

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

63e jaargang
1987 | 1988
februari

Euclides 5

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Drs H. Bakker
G. Bulthuis
W. M. J. M. van Gaans
Drs M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
Drs C. G. J. Nagtegaal
Drs A. B. Oosten (eindredacteur)
P. E. de Roest (secretaris)
Ir. V. Schmidt
Mw. H. S. Susijn-van Zaale
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)
A. van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12,
7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f55,- per verenigingsjaar;
studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de
V.V.W.L. f37,50; contributie zonder Euclides f30,-.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met
vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht
bij drs M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen. Zij
dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van
5 cm en een regelafstand van $1\frac{1}{2}$, bij voorkeur op Euclides-
kopijbladen. De redactiesecretaris P.E. de Roest, Blijhamster-

weg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-22027 stuurt des-
gevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van
een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het
nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Jan Steenlaan 11,
8932 EA Leeuwarden, tel. 058-135976.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de
leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan
F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden f48,75. Een collectief
abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f29,50.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567,
9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen
tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend
nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag
leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde
van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers f8,25 (alleen verkrijgbaar na vooruit-
betaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 39731 (Samsy).

De Centraal Schriftelijke Eindexamens wiskunde Ibo/mavo eerste tijdvak 1987

G. Bakker

De examens voor het C- en D-niveau bestaan beide uit 30 meerkeuzevragen (à 2 punten) en 3 open vragen (30 punten).

In de volgende tabel staan de belangrijkste resultaten van het examen.

Onder p-waarde van een meerkeuzevraag wordt verstaan het percentage kandidaten dat de vraag goed beantwoord heeft.

Bij open vragen wordt hiertoe de p'-waarde berekend: dat is de gemiddelde score gedeeld door de maximaal haalbare score.

De resultaten voor het gehele C-niveau staan vermeld in de laatste kolom.

In de laatste twee kolommen zijn de schooltypen evenredig vertegenwoordigd.

De open vragen B en C zijn slecht gemaakt. Vooral het C-onderdeel vraagt veel omdat leerlingen in examens opstapvragen gewend zijn.

De p'-waarden zijn bij die onderdelen laag. Bij het D-niveau behaalt meer dan de helft van de kandidaten hoogstens 1 punt bij vraag B en bij vraag C. Vooral bij vraag C van het D-niveau valt dat tegen omdat in het voorbeeldexamen een soortgelijke vectorsom voorkomt. Zou tijdgebrek misschien een rol gespeeld kunnen hebben?

Uit de discussie met gespreksleiders en verslagen van de regionale besprekingen blijkt dat de nieuwe formuleringen in de meerkeuzevragen goed zijn ontvangen. Ook het wisselend aantal alternatieven heeft een goede uitwerking. Over het geheel genomen is de kwaliteit van de examenvragen goed, maar wegens de tegenvallende resultaten heeft de Cevo de cesuur op 42/43 vastgesteld.

Lto-C blijft dit jaar nogal achter bij mavo-C, ondanks het feit dat lto (sinds jaren) aanzienlijk beter scoort op meetkundig getinte vragen (zie vraag 18, 19, 20, 21, 26, 27 en C). Bij de open vragen A en B vallen de lto-resultaten tegen en dat heeft grote invloed op de totaalscore.

Item 10 van het D-niveau verdient enige kritiek. Niet alleen omdat de tweede zin een loze opdracht is, maar vooral omdat de kandidaat de indruk krijgt dat het gaat om tekenen en/of meten en/of aflezen.

	mavo-D	mavo-C	lto-C	leao/lhno/ llo/lmo-C	mavo/lbo-C
aantal kandidaten in steekproef	1446	1354	390	522	1141
gemiddelde p-waarde van de 30 meerkeuzevragen	60,6 ¹⁾	59,5	60,0	48,4	56,8
p'-waarde open vraag A	64	75	67	56	67
„ open vraag B	27	46	38	25	38
„ open vraag C ²⁾	28	25	31	16	25
gemiddelde score meerkeuze vragen	37,2	35,7	36,0	29,0	34,1
„ „ open vragen ³⁾	11,2	13,1	12,5	8,5	11,7
„ „ totaal ³⁾	48,4	48,9	48,5	37,6	45,8
door CEVO vastgestelde cesuur	42/43	42/43	42/43	42/43	42/43
gemiddeld cijfer	6,0	6,1	6,1	5,0	5,8
percentage onvoldoendes	36	30	35	65	41

1 Vraag 14 is hierbij niet meegerekend, omdat wegens foute tekening elk alternatief goed gerekend is.

2 Bij open vraag C konden op het deelscoreformulier niet meer dan 10 punten vermeld worden, met

3 als gevolg dat de gemiddelde score ongeveer 0,02 cijferpunt hoger is bij het C- en het D-niveau en de percentages onvoldoenden ongeveer $\frac{1}{2}\%$ lager zijn.

Item 14 van het D-niveau bevat niet de goede tekening. Bij nader inzien had de adviescommissie in de eerste zin 'binnen ΔABC ' moeten opnemen. Elk alternatief is hier goed gerekend.

Het examen van 1988 zal dezelfde opzet hebben als dat van 1987. In 1988 blijft goniometrie in het C-examen opnieuw beperkt tot het schoolonderzoek. Om u een gedetailleerder beeld te geven van de resultaten op de meerkeuzevragen volgen nog twee tabellen. De eerste heeft betrekking op mavo-D en de tweede op mavo/lto/leao/lhno/llo/lmo-C.

In de tweede kolom is het goede antwoord vermeld. In de andere kolommen staan de percentages kandidaten vermeld die een bepaald alternatief kiezen.

Toets- en itemanalyse – cito-Arnhem

Analyse meerkeuze vragen wiskunde-C gehele populatie

P- en A-waarden

Vraag	Sleutel	A	B	C	D	E	F
1	B	7	74*	5	12	3	
2	B	16	59*	5	6	5	9
3	B	14	62*	14	9		
4	C	4	6	48*	42		
5	E	5	9	5	7	74*	
6	A	73*	6	7	8	6	
7	B	13	32*	15	7	22	10
8	D	20	14	9	56*		
9	A	53*	22	25			
10	A	66*	18	11	6		
11	C	5	12	71*	11		
12	F	8	5	21	28	7	30*
13	D	28	9	3	60*		
14	E	3	4	1	2	85*	5
15	B	9	77*	1	1	0	11
16	D	21	7	16	55*		
17	D	5	25	33	34*	3	
18	D	16	5	8	67*	4	
19	F	4	8	5	4	8	70*
20	E	17	12	9	10	47*	6
21	D	48	6	4	34*	4	4
22	C	3	10	46*	18	11	12
23	D	13	17	10	47*	13	
24	A	46*	38	12	4		
25	B	4	81*	14			
26	D	9	9	33	39*	9	
27	E	2	1	42	1	54*	
28	C	4	2	51*	43		
29	C	36	9	49*	6		
30	F	2	6	4	5	18	65*

aantal kandidaten: 1141
gemiddelde score: 34.10
standaarddeviatie: 9.44
gemiddeld percentage goed: 56.8

Analyse meerkeuze vragen wiskunde-D mavo-populatie

P- en A-waarden

Vraag	Sleutel	A	B	C	D	E	F
1	F	4	10	2	6	18	59*
2	B	12	31*	17	15	11	13
3	B	17	75*	8			
4	D	21	4	7	65*	4	
5	A	60*	7	29	4		
6	C	5	11	76*	8		
7	D	12	5	6	64*	13	
8	C	19	13	61*	7		
9	F	2	3	8	8	5	74*
10	C	58	11	28*	3		
11	B	15	73*	10	2		
12	B	7	76*	1	16		
13	A	54*	4	6	36		
14	ABCDEF	31*	5*	51*	5*	3*	6*
15	B	5	62*	13	11	9	
16	C	5	8	62*	7	6	12
17	D	10	6	6	53*	9	16
18	C	15	17	51*	17		
19	D	7	5	67	20*		
20	C	10	10	61*	11	4	3
21	C	16	24	45*	7	6	2
22	B	9	75*	7	6	2	
23	A	70*	24	6			
24	F	5	2	5	2	41	45*
25	E	3	6	2	10	76*	3
26	D	2	3	6	87*	1	
27	C	5	12	68*	9	6	
28	D	42	2	4	36*	15	
29	C	25	9	60*	5		
30	E	1	3	2	2	91*	0

aantal kandidaten: 1446
gemiddelde score: 37.16
standaarddeviatie: 8.87
gemiddeld percentage goed: 61.9

Voor meer achtergrondinformatie raadplege men de voorbeeldexamens wiskunde 1987, C- en D-niveau met begeleidend schrijven. Deze zijn in augustus 1986 verstuurd naar de scholen. Verder verwijs ik naar het artikel in Euclides, jrg 62 nr. 5, febr. 1986/87, blz. 158-160.

Over de auteur:

Gert Bakker is werkzaam als wetenschappelijk medewerker wiskunde op het Cito. Hij begeleidt adviescommissies van docenten wiskunde die examenvoorstellen voor de Cevo maken.

Enquêtes examens wiskunde mavo/lbo 1987

Bestuur NVvW

Naar aanleiding van de recente veranderingen van de wiskunde-examens mavo/lbo heeft het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskunde-leraren een onderzoek gehouden onder leraren en leerlingen van het mavo en lbo. Doel van het onderzoek was: inzicht te krijgen in hoe leerlingen met deze vorm van het examen omgaan en hoe leraren er over denken.

Daartoe zijn twee enquêtes gehouden, één onder leerlingen direct na de zitting van het schriftelijk examen wiskunde en één onder de leraren die de examenbesprekingen bezochten. De leraren-enquête bestond uit een vragenformulier, waarin de mening van de docent gevraagd werd over een aantal zaken, het examen betreffende. De antwoorden van 417 formulieren zijn in de uitslagen van deze enquête verwerkt. Van deze 417 formulieren waren er 103 die op het C-examen betrekking hadden, 126 op het D-examen en 188 op C- en/of D. De leerlingen-enquête werd afgenomen onder leiding van de wiskundeleraars, die gerekruteerd werden uit de regelmatige bezoekers van de examenbesprekingen der laatste jaren. Binnengekomen zijn 208 formulieren voor het D-niveau en 82 formulieren voor het C-niveau.

Voor beide enquêtes geldt dat de steekproef zeker niet aselekt genoemd kan worden. Kun je leraren die de examenbesprekingen bezoeken representatief noemen voor het gehele lerarencorps van mavo en lbo? Zeker wat het lbo betreft, kan men stellen dat maar een zeer gering percentage van de leraren die daar werkzaam zijn, deze bijeenkomsten bezoekt. Het waren de leraren die vrijwillig in hun vrije tijd dit jaar de examenbesprekingen bezochten, die de enquêteformulieren hebben ingevuld en

het waren leerlingen van een vijftigtal van die leraren die aan de leerlingen-enquête meededen. Met recht een selecte groep, waar nog bijkomt dat in de leraren-enquête de vragen 3 t/m 7 door veel leraren niet beantwoord werden. Als reden daarvoor werd vaak opgegeven dat men de leerlingen niet meer gesproken had tussen het examen en het invullen van het enquêteformulier. Redenen genoeg dus om de uitkomsten met enige voorzichtigheid te hanteleren.

De leerlingen-enquête

De volgende vragen moesten beantwoord worden met ja of nee naar aanleiding van de meerkeuzeopgaven 4, 8, 12, 16, 20, 24 en 28. De vragen 12 t/m 15 gingen over alle meerkeuzevragen of over het gehele werk.

De vragen:

- 1 Was je met deze opgave binnen twee minuten klaar?
- 2 Heb je aan deze opgave veel tijd besteed, b.v. 5 minuten of langer?
- 3 Heb je deze opgave als een open vraag gemaakt? (dus eerst met behulp van de stam het antwoord gevonden en toen de hierbij behorende letter aangestreept).
- 4 Heb je het antwoord gevonden door één of meer alternatieven uit te proberen?
- 5 Heb je bij deze opgave geraden naar het antwoord? (dus je bleef er aan twijfelen welk alternatief het juiste was en hebt toen maar een keuze gemaakt uit twee of meer letters).
- 6 Heb je bij deze opgave het goede antwoord gekozen?
- 7 Heb je bij deze opgave geluk gehad? (dus ondanks een fout toch nog op de goede letter uitgekomen).
- 8 Heb je bij deze opgave pech gehad? (dus wel goed beredeneerd en berekend, maar door een kleine fout of onnauwkeurigheid toch op een verkeerde letter uitgekomen)!
- 9 Heb je bij deze opgave gedacht dat er meer dan één alternatief goed was?
- 10 Soms kom je na het maken van een opgave tot de conclusie dat jouw antwoord niet bij de alternatieven te vinden is. Was dat bij deze opgave bij jou het geval?

- 11 Bij welke opgave heb je de tekening gebruikt die bij de opgave is afgedrukt?
- 12 Hoe lang ongeveer heb je over het gehele meerkeuze-deelte gedaan?
- 13 Heb je de antwoorden op de meerkeuzevragen gecontroleerd door b.v. de opgaven nog eens te maken?

- 14 Vond je voor het gehele examenwerk de tijd van 120 minuten voldoende?
- 15 Hieronder kun je nog enkele persoonlijke opmerkingen kwijt over de hierbovengenoemde opgaven of over het gehele werk.

De opgaven van het D-examen waarop de vragen 1 t/m 11 van de leerlingenenquête betrekking hebben:

4. Los op: $2x^2 + 6x = -x + 9$.

De oplossingsverzameling is

- a $\emptyset$
- b $\{-4\frac{1}{2}\}$
- c $\{1\}$
- d $\{-4\frac{1}{2}, 1\}$
- e $\{-9, 2\}$

8. Gegeven zijn de lijnen $l: 3x + 4y = 5$ en $m: 2x + 3y = 4$.

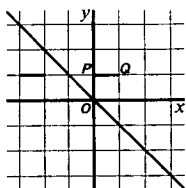
Deze snijden elkaar in het punt (p, q) . Bereken p en q .

Voor p en q geldt

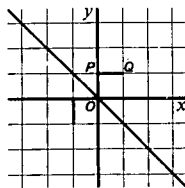
- a $p \geq 0 \wedge q \geq 0$
- b $p \geq 0 \wedge q < 0$
- c $p < 0 \wedge q \geq 0$
- d $p < 0 \wedge q < 0$

2. Er wordt gespiegeld in de lijn $y = -x$.

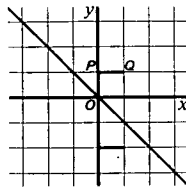
In welke figuur is het spiegelbeeld van lijnstuk PQ goed getekend?



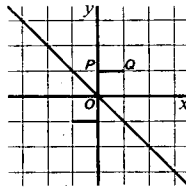
figuur 1



figuur 2



figuur 3

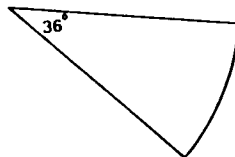


figuur 4

16. Hiernaast is een sector getekend van een cirkel met straal 3. Bereken de oppervlakte van deze sector.

De oppervlakte ligt het dichtst bij

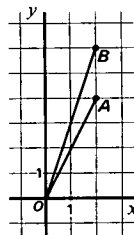
- a 1
- b 2
- c 3
- d 4
- e 5
- f 6



20. Gegeven zijn de punten $A(2, 4)$ en $B(2, 6)$. Bereken $\angle AOB$.

Voor de grootte γ van hoek AOB geldt

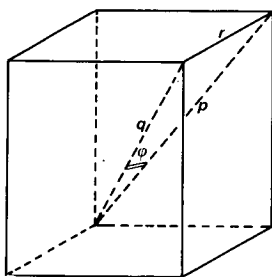
- a $\gamma < 7^\circ$
- b $7^\circ \leq \gamma < 8^\circ$
- c $8^\circ \leq \gamma < 9^\circ$
- d $9^\circ \leq \gamma < 10^\circ$
- e $10^\circ \leq \gamma < 11^\circ$
- f $11^\circ \leq \gamma < 12^\circ$



24. Hiernaast is een balk getekend.

$\sin \varphi =$

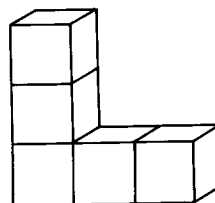
- a $\frac{p}{q}$
b $\frac{p}{r}$
c $\frac{q}{p}$
d $\frac{q}{r}$
e $\frac{r}{p}$
f $\frac{r}{q}$



28. Het lichaam hiernaast is opgebouwd uit kubussen met ribbe 1. Bereken de oppervlakte van dat lichaam.

De oppervlakte is

- a 5
b 11
c 19
d 22
e 30



Antwoorden gegeven door leerlingen die het D-examen hebben afgelegd. Respons van 205 leerlingen.

Percentage 'Ja' antwoorden

Opgave	4	8	12	16	20	24	28
Vraag							
1	63	49	93	61	46	82	73
2	19	21	3	19	34	9	11
3	89	90	27	81	79	52	52
4	18	13	36	13	19	13	13
5	15	22	7	15	27	16	16
6	65	60	82	63	70	54	45
7	8	10	5	8	15	5	3
8	23	26	6	22	20	24	30
9	12	14	13	11	15	13	12
10	10	9	2	7	12	3	7
11	1	1	86	67	85	85	83

Bij vraag 7 en 8 geeft ongeveer 10% geen antwoord.

Vraag 12:

minder dan 30 minuten	$\frac{1}{2}\%$
van 30 tot 45 minuten	$\frac{1}{2}\%$
van 45 tot 60 minuten	4%
van 60 tot 75 minuten	26%
van 75 tot 90 minuten	36%
van 90 tot 105 minuten	25%
van 105 tot 120 minuten	8%

Vraag 13:

Ja	30%
Nee	68%

Vraag 14:

Ja	50%
Nee	48%

Gegevens van het Cito over de opgaven 4, 8, 12, 16, 20, 24 en 28.

De steekproef betrof 1446 kandidaten.

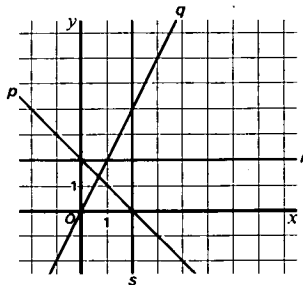
Opgave	Sleutel	A	B	C	D	E	F	R.i.t
4	D	21	4	7	65'	4		31
8	C	19	13	61'	7			29
12	B	7	76'	1	16			38
16	C	5	8	62'	7	6	12	38
20	C	10	10	61'	11	4	3	45
24	F	5	2	5	2	41	45'	39
28	D	42	2	4	36'	15		37

') = p-waarde

De opgaven van het C-examen waarop de vragen 1 t/m 11 van de leerlingenenquête betrekking hebben:

4. Gegeven is de functie $f : x \rightarrow 2$.
Welke lijn is de grafiek van f ?

- a de lijn p
- b de lijn q
- c de lijn r
- d de lijn s

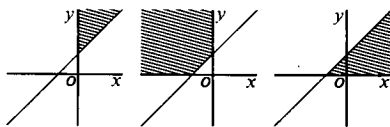


8. In welk kwadrant ligt de top van de parabool $y = x^2 - 6x + 8$?

- a het eerste kwadrant
- b het tweede kwadrant
- c het derde kwadrant
- d het vierde kwadrant

2. Arceer hiernaast de verzameling van alle punten (x, y) waarvoor geldt
 $x \geq 0 \wedge y \leq x + 2$.

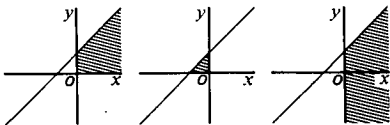
Hoe ziet de figuur eruit?



figuur 1

figuur 2

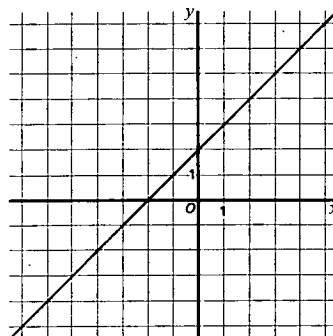
figuur 3



figuur 4

figuur 5

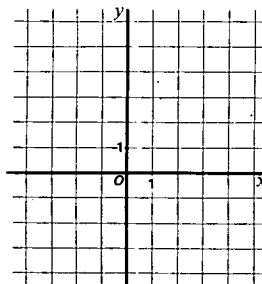
figuur 6



- a zoals figuur 1
- b zoals figuur 2
- c zoals figuur 3
- d zoals figuur 4
- e zoals figuur 5
- f zoals figuur 6

16. Bij een rotatie is het centrum $(0, 2)$.
Het punt $(2, 2)$ wordt afgebeeld op het punt $(0, 4)$.
Hoe groot kan de rotatiehoek zijn?

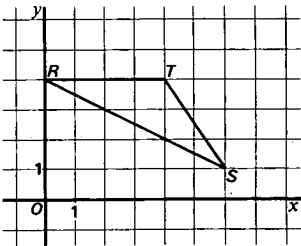
- a -90°
- b -45°
- c 45°
- d 90°



20. Gegeven zijn de punten $R(0, 4)$, $S(6, 1)$ en $T(4, 4)$.
Bereken de omtrek p van driehoek RST in één decimaal nauwkeurig.

Voor p geldt

- a $p < 8$
- b $8 \leq p < 10$
- c $10 \leq p < 12$
- d $12 \leq p < 14$
- e $14 \leq p < 16$
- f $16 \leq p$

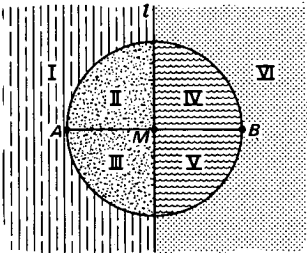


24. Gegeven is de cirkel met middelpunt M en middellijn AB .
De lijn l gaat door M en staat loodrecht op AB .
Arceer de verzameling van alle punten P waarvoor geldt
 $PA \leq PB \wedge PM \geq AM$.

Welke vlakdelen heb je gearceerd?

- a alleen I
- b II en III
- c IV en V
- d alleen VI

- a minder dan 200
- b precies 200
- c meer dan 200
- d niet te berekenen door gebrek aan gegevens



Vraag 12:

minder dan 45 minuten	4%
van 45 tot 60 minuten	9%
van 60 tot 75 minuten	40%
van 75 tot 90 minuten	23%
van 90 tot 105 minuten	23%
van 105 tot 120 minuten	0%

Vraag 13:

Ja	37%
Nee	62%

Vraag 14:

Ja	89%
Nee	10%

Gegevens van het Cito over de opgaven 4, 8, 12, 16, 20, 24 en 28.
De steekproef betrof 1141 kandidaten.

Opgave	Sleutel	A	B	C	D	E	F	R.i.t
4	C	4	6	48'	42			22
8	D	20	14	9	56'			39
12	F	8	5	21	28	7	30'	26
16	D	21	7	16	55'			31
20	E	17	12	9'	10	47'	6	49
24	A	46'	38	12	4			40
28	C	4	2	51'	43			27

') = p-waarde

Antwoorden door leerlingen die het C-examen hebben afgelegd. Respons van 82 leerlingen.

Percentage 'Ja' antwoorden

	Opgave						
Vraag	4	8	12	16	20	24	28
1	93	61	37	83	34	37	71
2	5	16	32	11	35	38	15
3	41	84	61	57	88	51	41
4	29	22	48	18	26	40	20
5	9	16	35	17	18	34	21
6	59	71	48	59	66	49	60
7	6	9	4	7	11	13	6
8	28	20	34	24	17	20	22
9	12	10	34	11	16	23	13
10	2	2	15	4	10	12	4
11	79	2	91	93	87	76	1

Bij vraag 7 en 8 geeft ongeveer 11% geen antwoord.

De lerarenenquête

totaal van 417 formulieren

	ja		nee		geen antwoord		ander antwoord	
	aant.	perc.	aant.	perc.	aant.	perc.	aant.	perc.
1 Is naar uw mening de verdeling 70% gesloten vragen, 30% open vragen juist?	40	9,6	368	88,2	7	1,7	2	0,5
2 Zo neen, wat moet volgens u de verhouding dan zijn?	mkv 60 50 40 30 0	ov 40 50 60 70 100	perc.antw. 2,2 62,8 3,4 8,2 12,7		42	10,1	3	0,7
3 Dit jaar is getracht de meerkeuzevragen zo samen te stellen dat de tekst de leer- lingen uitnodigt deze vragen te maken zoals ze open vragen maken. Heeft dit naar uw mening een gunstig effect gehad?	167	40,0	51	12,2	172	41,2	27	6,5
4 Hebben de leerlingen nadelen onder- vonden van het wisselend aantal alternatieven?	43	10,3	161	38,6	199	47,7	14	3,4
5 Hebben de leerlingen de figuren bij de opgaven intensief gebruikt?	169	40,5	13	3,1	219	52,5	16	3,8
6 Hebben de leerlingen moeite gehad met het lezen van de opgaven (stam en alternatieven)?	60	14,4	91	21,8	245	58,8	21	5,0
7 Hebben de leerlingen moeite gehad met de gebruikte notaties?	17	4,1	208	49,9	172	41,2	20	4,8
8 Was de tijd van 120 minuten voor het gehele examen voldoende?	113	27,1	265	63,5	23	5,5	16	3,8
9 Vond u het examen 'op niveau'?	308	73,9	46	11,0	28	6,7	35	8,4
10 Heeft u meer dan in vorige jaren geoeffend met meerkeuzevragen? Welke middelen heeft u bij die voor- bereiding gebruikt?	197	47,2	200	48,0	26	6,2	4	1,0
	oude examens				12,2%			
	oude ex. plus				35,3%			
	cevo voorbeelden				6,5%			
	geen antw.				46,0%			

11 In welke mate heeft u bij het school-onderzoek gebruik gemaakt van meer-keuzevragen?

minder dan 50% meerk.	36,7%
50% meerk.	42,2%
meer dan 50% meerk.	19,4%

12 Is het interviewen of enquêteren van leerlingen vlak na het examen een goede methode om voor- en nadelen van gesloten vragen in het examen te achterhalen?
Heeft u andere suggesties?

112	26,9	103	24,7	164	39,3	38	9,1
-----	------	-----	------	-----	------	----	-----

Conclusies leerlingenenquête

De interpretatie van de cijfermatige gegevens van de leerlingenenquêtes is geen eenvoudige zaak. We hebben geprobeerd wat conclusies te trekken, maar we zijn er van overtuigd dat onze gevolgtrekkingen geenszins volledig zijn. Wel komen er soms interessante zaken boven water als men de getallen vergelijkt en combineert. Ook in samenhang met de p-waarden.

Het D-examen:

Uit vraag 1 en 2 blijkt dat opgave 20 de meeste tijd kostte van de zeven onderzochte opgaven en 12 en 24 de minste. Bekijken we de bijbehorende p-waarden dan zien we dat 12 en 20 goed tot redelijk gemaakt zijn, maar 24 veel minder. Bij dit vraagstuk speelde blijkbaar het 'dat zie je zo'-effect de leerlingen parten. Zij zagen een rechte hoek tussen de lijnen q en r inplaats van tussen r en p en kozen dus alternatief e. Wat zou er gebeurd zijn als de leerling zelf had moeten tekenen? Wat is er nu eigenlijk getoetst? 86% heeft blijkbaar een goed idee van wat een sinus is, maar 41% trapt in de val van de suggestieve tekening.

Vraag 3, 4 en 5 horen bij elkaar: je kunt een meerkeuzevraag als open vraag, of als gesloten vraag maken, en/of je kunt naar het antwoord raden. Daarom zou de som van de percentages bij 3, 4 en 5 ongeveer 100 moeten zijn. Eventueel iets meer omdat je het op twee manieren zou kunnen aanpakken. Die sommen zijn echter als volgt:

opgave	4	8	12	16	20	24	28
som perc.	122	125	70	109	125	81	81

Als dit nu maar geen maat is voor de validiteit van de enquête.

Bij opgave 20 heeft 27%, bij opgave 8 22% naar het antwoord geraden. Dat zijn percentages die o.i. niet pleiten voor het gebruik van meerkeuzetoetsen bij wiskunde. De kans om goed te raden was bij opgave 20 slechts 0,17 als er in het geheel niet gemeten werd, maar is met een beetje meten al gauw 0,5.

Als men de antwoorden bij vraag 6 vergelijkt met de p-waarden dan lijkt de geënquêteerde groep iets beter te presteren dan de steekproefpopulatie, of hebben ze meer geluk gehad?

Vraag 7 en 8 gaan over geluk en pech bij het oplossen van de opgaven. Bij opgave 28 hadden de leerlingen het minste geluk en de meeste pech. Vermoedelijk zijn er leerlingen die het domme pech noemen als ze 5 kiezen, de afleider met de hoogste frequentie. Ze vinden het pech hebben als je alleen maar de begrippen inhoud en oppervlakte door elkaar haalt. Een zelfde redenering gaat misschien op voor opgave 24. De verkeerde rechte hoek zien, wordt door leerlingen als pech bestempeld. Degenen die bij 20 zeggen geluk of pech gehad te hebben, hebben misschien gemeten?

De uitkomsten bij vraag 9 en 10 geven meer inzicht in welke fouten leerlingen maken dan dat ze iets zeggen over dit examen. Meer dan één alternatief bij opgave 4 zou kunnen betekenen dat leerlingen de alternatieven b en c ook goed vinden, geen alternatief kan hier door een rekenfout veroorzaakt worden. Bij opgave 8 kan een leesprobleem daaraan ten grondslag liggen.

De tekeningen worden veel gebruikt, blijkens de uitkomsten van vraag 11. Volgens de uitkomsten van vraag 12 begint 55% op tijd met het open werk. Het valt te hopen dat dat niet minder wordt in de toekomst en dat er geen geluiden gaan komen van:

‘Laat maar zitten, die open vragen’.

De percentages bij vraag 13 en 14 wettigen de conclusie dat de leerlingen te weinig tijd hadden.

Het C-examen:

Opgave 4 kostte de minste tijd, 12, 20 en 24 de meeste.

Hoe opgave 8 als gesloten vraag gemaakt kon worden – 22% deed dat – is nogal raadselachtig. Dat geldt ook voor opgave 20 met 26%. Alternatieven uitproberen heeft voor veel C-leerlingen waarschijnlijk een andere betekenis dan het voor ons heeft.

Bij opgave 12 en 24 wordt weer veel geraden. Dat houdt natuurlijk verband met de moeilijkheidsgraad van deze opgaven.

Bij de percentages van vraag 6 valt op dat die over het algemeen veel hoger zijn dan de p-waarden. Opgemerkt moet hierbij worden dat de C-enquête maar bij 82 leerlingen is afgenomen.

De pechhebbers bij opgave 4 vinden dat ze alleen maar een pijltje voor een ‘=’-teken hebben aangezien. Bij opgave 12 hebben veel pechhebbers waarschijnlijk alternatief d gekozen.

De 34% die bij opgave 12 meer dan één alternatief zagen, vonden ook alternatief d goed? Maar wat te denken van de respectievelijk 10, 16 en 13% die in 8, 20 en 28 meer alternatieven goed vonden? Bij opgave 8 zou dat kunnen komen omdat men de top op een as vond. Bij 28 hebben ze misschien gedacht: a, b en c kunnen, dat is met deze gegevens niet uit te maken, dus is het d.

Ook bij het C-examen werden de tekeningen veelvuldig gebruikt. Dat b.v. bij opgave 12 niet 100% de tekening gebruikt, is wel te begrijpen: sommige leerlingen vinden dat alleen maar kijken naar een tekening iets anders is dan de tekening gebruiken. Uit de uitkomsten bij 12, 13 en 14 kun je opmaken dat de tijdsdruk bij het C-examen beduidend minder was.

Conclusies lerarenenquête

Het percentage van 88,2 dat neen zegt tegen de verdeling van 70% gesloten vragen, 30% open vragen, behoeft nauwelijks commentaar. Dat volgens 62,8% bij vraag 2 kiest voor de verdeling

50%-50% is minder eenvoudig te duiden. Dachten velen daarbij aan de vroegere situatie, toen er twee zittingen voor het wiskunde-examen gehouden werden en de verhouding inderdaad 50%-50% was?

Hoewel de vragen 3 t/m 7 door veel collega's niet beantwoord zijn, kunnen ook hier nog wel conclusies getrokken worden. Zo blijkt uit de antwoorden op vraag 3 dat de nieuwe vorm van de meerkeuzevragen, die meer open vragen lijken, gunstig is ontvangen. Ook het wisselend aantal alternatieven (vraag 4) had geen nadelige gevolgen, hoewel de vraag rijst aan welke nadelen de 10,3% denkt die deze vraag met ‘ja’ beantwoord heeft. De figuren bij de opgaven werden, blijkens de antwoorden op vraag 5, intensief gebruikt.

Bij vraag 6 werd gevraagd of de leerlingen moeite hadden met het lezen van de opgaven. 14,4% zegt daar ja op en 21,8% nee. De, wederom voorzichtige, conclusie is dat 2 van de 5 leerlingen moeite hebben met het lezen van de opgaven. Dat is toch wel een onthutsend groot percentage. Uit de 103 C-formulieren blijkt bovendien dat van die kandidaten 6 van de 7 moeite hadden met het lezen van de opgaven.

De getallen bij vraag 7 geven aan dat de gebruikte notaties geen problemen hebben gegeven. Ook niet bij de C-leerlingen. Wat dat betreft is er al veel ten goede veranderd in de examenopgaven, door af te zien van de vaak ingewikkelde notaties die enkele jaren geleden nog opgang maakten.

Veel leraren vonden de beschikbare tijd (120 minuten) te kort voor dit examen, hetgeen te verwachten was. Vooral de docenten uit het volwassenen-onderwijs die aan de enquête deelnamen, signaleren een grote tijdsdruk voor hun kandidaten. Dat wordt toegeschreven aan de manier waarop volwassenen meerkeuzevragen maken. Elk alternatief wordt apart nog eens onderzocht om er zeker van te zijn dat er geen addertjes onder het gras zitten. Ook het telkens weer veranderen van onderwerp, het telkens weer opnieuw moeten inleven in een heel ander probleem, schijnt volwassenen minder goed af te gaan.

Zowel bij het C- als bij het D-examen vond een grote meerderheid van de geënquêteerde leraren het werk voldoende niveau hebben (vraag 9).

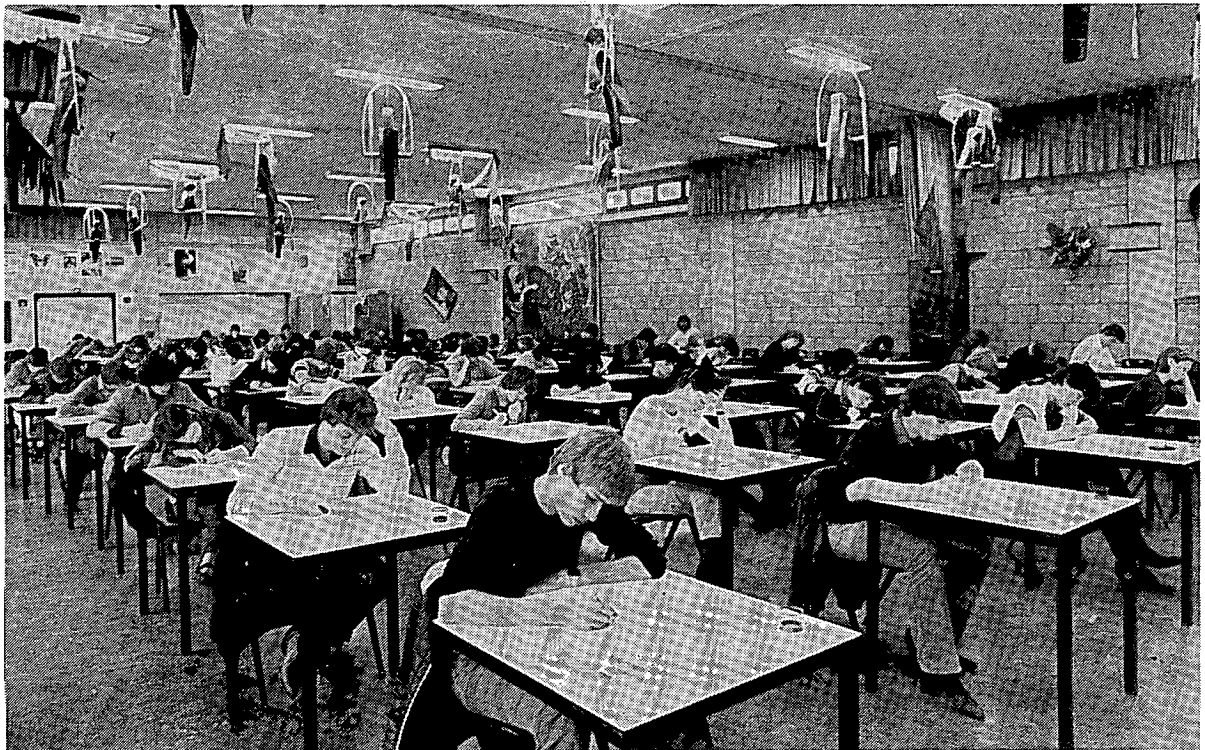
Uit de antwoorden op vraag 10 valt af te leiden dat

47,2% van de leraren zijn gedrag heeft veranderd en meer oefent met meerkeuzevragen. De vorm van het examen heeft blijkbaar grote invloed op het lesgeven en, naar onze mening, een kwalijke invloed: oefenen in meerkeuzevragen is wat anders dan leerlingen wiskunde onderwijzen. Ook uit de reacties op vraag 11 blijkt de grote invloed van het examen: het advies om de open vragen juist in het schoolonderzoek te stoppen, wordt kennelijk niet opgevolgd. Daarin bestaat een discrepantie met vraag 1 en 2, waar men juist wel voor de open vraagvorm kiest. Men richt zich blijkbaar voor wat het schoolonderzoek betreft op het examen.

Bij de beantwoording van vraag 12 werden weinig andere suggesties gegeven. De leerlingenenquête loskoppelen van het examen en eerder afnemen aan de hand van een voorafgaand examen, werd enkele malen genoemd. Bijna 40% heeft deze vraag niet beantwoord omdat zij de leerlingenenquête niet kenden. Van de anderen vond de helft het wel een goede methode.

Tot zover onze beschouwingen over de enquêtes. We herhalen het nog maar eens: we hebben geenszins de illusie dat we volledig zijn geweest. Toch menen wij dat er genoeg interessante zaken aan het licht zijn gekomen, die bijvoorbeeld best wel eens door een professionele instantie onderzocht zouden kunnen worden. Teveel beperken voor- en tegenstanders van meerkeuzetoetsen zich bij het verdedigen van hun standpunten tot algemene uitspraken. Het zou best wel eens kunnen dat, waar andere vakken goed met meerkeuzetoetsen te evalueren zijn, o.a. wiskunde daar een duidelijke uitzondering op is. Bij de talen b.v. moet men uitgaan van de alternatieven bij het maken van de toets, bij wiskunde wil men dat juist proberen te voorkomen. Zou een meer professioneel onderzoek door een bewaame, onbevooroordeelde instantie daar geen duidelijkheid over kunnen geven?

Het lijkt ons intussen ook voor de lezer een interessante bezigheid om met deze cijfermatige gegevens eens wat te stoeien. Sherlock Holmes zei het al: 'Door combineren en deduceren komt de waarheid aan het licht!' Probeer u het eens, misschien vindt u nog conclusies die de moeite waard zijn.



Bron: André Ruigrok, Landsmeer

Het examen wiskunde Ibo/mavo 1987

Bram van der Wal

Hoe zalig als de jongenskiel
Nog om de schouders glijdt!
Dan is het hemel in de ziel,
En alles even blijd.

Niets, niets ter wereld doet hem aan
Of baart hem ongemak
Dan stuikers die te water gaan
Of ballen over 't dak.¹

Examenkandidaten van het Ibo en mavo kregen in 1987 te maken met de vernieuwde opzet van het centraal schriftelijk examen. Het aantal meerkeuzevragen was uitgebreid tot 30 en het aantal open vragen teruggebracht tot 3. Deze vragen zouden nu ca. 70% resp. ca. 30% van het cijfer gaan bepalen. Voorheen was die verhouding 50%-50%, terwijl het examen in twee afzonderlijke zittingen werd afgenomen. De veranderingen in de opzet van het examen waren in een vroegtijdig stadium bekend gemaakt. Door middel van voorbeeldexamens konden docenten en kandidaten zich een beeld vormen van het te verwachten examen. Grote verrassingen bleven dan ook uit. Zowel de voorbeeldexamens als de examens zelf vielen op door redelijk heldere vraagstellingen in begrijpelijk Nederlands en een wisselend aantal antwoorden waaruit te kiezen was bij de meerkeuzevraagstukken.

Het feit dat de kryptische omschrijvingen van de meerkeuzevraagstukken, die het wiskunde-examen de laatste jaren het aanzien gaven van een proeve begrijpend lezen, in deze editie nauwelijks voorkwamen heeft veel docenten en recensenten mild gestemd².

Het voorgaande mag niet de indruk wekken dat het examen voldeed aan redelijk te stellen eisen. De milde beoordeling van het examen is hopelijk niet te danken aan het feit dat de wiskundesecties zich hebben neergelegd bij de tijdgeest die een steeds groter aantal meerkeuzevragen met zich meebracht.

Juist nu is er alle reden om tot een goede presentatie van het vak te komen. De exacte vakken staan in de schijnwerpers. De meer dan normale belangstelling van de Staatssecretaris voor deze vakken is opmerkelijk. De aansporing aan meisjes om wiskunde in het vakkenpakket op te nemen zal ook aan jongens-oortjes niet ongemerkt voorbijgaan. In de plannen voor de basisvormig is eveneens een ruime plaats ingeruimd voor wiskunde.

Zoveel belangstelling wekt bij de 'buitenwereld' op zijn minst de indruk dat het om een belangrijk vak gaat. De maatschappelijke betekenis moet wel groot zijn als promotie op zo hoog niveau plaats vindt. Dat is de eerste en vaak enige conclusie die ouders en leerlingen trekken uit de huidige ontwikkelingen.

Het is dan ook interessant en leerzaam om het examen van 1987 te beoordelen op de betekenis van de aangesneden items voor het dagelijks leven. Ook al zijn we nog niet zo ver dat in de wiskundepraktijk het leven van alle dag in het middelpunt staat, niet ontkend kan worden dat er in veel methoden een duidelijke tendens in deze richting is.

Hoe sluit het examen daarop aan?

Een vluchtige beoordeling van de examens op zowel C- als D-niveau doet je in dit opzicht de haren ten berge rijzen. Elke gelijkenis met de dagelijkse werkelijkheid van de leerlingen lijkt minutieus weg-gewist. Elk restje vlees is van de botten afgekloven. Slechts een rammelend geraamte grijnst ons toe.

Een aantal voorbeelden mogen het voorgaande verduidelijken.

Een van de aardigste opgaven bij het C-examen, in ieder geval de meest originele, is opgave 28:

28. In een zak zitten precies 402 knikkers.

Jannie neemt een *even* aantal knikkers uit de zak en deelt die eerlijk met Petra.

Kees deelt de rest eerlijk met Klaas.

Hoeveel knikkers hebben Jannie en Kees sa-

men?

a minder dan 200

b precies 200

c meer dan 200

d niet te berekenen door gebrek aan gegevens

Lbo-kandidaten – en niet alleen zij – verdelen op een examen alles wat hun gevraagd wordt, om het even of het vlooiën, knopen, knikkers of kippeëieren zijn. Op het examen tellen slechts de punten. En dat zijn er bij elk goed vraagstuk twee. Dus gaan de kandidaten, jongens en meisjes van 16 en 17 jaar oud, knikkers verdelen. Dat een aantal van hen een kop groter is dan hun docent mag niet deren. De zak met 402 knikkers moet leeg.

Nogmaals, wie van een grapje houdt, had 402 vlooiën in de zak gestopt, wie een hoge prioriteit geeft aan het materiële koos voor gouden dukaten of klinkende guldens.

Als Hildebrand, met wie het artikel werd geopend, jongens ongemak laat baren met stuiters die te water gaan, heeft hij het over knaapjes die 'haast op school gekortwiek't zullen zijn'.

U raad het al: 8-jarigen.

Eveneens vraagstuk 28, maar nu van het D-examen, staat dicht bij de leerling. Toch heeft men ook hier kans gezien weer van de leefwereld van de leerling weg te lopen.

28. Het lichaam hieronder is opgebouwd uit kubussen met ribbe 1. Bereken de oppervlakte van dat lichaam.

De oppervlakte is

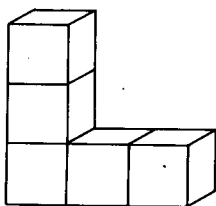
a 3

b 11

c 19

d 22

e 30



De lbo- en mavo-D-leerlingen gaan voor het merendeel naar het mbo. Velen krijgen daar opnieuw te maken met het volume- en oppervlaktebegrip. Waar in de praktijk wordt een lichaam als in opgave 28 zo opgebouwd? Had men de leerling willen testen op zijn kennis over oppervlakte, dan was onderstaand lichaam beter geweest. Ook leerlingen die gewend waren te werken uit een meer 'conserva-

tieve' methode zouden zich met onderstaand lichaam best moeten kunnen redden.

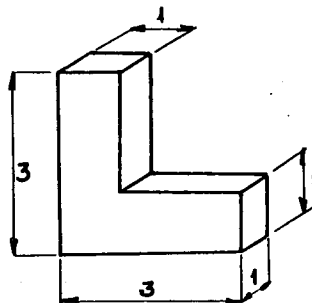
De hieronder getekende letter L wordt voor reclamedoeleinden gemaakt. De letter wordt rondom geschilderd. De oppervlakte die geschilderd moet worden is:

a 17

b 11

c 22

d 19



Dat leerlingen volume en oppervlakte verwisselen zal geen enkele docent verbazen. Op een examen zijn ze er zeker toe geneigd als het eerste antwoord er al aanleiding toe geeft.

Verder geven twee van de 'alternatieven' de leerlingen ruimte om de vlakken die tegen elkaar vallen mee te rekenen. Dat is flauw en staat ver van de werkelijkheid af.

Opgave 19 van het C-niveau is eveneens een analyse waard. Naast de gemiste aansluiting bij het leven van alledag, waarover straks meer, blijft de vraag wat hier werd getest.

19. Gegeven zijn de punten $K(-1, 2)$ en $L(6, -1)$.

Bereken KL in twee decimalen nauwkeurig.

$KL \approx$

a 4,90

b 5,10

c 5,83

d 6,32

e 7,07

f 7,62

De alternatieven a t/m f doen vermoeden dat het gaat om de stelling van Pythagoras en de kennis van het rechthoekig coördinatenstelsel. Dat het antwoord gevraagd wordt in twee decimalen nauwkeurig kan *niet anders* betekenen dan dat de opstellers van het vraagstuk de bedoeling hadden de kandidaten *tevens* te testen in hun vaardigheid in het afronden van getallen. Een vaardigheid die veel lbo/mavo-kandidaten helaas ontberen. Bij correct hanteren van de coördinaten en de stelling van Pythagoras vindt een kandidaat $KL = \sqrt{58}$.

Het rekenapparaat of een tabel geeft dan 7,6157... De alternatieven 7,61 en 7,62 hadden waarschijnlijk meer hiaten aan het licht gebracht dan nu het geval was.

Overigens maak ik me sterk dat het overgrote deel van de leerlingen de punten heeft getekend en *KL* heeft gemeten. De keuzemogelijkheden a t/m f geven daartoe de mogelijkheid.

Het vraagstuk heeft derhalve niet meer getest dan de kennis van het coördinatenstelsel. Daar waren waarachtig wel betere vraagstukken voor te bedenken geweest.

Los van dit alles staat nog de praktische waarde. Juist de stelling van Pythagoras is bij veel studies onmisbaar. Waarom heeft de commissie niet gekozen voor een levensecht vraagstuk, waarvan 'er tientallen uit de mouw zijn te schudden!

De kritiek op vraagstuk 19 geldt grotendeels evenzeer voor vraagstuk 20 van het C-examen.

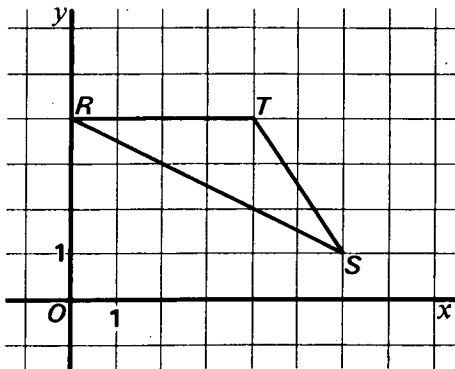
Ook hier konden de kandidaten door nauwkeurig te tekenen en te meten een omtrek van ruim 14 vinden.

20. Gegeven zijn de punten $R(0, 4)$, $S(6, 1)$ en $T(4, 4)$.

Bereken de omtrek p van driehoek RST in één decimaal nauwkeurig.

Voor p geldt

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a $p < 8$ | d $12 \leq p < 14$ |
| b $8 \leq p < 10$ | e $14 \leq p < 16$ |
| c $10 \leq p < 12$ | f $16 \leq p$ |



Omdat de omtrek in één decimaal nauwkeurig werd gevraagd, zou in ieder geval een aantal andere intervallen als alternatief moeten worden geboden.

B.v. $14,1 \leq p < 14,2$

$14,2 \leq p < 14,3$

$14,3 \leq p < 14,4$

$14,4 \leq p < 14,5$

Wil men de mogelijkheid open laten dat kandidaten de aangeboden tekening gebruiken dan kunnen nog enkele aangepaste alternatieven worden opgesteld.

Vraagstuk 23 van het C-niveau heeft ondertussen een baard die tot de grond reikt en een vrijwel onoverbrugbare afstand tot de leefwereld van de lbo/mavo-kandidaat.

23. Een cirkel heeft als omtrek 16π .

Bereken de oppervlakte van deze cirkel.

Deze is gelijk aan

- a 4π
- b 8π
- c 16π
- d 64π
- e 256π

Waarom niet gekozen voor een cirkel met een omtrek van bijvoorbeeld 500? Als dan de oppervlakte moet worden berekend komt het rekenapparaat pas echt aan de orde. Dan blijft het toestaan van de nieuwe verworvenheid niet beperkt tot een dode letter.

Het is trouwens opmerkelijk dat het gebruik van het rekenapparaat wel wordt toegestaan maar dat er door de kandidaten van het C-niveau nauwelijks gebruik van gemaakt kan worden. Een stukje koudwatervreës van de opstellers? Wordt het rekenapparaat toch nog als een vreemde eend in de bijt gezien, ook al zwemt hij daar al winters lang? Ook hier zorgvuldig vermeden al te dicht bij de dagelijkse werkelijkheid te komen?

Methodenschrijvers – en niet alleen zij – sloven zich al jaren lang uit in het bedenken van levensechte wiskunde. Hun pogen om wiskunde dicht bij de leerlingen te brengen, hen te motiveren, te laten zien dat wiskunde bruikbaar is in het dagelijks leven, zelfs leuk kan zijn om te doen, wordt volkomen genegeerd door de opstellers van het examen. Aangezien al is aangegeven dat in 1988 het examen

dezelfde opzet zal hebben als in 1987 ligt de koers dus vast.

Alle idealisme ten spijt, het examen van dit jaar zal in het voorjaar van 1988 voor de examenkandidaten dienst doen als generale repetitie. En dit examen zal net als het door de CEVO geproduceerde voorbeeldexamen eind 1986 leidraad worden voor menige wiskundeles.

Het voorgaande – het uitbannen van de alledaagse werkelijkheid en de te vrezen voorbeeldwerking die van dit examen uit gaat – geldt evenzeer voor de open vragen. Het is daarom de moeite waard om te kijken wat daarvan is overgebleven.

Drie in totaal en gedrukt op een half kantje. De resultaten waren blijkens een steekproef van het CITO onthutsend. Van de dertig te behalen punten werden er gemiddeld slechts ruim elf binnengehaald. Waaraan is dit slechte resultaat te wijten?

De heer Bakker van het CITO oppert in een artikel in dit nummer de mogelijkheid dat de D-kandidaten in tijdnood zaten. De C-kandidaten zouden volgens hem te veel aan opstapvragen gewend zijn. Het is echter maar zeer de vraag of de oorzaak van de slechte resultaten daarin gezocht moet worden. Het ligt mijns inziens meer voor de hand om te veronderstellen dat het de combinatie van meerkeuzevragen en open vragen is die de problemen veroorzaakte.

Vanaf het moment dat de meerkeuzevragen hun intree deden op het wiskunde-examen was er kritiek. Het is hier niet de plaats om daarop verder in te gaan. Vastgesteld wordt slechts dat de fervente tegenstanders van MC er nog een volwaardig examen met open vragen naast vonden. Daar kreeg de kandidaat gelegenheid een vraagstuk te onderzoeken en de oplossing er van wel of niet te vinden.

De combinatie van meerkeuzevragen en open vragen in één zitting tast het wezen van de open vragen zelf aan. Daarover straks meer. Eerst nog enkele opmerkingen over de benodigde tijd voor de meerkeuzevragen.

Van de 30 meerkeuzevragen zijn er 20 waarvoor naar de mening van de CEVO-leden per vraag 2 minuten nodig is en 10 waarvoor per vraag 4 minuten nodig is. Wie heeft dat echter onderzocht en voor welke kandidaat geldt dat? Het kost evenveel papier om op te schrijven dat eerstgenoemde

20 vragen in 30 minuten te maken zijn en de volgende 10 vragen eveneens in 30 minuten. Feit is dat de tijd die de diverse kandidaten aan meerkeuzevraagstukken besteden zeer uiteenlopend is. Een zinnig gemiddelde is nauwelijks te noemen. Maar goed, je moet wat plannen.

Belangrijker is dat in twee uur tijd de kandidaten niet minder dan dertig meerkeuzevragen en drie open vragen moeten beantwoorden.

Met name die dertig meerkeuzevragen vereisen veel van de concentratie. Het betekent immers dat de kandidaten zich even zovele malen op een nieuw probleem moeten richten. Na dertig vraagstukken is de snee er uit.

Daar komt bij dat de aanpak van een open vraagstuk meestal toch heel anders is. De overgang van meerkeuzevraagstukken naar open vragen vergt veel van de kandidaten. Waar het in de eerste 30 vraagstukken 'slechts' om het antwoord ging, moet nu de gang van zaken en de berekening worden opgeschreven. Hoe gek het ook klinkt, daar komen in dat stadium van de examenzitting veel leerlingen niet meer toe. Net zoals bij de meerkeuzevraagstukken zijn ze geneigd een antwoord te produceren. Dat geldt met name voor vraagstukken die zich daartoe lenen.

Aan de hand van de opgaven van het C-examen wil ik één en ander toelichten.

Gegeven is de functie $f: x \rightarrow x^2 - 4x + 3$.

A. Teken de grafiek van f in een assenstelsel.

B. Op de grafiek van f ligt punt $(p, 24)$.

Bereken welke waarde(n) p kan hebben.

De resultaten van opgave A zijn blijkens de CITO-steekproef alleszins redelijk te noemen. De kandidaten voeren de gebruikelijke procedure – het bepalen van de snijpunten van de grafiek met de x -as en de coördinaten van de top van de grafiek – vrij goed uit.

Heel anders is dat bij vraag B. De vraagstelling – welke waarde(n) kan p hebben – vertoont de grote gelijkenis met die in meerkeuzevragen. Een aantal kandidaten gebruikt de grafiek van vraag A om daarmee het punt $(p, 24)$ te vinden. Dat ze dat lukt ondanks de buiten het papier vallende roosterpunten, blijkt uit de antwoorden. De positieve waarde 7 wordt vaak gevonden. Bij oplossing van de vergelij-

king $p^2 - 4p + 3 = 24$ was de waarde -3 eveneens gevonden. Nu ontbrak deze waarde bij het merendeel van de kandidaten.

Bij opgave C van het C-niveau is eveneens duidelijk dat het antwoord zo snel mogelijk geproduceerd wordt. De ronde getallen werken dat ook in de hand.

C. Gegeven is de balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 16$, $AD = 12$ en $AE = 15$.

Op het lijnstuk BH ligt het punt T zo dat $BT = 15$.

Op het lijnstuk BD ligt het punt R zo dat $TR \parallel HD$.

Bereken de oppervlakte van $\triangle BRT$.

Het is opvallend hoeveel kandidaten kans zien om in enkele krabbels aan te geven dat de oppervlakte 54 is. Het antwoordmodel geeft de volgende puntenwaarderingen:

C. 13 punten:

voor de berekening van $BD = 20$ 2 punten

Voor de berekening van $BH = 25$ 2 punten

voor $\triangle BRT \sim \triangle BHD$ 2 punten

voor $TR:HD = 15:25$ 2 punten

(of $BR:BD = 15:25$) 2 punten

voor $TR = \frac{3}{5} \cdot 15 = 9$ 2 punten

(of $BR = \frac{3}{5} \cdot 20 = 12$) 2 punten

voor $BR = \frac{3}{5} \cdot 20 = 12$ 1 punt

(of $TR = \frac{3}{5} \cdot 15 = 9$) 2 punten

voor $BRT = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54$ 2 punten

Met dit model doorlopen we het gemaakte werk. Hoe is BD berekend? Niet te vinden op het uitwerkpapier. Lag de 3-4-5 steek er te dik bovenop? De berekening van BH ? Opnieuw de 3-4-5 verhouding. Iets teveel van het goede? De constatering dat $\triangle BRT \sim \triangle BHD$ is? Weinig van terug te vinden. Intuïtief gaan de kandidaten over op het gebruik van gelijkvormige driehoeken. Opnieuw komt alles 'goed uit', dus blijven uitwerkingen in goede bedoelingen steken.

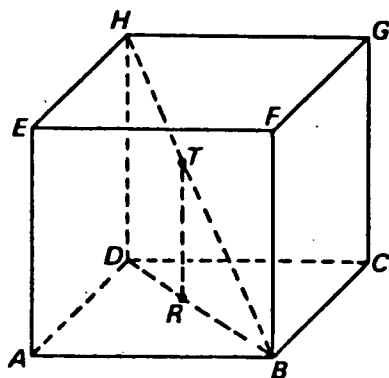
Toch vonden veel kandidaten de oppervlakte. Hoeveel punten levert dat op? Belangrijker is het echter om te constateren dat de kandidaten het vraagstuk behandelden als was het een meerkeuzevraagstuk.

Soortgelijke opmerkingen zijn te maken over de open vragen van het D-niveau en de herexamens. Omwille van de beschikbare plaatsruimte laat ik ze hier achterwege.

Vastgesteld kan worden dat de huidige opzet van het wiskunde-examen er toe leidt dat een groot deel van de kandidaten het open werk laat lopen. De uitkomst van het eerdergenoemde CITO-onderzoek ondersteunt deze conclusie. Daarmee is het open werk definitief om zeep geholpen en de waarde van het examen opnieuw gedevalueerd.

Noten

- 1 Hildebrand 'Camera Obscura', naar 3e uitgave, p. 5.
- 2 Hans Freudenthal. 'De eindexamens' NRC-Handelsblad 18-6-1987.



En als het model nu 's niet deugt?

Adrian Oldknow

1 Inleiding

Het modelvormingsproces wordt dikwijls voorgesteld door een eenvoudig stroomschema: er moeten stappen worden gezet en er moeten keuzes worden gemaakt met betrekking tot de mate waarin het model bruikbaar is, met betrekking tot de moeilijkheidsgraad van een wiskundige oplossing, en met betrekking tot de mate waarin een uitkomst realistisch is.

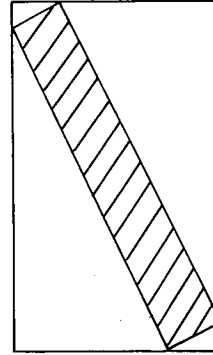
De meeste van deze stappen zijn volslagen vreemd voor studenten die zijn opgeleid volgens een conventioneel middelbare-schoolprogramma, waarin de opgaven gewoonlijk net genoeg gegevens bevatten om het model te construeren, waarin de vereiste aanpak al min of meer aan de hand gedaan wordt door de wijze waarop de opgave gesteld is, en waarin het model tot een fraaie, duidelijke oplossing leidt. In onze eerstejaarscolleges proberen wij een voorbereiding op meer geavanceerde wiskunde te geven door voorbeelden te behandelen waarbij het blindelings toepassen van technieken kan uitmonden in ongerijmdheden.

In dit artikel wordt één zo'n voorbeeld onder de loep genomen.

2 De opgave

De opgave luidt: Schuif een lange boekenkast van 1 ft diep door een deuropening van 4 bij 7 ft. Door hem scheef te houden kan dat zelfs als de kast meer dan 7 ft hoog is. Wat is nu de maximale hoogte van de boekenkast, wil hij nog door de deuropening kunnen?

In feite heb ik deze opgave uit 'Elementary Calculus and Coordinate Geometry' van G. C. Nobbs¹, maar een goed verteller kan de opgave als een uit het leven gegrepen probleem presenteren. Een passende schets van het probleem ziet er al gauw uit als figuur 1.

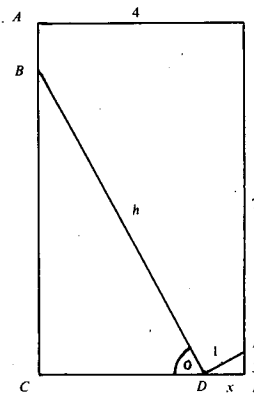


Figuur 1

In dit eerste stadium worden er veelal drie verschillende strategieën voorgesteld; deze zijn, kort gezegd:

- I het maken van nauwkeurige tekeningen en/of het maken van schaalmodellen met behulp van concrete materialen;
- II het gebruiken van meetkundige intuïtie;
- III het eens proberen met wat algebra.

Als we met het laatste beginnen, dan moeten er dus symbolen gekozen worden om de relevante variabelen aan te duiden. In figuur 2 is een stel mogelijke symbolen aangegeven.



Figuur 2

3 Een model

Aangezien het doel van de opgave is de maximale waarde van h te vinden, lijkt het zinnig om h als functie van één van de andere variabelen te schrijven, en dan te differentiëren.

Stel dat we eerst proberen de hoek θ te vinden, dan kunnen we, door de breedte van de deur er in te betrekken, een formule opstellen waarin h en θ voorkomen. Daar $\angle BDF$ recht is, is $\angle DFE = \theta$, en daar $CD + DE = CE$ krijgen we:

$$h \cos \theta + \sin \theta = 4 \quad (1)$$

Herschikken levert op:

$$h = \frac{4 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (2)$$

En differentiëren heeft als resultaat:

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{4 \sin \theta - 1}{\cos^2 \theta}$$

Als we dit nul stellen, krijgen we:

$$\sin \theta = \frac{1}{4}, \cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ en } \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

Dat wil zeggen: $\theta \approx 14,5^\circ$

$$\text{Substitutie van } \sin \theta = \frac{1}{4} \text{ en } \cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ in (2)}$$

$$\text{levert: } h = \frac{15}{\sqrt{15}} = \sqrt{15}$$

Aangezien $\sqrt{15}$ zelfs nog wat kleiner dan 4 is, zal men waarschijnlijk opmerken dat deze uitkomst niet realistisch is.

We kunnen nu een andere aanpak proberen, maar wellicht ook onderzoeken wat deze uitkomst te betekenen heeft. Laten we eerst eens uitzoeken wat er aan het gehanteerde model mankeert; misschien lukt het ons dit model te verbeteren.

Als we $\frac{d^2h}{d\theta^2}$ even uitwerken, blijkt al gauw dat onze

waarde $h = \sqrt{15}$ een minimumwaarde is, en dus rijst de vraag wat voor probleem we in feite opgelost hebben. Een blik op figuur 2 leert ons dat we verzuimd hebben voorop te stellen dat alle vier de

hoeken van de kast het deurkozijn moeten raken. Wat we zojuist hebben berekend is de minimale kashoogte in het geval dat drie hoeken (namelijk B , D en F) het deurkozijn raken.

4 Een verfijnd model

Als we nu eens zonder θ werken, kunnen we Pythagoras toepassen op de driehoeken BCD en DEF om onderlinge relaties te vinden tussen h , x en y ; we zorgen ervoor dat de kast ook aan de bovenkant het deurkozijn raakt; dan is $AB = y$ en $BC = 7 - y$, dus:

$$h^2 = (4 - x)^2 + (7 - y)^2 \quad (3)$$

$$\text{en } x^2 + y^2 = 1 \quad (4)$$

Eliminatie van y levert:

$$h^2 = (4 - x)^2 + (7 - \sqrt{1 - x^2})^2 \quad (5)$$

Nu hebben we dus h^2 als functie van x gekregen. Logischerwijze zal de waarde van x die h maximaliseert ook h^2 maximaliseren, dus kunnen we werken met formule (5) en deze nu ook differentiëren:

$$\frac{d(h^2)}{dx} = -2(4 - x) + \frac{2x(7 - \sqrt{1 - x^2})}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Als we dit nul stellen krijgen we:

$$x(7 - \sqrt{1 - x^2}) = (4 - x)\sqrt{1 - x^2}$$

en dit wordt na kwadrateren en vereenvoudigen: $65x^2 = 16$

Als in (5) $x = \frac{4}{\sqrt{65}}$ wordt gesubstitueerd, krijgen we

als uitkomst $h \approx 7,06$ ft. Dit nu is een veel plausibeler uitkomst; we zouden dus de opgave als netjes opgelost kunnen beschouwen. Maar komt deze uitkomst wel overeen met de uitkomsten die we krijgen als we de andere strategieën gebruiken?

5 Meetkundige intuïtie

Als de deuropening vierkant zou zijn geweest, zouden we hebben verwacht dat $\triangle DEF$ gelijkbenig zou zijn. Als gevolg van de 'vervorming' van de deuropening zouden we ook een overeenkomstige vervorming van de driehoek kunnen verwachten: als de zijden van het deurkozijn zich verhouden als 4:7, zullen de zijden van de driehoek wel dezelfde verhouding hebben.

Aangezien $4^2 + 7^2 = 65$ zou dit overeen komen met $x = \frac{4}{\sqrt{65}}$ en $y = \frac{7}{\sqrt{65}}$, en bij substitutie van deze waarden in (3) krijgen we juist de uitkomst $h \approx 7,06$ ft (om precies te zijn: $h = 66 - 2\sqrt{65}$), die we al via berekening hadden gevonden. Het bewijs lijkt dus geleverd: de analyse bevestigt de intuïtie.

6 Een nauwkeurige tekening

Een nauwkeurige tekening lijkt wat overbodig, maar het kan in elk geval geen kwaad een tekening te gebruiken om de uitkomst van de twee andere strategieën te toetsen. Het enige wat we nodig hebben is een tekening op schaal van een rechthoek van 4 bij 7 ft, waarin we een rechthoek tekenen zodanig dat $x = \frac{4}{\sqrt{65}}$ en $y = \frac{7}{\sqrt{65}}$; we kunnen dan

de zijden meten, die 1 en 7,06 moeten zijn.

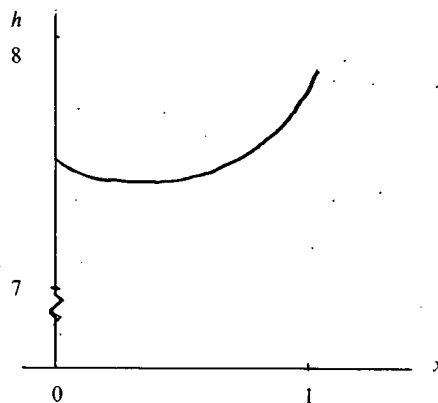
Maar wie kan zo iets tekenen? Ook al kunnen de tekenaars de oplossing niet op eigen kracht vinden, zij moeten een op een andere manier verkregen uitkomst toch nog kunnen verifiëren.

Op dit punt gekomen zou de lezer eigenlijk niet verder moeten lezen, maar eens moeten proberen zelf de uitkomst te verifiëren!

7 Fouten opsporen en verbeteren

Als we er niet in slagen met die nauwkeurige tekening de gevonden uitkomst te bevestigen, wat is er dan aan de hand? Ervan uitgaande dat het differentiëren juist is uitgevoerd, moeten we wellicht op onze schreden terugkeren, naar de functie in (5). Omdat x de horizontale afstand is tussen de onderste hoek van de boekenkast en de rechterhoek van het deurkozijn, moet de waarde van x tussen 0 en 1 liggen. Derhalve kunnen we in een grafiek h tegen x uitzetten voor al de mogelijke waarden van x , zoals in figuur 3 gedaan is.

Onze uitkomst blijkt dus op de een of andere manier een minimumwaarde te zijn – maar welk probleem werd er dan door ons model weergegeven?



Figuur 3

Het element dat we uit het oog verloren hebben is het feit dat $\angle BDF$ recht moet zijn, zodat we nu bezig geweest zijn verschillende manieren te verzinnen om een parallellogram met zijden 1 en h in de rechthoekige deuropening te passen. Onze oplossing blijkt te slaan op een boekenkast die in doorsnee parallellogramvormig is, die nog net de zijden van de deuropening raakt, en waarvan de lange zijde (h) minimaal is:

8 Het ontbrekende element opgenomen in een model

Als we terugkeren naar het oorspronkelijke model en naar formule (1), dan kunnen we een soortgelijke formule voor de hoogte van het deurkozijn afleiden, gebruik makend van $BC + AB = AC$, namelijk:

$$h \sin \theta + \cos \theta = 7 \quad (6)$$

welke vergelijking samen met (1): $h \cos \theta + \sin \theta = 4$ een stelsel van twee vergelijkingen in de onbekenden h en θ vormt.

Als we h uit de vergelijkingen elimineren houden we een vergelijking in θ over:

$$4 \sin \theta - \sin^2 \theta = 7 \cos \theta - \cos^2 \theta \quad (7)$$

terwijl eliminatie van $\tan \theta$ een vergelijking in h geeft:

$$h^4 - 67h^2 + 112h - 64 = 0 \quad (8)$$

Met behulp van een geschikte numerieke methode zouden we deze twee nieuwe vergelijkingen kunnen oplossen, waarvan de uitkomst luidt:

$$h \approx 7,27 \text{ ft en } \theta \approx 64,8^\circ$$

9 Naschrift

Waar het in deze geschiedenis van dwaalsporen om draait is het woord 'maximaliseren'. Hoe vond eigenlijk het maximaliseren plaats als de oplossing gewoon uit twee vergelijkingen, namelijk uit (7) en (8), te bereiken bleek?

Het antwoord hierop is zo simpel dat het nauwelijks verwonderlijk is dat we het over het hoofd zagen: juist doordat we ervan uitgingen dat alle hoeken van de kast het kozijn raakten!

Mocht het iemand tot troost zijn: wellicht is het aardig te vermelden dat onze afgestudeerde wiskundigen er even gemakkelijk intuïden als onze eerstejaars studenten.

Uit: Teaching Mathematics and its Applications, Volume 1 No. 3, 1982.

Oorspronkelijke titel: What if the model doesn't work?

Vertaling: Alexandra Bardet, Groningen.

Opmerking van de redactie. In de vertaling zijn de Engelse maten gehandhaafd om onoverzichtelijk rekenwerk te voorkomen.

Noot

- 1 Nobbs, G. C., Elementary Calculus and Coordinate Geometry, deel II, Oxford University Press 1949, p. 363

Over de auteur:

Adrian Oldknow is verbonden aan het West Sussex Institute of Higher Education.

Boekbespreking

Clint McCrory, Theodore Shifrin (ed.), *Geometry and Topology, -manifolds, varieties and knots*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1987, viii + 348 p., \$ 83,50.

Dit boek bestaat uit de Proceedings van de in 1985 gehouden 'Georgia topology conference'. Het bevat 24 artikelen.

De behandelde onderwerpen liggen merendeels op gebieden van de wiskunde waar de vraagstellingen vooral topologisch en meetkundig (met wisselende accenten) van aard zijn, - en waar naast topologische en meetkundige, ook b.v. algebraïsche methoden worden aangewend.

De interactie tussen meetkunde en topologie is bijzonder vruchtbaar: veel topologische (tegen)voorbeelden worden geleverd door meetkundige structuren, en verschillende diepe topologische problemen worden bij uitstek aangepakt met meetkundige methoden. Recent werk van Donaldson over 4-manifolds is daarvan een sprekend voorbeeld. Een artikel in de onderhavige bundel gaat daarop door.

Daarnaast vindt men een rijke verscheidenheid aan andere onderwerpen op het gebied van knopentheorie, manifold-theorie, differentiaal-meetkunde, algebraïsche meetkunde. Om er twee te noemen: er is een kort overzichtsartikel gewijd aan 'Gauge theory and Smooth structures on 4-manifolds', en er is een artikel dat handelt over 'The role of knot theory in DNA research' (!).

Het boek bevat wiskunde van een hoog niveau. Het is vooral bedoeld voor onderzoekers op het aangegeven gebied. Het is niet of nauwelijks toegankelijk voor hen die niet breed en diep zijn ingevoerd in dit gebied.

M.A. Maurice

Achter-/voorlopende horloges

Henny Susijn, Harry Broekman

Er zijn vele wegen die naar Rome leiden, ook bij het oplossen van een probleem.

1 Inleiding

In Euclides 62, 2 (okt. '86) eindigt een artikel van Harrie Broekman en Johan Weterings met een klokopgave (bijlage 3). Naar aanleiding van een reactie van Henny Susijn-Van Zaale, werd besloten over de opgave en de verschillende aangedragen oplossingsmethoden een artikel te schrijven.

§2 bevat de reactie van Henny, met haar oplosme-

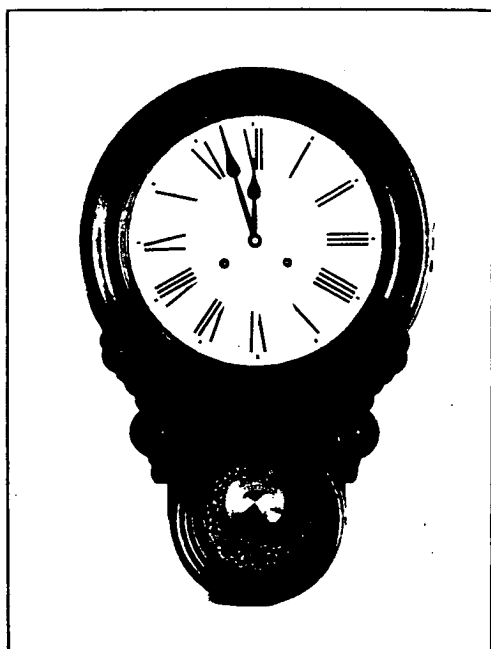
thode (+ overpeinzingen) en die van enkele personen uit haar directe omgeving.

§3 geeft de reden aan waarom de opgave aan aanstaande wiskundeleraren en anderen werd voorgesteld. Tevens bevat deze paragraaf de kern van ons verhaal, namelijk een aantal observaties en de bespreking daarvan.

§4 bevat een pleidooi voor het werken met en aan open problemen.

We besluiten met enkele opmerkingen t.a.v. het ontwikkelen van een probleemoplossings-attitude.

De familie Bikmans aan het ontbijt



De klok staat stil.
Hoe laat is het?

Harrie: Ik heb het vier over acht, maar mijn horloge loopt wel achter.

Marie José: Hé, dat is aardig. Jouw horloge is dan even ver achter als dat van mij voor.

Al met al weet nu alleen Marie José hoe laat het is.

De kinderen – Marieke en Henrike – kijken daarom ook op hun horloge.

Marieke: Ik heb het tien voor half negen.

Henrike: Ik heb het dertien minuten over acht.

Marie José: Het horloge van Marieke doet het heel behoorlijk. Het verschil met de juiste tijd is een derde van hetgeen mijn horloge voor loopt. Henrike zit er trouwens ook vlak bij. Het verschil van haar tijd met de juiste tijd is maar een kwart van de afwijking van mijn horloge.

Marieke: Lopen onze horloges voor of achter?

Marie-José: Dat hoeft je niet te weten. Je kunt dat zelf wel uitzoeken.

Henrike: Ja, maar jij weet hoeveel jouw horloge voor loopt!

Marie-José: Dat kunnen jullie ook uitzoeken.

HOE LAAT IS HET?

2 Reactie van Henny

Die klokopgave leek leuk en daarom begon ik er aan. Zo kwam ik op een drietal aanpakken, resp. *mathematiseren**, *schatten en beredeneren*. Mijn eerste reactie is die van de wiskunde-tic: mathematiseren.

$$\text{Ha } 8.04 = t - x$$

$$\text{MJ} = t + x$$

$$\text{M } 8.20 = t + \frac{1}{3}x$$

$$\text{He } 8.13 = t + \dots, \text{ naar: } \frac{1}{4}x$$

Ik realiseer me de tic en begin opnieuw: 't zal in de buurt van kwart over acht zitten, dus stel 8.15. Controle geeft: bijna! $\Rightarrow$ 8.16.

De systematiek wint het weer:

$$t - x = 4$$

$$t + \frac{1}{3}x = 20$$

$$\frac{4}{3}x = 16 \Rightarrow x = 12. \text{ Klopt.}$$

Ik kan niet verkroppen dat ik bij het schatten niet meteen goed zat en bedenk: Als M en He resp. $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$ van het tijdsverschil van MJ op hun horloge zien, betekent dat, dat het tijdsverschil een gemeenschappelijk veelvoud van 3 en 4 moet zijn en in dit geval, gezien de tijdsspanne, dus 12.

Toch zit me nog iets dwars. Maar wat? Dat bij ons vroeger zulke spelletjes niet gedaan werden? Logisch, ik kreeg mijn horloge pas op mijn vijftiende verjaardag! Dat dus niet.

Als het verhaaltje echt gebeurd is, gaat het om jonge kinderen (inside information), en kan en mag het sommetje dus niet moeilijk zijn. Maar dan nog... Ineens weet ik het. De eerste zin luidt: 'de klok staat stil'. En daarin zit het hem, geloof ik. Die zin geeft ruis. Er moet in huize Bikmans nog een goedlopende klok zijn, anders kan MJ haar opmerkingen niet maken. Ik besluit de klok anderen voor te leggen.

I HAVO-3 leerling (tegen bedtijd)

Ha (8.04, MJ is dan niet belangrijk meer)

M 8.20 $\frac{1}{3}$

He 8.13 $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}x$ en $\frac{1}{4}x$. Hé nee, dan wordt het wiskunde!

Ik schat 8.16. Dat zit tussen 8.20 en 8.13 in; 't verschil is 7 minuten, de ene 4 en de andere 3. Klopt. (En hij maakt 't nog even af:)

MJ 8.28.

II 6e jaars TH-student (vrijdagavond laat)

T = werkelijke tijd

x_H = tijd die Harrie achter loopt

x_{MJ} = tijd die MJ voor loopt = x_H

$$T = 4 + x_H$$

$$T \pm \frac{1}{3}x_H = 20 \quad 4 + x_H = 20 \pm \frac{1}{3}x_H$$

$$T \pm \frac{1}{2}x_H = 13 \quad 4 + x_H = 13 \pm \frac{1}{2}x_H$$

't Is laat, dus moeilijk kan nooit de bedoeling zijn; de meest voor de hand liggende van de vier is $16 \times \frac{3}{4} = 12$. Klopt.

III 1e jaars HEAO (nog later)

Ha 8.04 $\times$ achter

MJ $\times$ voor

M 8.20 $\frac{1}{3}x$ M dichtbij M loopt voor

H 8.13 H dichtbij H loopt achter

$$8.04 + 1\frac{1}{3}x = 8.20 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \times 16 = 12. \text{ Klopt,}$$

8.04

8.28

8.20

8.13

Maar hoe laat 't is wordt niet meer opgeschreven.

IV 5-Gym-leerling (tegen de avond)

M 8.20 H. 8.13 Heel makkelijk. Gewoon een beetje proberen: 8.16. Ja, dat klopt ook. Dat zei ik op mijn gevoel al. Moet deelbaar zijn door 3 en 4. Proberen, 12. Klopt.

V 4e jaars HEAO-studente (zondagmorgen)

Afschuwelijke som, moet ik denken! Toen ik op de lagere school alle 'blokken' af had, kreeg ik van die redactiesommen. Daar moet je een heleboel uit weghalen, voordat je de eigenlijke som kunt maken. Enfin:

Har 8.04

Hen 8.13 $\frac{1}{4}x$

Mar 8.20 $\frac{1}{3}x$

afwijking = x

verschil = 7 minuten

$$\text{verschil in afwijking} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = \frac{1}{12}x.$$

Wacht even, de een loopt voor, de ander achter $\Rightarrow$ tijd is tussen 8.13 en 8.20 $\Rightarrow \frac{1}{4}x$ is neg. en $\frac{1}{3}x$ is pos. $\Rightarrow$ 4 verschil $\frac{7}{12}x = 7 \text{ min.} \Rightarrow \frac{12}{7} \times 7 = 12 \Rightarrow 8.16$.

VI 'n wiskundelerares

Op het eerste gezicht: ik mis een gegeven. Hoe weet MJ de juiste tijd? (Hoera; een geestverwan-

te? Helaas wordt zij weggeroepen en 't gesprek afgebroken.)

VII *'n juriste samen met 4-gym-dochter*

M Eerst de gegevens op een rijtje.

M Dan $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$, dus het verschil is $\frac{1}{12}$ en dat is 7 minuten. Nee, dat wordt veel te groot en dus te ver uit te buurt.

D Is het 8.17? 3 minuten van 8.20 af en 4 minuten bij 8.13.

M Ze hoeven dus niet allebei óf voor óf achter te lopen? Dan wordt het 8.16.

Wat kan ik nu concluderen? Het lijkt erop dat het verschil in aanpak niet zozeer wordt bepaald door het kunne-verschil als wel door het al of niet 'n exacte opleiding genieten/genoten hebben. Wordt bij de exacte opleidingen het gebruik van het gewone verstand naar de achtergrond geschoven? Of vergis ik mij daarin?

3 Het gewone gezonde verstand?

De wiskunde verschaft het gewone gezonde verstand (wat dat dan ook zijn mag) een aantal hulpmiddelen waardoor alledaagse problemen op meerdere manieren opgelost kunnen worden (modellen, grafieken, tabellen, algoritmen, heuristieken, etc.).

Vele goede voorbeelden daarvan zijn – voor wat betreft de schoolwiskunde – te vinden in het materiaal voor Wiskunde A (5 + 6 vwo)⁵. Gelukkig echter ook in veel nieuwe teksten voor 12 tot 16 jarigen. Toch blijkt dat bij het oplossen van problemen sommige mensen door bepaalde onderdelen van de wiskunde (hún wiskunde) zeer sterk gestuurd worden. Hoe meer de nadruk in het onderwijs gelegd is (en wordt) op het toepassen van algoritmen, hoe minder er gebruik gemaakt wordt van algemene oplossingsmethoden. Methoden die zowel binnen als buiten de wiskundeles goed bruikbaar zijn (bijv. het maken van een schets, het schatten enz.). Een gevolg daarvan is dat het oplossen van problemen vaak neer komt op het toepassen van een bekende regel (algoritme, oefje), als men zich die regel tenminste herinnert.

Problemen die vaak voorkomen worden ook nogal eens opgelost op het gevoel. Het oplossen via ana-

lyse van het gestelde probleem, het zich afvragen wat er precies als uitkomst verwacht wordt, enz. komt veel minder voor. Veel a.s. leraren realiseren zich dat niet als ze zelf een probleem oplossen en ook niet als zij anderen (leerlingen op school bijvoorbeeld) een probleem laten oplossen. Zij zullen hiervoor eerst gevoelig gemaakt moeten worden (A. Bishop, 1982). Dit is nodig om te voorkomen dat zij in de klas te zeer gericht zullen zijn op het aanleren van begrippen en algoritmen en het laten toepassen daarvan. Een gerichtheid op probleemoplossen in al z'n facetten zal daardoor maar al te vaak ontbreken.

Om hen hiervan bewust te laten worden leggen wij hun o.a. de klokopgave voor met de volgende opdracht:

A1. Maak de opgave.

2. Schrijf zo precies mogelijk op hoe je hem aanpakte.

3. Waarom heb je hem zo aangepakt?

4. Als je hem hebt kunnen oplossen, zou je dan nog een andere oplossingsweg kunnen bedenken? (welke?)

B Leg de opgave voor aan een of meerdere personen (met achtereenvolgens de punten A1 t/m A4).

Geef s.v.p. iets aan over de situatie waarin je de opgave aan een ander voorlegde en wat voor persoon het is (b.v. brugklasser tijdens de pauze in wiskundelokaal; medicijnenstudente, 23 jaar, na 3 pilsjes in de keuken van een studentenflat? ...)

De bespreking van de ingebrachte oplossingsmethoden, maar vooral ook de antwoorden op de vraag 'waarom heb je hem zo aangepakt?' levert telkens weer een breed scala van mogelijkheden voor verdere studie. Een aantal van onze observaties, en gedachten daarover, willen wij hier bespreken.

1 *Vrijwel niemand lijkt zich af te vragen of dit probleem wel de moeite waard is om opgelost te worden.*

Navraag leerde echter dat niemand z'n twijfels over de zin van zo'n opgave had vermeld, het leek niet ter zake doende. Maar in eerste instantie was wel vaak de reactie geweest: 'kijk op een andere klok!' of 'bel 002!' Daarna was men, gezien de persoonlijke relatie, meestal wél-willend. Bovendien was er een aantal mensen dat zei: 'Oh bah, dat lijkt wel wiskunde. Nee, dank je!'

Belangrijk hierbij was het feit dat vrijwel niemand het idee had dat de situatie, die in de opgaven beschreven wordt, een echt voorgekomen situatie was. De opgave leek te 'geconstrueerd', waardoor het 'inleven' bemoeilijkt werd. En degenen die zich er wel inleefden? Die wilden vermoedelijk 002 bel- len of op een andere klok kijken.

De genoemde wél-willendheid om de klokopgave op te lossen heeft te maken met een soort onge- schreven sociaal contact tussen degene die de opga- ve aanbiedt en degene die gevraagd wordt de opga- ve op te lossen. Naar aanleiding van analyses van situaties in de klas spreekt de Fransman Brousseau over het *didactisch contract*.¹

- 2 Vooral de exact geschoolden (maar ook anderen) vinden een 'probeer' methode niet zo fraai. En dat terwijl we ook het vak numerieke wiskunde hebben (zie §2: zich de wiskunde-tic realiseren). Een wis- kunde-lerares schreef het volgende op:

Ik heb altijd de neiging om te proberen als ik niet gelijk zie hoe ik het aan moet pakken, of niet weet hoe ik verder zal gaan. Toch probeer ik me dan ertoe te zetten om wiskundig te blijven!!

Een deel van de verklaring is dat we in het reken/ wiskunde-onderwijs nog steeds sterk gericht zijn op algoritmen. Uit allerlei onderzoek blijkt trouwens dat het toepassen van een algoritme gezien wordt als 'echte wiskunde bedrijven'. Die (mis)vorming speelt een grote rol.⁴

Jonge kinderen (± 10 à 12 jaar) lijken meer geneigd om gewoon 'wat getallen te proberen. Ouderen zeggen dat ze dat te veel werk vinden (noemen het wel als alternatief). Kennelijk bedenkt men niet dat een iteratieve methode heel goed kan werken (zeker als je begint met de aanname dat er alleen met hele minuten gewerkt wordt). De Havo-3 leerling lijkt het 'gokken' ook alleen te kiezen omdat hij geen zin in wiskunde heeft, althans dat wat hij onder wis- kunde verstaat. Maar dan is er gelukkig die 5-gym- leerling. Is die echt 'verstandig'?

- 3 De methode 'gericht gokken'/'proberen via redelijke schatting' krijgt bij bespreking achteraf vaak het predikaat slim mee. Soms zelfs 'het meest wiskundig omdat het het snelst en het makkelijkst is'!!

Voorbeeld: Het is later dan 8.04 uur.

Het tijdsverschil tussen Marieke en Hen-

rike is 7 minuten (8.20 en 8.13 uur). Hun afstanden tot de echte tijd verhou- den zich als 3 : 4. 8.16 proberen. Ja, dat klopt.

Voorbeeld: Marieke en Henrike zitten er vlak bij, dus zal de tijd wel tussen 8.13 en 8.20 zitten. Marieke zal wel voorlopen en Henrike achter.

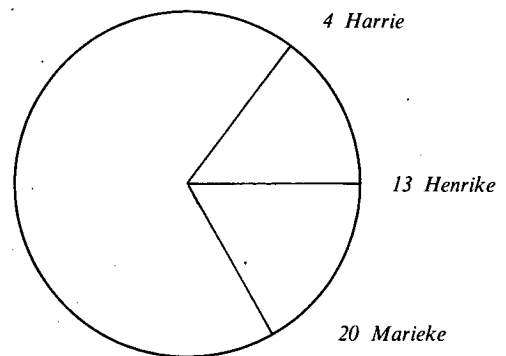
De waardering voor deze aanpak zit hem vermoede- lijk deels in het feit dat het louter algoritmisch werken doorbroken wordt door schatten. Er is hier echter sprake van meer dan alleen wat proberen en schatten; het is een proberen gecombineerd met gezond verstand. En dan blijkt dat het helemaal niet zo hoeft te zijn dat je 'uitkomt op een methode, waarbij het gaat om het opstellen en oplossen van een vergelijking'.

- 4 Slechts een enkeling maakt bij het aanpakken van het probleem een plaatje (klok, getallenlijn, grafiek).

Met getallen ga je kennelijk rekenen en dan liefst algebraïsch, dus een onbekende noem je x of iets dergelijks.

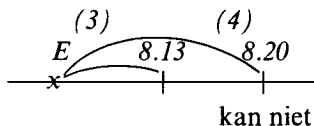
In ons onderwijs laten we misschien te weinig naar voren komen dat een plaatje als ondersteuning erg goed kan werken, ook als het toch om rekenen gaat.

Voorbeeld:

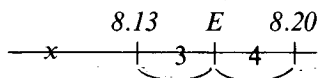


Een lerares Nederlands/geografie tekende deze klok en pakte twee lucifers: één voor de juiste tijd en één voor Marie José. Ze 'zag' toen de oplossing.

Voorbeeld: $\begin{array}{ccc} 8.04 \text{ uur} & 8.13 \text{ uur} & 8.20 \text{ uur} \\ & \text{Henrike} & \text{Marieke} \end{array}$



verhouding $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$, dus 3 : 4 of 4 : 3.
Henrike is er dichterbij.



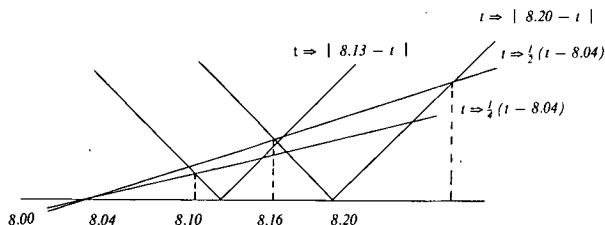
Dus 8.16 uur.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} 8.20 - t &= \frac{1}{3}(t - 8.04) \\ 8.13 - t &= \frac{1}{4}(t - 8.04) \\ |8.20 - t| &= \frac{1}{3}(t - 8.04) \\ |8.13 - t| &= \frac{1}{4}(t - 8.04) \end{aligned}$$

Ik probeer vervolgens na kwadrateren t op te lossen, maar dit lijkt mij in het 24/60-tallig stelsel te moeilijk.

Ik zie echter direct dat $t = 8.16$ voldoet. Uit het volgende plaatje zie ik dat dit de enige oplossing is.



Tegenwoordig probeert men het gebruik maken van tekeningen (plaatjes) te bevorderen. Het is te verwachten dat het louter algebraïsch-algoritmisch werken hierdoor doorbroken kan worden.

5 Het valt op dat – vrijwel onafhankelijk van de gekozen oplossingsweg – bijna iedereen stopt bij één antwoord (8.16 uur).

Een mogelijke verklaring kan gevonden worden in het op een bepaalde manier inleven in de situatie. In dit geval speciaal de situatie van Marie José die de juiste tijd kent. Er is maar één juiste tijd voor haar en vandaar uit heeft zij haar aanwijzingen gegeven. Dat er bij die aanwijzingen (en de verdere gegevens) mogelijk nog een andere oplossing zou kunnen zijn komt bij haar en daardoor bij veel probleemoplossers niet op. Verder zitten er in de totale tekst een aantal richtinggevers, zoals de tijdstippen 8.04 uur, 8.13 uur en 8.20 uur. Je zoekt daar in de buurt, ook al door de aanduidingen ‘doet het heel behoorlijk’, ‘zit er vlak bij’. Een andere mogelijke verklaring is te vinden in het soort opgaven dat op school bij rekenen/wiskunde gemaakt is resp. wordt. Schoolopgaven leveren vrijwel altijd één oplossing; zo niet, dan is dat overduidelijk.

Een andere verklaring kan gevonden worden in het feit dat leerlingen meestal te werk gaan als practicus en niet als theoreticus. Hun opdracht is om een oplossing van het probleem te zoeken, een oplossing die acceptabel is in de klasse-situatie (of de experimentele situatie). In zo’n situatie is het het belangrijkste om effectief te zijn. De opdracht voor de practicus is om effectief te zijn en niet uitputtend. Het gaat er om een oplossing te vinden en niet om kennis te produceren. Daardoor zal de probleemoplosser geen noodzaak voelen om meer denkwerk te verzetten dan nodig is voor het vinden van een oplossing.

Edward A. Silver schrijft in een artikel⁷ over het uitgebreide onderzoek van Schoenfeld over probleemoplossen o.a.:

As a result of their experiences in mathematics classrooms, students develop a set of beliefs about mathematics and about mathematical problem solving. According to Schoenfeld and others the majority of high school students agree that ‘mathematics is mostly memorization’ and that ‘there is usually one right way to solve every mathematics problem’.

6 *Veel mensen vinden het moeilijk om te zeggen (of op te schrijven) waarom zij een bepaalde oplosmethode kiezen (of juist niet kiezen). Toch lukt het' – met enige moeite – vaak wel.*

Voorbeelden

- *Proberen door gokken kan bij mij uren duren. Ik vertrouw mezelf dan nooit. Ik doe het dus maar met vergelijkingen, daar voel ik me het veiligst bij.*
- *Ik ben gewend met vergelijkingen te werken (algebraïsche opvoeding gehad). Dat lukt me meestal wel en dat is prettig.*
- *(Iemand die de opgave terzijde schoof.) Ik denk dat ik er niet uit kom. . . dan zeg ik liever dat ik er geen zin in heb. . . Ga ik tenminste niet af.*

Er is een dubbele verklaring voor de moeite die het expliciteren van een aanpak, én de keuze van juist die aanpak, kost. Ten eerste vereist het een afstand kunnen nemen en een terugblikken op de eigen aanpak (een hoger niveau van denken). Ten tweede is het veelal niet gebruikelijk in ons klassikale onderwijs (maar helaas ook niet in ons meer geïndividualiseerde onderwijs). Vlug door naar de volgende opgave is maar al te vaak het devies.⁸

Onzes inziens is het zeer toe te juichen dat het bespreekbaar maken van verschillende – mogelijke – oplosmethoden op veel scholen en opleidingsinstituten opnieuw onder de aandacht is gekomen. Dit vermoedelijk mede onder invloed van IOWO, OW&OC, SLO e.a. In al het door deze instanties ontwikkelde materiaal zitten veel zgn. open-problemen. Dat wil zeggen problemen waarbij meerdere goede oplossingsmethoden gehanteerd kunnen worden. Ook de gevoelsmatige kant dient daarbij aan bod te komen. Dat blijkt nogal eens bereikt te kunnen worden via het verwoorden van het waarom-niet-kiezen van een bepaalde methode.

4 Wat is nu dat gewone gezonde verstand?

Wie daarop een antwoord kan geven mag het zeggen. Voor ons is het in ieder geval duidelijk dat het gebruiken van dat gezonde verstand gestimuleerd kan worden via de bespreking van 'open problemen' en de verschillende – soms verrassende – manieren van oplossen daarvan.

Voor al het bewust worden van

- het gevoelsmatige aspect (zie bijv. §3 de punten 1 en 6)
- de waardetoekenning (het geven van een waardering) aan bepaalde oplosmethoden (zie bijv. §3 de punten 2, 3 en 4)
- de 'verstandelijke' achtergrond van een bepaalde keuze (3, 4, 5, 6)

kunnen een aanzet geven tot een vruchtbaar bezig zijn met wiskunde leren resp. onderwijzen. Hierbij is het mogelijk dat de leerlingen leren om meer dan gebruikelijk te letten op de bij bepaalde opgaven gevolgde oplossingsprocedures.

Een Havo-4 leerling zei het aldus:

Ik kan nadenken over hoe ik nadenk.

Misschien ga ik dan wel beter nadenken.

Het is voor ons – mede door de bespreking en de analyses van de reacties op de klokopgave – opnieuw duidelijk geworden dat we door in onze wiskundelessen ons niet te expliciet op algoritmen te richten kunnen bijdragen aan de ontwikkeling van het 'gezonde verstand'. De keuze van geschikte opgaven is daarbij wel van groot belang. Een van de criteria voor geschiktheid is dat het eventuele gereken werkelijk met de context van de opgave te maken moet hebben. Naar aanleiding van de klokopgave zouden we daar aan toe willen voegen de eis dat het ook zinvol moet zijn om überhaupt te gaan rekenen.

We helpen de leerlingen met het ontwikkelen van hun 'gezond verstand' door aandacht te besteden aan hun oplossingsmethoden (waarbij het gebruik van plaatjes niet mag ontbreken) en de achterliggende intuïties. Dit ondersteunen we door het aanreiken van allerlei wiskundig gereedschap. Dat dit soms wel wat uit de hand loopt lijkt getoond te worden door het begin van de aanpak door de TH-student uit §2. Een ander werkte het probleem zelfs in zijn geheel op deze manier uit. Het lijkt er dus op dat we veel(?) leerlingen zo algebraïsch vóórprogrammeren, conditioneren.

De problematiek van veel bovenbouwleerlingen – in de overgang van de traditionele aanpak naar de open, contextrijke wiskunde – is daarvan een duidelijk voorbeeld.

Het vermoeden dringt zich op dat de uiteindelijke attitude van onze leerlingen ten aanzien van pro-

blemen – van welke aard ook – bepaald lijkt te worden door – aanleg
 – situatie
 – scholing.

De gevoelens ten aanzien van wiskundige problemen, door o.a. deze drie factoren ontstaan, spelen uiteraard een niet te onderschatten rol bij de hiervoor genoemde attitude.

Volgens Harm Boertien³ kunnen wij als docenten invloed hebben op die attitude door relatief veel aandacht te besteden aan:

- * *het plan volgens hetwelk men een probleem kan oplossen*
- * *het nagaan op welke wijzen het probleem vertaald kan worden*
- * *de logica volgens welke men oplossingsstappen achtereenvolgens gaat bedenken en uitvoeren*
- * *de criteria volgens welke men situaties en (tussen)-resultaten kan beoordelen en interpreteren.*

Wij zijn het hiermee eens en willen dan ook besluiten met hetgeen Harm schrijft over het bijbrengen van een wiskundige houding:

Het antwoord op de vraag hoe men leerlingen een wiskundige houding moet bijbrengen is niet alleen een zaak van het overdragen van een cognitief standpunt. Als men zich namelijk ertoe beperkt de leerlingen te vertellen hoe ze wiskundig verantwoord problemen dienen op te lossen, dan blijkt dit in de praktijk zeer weinig effect te hebben. De oplossing zou wel eens daarin kunnen liggen dat men met een opvoedingsgerichte benadering de leerlingen moet overtuigen van het nut en de wenselijkheid om een goede wiskundige houding na te streven. In het bijzonder zal dit moeten gebeuren wanneer men met de leerlingen gaat bespreken hoe men opgaven kan aanpakken.

*Aanbevolen als oplossing voor problemen met klok kijken:
 Kubusvormige zonnwijzer (Science Museum, Londen)*

Literatuur

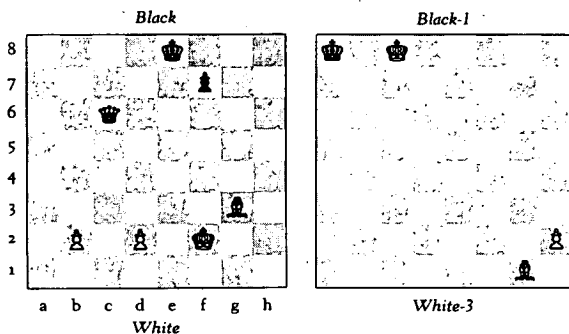
- 1 Balacheff, Nicolas: *Cognitive versus Situational Analysis of Problem-Solving Behaviors*. In: *For the Learning of Mathematics* 6, 3, Nov. 1986.
- 2 Bishop, Allan J.: *Implications of research for mathematics teacher education*. In: *Journal of Educational Research* Vol. 8, No. 2, May 1982.
- 3 Boertien, H.: *Doelen en toetsing bij toegepaste wiskunde. Een verkenning II*. In: *Euclides* 62, 9, juni/juli 1987 (p. 275).
- 4 Carpenter, Thomas P.: *Students Affective Responses to Mathematics: Results and Implications from National Assessment*. In: *Arithmetic Teacher* 28 (Oct. 1980).
- 5 Lange Jzn, Jan de: *Mathematics, Insight and Meaning*. OW&OC, Utrecht 1987.
- 6 Staring, M., Nieuwe Meyer M.: *Wiskunde, heuristiek en HEURISTIEK*. In: *Nieuwe Wiskrant* 6, 3, april 1987 (p. 24).
- 7 Silver, Edward E.: *A Window and a Frame* (review van het boek *Mathematical Problem Solving* bij Alan H. Schoenfeld). In: *Journal for Research in Math. Education*.
- 8 Sowder, Larry: *The looking-back step in Problem Solving*. In: *Mathematics Teacher*, Oct. 1986.

- * Met mathematiseren wordt hier – zoals A. Treffers dat zo mooi zegt – bedoeld ‘een organiserende en structurerende activiteit volgens welke verworven kennis en vaardigheden worden ingezet om nog onbekende regelmatigheden, verbanden en structuren op te sporen’.



Enige tijd geleden is overleden dr. R.S. Tjaden Modderman. Sommige lezers zullen zich de opgaven van zijn hand over getaltheoretische problemen in deze rubriek herinneren. Uit zijn nalatenschap kreeg ik een aardig boek: Raymond Smullyan, *The Chess Mysteries of Sherlock Holmes* (Alfred A. Knopf, New York). Bij schaakproblemen is het gebruik een stand te geven en te vragen welke gevolgen hieruit kunnen voortvloeien. Smullyan houdt nu eenmaal niet van het inslaan van gebruikelijke paden. Hij geeft dus een stand en vraagt: hoe kan deze stand ontstaan zijn?

Hieronder een paar opgaven uit dit bij tijd en wijle vermakelijke boekje.



582.

Gevraagd wordt of er gedurende dit spel een witte pion gepro-moveerd is. (*Figuur 1*)

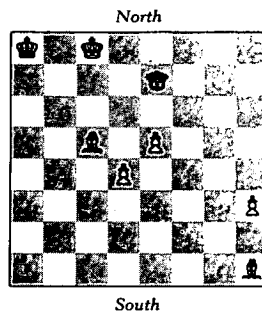
Een vrij simpel probleem, dat Smullyan in de inleiding heeft gezet. Maar het wordt interessanter.

583.

De laatste zet werd gedaan door zwart. Welke zet was dat? En welke zet deed wit daarvoor? (Figuur 2)

584.

Als resultaat van een partij schaak werd deze stand bereikt, uiteraard op legale manier. Wie van beide spelers, North of South, was wit?

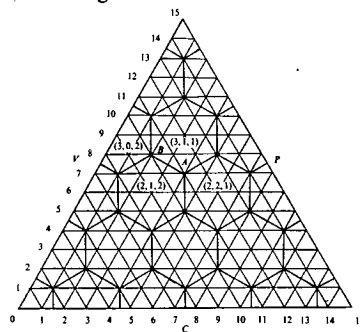


585. Tot slot een vraag die ik niet zal beantwoorden. Ik laat aan de lezer over mij binnen een maand een oplossing toe te zenden. De witte pion op e5 in de vorige opgave vervangen we door een witte pion op d6. De vraag blijft onveranderd: wie was wit? (De onderste lijn heet a-lijn, ongeacht welke speler wit is.)

Oplossingen

576 Uit een stadsraad worden vijf wethouders gekozen. Er zijn drie partijen, *C*, *V* en *P*. De zetels worden verdeeld naar evenredigheid van de aantallen op de partijen uitgebrachte stemmen. Verhouden deze aantallen zich als resp. 2,76, 0,85 en 1,39 (som 5), dan krijgt in eerste instantie *C* 2 wethouders, *V* geen en *P* 1 wethouder. Daarna *C* en *V* nog één restzetel, omdat hun resten de grootste zijn.

Teken een gelijkzijdige driehoek en noem de zijden C , V en P . Kies als hoogte 5. Teken het punt waarvan de afstanden tot C , V en P resp. gelijk zijn aan 2,76, 0,85 en 1,39. Bij dit punt hoort de zetelverdeling (3, 1, 1). Verdeel deze driehoek nu in gebieden met constante zetelverdeling.



We zoeken eerst de punten waar drie gebieden samenkomen, dus waar de aantallen reststemmen gelijk zijn. Zo'n punt is het punt waarbij de stemmenverhouding $2\frac{1}{3} : 1\frac{1}{4} : 1\frac{1}{2}$ hoort. De afstanden van dit punt tot de zijden C , V en P zijn resp. $\frac{7}{30}$, $\frac{4}{15}$ en $\frac{4}{5}$. In de figuur is dit het punt A . In A komen drie gebieden samen,

namelijk (3, 1, 1), (2, 2, 1) en (2, 1, 2).

Evenzo is B het punt waarvan de afstanden tot de zijden $\frac{8}{3}$, $\frac{2}{3}$ en $\frac{2}{3}$ zijn. Hier komen dus samen de gebieden (3, 0, 2), (2, 1, 2) en (3, 1, 1).

Lijnstuk AB is dus grens van twee gebieden, nl. van (3, 1, 1) en (2, 1, 2).

Zo voortgaande verkrijgt men een verdeling van de driehoek in regelmatige zeshoeken of gedeelten daarvan.

Een oplossing werd ontvangen van W. M. Banis (Laren NH). Hij stelt de stimulerende vraag of er ook een oplossing voor dit probleem bekend is in het geval dat er vier partijen zijn. M.i. moet dat analoog lukken met behulp van een regelmatig viervlak. De vier zijvlakken zullen er net zo uitzien als onze driehoek van hierboven. Het binnengedeelte wordt moeilijker. Dit wordt verdeeld in veelvlakken. Het lijkt me de moeite waard de structuur van zo'n veelvlak op te sporen. Voor deze rubriek gaat dat wat te ver.

577. Hieronder is 10 op alle mogelijke manieren geschreven als som van positieve natuurlijke getallen. a_i betekent: de som van i getallen a .

10	$9 + 1$	$8 + 1_2$	$7 + 1_3$
$8 + 2$	$7 + 2 + 1$	$6 + 2 + 1_2$	$5 + 2 + 1_3$
$7 + 3$	$6 + 3 + 1$	$5 + 3 + 1_2$	$4 + 3 + 1_3$
$6 + 4$	$5 + 4 + 1$	$4_2 + 1_2$	$3 + 2_2 + 1_3$
$6 + 2_2$	$5 + 2_2 + 1$	$3_2 + 2 + 1_2$	
5_2	$4 + 3 + 2 + 1$	$2_4 + 1_2$	
$5 + 3 + 2$	$3_3 + 1$		
$4_2 + 2$	$3 + 2_3 + 1$		
$4 + 3_2$			
$4 + 2_3$			
$3_2 + 2_2$			
2_5			

$6 + 1_4$	$5 + 1_5$	$4 + 1_6$	$3 + 1_7$
$4 + 2 + 1_4$	$3 + 2 + 1_5$	$2_2 + 1_6$	
$3_2 + 1_4$			
$2_3 + 1_4$			
$2 + 1_8$	$1 + 1_9$		

Tel het totaal aantal termen en tel daarbij a_i voor 1 term. Tel ook het aantal getallen 1 en tel daarbij 1_i voor i getallen. De uitkomsten zijn gelijk.

Dit geldt ook als men 10 vervangt door een willekeurig positief geheel getal n .

Bewijs met volledige inductie. Voor $n = 1$ is het evident. Met behulp van bovenstaand schema laat ik zien dat uit de juistheid voor n de juistheid voor $n + 1$ volgt. I.c. is dan $n = 9$.

Het schema voor $n = 9$ krijgen we door de eerste kolom weg te laten en uit de kolommen 1-9 krijgen we door de eerste kolom weg te laten en uit de kolommen 1-9 in elke regel 1 term 1 weg te laten. Neem aan dat voor $n = 9$ de bewering juist is.

Hoeveel termen worden toegevoegd als we van $n = 9$ overgaan

op $n = 10$? Allereerst het aantal termen in kolom 10. Verder wordt in kolom 9 in elke rij een term 1 toegevoegd en wordt het aantal termen in elke rij dus met 1 vermeerderd. Daardoor worden er nog toegevoegd evenveel termen als er rijen in kolom 9 zijn.

Hoeveel getallen 1 worden er toegevoegd bij de overgang van $n = 9$ op $n = 10$? Evenveel getallen 1 als er in totaal rijen zijn in de kolommen 1-9.

We moeten dus aantonen:

aantal termen kolom 10 = totaal aantal rijen in de kolommen 1-8.

We moeten dus een bijectie ontwerpen van de termen in kolom 10 en de rijen in de kolommen 1-8. Dit lukt als volgt. Ik kies een rij in kolom 10 bijv. $5 + 3 + 2$.

Aan de term 5 voeg ik toe de rij $3 + 2 + 1_5$

aan de term 3 voeg ik toe de rij $5 + 2 + 1_3$

aan de term 2 voeg ik toe de rij $5 + 3 + 1_2$.

Ik doe het nog één keer. Ik kies in kolom 10 de rij $4 + 2_3$.

Aan de term 4 voeg ik toe de rij $2_3 + 1_4$

aan de term 2_3 voeg ik toe de rij $4 + 1_6$.

Op deze manier komt een bijectie tot stand.

Het algemene bewijs gaat net zo, maar is aanmerkelijk moeilijker te volgen.

Rectificatie

Wij ontvingen een reactie op het artikel Sport en Wiskunde (Euclides 3 van deze jaargang) van Dr. P. W. H. Lemmens van het Mathematisch Instituut in Utrecht.

Het gaat om de bewering: loopgrafiek (3) is niet realiseerbaar omdat bij de start snelheid en versnelling beide nul zijn. Met deze argumentatie is de heer Lemmens het terecht niet eens. Hij neemt als voorbeeld de loopfunctie $s(t) = 2t^3$. Ondanks dat snelheid en versnelling voor $t = 0$ hier beide ook nul zijn, is de grafiek wel realiseerbaar. Immers als uitkomst voor de looptijd over de 100 m vinden we 9,2 s.

Dr. Lemmens bewijst waarom loopgrafiek (3) toch niet op de volgende manier kan.

Neem twee punten op de s -as op afstanden a en b van het nulpunt, waarbij $a > 0$, $b > 0$ en $b > a$.

Dan is de tijd om in $s = b$ te komen groter dan om in $s = a$ te komen. Voor de gestelde functie $v(s) = 0,16s$ geldt dan voor de tijd om van $s = a$ naar $s = b$ te gaan:

$$t = \int_a^b \frac{1}{0,16s} ds = \frac{1}{0,16} (\ln b - \ln a)$$

Hiervan is de limiet voor $a \downarrow 0$ oneindig en dus kan de loper nooit vanuit het startpunt het punt $s = b$ bereiken.

Henk Mulder

Mededelingen

Zesde ICME-congres

Het 'Sixth International Congress on Mathematical Education' wordt gehouden van 27 juli tot 3 augustus 1988 in Budapest. Aanmelding kan plaatsvinden tot 29 februari a.s. via Malév Air Tours – Congress Department, Roosevelt tér 2, Budapest, Hongarije, H - 1051. Voor informatie kan men zich wenden tot: Ms. Elisabeth Szentirmai of Mr. Barna Tarnóczy van Malév Air Tours, tel. (36)-1-187-836, telex 224954 malev h. Indien betaald voor 15 mei 1988 bedragen de deelnamekosten \$ 180. Een niet-deelnemende partner betaalt \$ 50. Voor overnachting zijn hotels in vier categorieën beschikbaar, variërend van 35 tot 140 dollar per nacht voor een tweepersoons kamer (logies en ontbijt). Verder zijn er goedkopere studenten-hotels.

Subsidie ICME-6

Van 23 juli tot 3 augustus 1988 wordt in Budapest het 6e ICME-congres gehouden. Evenals voor vorige congressen heeft het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een bedrag beschikbaar gesteld om deelnemers aan dit congres te subsidiëren. Deze subsidie bedraagt in totaal maximaal f 4500,-. Zij die voor subsidie in aanmerking wensen te komen, moeten dit vóór 1 maart aan de secretaris berichten. Met de aanvragers zal contact worden opgenomen om te overleggen hoe de vereniging van hun ervaringen op het congres kan profiteren.

J. Maassen

COI-Knipselkrant wordt O&I-Nieuws

Met ingang van december 1987 ondergaat de door het Centrum voor Onderwijs en Informatietechnologie (COI) maandelijks uitgegeven Knipselkrant een sterke verandering. Vanaf dat ogenblik zal namelijk dit periodiek, dat reeds vijf jaar op de markt is, onder de naam O&I-Nieuws (maandelijkse berichtgeving over onderwijs en informatietechnologie vanuit het COI) verder gaan. De knipsels uit de algemene dag-, week- en maandbladen, die de inhoud van de Knipselkrant grotendeels bepalen, zullen in O&I-Nieuws maar één van de vele rubrieken vormen. Daarnaast komen er rubrieken met korte beoordelingen of beschrijvingen van (nieuwe) buitenlandse software, signaleringen van interessante, recent bij het COI binnengekomen publikaties.

De reden voor deze vernieuwing is gelegen in de duidelijke toenemende behoefte aan meer diepgaande informatie op het terrein van onderwijs en informatietechnologie, die in den lande blijkt te leven. Om daaraan tegemoet te komen, wordt O&I-Nieuws uitgegeven. Het richt zich in de eerste plaats op al die deskundigen uit onderwijsverzorging, scholing en nascholing, overheid en bedrijfsleven, die er behoefte aan hebben te weten wat er maandelijks aan nieuws verschijnt, maar die de tijd niet hebben om dat allemaal zelf bij te houden. Door O&I-Nieuws te lezen, kunnen zij er verzekerd van zijn dat ze op de hoogte blijven van de meest recente ontwikkelingen.

De aflevering die in de eerste helft van december verschijnt, is een proefnummer. Een jaarabonnement gaat in per 1 januari 1988. O&I-Nieuws zal elf maal per jaar verschijnen en kost f 45,- (Bfr. 860), inclusief verzendkosten.

Nadere inlichtingen: COI, tel. 053-892741.

Staatsexamen Wiskunde M.O.-A en M.O.-B

Degene die in 1988 wil deelnemen aan het staatsexamen wiskunde m.o. A of -B, af te nemen door de *Algemene Commissie*, dient zich vóór 1 mei 1988 aan te melden – uitsluitend door middel van een briefkaart – bij de voorzitter van de examencommissie wiskunde m.o., Aardbeistraat 11, 2564 TM 's-Gravenhage, met vermelding van volledige naam en adres van de kandidaat en met nauwkeurige vermelding van de onderdelen die men wenst af te leggen.

Na 1 mei 1988 ontvangen de aangemelde kandidaten nadere instructies van de examencommissie.

Het schriftelijk gedeelte van het examen (zowel A als B) wordt afgenomen op donderdag 25 en vrijdag 26 augustus 1988.

De kandidaten worden geëxamineerd volgens het programma, zoals omschreven in het 'Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde', jrg. 63, afl. 2, november 1975, bldz. 86-93. Men kan dit programma verkrijgen door storting van f 3,50 op girorekening 172007 t.n.v. de voorzitter van de examencommissie wiskunde m.o. te 's-Gravenhage onder vermelding van: 'examenprogramma A' (resp. B).

Boekbesprekingen

Dr. F. Verhulst, *Niet lineaire differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 269 blz., f29,50.

'Het gebied van de niet lineaire differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen worden gekenmerkt door vele moderne ontwikkelingen, die mogelijk zijn gemaakt door computer- en storingsmethoden en door het gebruik van nieuwe methoden uit de abstracte analyse en de differentiaaltopologie. Uitgaande van elementaire kennis van de differentiaalvergelijkingen leidt dit boek in op die moderne ontwikkelingen. Hierbij komen zowel de kwalitatieve als de kwantitatieve aspecten tot hun recht.'

Om een indruk van het werk te geven volgt hier een overzicht van de inhoud:

Inleiding; autonome vergelijkingen; kritieke punten; periodieke oplossingen; inleiding in de stabiliteitsanalyse door lineairiseren; stabiliteitsanalyse met de directe methode; inleiding in de storingsrekening; de Poincaré-Lindstedt methode; de middellingsmethode; relaxatietrillingen; de theorie van vertakkingen; chaos; Hamilton stelsels.

In drie aanhangsels zijn opgenomen:

het lemma van Morse; lineaire periodieke vergelijkingen met een kleine parameter; trigonometrische formules en gemiddelden. Het boek wordt besloten met een literatuurlijst en een lijst van trefwoorden.

Bestemd voor studenten wiskunde, natuurwetenschappen en technische wetenschappen vereist het bestuderen van dit werk een zekere voorkennis van de analyse en de differentiaalvergelijkingen (door de schrijver geschat op ongeveer derde jaar universiteit/Technische Hogeschool).

Een uitnemend leerboek dat de stof op een heldere wijze presenteert. Het werk ziet er bovendien zeer verzorgd uit.

W. Kleijne

Crown, Fenrick, Valenza, *Abstract Algebra*, Marcel Dekker, New York, \$39.00, 416 blz.

De schrijvers hebben zich ten doel gesteld een cursus samen te stellen die geschikt zou zijn als leerboek voor een uitgebreid basisprogramma algebra. Resultaat is een boek dat de gebruikte

lijke onderwerpen behandelt: groepen, werking van groepen en oplosbare groepen, ringen, factorisatie in commutatieve ringen; algebra's, modulen en vectorruimten; lichaamsuitbreidingen en Galoistheorie.

In een tweetal appendices wordt aandacht besteed aan het Keuzeaxioma en het lemma van Zorn, respectievelijk aan categorieën en functoren.

Een korte bibliografie en een uitgebreide index sluiten het boek af.

De auteurs zijn er in geslaagd de stof op overzichtelijke wijze te presenteren. Een groot aantal voorbeelden illustreren de geïntroduceerde begrippen of leiden nieuwe onderwerpen in. Elke paragraaf is voorzien van een aanzienlijke lijst oefeningen, variërend van directe toepassingen van stellingen tot pittige opgaven.

Geen boek met spectaculaire vernieuwingen maar een prettige handleiding, zowel voor cursussen als voor zelfstudie.

Harm Bakker

P. Bockstaele, *Gielis van den Hoecke en zijn sonderlinghe boeck in dye edel conste arithmetica*.

Het onderhavige werkje is verschenen in de 'Mededelingen van de Koninklijke Academie voor Wetenschappen, Letteren en Schone Kunsten van België', jaargang 47, 1985, nr. 1, als overdruk uit 'Academiae Analecta'.

Oorspronkelijk verschenen in 1537 neemt het werk van 'Gielis van den Hoecke volgens de schrijver een bijzondere plaats in onder de mathematische werken die in de Nederlanden voor 1550 verschenen, zowel door de degelijkheid als door de verscheidenheid van de behandelde onderwerpen.

De auteur stelt zich in zijn studie van dit werk ten doel antwoord te krijgen op de vragen 'wie is Gielis van den Hoecke, wat is de inhoud van zijn arithmetica en welke bronnen heeft hij gebruikt'.

De resultaten van zijn studie heeft de schrijver vervat in dit 29 pagina's tellend werkje. Zijn beschrijvingen zijn uitermate helder en verhelderend. Op bovengenoemde vragen geeft de schrijver duidelijk antwoord. De persoon Van den Hoecke wordt duidelijk geschetst, de bespreking van het 'sonderlinghe boeck' maakt overduidelijk dat de auteur Van den Hoeckes werk een bijzondere plaats laat innemen.

Diegenen die geïnteresseerd zijn in historische beschouwingen t.a.v. de wortels van het rekenen/de wiskunde kan ik de lezing van dit werkje van harte aanbevelen.

W. Kleijne

M. M. Schiffer, L. Bowden, *The Role of Mathematics in Science*, uitg.: Math. Ass. of America, John Wiley, £ 14.70, 207 blz.

Aan de hand van een aantal onderwerpen laten de schrijvers zien dat in de natuurkunde een grote rol is weggelegd voor de wiskunde. Zo wordt in hoofdstuk 1 de evenwichtswet van Archimedes toegepast om het massamiddelpunt van een driehoek te vinden en de oppervlakte onder een parabool uit te rekenen.

De methoden van Galileo en Stevin voor het hellend vlak worden gepresenteerd en gevolgen afgeleid.

In de andere hoofdstukken komen aan de orde: groeifuncties, optoca, matrices en transformaties, Einstein's transformaties, relativistische snelheden en energie.

De voorkennis die is vereist gaat niet uit boven havo-stof. Daarmee is allerm minst gezegd dat de auteurs alleen eenvoudige toepassingen van wiskunde laten zien. Ook wordt niet de hand gelicht met de exactheid van redeneringen.

'The best way to learn mathematics is to do mathematics'. Ieder hoofdstuk is voorzien van een aantal oefeningen die met wat doorzetting zeker zijn te maken.

Een erg aardig boek voor een ieder die directe toepassingen van de wiskunde in de natuurkunde wil zien, zonder zich in die discipline zelf te hoeven verdiepen.

Harm Bakker

Kalender

11 maart 1988: Eerste ronde Nederlandse Wiskunde olympiade
27 juli-3 aug. 1988: Budapest, ICME-Congres

VAN DER BLIJ 65

SYMPOSIUM EN FEEST

Ter gelegenheid van de 65ste verjaardag van Professor Frederik van der Blij en zijn afscheid als hoogleraar in de zuivere wiskunde en voorzitter van de vakgroep OW & OC zal er een feestelijk symposium worden gehouden op zijn verjaardag

vrijdag 13 mei 1988

georganiseerd door de vakgroepen Wiskunde en OW & OC der R.U. Utrecht.
Het programma bestaat uit drie delen:

1. Een symposium,
met name gericht op docenten van het voortgezet onderwijs
van 10.00 tot 14.30 uur (incl. lunch) in de Uithof
met drie prominente sprekers:
Dr. J.P. Hogendijk, Prof. Dr. J.J. Duistermaat, Prof. Dr. J.J. Seidel
2. Het afscheidscollege
van 16.00 tot 17.00 uur (Universiteitsgebouw, Domplein)
van Prof. Dr. F. van der Blij
gevolgd door een receptie
3. Een feestelijk koud buffet
van 19.30 tot 24.00 uur
onder de rook van Utrecht.

Aanmelding

1. Symposium
Door storting van fl 10,- op giro 5687875
i.n.v. Ellen Hanepen, OW & OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.
Na aanmelding volgt bevestiging en programma.
2. Afscheidscollege
Dit is openbaar.
3. Feest
Door storting van fl 37,50 op giro 5687875
i.n.v. Ellen Hanepen, OW & OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.
Na aanmelding volgt bevestiging en programma.

Attentie: De aanmeldingen worden in volgorde van binnenkomst behandeld.
Inlichtingen: Ellen Hanepen, 030 - 611611.

Boekbespreking

D. de Bock c.s., *Analyse, een intuïtieve kennismaking*, Acco Leuven/Amersfoort; 126 blz., B.Frs. 270,- / f17,-.

Dit boek kwam tot stand als begeleiding bij een cursus voor wiskundelaren in Vlaanderen, waarbij het ging om onderwijs aan allerlei soorten leerlingen die kiezen voor een beperkte cursus analyse.

Voor deze leerlingen is het toepassen van de geleerde wiskunde belangrijk. Een gevolg van dit standpunt is dat in het onderwijs relatief veel aandacht wordt besteed aan afgeleide functies en integraalrekening en minder aan limieten en continuïteit; het gaat er om de leerlingen voldoende houvast te geven voor een eerste kennismaking met de analyse.

Op uitgebreide wijze wordt de (toekomstige) wiskundeleraar duidelijk gemaakt hoe zij/hij voor de betrokken leerlingen het beste de leerstof kan aanbieden.

In enkele supplementen wordt wat dieper ingegaan op de begrippen limiet, continuïteit, differentiaal alsmede op de kettingregel en integratie door substitutie.

G. M. Hogewij

A. Heyting: *Projectieve Meetkunde*, Epsilon uitgaven, Utrecht; f25,50; 130 blz.

Het betreft hier een boekje dat eerder (1964) is uitgegeven bij Noordhoff-Groningen. Het is nu opgenomen als deel 5 in de Epsilonserie.

De auteur heeft gekozen voor een analytische opbouw van de projectieve meetkunde door uit te gaan van de theorie van de vectorruimten. Hierdoor ontstaat een eenvoudig toegankelijke cursus, waarin de klassieke onderwerpen ter sprake komen.

Ter informatie de titels van de hoofdstukken:

I: inleiding; II: projectieve ruimten; III: dualiteit; IV: de dubbelverhouding; V: projectieve afbeeldingen; VI: het reële projectieve vlak; VII: projectieve afbeeldingen van een lijn op zichzelf; VIII: projectieve afbeeldingen van een vlak op een vlak; IX: kegelsneden; X: projectieve afbeeldingen van kegelsneden; XI: affiene meetkunde; XII: gelijkvormigheidsmeetkunde en metrische meetkunde; XIII: bundels kwadrieken.

Elk hoofdstuk is voorzien van een serie opgaven.

Epsilon heeft hiermee wederom een uitstekend leerboek aan de verzameling toegevoegd.

Harm Bakker

Inhoud

G. Bakker, De Centraal Schriftelijke Eindexamens Wiskunde
Ibo/mavo eerste tijdvak 1987 121

Bestuur NVvW, Enquêtes examens wiskunde mavo/Ibo
1987 123

Bram van der Wal, Het examen wiskunde Ibo/mavo
1987 132

Adrian Oldknow, En als het model nu 's niet deugt? 137

Henny Susijn, Harrie Broekman, Achter-/voorlopende horlo-
ges 141

Boekbesprekingen 140, 150, 151, 152

Mededelingen 150

Recreatie 148

Rectificatie 149

Kalender 152

Adressen van auteurs

G. Bakker, p/a CITO, Postbus

H. G. B. Broekman, p/a P.D.J., Postbus 80120, 3508 TC
Utrecht

H. S. Susijn-van Zaale, Curaçaoweg 5, 6524 ST Nijmegen

A. van der Wal, Ordermolenweg 23, 7312 SC Apeldoorn