeboden aan het Ministerie van O & W. Met spanning wachten wij af wat er mee gebeurt. Te zijner tijd zal hier in Euclides nader aandacht aan besteed worden. In elk geval geldt, vanaf 1989 tot nader order, de interimregeling zoals vermeld op blz. 265 van Euclides 63,9.

5. Hawex

In verband met de gewijzigde taakstelling van de inspecteurs ten aanzien van deelname aan examen-groepen is drs. Wim Kleijne afgetreden als voorzitter van de Hawex-resonansgroep. Drs. Jan W. Maassen, U welbekend als onze secretaris, volgde hem op zodat wij toch, nu Martin Kindt helaas het bestuur verlaat, dicht bij het Hawex-vuur blijven.

6. Referentietoets

Het CITO heeft van het Ministerie een subsidie ontvangen voor het vervaardigen van referentietoetsen voor het C- en D-niveau.

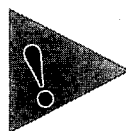
In 1988 zijn er proefafnamen geweest voor de talen en voor wiskunde. De vaksectie van de CEVO stelt uiteindelijk de referentietoets en de bijbehorende cesuur vast.

Het doel van zo'n genormeerde referentietoets is om elk jaar vóór het eindexamen het vaardigheidsniveau (van een steekproef) van de kandidaten te meten.

De verwachting is dat de vaksectie van de CEVO nu elk jaar, met behulp van de in dat jaar op de referentietoets behaalde score, de cesuur van het examen op hetzelfde vaardigheidsniveau kan houden als in andere jaren. Het is namelijk erg moeilijk om door de jaren heen de examens dezelfde moeilijkheidsgraad te geven.

(Voor meer gegevens: zie Algemene publikatie nr. 48, CITO, Arnhem 1986).

Het Bestuur kijkt uit naar informatie over dit onderwerp.



Kalender

14 december 1988: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

11 januari 1989: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

14 januari 1989: Amersfoort, Wintersymposium Wiskundig Genootschap. Thema: 'Wiskunde en Maatschappij'. Voor uitvoeriger informatie: zie het vorige nummer van Euclides, pagina 96.

28 januari 1989: Brussel, Jaarvergadering VVWL.

15 februari 1989: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

1, 2 en 3 juli: Oostende, twejaarlijks congres VVWL.

Inhoud

Inhoud 97

George Schoemaker, Kolom 5 W12/16 98

M. C. van Hoorn, Korrel 99

Denkopgaven 99

Jan van de Craats, Een standbeeld voor Leibniz 100

Shortliner 109

Th. J. Korthagen, Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere
wiskunde niet verwaarlozen 110

Verschenen 111

Werkbladen 112

Leon van den Broek, De Wageningse Methode 114

Douwe Kok en Cor van der Pijl, Over de rol van korte
programma's in het voortgezet onderwijs 121

Recreatie 126

Mededeling 127

Verenigingsnieuws 127

Kalender 128

Adressen van auteurs

L. van den Broek, Wolfstraat 98, 6531 LP Nijmegen

J. van de Craats, p/a K.M.A., Postbus 90154, 4800 RG Breda

M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen

D. Kok, p/a V.U., Faculteit Wiskunde en Informatica,
Vakgroep Didactiek van de Wiskunde en Algemene Vorming,
De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam

Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld

C. van der Pijl, p/a V.U., Faculteit Wiskunde en Informatica,
Vakgroep Didactiek van de Wiskunde en Algemene Vorming,
De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam

G. Schoemaker, De Dissel 11, 1251 ZA Laren