

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

63e jaargang
1987 | 1988
oktober

Euclides 2

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Drs H. Bakker
G. Bulthuis
W. M. J. M. van Gaans
M. C. van Hoorn (hoofredacteur)
Drs C. G. J. Nagtegaal
Drs A. B. Oosten (eindredacteur)
P. E. de Roest (secretaris)
Ir. V. Schmidt
Mw. H. S. Susijn-van Zaale
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)
A. van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12,
7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 55,- per verenigingsjaar;
studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de
V.V.W.L. f 37,50; contributie zonder Euclides f 30,-.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met
vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht
bij M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen. Zij
dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van
5 cm en een regelafstand van $1\frac{1}{2}$, bij voorkeur op Euclides-
kopijbladen. De redactiesecretaris P.E. de Roest, Blijhamster-

weg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-22027 stuurt des-
gevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van
een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het
nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52^c,
8932 CD Leeuwarden, tel. 058-135976.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de
leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan
F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 48,75. Een collectief
abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 29,50.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567,
9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen
tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend
nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag
leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde
van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers f 8,25 (alleen verkrijgbaar na vooruit-
betaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 39731 (Samsy).

Nederlandse vereniging van wiskundeleraren

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1986-31 juli 1987

Het bestuur was dit jaar tot 25 oktober als volgt samengesteld: voorzitter dr. Th. J. Korthagen, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester F. F. J. Gaillard, overige leden L. Bozuwa, dr. J. van Dormolen, C. Th. Hoogsteder, M. Kindt, F. J. Mathieu, mevr. drs. N. C. Verhoef en mevr. drs. J. van Vaalen. Op 25 oktober werden dr. J. van Dormolen en mevr. drs. N. C. Verhoef vervangen door mevr. A. F. S. Aukema-Schepel en L. Jacobs.

Op zaterdag 25 oktober werd de jaarvergadering gehouden in het gebouw van de SOL te Utrecht. Deze jaarvergadering werd gecombineerd met een studiedag die verzorgd werd door de Werkgroep van de didactiek van de Rijks Universiteit Groningen. Het thema van deze dag was 'Wiskunde 12-16'. De aanwezigen op deze dag konden deelnemen aan één of meer van de volgende werkgroepen: Longitudinale planning van het reken- en wiskundeonderwijs, Toepassingen van wiskunde in de onderbouwprogramma's, de DRIE-D show, Algebra anders?, Rekenen van 10 tot 16, Vereenvoudiging nomenclatuur, Heterogeen door de jaren heen, De computer als hulpmiddel binnen de wiskunde. Ook was er een forum met als onderwerp 'Wiskunde voor iedereen. Wat moet iedere Nederlander ten minste aan wiskunde hebben gedaan?'

Op de jaarvergadering werd dr. J. van Dormolen voor de vele verdiensten die hij het wiskundeonderwijs bewezen heeft, benoemd tot erelid van de vereniging.

Op zaterdag 28 maart hielden de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars hun twaalfde gemeenschappelijke studiedag te Kapellen in België. Op deze bijeenkomst werden de volgende voordrach-

ten gehouden: 'Getallen en Deeltermen' door prof. Jan van Geel van de RU Gent, 'Foutenverbetering op de Compact Disc' door prof. Jack van Lint van de TU Eindhoven en 'Variabelen op een thema: Permutaties' door Frank Laforce, oud-voorzitter van de VVWL.

Op 1 en 8 mei vonden examenbesprekingen plaats voor wiskunde lbo/mavo c en d in 16 plaatsen, voor wiskunde havo en wiskunde B vwo in 7 plaatsen en voor wiskunde A vwo in 10 plaatsen. Direct na het examen wiskunde mavo/lbo c en d is een groot aantal kandidaten geënquêteerd om een inzicht te krijgen in de manier waarop de leerlingen met de nieuwe vorm van het examen omgaan. De resultaten van deze enquête zijn nog in bewerking.

De samenwerking tussen de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs leidde onder andere tot het zenden op 23 september van een brief aan de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen waarin de besturen van beide verenigingen diverse knelpunten binnen het reken- en wiskundeonderwijs opsomden en verzochten de commissie Van der Blij zo spoedig mogelijk te installeren en de gelegenheid te bieden op praktische wijze aan de slag te gaan. Op 28 november reageerde de Staatssecretaris met een afschrift van haar brieven betreffende de instelling van een commissie ter ontwikkeling van het wiskundeonderwijs voor leerlingen van twaalf tot zestien jaar. Namens de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zijn in deze commissie benoemd dr. J. van Dormolen en mevr. F. R. M. Meester.

Op 6 april 1987 verscheen een circulaire met betrekking tot de invoering van wiskunde A en wiskunde B als examenvakken op het havo. Het bestuur heeft naar aanleiding van deze circulaire een brief aan de staatssecretaris geschreven waarin het zijn tevredenheid over de invoering van wiskunde A en B op het havo en de opzet van het experiment met de nieuwe examenprogramma's uit. Hiernaast heeft het bestuur ook zijn zorg geuit over het korte tijdschema voor de invoering van de nieuwe programma's en er op aangedrongen alsnog het tijdschema bij te stellen volgens het schema A van het definitieve rapport van de Werkgroep ter voorbereiding van het eindexamenprogramma wiskunde havo.

Dit jaar dreigde het blad 'Euclides' door gebrek aan

goede kopij en door het wegvallen van enige belangrijke medewerkers in de problemen te komen. Door de grote inzet van velen, onder de bezielende leiding van prof. dr. F. Goffree, is Euclides de problemen weer te boven gekomen. Een samenspraak tussen redactie, uitgever en bestuur heeft geleid tot een aantal veranderingen in de gehele structuur van Euclides. Een nieuw samengestelde redactie is met groot enthousiasme aan de voorbereiding van de volgende jaargang begonnen.

De in februari 1986 ingestelde 'Nomenclatuurcommissie' heeft dit jaar een tussenrapport uitgebracht voor de nomenclatuur bij de eindexamens wiskunde A.

Een werkgroep 'Differentiaalvergelijkingen' is zich dit jaar gaan bezighouden met het probleem van de 'differentiaalvergelijkingen en hun plaats in de wiskunde-examens.

In december verscheen een tweede uitgave van het 'Vademecum voor de wiskundeleraar'. Deze uitgave kon, evenals de eerste uitgave, verschijnen doordat dr. P. G. J. Vredenduin bereid was de redactie van dit vademecum te verzorgen.

De werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde' bestond dit jaar vijf jaar. Daarom organiseerde de werkgroep een lustrumdag op 21 maart met als thema 'Het beeld van de wiskunde'. De dag werd geopend door de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen, mevr. drs. N. J. Ginjaar-Maas en bestond verder uit een afwisseling van voordrachten en werkgroepen. Spreeksters waren Leone Burton, Marja Meeder en Heleen Verhage.

De nauwe samenwerking met de Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars uitte zich ook dit jaar onder andere in de gemeenschappelijke bestuursvergadering in september, de gemeenschappelijke studiedag in maart en bezoeken aan elkaars bijeenkomsten.

Het bestuur vergaderde dit jaar twaalf maal, waaronder eenmaal met de inspecteurs J. Boersma en drs. W. Kleijne.

Verslag van een ATM-conferentie

Huub Jansen

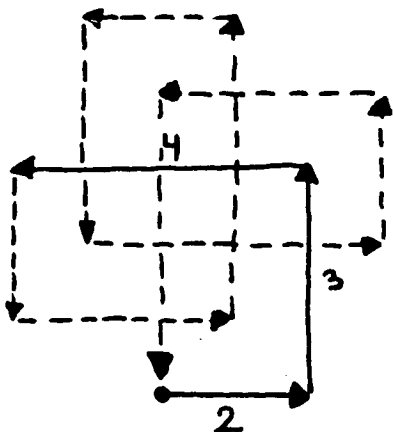
Van 13 tot en met 16 april 1987 werd in het Nene College te Northampton de traditionele Engelse Paasconferentie gehouden van de Association of Teachers of Mathematics, ATM. Een conferentie met bijna 300 deelnemers, afkomstig uit alle onderwijssectoren, van kleuterschool tot en met universiteit. Een heterogeen gezelschap, ook naar onderwijstaak: leraren, opleiders, begeleiders, onderwijsontwikkelaars en onderzoekers. Bovendien min of meer gelijk verdeeld naar sexe.

Het centrale thema van deze Paasconferentie was 'economy', niet in de betekenis van het ons bekende schoolvak, maar in de zin van 'zuinigheid': hoe kun je in je onderwijs zo goed mogelijk gebruik maken van de spaarzaam beschikbare tijd en hulpmiddelen? Een constructieve poging dus om een bijdrage te leveren aan de bezuinigingsmaatregelen die ook het werk van onze Engelse collega's zelfs al langer dan bij ons niet ongemoeid laten.

Geheel in de traditie van de ATM werd de inhoud van de conferentie niet bepaald door inleidingen en lezingen van externe deskundigen, maar vooral door de bijdragen van de in de onderwijspraktijk werkzame, eigen leden. Het conferentieprogramma bestond uit een 40-tal werk-sessies waarin, onder leiding van een leraar of begeleider, gewerkt werd aan wiskundige of wiskundig-didactische problemen. Dat daarbij het conferentiethema niet altijd even duidelijk uit de verf kwam, werd daarbij voor lief genomen. Wat de kleine groep Nederlandse deelnemers opviel, was hoe positief, ja zelfs weinig kritisch, gereageerd werd op datgene wat de inleiders hun gehoor presenteerden. Dit past in de traditie van de ATM-conferenties. Het doel is meer om

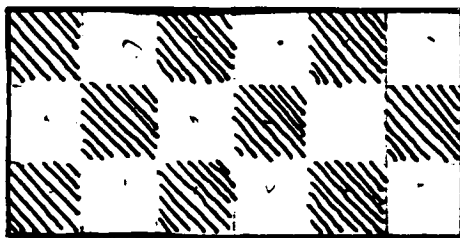
Een ander verschil is meer van inhoudelijke aard. Het sleutelwoord dat de ontwikkelingen in ons land kenmerkt, is 'realistisch wiskundeonderwijs'. In Engeland wordt de nadruk gelegd op 'investigations', in de betekenis van het aanbieden van open problemen binnen een *wiskundige* context die de leerlingen moeten aanzetten tot individueel of groepsgewijs onderzoek.

Ga hiermee door, telkens linksaf gaand en achter-eenvolgens 2, 3 en 4 aflegend.



Dit was een voorbeeld van een opgave die de conferentiedeelnemers direct bij binnenkomst aangebo-

En als dit eerste probleem was uitgewerkt, was een
volgend probleem beschikbaar:



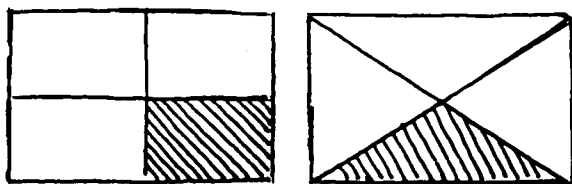
- Is het mogelijk met de ‘paardesprong’ alle velden van dit rechthoekig schaakbord te bereiken?
- Wat is de kleinste rechthoek (of het kleinste vierkant) waarbij met de paardesprong alle velden bereikt kunnen worden?
- Wat is de ‘goedkoopste’ of ‘duurste’ weg om met de paardesprong van veld 1 naar veld 100 op het honderdveld te komen?

- Hoe kunnen kleine groepen leerlingen door ‘star-

ters' (instaproblemen) gebracht worden tot nieuwe onderzoeksproblemen.

- Uitgaande van werkbladen met vierkanten zal worden nagegaan hoeveel en welke activiteiten uit een eenvoudig probleem afgeleid kunnen worden.
- U hebt schipbreuk geleden op een onbewoond eiland met een klas kinderen van verschillende leeftijden en bekwaamheden en bezit een onbeperkt aantal gekleurde plastic fiches. We gaan proberen hiermee voor deze leerlingen een wiskundeprogramma te ontwerpen.
- Het gebruik van rechthoeken om dozen en kledingstukken te ontwerpen.
- Welke activiteiten, spelletjes en onderzoeken zijn mogelijk met het honderdveld?
- Het gebruik van puzzels als integraal onderdeel van het leerplan en als hulp om problem-solving strategieën te ontwikkelen.

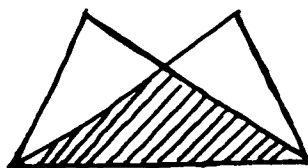
Passend binnen deze traditie van het Engelse wiskundeonderwijs met zijn nadruk op investigations, problem solving en vooral ook meetkundige activiteiten was de lezing door de bekende Amerikaanse wiskunde-didacticus Marion Walter, waarvoor in deze conferentie een centrale plaats was ingeruimd. Omringd door verpakkingsdozen, flessen van allerlei vormen en inhouden, vouwblaadjes, closetrollen en ander, letterlijk voor de hand liggend materiaal, en staande op een vloerbedekking van honderd tapijttegels, te zamen het honderdveld vormend, liet zij haar enthousiaste gehoor zien en meebeleven hoe met dit materiaal, en zonder wiskundeleerboeken, wiskundeonderwijs mogelijk is met meer 'doing, talking, problems and thinking'. Een kleine selectie uit de tientallen problemen die Marion Walter haar gehoor aan de hand van eenvoudig materiaal voortoverde:



Figuur 3 Servetten

- Op hoeveel manieren kun je een vierkant, rechthoek vouwen?

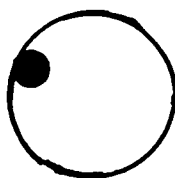
- Hoe weet een kind dat het gearceerde deel een kwart is?
- Wat is de oppervlakte van het 'gemeenschappelijk' deel van een gevouwen servet:



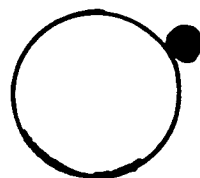
Figuur 4

Papierrollen:

- Hoeveel rollen passen erin? Hoe verhouden zich de oppervlakten? (figuur 5a)
- Hoeveel rollen passen er omheen? (figuur 5b)

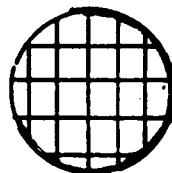


Figuur 5a



Figuur 5b

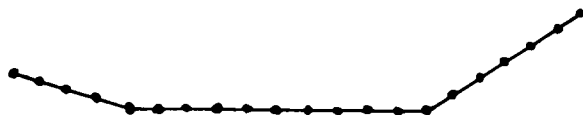
- Kijken door papierrol naar rooster geprojecteerd door overheadprojector: Hoeveel roostervierkantjes zie je? Waar moet je gaan staan om 2 keer zoveel, zo weinig vierkantjes te zien?



Figuur 6

Een duimstok met scharnierpunten om de centimeter:

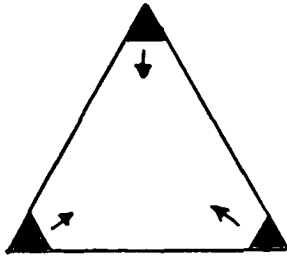
- Op welke plaatsen kun je vouwen om een driehoek te krijgen?



Figuur 7

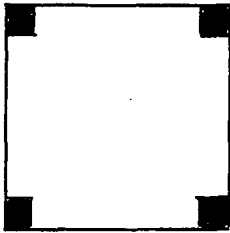
Visualiseren:

- Een driehoek met ‘afgesneden’ driehoekjes in de hoekpunten. Ogen dicht! In gedachten de kleine driehoekjes laten aangroeien. Welke regelmatige figuren kun je ‘zien’?



Figuur 8

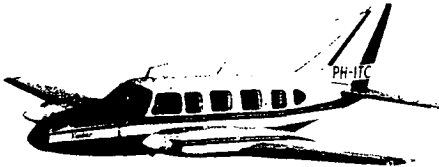
- Hetzelfde met een vierkant als beginfiguur, een vierzijdige piramide, een kubus.



Figuur 9

Real life-situaties:

- Ik vloog van Seattle naar Londen. Een vlucht van 8 uur. Ik vertrok om 12 uur 's middags. Tussen Londen en Seattle is het tijdsverschil 9 uur. Na 3 uur vliegen keek ik naar beneden, hoe laat is het daar?



Figuur 10

Uiteraard kent het Engelse wiskundeonderwijs ook andere, meer algemene problemen waaraan tijdens de conferentie aandacht werd geschonken, zoals:

- de betekenis van uitleggen voor het verschaffen van inzicht.

- verandering van onderwijsstijl.
- op welke wijze leraren kunnen bijdragen aan onderwijsinnovatie.
- de leraar in zijn rol als ‘onderzoeker’.
- het werken met minder begaafde kinderen.

Toch, bij bovengenoemde en hier niet genoemde conferentieonderwerpen, was het opvallend dat de inleiding steeds gehouden werd door een in de onderwijspraktijk werkzame leraar of begeleider en dat de discussies gevoerd werden op basis van ‘gelijkwaardigheid’ waarbij de deelnemers eigen ervaringen en voorbeelden aandroegen.

Ook de nieuwe wijze van examinering met bijbehorende ‘eindtermen’ en examenprogramma kreeg de nodige aandacht. Vooral door de uitgevers die materiaal presenteerden, gebaseerd op het nieuwe GCSE-examen (the General Certificate of Secondary Education) dat vanaf 1988 in Engeland en Wales van kracht wordt. Een ontwikkeling die sterk lijkt op de in ons eigen land in gang gebrachte discussie over de basisvorming en van belang om aandachtig te blijven volgen.

Hier volstaan we met een terugblik op deze ATM-conferentie waarbij de Engelse situatie vergeleken wordt met de onze:

- 1 De indruk wordt gewekt dat in Engeland de bij de ATM aangesloten wiskundeleraren een grote familie vormen. Niet alleen door de nadruk die gelegd wordt op sociale contacten, maar ook omdat het als normaal wordt beschouwd dat leraren uit diverse onderwijssectoren van kleuterschool tot universiteit met elkaar omgaan en bereid zijn van elkaar te leren. Ook de open en gemakkelijke wijze waarop onze Engelse collega's eigen onderwijservaringen ter discussie durven te stellen onderstreept dit. Wellicht een gevolg van de geïntegreerde opleidingen.
- 2 Het inrichten van het eigen onderwijs aan de hand van instapproblemen – starters – met het doel om leerlingen aan te zetten tot ‘investigations’ wordt sterk benadrukt. Het betreft hierbij vooral wiskundige probleemsituaties met als doel het ontwikkelen van wiskundige vaardigheden, het aanbrengen van een wiskundige denkhouding en het ontwikkelen van een probleemoplossend vermogen. Opvallend voor ons Nederlanders was daarbij dat weinig aandacht wordt geschonken aan het leren van algoritmische vaardigheden, zoals cijferend rekenen,

oplossen van vergelijkingen e.d. De indruk bestaat dat het gebruik van rekenmachientjes en computers niet alleen meer geaccepteerd is dan bij ons maar dat men in Engeland ook aanvaard heeft dat het verwerven van reken- en cijfervaardigheden hierdoor minder nadruk behoeft. Tevens valt op dat realistisch reken- en wiskundeonderwijs zoals in ons land vooral zichtbaar in Wiskobas- en Hewetmaterialen waarbij een concrete, veelal niet-wiskundige probleemsituatie uitgangspunt vormt voor wiskundige (leer-)activiteiten bij onze overzeese burens minder nadruk krijgt. Iets dergelijks geldt voor toepassingen. Wiskunde leren betekent niet direct het kunnen toepassen van geleerde kennis en vaardigheden in het praktische, dagelijkse leven maar veel meer in andere, nieuwe en complexere wiskundige situaties. En als sprake is van toepassen van wiskunde dan beperkt dit zich vooral tot 'physics' en 'engineering'.

In deze ATM-conferentie was uiteraard plaats ingeruimd voor de computer en voor course-ware, zowel in een aantal werk-series als in het tentoongestelde materiaal.

- 3 Opvallend voor ons Nederlanders was ook de geringe aandacht die gedurende deze conferentie geschonken werd aan leerprocessen bij leerlingen en aan het evalueren en toetsen van leerresultaten. Ook de voor Engeland nieuwe wijze van examinering, gebaseerd op nieuwe denkbeelden over basisvorming voor het voortgezet onderwijs (11-16 jaar), leidde er niet toe dat in het conferentieprogramma daaraan expliciet aandacht werd geschonken.
- 4 Tenslotte viel op dat onze Engelse collega's de inhoud en werkwijzen van hun onderwijs meer 'in eigen hand' lijken te hebben dan wij gewend zijn. Opmerkingen als 'dat is wel mooi, maar in verband met de exameneisen heb ik daar geen tijd voor' werden niet gehoord. Onderwijskundigen, onderzoekers en ontwikkelaars die nieuwe ideeën aanragen of ter discussie stellen zijn afwezig. En de wel aanwezige begeleiders zijn wiskundedocenten die tijdelijk dit werk verrichten en dus sterk met hun collega's en de onderwijspraktijk zijn verbonden. Ook de invloed van het schoolboek, de methode met zijn 'voorgeschreven' leerstof en leerstofsequentie is minder groot dan in ons land. Hetzelfde geldt voor de structuur, de opbouw van de wiskun-

de. Wiskundige problemen en activiteiten worden minder beoordeeld op hun betekenis als noodzakelijke, onmisbare bouwstenen van een totaalstructuur als wel beoordeeld op hun eigen mogelijkheden om tot zinvolle en stimulerende wiskundige activiteiten te komen.

Binnen een school of opleiding is het vooral het team van wiskundeleraren onder leiding van de 'head of the department' dat de inhoud en vormgeving van het wiskundeonderwijs bepaalt.

Over de auteur:

Huub Jansen is secretaris van de V.A.L.O. wiskunde/informatica.

Kan men nog rekenen op de Pabo?

Leen Bozuwa

Inleiding

Onder de titel 'Kan men nog rekenen op de Pabo?' (voor tweeërlei uitleg vatbaar?) is er onlangs een rapport verschenen dat in opdracht van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Rekenen Wiskunde Onderwijs (NVORWO) samengesteld is.

Omdat de conclusies uit dit rapport interessant kunnen zijn voor de wiskundeleraren uit het voortgezet onderwijs, wil ik het belangrijkste daaruit weergeven. Het is immers belangrijk voor leraren te weten welke voorgeschiedenis hun leerlingen hebben, op de hoogte te zijn van de mogelijkheden en onmogelijkheden van het basisonderwijs.

Verbetering

De gronddoelstelling van de NVORWO is het nastreven van verbetering van het reken- en wiskundeonderwijs aan leerlingen van vier tot veertien jaar. Daarom juicht de NVORWO de ontwikkelingen toe die zich op het gebied van de reken/wiskundemethodes voor de basisschool gedurende de laatste jaren hebben voltrokken. De kwaliteit van deze nieuwe, realistische methodes wordt alom, nationaal en internationaal, geprezen.

Deze methodes bieden de materiële voorwaarden tot een echte kwaliteitsverbetering van het aanvankelijk wiskundeonderwijs, waarvan het aloude rekenen nog steeds de ruggegraat vormt. Met de vernieuwing van de inhoud is ook een vernieuwing van didactische inzichten gepaard gegaan. Wat echter onveranderd blijft, is het gegeven dat de

vrouw of man voor de klas de spil is van het feitelijk onderwijs. Anders gezegd, zonder een leraar die het vak rekenen en wiskunde zowel inhoudelijk als didactisch goed beheerst, is de bedoelde verbetering kansloos.

Een vakbekwame leraar wordt men in de praktijk, maar een degelijke basis daarvoor dient gelegd te worden tijdens de opleiding. Dit betekent een opleiding van hoge kwaliteit voor gemotiveerde studenten die over voldoende capaciteiten beschikken om de benodigde startkwaliteit voor leraar basisonderwijs te verwerven.

Uit het hier te bespreken rapport laat zich echter de conclusie trekken dat er aan die voorwaarden steeds minder voldaan wordt. De basis voor het rapport vormt een enquête die een door de NVORWO ingestelde commissie heeft gehouden onder Pabodocenten Rekenen Wiskunde & Didactiek. Al tijdens de verwerking van de resultaten van deze enquête bleken de gegevens verouderd te zijn in verband met het opgaan van Pabo's in Hogescholen. Daarom heeft de commissie een aanvullende enquête gehouden. De resultaten van beide enquêtes zijn opgenomen als bijlagen bij het genoemde rapport.

Beschikbare uren

Voor de gehele opleiding varieert het aantal beschikbare uren voor het vak rekenen/wiskunde & didactiek, zo blijkt uit de enquête, tussen 130 en 304, 199 uren gemiddeld. Meer dan 80% van de ondervraagde docenten acht het hun toegewezen aantal uren ontoereikend om studenten een voldoende eindniveau te laten behalen. De docenten die het aantal uren wel toereikend vonden, hebben voor het merendeel zelf meer dan 220 uur. Het wenselijk geacht aantal uren varieert van 210 tot 480. Gemiddeld worden ruim 300 uren nodig geacht, hetgeen een forse uitbreiding van het huidige gemiddelde urenaantal zou betekenen.

In de jaren zeventig is door de afdeling Wiskobas (Wiskunde op de basisschool) van het toenmalige Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO) belangrijk ontwikkelwerk verricht ten behoeve van het reken- en wiskundeonderwijs op de basisschool. De resultaten van deze ingrijpende vernieuwingen, zowel inhoudelijk als

vakdidactisch, zijn thans terug te vinden in de nieuwe realistische reken/wiskundemethoden als 'Taltaal', 'De Wereld in Getallen' 'Rekenen & Wiskunde' en 'Rekenwerk'.

Voor de opleiding is in deze jaren door Goffree en Jansen een nieuw programma ontworpen. De drie essentiële elementen uit dit programma zijn de volgende:

- het vak: Er dient wiskunde bedreven te worden op eigen niveau. Daarbij wordt de wiskunde van het basisonderwijs als vertrekpunt gekozen.
- de vakdidactiek: Als aangrijpingspunten gelden hier zowel het zelf leren van wiskunde als het leerproces van de kinderen. Algemene didactiek, leerpsychologie en onderwijskundige theorieën worden beschouwd vanuit de mathematisch-didactische context van het leren onderwijzen.
- de stage: Hieraan wordt een centrale rol toegekend. Van meet af aan zal de student in de praktijk van het basisonderwijs zijn vakmanschap dienen te ontwikkelen.

Deze drie elementen dienen een organisch geheel te vormen, waarbij de vorm van de studie vooral gekenmerkt wordt door het principe van doen en denken door de student zelf. Dit in tegenstelling tot vóórdoen en vóórdenken door de docent.

Conclusie in het rapport: Rekenen/wiskunde & didactiek op de Pabo is in toenemende mate een ondergewaardeerd vak. En: voor rekenen/wiskunde & didactiek zijn goede opleidingsprogramma's voorhanden.

De faciliteiten om ze uit te voeren zijn veel te gering. Op de helft van de Pabo's wordt aan rekenen/wiskunde (dat op de basisschool 20% van het programma omvat) ongeveer één uur per week besteed.

Niveau van de studenten

Over het niveau van de studenten zijn onlangs op het gebied van het rekenen enkele harde cijfermatige gegevens ter beschikking gekomen. Binnen ruim één jaar (1986) zijn op grote schaal drie toetsen op de Pabo afgenomen. Dit zijn de toetsen van Jacobs (vakgroep onderwijskunde Utrecht), Cito (Van der Schoot e.a.) en de Inspectie (Gerritse e.a.). Hoewel deze toetsen voor verschillende doelen waren samengesteld, beoogden ze alle drie in ieder geval de eigen vaardigheid in het oplossen van basisschoolvaardigheden te onderzoeken.

De algemene gemiddeld goed scores luiden:

	gemiddeld aantal goede antwoorden	percentage
Jacobs	14 (van de 24)	58%
Cito	49 (van de 75)	65%
Inspectie	9 (van de 21)	43%

Uit het onderzoeksverslag van Jacobs blijkt dat 9% van de studenten minder dan een derde deel van de opgaven goed scoorden, 30% had minder dan de helft goed. Slechts 6% behaalde een voldoende resultaat: 20 of meer van de 24 opgaven goed. Het zijn allen studenten die het propaedeutisch examen (eind Pabo I) behaald hebben. Datzelfde geldt overigens ook voor het onderzoek van de inspectie.

De beheersing van de basisschoolsommen alleen is natuurlijk een te smalle basis voor een optimaal functioneren als basisschoolleraar. Het is slechts één van de elementen die kennelijk in de vooropleiding aan de orde moeten komen. Met name zal het nodig zijn de vakdidactische bekwaamheden te ontwikkelen, zoals het zelf op meerdere manieren kunnen oplossen van de vraagstukken, het kunnen anticiperen op mogelijke oplossingswijzen van kinderen en het kunnen diagnostiseren en remediëren van fouten. Er wordt wel eens beweerd dat de onderwijsgevende deze vaardigheden juist in functie wel zal opdoen, maar de ervaringen met nascholingscursussen voor rekenen maken het geschetste beeld niet florissant.

De eigen rekenvaardigheid van de studenten krijgt aparte aandacht op 90% van de Pabo's, met name in de eerste opleidingsjaren. De intensiteit waarmee dit plaatsvindt, verschilt enorm. Bijna 90% van de Pabo's toetst deze rekenvaardigheid ook, hoofdzakelijk schriftelijk. Slechts bij een kwart van de Pabo's moet de rekenvaardigheid (eventueel na herkansing) uiteindelijk voldoende zijn!

In het licht van een verdere academisering wordt tegenwoordig gesproken over een sterkere nadruk op zelfstudie en een vermindering van contact- en college-uren. 54% van de Pabo's acht dit wenselijk en haalbaar, terwijl 36% meent dat dit niet het geval is, met name omdat het vak rekenen/wiskunde & didactiek naar hun mening niet geschikt is voor zelfstudie en de studenten te weinig zelfstandig zijn. De vraag in de enquête in hoeverre het huiswerk door de studenten wordt gemaakt, kan over dit laatste punt opheldering geven. De resultaten

laten zien dat – voor zover er huiswerk wordt gegeven – maar een klein deel van de studenten dat naar behoren maakt.

De Pabo-docenten trachten een duidelijk verband te laten bestaan tussen de contact-uren en de stage-opdrachten voor rekenen/wiskunde & didactiek. Het verband met het algemene stageplan van het instituut laat echter in een groot aantal gevallen te wensen over. Met name de organisatie van de stage levert vaak problemen op. Op meer dan eenderde van de Pabo's worden de praktijkopdrachten dan ook niet of nauwelijks benut in de contacturen. Op de helft van de Pabo's wordt de integratie van theoretische, didactische en praktische vorming, zoals bedoeld in het programma van Goffree, niet realiseerbaar geacht. Daarbij worden als knelpunten genoemd: het geringe aantal uren, de organisatie van de stage, de geringe begeleidingsmogelijkheden, de verschillen in visie op onderwijs in opleiding en basisscholen en tenslotte de geringe afstemming van vakprogramma's op de Pabo.

Conclusies in het rapport:

- Het reken/wiskundeniveau van de studenten die op de Pabo worden toegelaten, is veel te laag. Zelfs aan de meest elementaire voorwaarde, namelijk beheersing van de stof voor de basisschool, wordt door het merendeel van de studenten niet voldaan.
- Er zijn tijdens en aan het eind van de opleiding te weinig garanties ingebouwd dat de aspirant leraar basisonderwijs voldoende startkwaliteit voor het vak rekenen/wiskunde bezit. Op een groot deel van de Pabo's kan men gediplomeerd worden met een onvoldoende voor rekenen/wiskunde & didactiek.
- Er bestaan te geringe mogelijkheden om vakspecifieke stagebegeleiding te realiseren. Tweederde deel van het aantal Pabo's kan geen vakgerichte praktijkbegeleiding realiseren.

Vakbekwaamheid docenten RWD

De kweekschool van 1952 en de latere Pa(bo) vielen onder de wet op het voortgezet onderwijs. Een docent rekenen diende in het bezit te zijn van een eerstegraads bevoegdheid wiskunde. Meer dan 90% van het docentenbestand in juni 1986 heeft die bevoegdheid. Vrijwel allen hebben door de kadervormende activiteiten van het voormalige IOWO en later het Panama-project specifieke deskundig-

heid op het gebied van de rekendidactiek verworven. Echter door de huidige fusies van verschillende HBO-instituten moeten er enerzijds bevoegde deskundige vakdocenten RWD verdwijnen, anderzijds doet zich op sommige instituten het verschijnsel voor dat er geen bevoegde vakbekwame docent RWD aanwezig is of aangetrokken kan worden. Op een totaal bestand van zo'n 80 RWD-docenten worden er nu reeds twaalf geteld die geen wiskundebevoegdheid bezitten én geen specifieke rekendidactische scholing hebben genoten. De toekomst onmiddellijk na 1990 ziet er zeer somber uit. In het algemeen geldt dat de personeelsplannen en de afvloeiingsregelingen die nu in de maak zijn, zoveel ruimte laten dat de vakbekwame vervanging van docenten die na 1990 hun taak beëindigen, allerminst gegarandeerd is. Ingeval van inkrimping van het studentenbestand moet een docent die zijn taak neerlegt worden opgevolgd door een collega uit het eigen instituut. Een collega die – wat RWD betreft – meestal niet uit dezelfde vaksectie en/of dezelfde soort opleiding stamt. Het enorme potentieel aan vakbekwaamheid is onbereikbaar geworden, omdat er eerst uit de eigen boventalligheid geput moet worden. Het kan echter nóg absurder: in sommige fusie-situaties moeten vakdocenten afvloeien op grond van anciënniteit en worden opgevolgd door (in rechtspositie) oudere collega's die zich eerst nog helemaal in het vak moeten bekwamen. Samenvattend: door de huidige fusies dreigt het bestand van bevoegde vakbekwame docenten RWD sterk uitgedund te worden en door de nieuwe bekostigingssystematiek voor het HBO worden in toenemende mate niet-vakdocenten voor het vak RWD ingezet.

Aanbevelingen

In het rapport wordt een aantal aanbevelingen gedaan die het verdienen, gezien de alarmerende situatie, ondersteund te worden door de wiskundeleraars in het voortgezet onderwijs. Want als bovengeschetste situatie niet verandert, zullen in de toekomst steeds meer leerlingen het voortgezet onderwijs binnenkomen die grote manco's in hun rekenvaardigheid vertonen en een wiskundige attitude bezitten waarmee de zozeer gewenste vernieuwing van het wiskundeprogramma nauwelijks realiseerbaar is.

De belangrijkste aanbevelingen die genoemd worden zijn:

- Rekenen/wiskunde en moedertaal zijn de cognitieve pijlers van het basisschoolprogramma. Dit zou weerspiegeld moeten worden in de status van het vak op de Pabo.
- Rekenen/wiskunde & didactiek dient een kernvak van het Pabo-onderwijs te zijn. Gezien de kwaliteit van de instroom is voor een optimale uitvoering van de voorliggende opleidingsprogramma's zeker 480 contacturen (3 uur per week) noodzakelijk.
- Voor toelating tot de Pabo zal in de toekomst geëist moeten worden dat de aankomende student ten minste het niveau van het nieuwe wiskunde-A-examen met goed gevolg heeft afgelegd.
- De student met een onvoldoende niveau voor RWD aan het eind van de opleiding mag niet gediplomeerd worden.
- Er dienen mogelijkheden geschapen te worden om vak, didactiek en stage geïntegreerd aan de orde te laten komen.
- Het vak RWD dient zoveel mogelijk in werkcolleges aan de orde te komen.
- Ontwikkeling van nascholingsprogramma's dient geïntensiveerd te worden.
- Versnippering van taken op de Pabo's zou voorkomen moeten worden. De vakdocenten zouden zich vooral op de initiële opleiding en nascholing moeten kunnen richten.
- Herplaatsing van bevoegde, vakbekwame docenten zal prioriteit moeten hebben boven het opvullen van opengekomen plaatsen door niet-vakdocenten. Het verdient aanbeveling een officiële opleiding voor opleiders te starten.

Bij het OW & OC is nog een beperkt aantal exemplaren van het rapport voor belangstellenden beschikbaar. Adres: Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, tel. 030-61 16 11.

Over de auteur:

Leen Bozuwa is leraar aan de Prinses Juliana Scholengemeenschap te Dordrecht en bestuurslid van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Hij was medeopsteller van het rapport: 'Longitudinale planning van het reken & wiskunde onderwijs', het z.g. fietsplan, dat onder auspiciën van de NWvW en de NVORMWO werd geschreven.

Robert Morris (ed.), *Studies in Mathematics Education*, volume 4, Unesco, f 50,-.

De ondertitel 'The education of secondary school teachers of mathematics' geeft het onderwerp van dit boek aan. Het sluit daarbij aan op deel 3 van de serie, dat voornamelijk over het primaire onderwijs handelt. Het boek valt uiteen in drie delen.

Part I: Contemporary trends in secondary school mathematics and their implications for teacher education.

In de diverse bijdragen onder dit hoofd komt duidelijk naar voren in welke richting het onderwijs in de wiskunde zich beweegt. Duidelijk is dat die zaken die in Nederland in het centrum van de belangstelling staan (zie Hewet en Hawex) passen in een ontwikkeling die op vele plaatsen op de wereld is waar te nemen. Om hiervan een indruk te geven volgen de titels van de bijdragen aan dit deel:

Problem-solving and teacher education: the humanism twist models and muddles (S. I. Brown); Environmental influences (U. d'Ambrosio); Reducing differences of mathematical expectations between boys and girls (E. Jacobson); Algorithms, calculators, computers (B. H. Blakeley); Algebra, analysis, geometry (D. A. Quadling); Statistics (A. Rade); Mathematics in other subjects (J. N. Kapur).

Part II: Support for teachers 'is devoted to providing support for classroom teachers'.

Support for teachers: the mathematics department (K. Lewis); Mathematics teachers association (J. Surányi); The in-service education of secondary school mathematics teachers (F. I. Mikhail, F. M. Mina).

Part III: geeft twee case studies betrekking hebbend op respectievelijk Zimbabwe en China.

Het boek wordt besloten met enige biografische notities. Al met al een boek met een rijke, gevarieerde inhoud, dat ik gaarne in de aandacht van velen aanbeveel.

W. Kleijne

Transfertest halfweg

Jacob Perrenet, Wim Groen

1 Inleiding

In een vorig artikel in *Euclides* (Perrenet, 1985) werd al één en ander verteld over het onderzoek uitgevoerd door psychologen en wiskundendidactici van de Vrije Universiteit en deels gefinancierd door de Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs. Daar werden doel en opzet uitgebreid beschreven. Samengevat komt het hierop neer:

Er wordt een test geconstrueerd voor eind-derde klassers van het vwo, waarmee gemeten wordt in hoeverre leerlingen in staat zijn hun wiskundekennis – vooral wat de functieleerstof betreft – toe te passen in nieuwe situaties binnen en buiten de wiskunde, de zgn. transfertest. Bij de transferopgaven kunnen hints worden gebruikt; hoe minder hints iemand nodig heeft voor een goede oplossing, hoe hoger de score. Het is de bedoeling aan de hand van de prestatie die een leerling met hulp levert te voorspellen hoe goed hij of zij het in de toekomst in de wiskunde zal doen. Enige tijd na de transfertest wordt daarom de zgn. criteriumtest afgenomen. Verwacht wordt dat de voorspelling beter zal zijn dan een voorspelling op grond van transferopgaven zonder hulp of op grond van een test met 'normale' opgaven. De normale opgaven vormen de zgn. actuele beheersingstest. In het onderzoek worden ook leerlingkenmerken meegenomen. Er doen scholen mee waar Sigma, Getal en Ruimte of Moderne Wiskunde (4e editie) wordt gebruikt. Effecten van leerboeken worden mede onderzocht.

Op het moment, dat dit verhaal geschreven wordt, zijn nog niet alle tests afgenomen; de eindresultaten zijn dus nog niet bekend. Echter, tijdens zo'n onderzoek kom je ook allerlei 'kleinere' zaken tegen en

een aantal daarvan leek ons interessant genoeg om u alvast te vertellen. Deze zaken betreffen de constructie van geschikte transferopgaven, een voorbeeld van setvorming, het gebruik van meerkeuze-toetsen, het niveau van vwo-leerlingen op het eind van de derde klas met betrekking tot de functieleerstof en tenslotte het benutten van microcomputers en de omgang met scholen bij het doen van onderzoek van wiskunde-onderwijs.

2 Transfer is moeilijk

In de loop van het project hebben we heel wat transferopgaven met hints bedacht en slechts een klein deel daarvan is uiteindelijk in de test terecht gekomen. Zo hadden we bijvoorbeeld de volgende: g is een functie; de functiewaarde bij elk reëel getal x wordt als volgt bepaald: bereken de getallen x , $-x$ en x^2 en neem van deze drie getallen de grootste als functiewaarde.

Teken de grafiek van g .

Het oplossen van deze opgave vraagt om zogenoemde verticale transfer: we veronderstellen dat de drie samenstellende functies en hun grafieken voldoende bekend zijn en ook het begrip 'grootste'. Het voor derde klassers nieuwe zit in het combineren van de drie grafieken tot de gevraagde grafiek. Dit combineren doet een beroep op een aspect van het functiebegrip dat in de gangbare leerboeken in de onderbouw niet aan de orde komt; daardoor is de opgave wezenlijk moeilijker dan opgaven over functies die door een formule worden gegeven.

Te weinig leerlingen slaagden erin de goede oplossing te vinden. Vaak werd de opgave geïnterpreteerd als: er moet uit x , $-x$ en x^2 gekomen worden om één functievoorschrift voor alle x te vinden. Een hint, waarbij voor enkele concrete gevallen de functiewaarde moest worden bepaald, corrigeerde dit beeld vaak. Echter daarnaast hadden leerlingen de neiging niet verder te kijken dan de wereld van de gehele getallen, waarin x^2 nooit kleiner is dan x of $-x$. Zelfs het gebruik van een hint waarin de functiewaarde voor $x = -\frac{1}{2}$ werd bepaald, verhielp dat onvoldoende: de parabool behorend bij $f(x) = x^2$, werd dan soms een beetje omgebogen om door $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{4})$ te gaan. Ook de vereenvoudiging alleen met $-x$ en x^2 te werken leverde wel meer

goede oplossingen op, maar niet genoeg en aangezien je niet met proefafnames aan de gang kunt blijven, moesten we de opgave laten vallen.

Transfer is kennelijk moeilijk. Bij het ontwerpen van transferopgaven ben je al gauw te ambitieus. Opgaven waarvan je meent dat ze vlakbij opgaven liggen die behandeld zijn, blijken leerlingen voor grote problemen te stellen. In dit opzicht bevestigen onze ervaringen de mening van Van Hiele die, schrijvend over het toetsen van inzicht, opmerkt (Van Hiele, 1985): 'Eigenlijk wilde men dus de manifestatie van een wonder: ofschoon men het één had onderwezen, wenste men het andere als onderwijsresultaat.' En even verder, over 'nieuwe situaties' in opgaven: 'Met "nieuw" stelt men zijn eisen dikwijls veel te hoog'. Vervolgens legt hij dan uit waarom iemand 'die algebra en meetkunde geleerd heeft die kennis meestal niet zo maar in natuur- of scheikunde kan toepassen.'

Onze ervaringen houden in dat ook bij vragen die horizontale transfer binnen de wiskunde betreffen veel leerlingen al snel het spoor bijster zijn. Bij

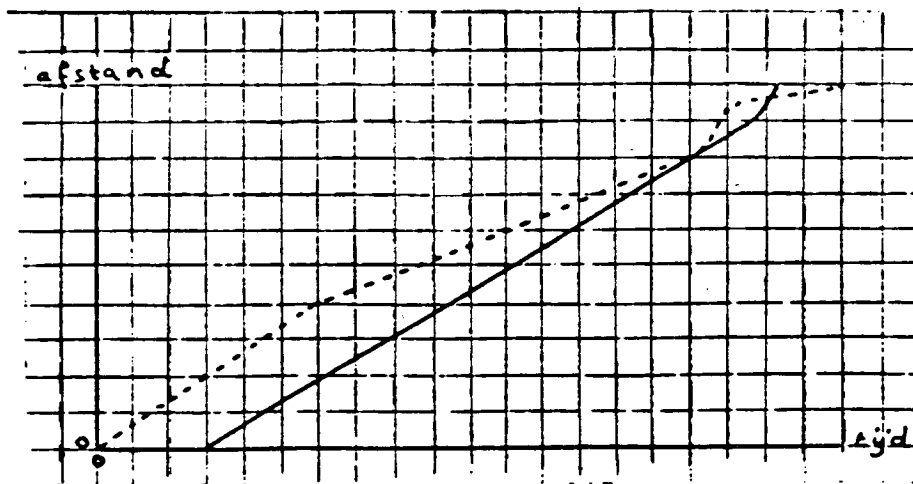
horizontale transfer binnen de wiskunde wordt er een ongewone combinatie gevraagd van twee op zich bekende wiskundige onderwerpen, bijvoorbeeld het teken van een grafiek in een meetkundige context. Nadere toelichting bij de verschillende typen transfer werd gegeven in het vorige artikel (Perrenet, 1985). Of de didactische opzet van de gebruikte wiskunde-leergang iets uitmaakt voor de transfervaardigheid van de leerlingen, was één van de vragen van het onderzoek. Onze bevindingen op dat punt houdt u nog van ons te goed.

3 Deskundigen te water

Niet alleen leerlingen hebben hun problemen met transferopgaven: ook wiskundendidactici hebben die, al zijn ze, dat spreekt vanzelf, van andere aard. Op de open conferentie over wiskundendidactiek (te Ede in 1986) legden we, als voorbeeld, aan collega's didactici de in figuur 1 weergegeven opgave voor met de vraag enkele hints te bedenken, die leerlingen op het goede spoor zouden kunnen zetten.

Arie heeft een zus die goed kan zwemmen. Ze trainen samen in een zwembad. Zij beweert, dat ze over 5 baantjes hem 1 baan voorsprong kan geven. Dat wil Arie wel eens zien en ze houden een wedstrijd. Arie begint en als hij bij het eerste keerpunt is, start zij pas. Na 5 banen is de finish.

Hieronder zie je een grafiek van hun wedstrijd. Vertel alles over het laatste deel van de wedstrijd; begin bij het vierde keerpunt.



Figuur 1

Onze eigen hints bevatten een aanwijzing de keerpunten op de verticale as aan te geven en een oefening om het verband tussen steilheid en snelheid te verduidelijken. De bedoeling van de vraag aan de collega's was om te zien of deskundigen het hier ook zo oneens over goede hints zouden zijn als Trismen – één van de inspiratoren van het onderzoek – meldde over Amerikaanse wiskundeleraren (Trismen, 1982). Aan die hints kwam men op de conferentie nauwelijks toe vanwege allerlei bespiegelingen over de opgave zelf. Sommigen vonden de continue grafieken misleidend (de tijd wordt alleen bij de keerpunten gemeten) en noemden de getekende grafiek een metafoor voor de 'echte' grafiek. Anderen zeiden te worden afgeleid door de gedachte aan een zwembad en de daar heersende rumoer-

geruststelling voor ons dat we bij leerlingen van al deze bespiegelingen maar weinig terugvonden: het was een opgave die het vanaf het begin van het onderzoek goed deed. De opgave ligt dan ook vrij dicht bij sommige opgaven die men in de boeken tegen komt; ze vraagt om horizontale transfer naar buiten (wiskunde toepassen in een context buiten de wiskunde).

Zou het feit dat men zich ergens als deskundige mee bezig houdt er toe kunnen leiden dat men soms te veel achter de werkelijkheid zoekt? De leerlingen kwamen vaak met aardige verhalen, waarin we voldoende elementen vonden die we van een goede oplossing eisten. Een voorbeeld laten we hierbij zien (zie figuur 2).

(Bedankt voor het compliment, ik wist niet dat ik zó goed kon zwemmen, dat ik sneller ^{was} ~~was~~ dan m'n broer Arie)

- De zwarte lijn is zus, omdat die lijn later begint op de tijd-as.
- afstand is ~~10~~ 10 hokjes, 1 baan is dus 2 hokjes.
- * het 4^e keerpunt ~~zijn~~ ze getyk in tijd en afstand, daarna denkt arie waarschijnlijk dat ze iets toch wel vreemd is en geeft een harde spurt om weer voor te komen wat ook lukt. Hier van werd hij echter wel moe en moest dus halverwege toegeven aan moeheid en aan de eind spurt van zijn slimme zus, die nog reserves had gespaard voor een eind spurt. Dit was het einde van een treurige gebeurtenis voor Arie. Maar zijn zus vierde zege, of zegeviende, nouja ze won!

Figuur 2

righeid. Weer anderen hadden kritiek op de gekozen formulering of zeiden geen hints te kunnen bedenken omdat er zoveel aanpakken mogelijk zijn.

Enigszins verbaasd zaten we erbij. Het was een

4 De verloren strijd tegen het haakjes wegwerken

Deze paragraaf beschrijft het trieste verhaal van een veelbelovende opgave, die het echter – net als

het eerder genoemde vraagstuk met de drie resp. twee functies – ondanks alle bijstellingen niet redde. We waren gewaarschuwd, zowel door eigen onderwijservaringen als door verhalen van anderen in Euclides: het is pas en te onpas uitwerken van haakjes is als voorbeeld van setvorming bij leerlingen sterk aanwezig.

Setvorming wil zeggen: het gebruik van een onhandige of verkeerde aanpak waar een handige of goede methode ter beschikking is. Broekman (1984) en Bos (1985) noemden in Euclides ter illustratie de volgende opgave van een havo-eindexamen:

$f: x \rightarrow (x - 2)^2(2x + 1)$ en $g: x \rightarrow 2(2x + 1)$. Voor welke x geldt: $f(x) = g(x)$?

In plaats van het type vergelijking $AC = BC$ te herkennen, gingen veel leerlingen de haakjes te lijf en liepen vast in de derdegraads vergelijking. In ons onderzoek gebeurde iets analoogs:

Vol goede moed nog lieten we de volgende transferopgave los op 4e klassers vwo en havo (eerste klassikale try-out):

Wat is de minimumwaarde van de functie $f: x \rightarrow \pi(x - 3\sqrt{2})(x - 5\sqrt{2})$?

De vraag naar transfer zit hem in het moeten omgaan met de vreemde irrationale snuiters (pi en $\sqrt{2}$) tussen de gangbare gebroken en gehele getallen. De door ons bedoelde aanpak – de berekening van de x -coördinaat van het minimum als gemiddelde van de x -waarden $3\sqrt{2}$ en $5\sqrt{2}$ – moest gestimuleerd worden door hints als:

Wat kun je al meteen uitrekenen van een functie die gegeven is in een vorm zoals bij deze opgave?

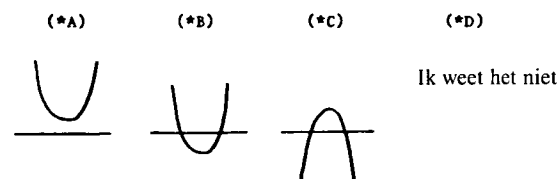
Het mocht niet baten: iedereen, of de betreffende hint nu was gebruikt of niet, werkte de haakjes uit. Slechts een enkeling overleefde het bijbehorende rekenwerk.

We dachten dat ze misschien van de pi in de war raakten en vereenvoudigden de functie door dit getal door $\sqrt{2}$ te vervangen. Een half jaar later zaten we met bandrecorders naast individuele leerlingen (ditmaal kersverse 4e klassers). Opnieuw bleek het haakjes uitwerken populair, zij het iets minder vaak voorkomend.

De transferopgaven waren nu voorzien van hints in de vorm van meerkeuzevragen. (De overstap van

open naar gesloten aanwijzingen is toegelicht in het vorige artikel over het project (Perrenet, 1985)). De eerste hint is afgebeeld in figuur 3.

Hintvraag 1: Aan het functievoorschrift is te zien, dat de grafiek er ongeveer zo uit ziet:



Figuur 3

De leerling die het goede alternatief koos, kreeg slechts te zien: 'Dat is goed. Probeer nu de opgave verder op te lossen.' De leerling die niet B koos, kreeg de volgende informatie: 'B is goed. Er is aan het functievoorschrift te zien, dat er twee nulpunten zijn ($x - 3\sqrt{2} = 0$ of $x - 5\sqrt{2} = 0$).

Als je haakjes uit zou werken, zou je krijgen: $\sqrt{2}x^2 + \dots$. $\sqrt{2}$ is een positief getal, dus de grafiek is een dalparabool. Probeer nu de opgave verder op te lossen.'

Wat bleek? Wie de haakjes tot dan toe nog met rust gelaten had en de hint te hulp riep, werd door de zin 'Als je haakjes...' juist op het idee van uitwerken gebracht. De laatste poging volgde weer een half jaar later met 4e klassers. De opgave is inmiddels opnieuw vereenvoudigd: de functie is dezelfde gebleven als in de tweede versie, maar er wordt nu gevraagd naar de snijpunten van de grafiek met de x -as. De eerste hint luidde:

Het voorschrift van deze functie staat in een speciale vorm. Wat kun je daar het beste mee doen om de gevraagde snijpunten te vinden?

(*A) haakjes uitwerken en met het voorschrift dat je krijgt verder werken

(*B) direct uit het voorschrift aflezen wat de snijpunten zijn

(*C) een aantal punten invullen om de grafiek te gaan tekenen en daaruit de snijpunten af te lezen

(*D) ik weet het niet.

Er zijn nu leerlingen die zonder hints de oplossing zien, al voegt een enkeling er als derde oplossing

$\sqrt{2} = 0$ aan toe. Ook zij die hint 1 raadplegen gaan vaak over op de goede aanpak. Echter, veel leerlingen denken de hint niet nodig te hebben en storten zich fanatiek op het rekenen met meestal weinig succes.

Eén van de vele eisen waaraan onze transferopgaven moesten voldoen, was: geen addertjes onder het gras. Dat wil zeggen: wie een opgave niet aan kan, moet besluiten een hint te nemen en niet zelf al ploeterend op iets fouts uitkomen. De 'Einstellung' op haakjes uitwerken bleek bij deze opgave te sterk om aan deze eis te kunnen voldoen. We vonden het te ver gaan om de $\sqrt{2}$ vooraan weg te halen en aan de opgavetekst 'laat de haakjes staan!' toe te voegen. De opgave werd dus afgekeurd.

Sterk blijkt uit deze ervaring de instelling van leerlingen om zonder nadenken met de toepassing van een voor de hand liggend algoritme te beginnen, een voorbeeld van setvorming dus. Bos merkt op in dit verband (Bos, 1982): 'Stellen wij nu de vraag: hoe kan setvorming door onverwerkte algoritmen verminderd resp. vermeden worden? Het antwoord ligt voor de hand: Dit kan alleen door de algoritmen beter te behandelen. Als algoritmen goed begrepen zijn en vooral ook als hun draagwijdte voorzien wordt, zal in ieder geval van rigiditeit geen sprake zijn.' En even verder: 'De draagwijdte van verschillende algoritmen kan naar mijn mening alleen goed voorzien worden als systematisch in herhalingen algoritmen met elkaar vergeleken worden, met behulp van simpele goed gemengde opgaven. Hierbij moeten algoritmen die nogal eens aanleiding geven tot verwarring naast elkaar gesteld worden (vergelijkingen en ongelijkheden, zowel de eerste- als hogeregraads, gehele en gebroken, enz.).' Bij deze mening sluiten wij ons gaarne aan.

5 Misplaatste creativiteit

Over het algemeen kijken wiskundeleraren bij proefwerken niet alleen naar de eindantwoorden van de opgaven. Hoewel het veel meer tijd kost bij het nakijken, wordt ook de weg er naar toe in de beoordeling betrokken. Niet voor alle psychologen binnen ons team bleek dat vanzelfsprekend; immers, met het beoordelen van meer dan het eindantwoord is het gevaar van niet-objectieve scoring niet denkbeeldig. Desondanks werd er voor geko-

zen om ook de berekeningen en redeneringen te bekijken en achteraf mogen we daar blij om zijn, getuige de resultaten bij de volgende opgave:

De functie f wordt gedefinieerd door $f(x) = 1/x^2$ voor alle $x \neq 0$.

Bereken voor welke x geldt: $f(x) = f(x + 2)$.

Waarschuwing: $f(x + 2)$ is niet hetzelfde als $f(x) + 2$ of $f(x) + f(2)$.

(Dat laatste moest erbij om voor het onderzoek irrelevante fouten te voorkomen).

Het antwoord $x = -1$ werd vaak gevonden. Soms gebeurde dat op de correcte manier. Echter, een aantal leerlingen slaagde erin dit resultaat via een onjuiste methode te vinden. We troffen maar liefst vier varianten aan, die schematisch zullen worden weergegeven en toegelicht:

$$1 \quad f(x) = f(x + 2) \Leftrightarrow 1/x^2 = x + 2 \quad \text{en dan} \quad x = -1 \quad \text{door proberen.}$$

Men weet hier kennelijk geen weg met de uitdrukking $f(x + 2)$ en vult er maar het eenvoudigste voor in. Van de zo ontstane vergelijking blijkt verassenderwijs ook $x = -1$ een wortel.

$$2 \quad f(x) = f(x + 2) \Leftrightarrow f = fx + f2 \Leftrightarrow 1 = x + 2 \Leftrightarrow x = -1$$

Het functiesymbool wordt behandeld als een factor buiten de haakjes. Er blijkt nog wel een inconsequentie in het linkerlid nodig (f in plaats van fx) om de 'goede' oplossing te vinden.

$$3 \quad f(x) = f(x + 2) \Leftrightarrow f(x)^2 = f(x + 2)^2 \Leftrightarrow x^2 = (x + 2)^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = -1$$

Uit de tweede uitdrukking blijkt, dat het substitueren van $x + 2$ voor x niet begrepen is.

$$4 \quad f(x) = f(x + 2) \Leftrightarrow 1/x^2 = 1/(x + 2)^2 \Leftrightarrow x^2 = (x + 2)^2 \Leftrightarrow x^2 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Het substitueren gaat goed, maar bij het meer elementaire werk wordt een fout gemaakt bij het vereenvoudigen van de vergelijking (tekenfout), gevolgd door het ten onrechte herkennen van een merkwaardig produkt. Dat laatste neutraliseert het effect van de eerste fout.

Het doet pijn aan de ogen. Je vraagt je af of nu toevallig $x = -1$ werd gevonden of dat eerst legaal (gokken en controleren) of illegaal (afkijken) de oplossing werd gevonden en vervolgens de 'berekening' erbij verzonnen werd.

Dit resultaat wijst nog eens op de voorzichtigheid,

waarmee meerkeuzetoetsen moeten worden gehanteerd. Bij enigszins complexe opgaven moeten ook tussenresultaten worden beoordeeld.

6 Dat viel tegen!

In de vorige paragraaf wezen we op één der gevaren van meerkeuzetoetsen: het goede antwoord kan middels een verkeerde redenering gekozen worden. Schuring noemt in een onlangs verschenen artikel als voordelen van meerkeuzetoetsen de grote betrouwbaarheid en de mogelijkheden tot snelle scoring, snelle correctie en systematische foutenanalyse; als nadelen noemt hij de tijdrovende constructie, het feit dat de constructie een grote mate van deskundigheid vereist en dat niet alles te meten is (Schuring, 1986).

We hebben voor het meten van de actuele beheersing van de functieleerstof de meerkeuzevorm gekozen. Bij het Cito zijn namelijk over dit onderwerp diagnostische toetsen verkrijgbaar, waaraan door meer mensen gedurende langere tijd gewerkt is dan wij vanuit ons project zouden kunnen. Voor ons waren de eerste twee door Schuring genoemde nadelen daardoor niet van belang. Om het derde nadeel te ondervangen, vulden we de geselecteerde Cito-items aan met een open vraag naar het tekenen van een grafiek. Bovendien vonden we de items soms wat formeel gesteld en brachten daarom hier en daar enige verduidelijkende tekst aan. Eventuele andere nadelen, zoals bijvoorbeeld verwarring ten gevolge van een verleidelijk maar fout alternatief, namen we op de koop toe.

In het vervolg moet u er rekening mee houden, dat de toets voor de leerlingen onverwacht was en niet voor het rapport zou meetellen; wel zouden de resultaten naar de scholen worden terug gestuurd. Ondanks die verzachtende omstandigheden waren de resultaten op sommige punten opvallend:

Gegeven is de functie $f: x \rightarrow \frac{1}{2}x^2$ van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$.
Er geldt

- A) $D_f = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ en $B_f = \{-2, -1\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \dots\}$
- B) $D_f = \{4, 5, 6, 7, \dots\}$ en $B_f = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- C) $D_f = \{4, 5, 6, 7, \dots\}$ en $B_f = \{0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, \dots\}$
- D) $D_f = \{4, 6, 8, 10, \dots\}$ en $B_f = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Figuur 4

Dat bij de opgave in figuur 4 maar 31% het juiste alternatief D kiest en 43% het onjuiste alternatief A is niet verontrustend. Het item toetst de kennis van de termen domein en bereik en van de uitdrukking 'van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ '. Vooral deze laatste uitdrukking is een restant van structuralistische-formalistische wiskunde die in het begin van de jaren zeventig in de mode was, maar nu een beetje als passé wordt beschouwd.

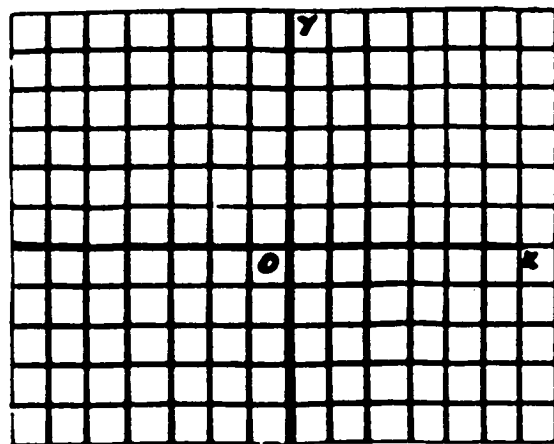
Wel verontrustend lijkt ons dat de opgave in figuur 5 maar door 53% van de vwo-leerlingen aan het eind van klas 3 correct wordt opgelost. Als je bedenkt, dat hellingen en richtingscoëfficiënten direct in het begin van de vierde klas bij de ontwikkeling van de differentiaalrekening een belangrijke rol spelen, kun je vaststellen dat de basis voor die ontwikkeling uiterst wankel is.

Teken een lijn door de punten $(-2, 0)$ en $(0, 3)$.
De richtingscoëfficiënt van deze lijn is

- A) $-\frac{3}{2}$
- B) $-\frac{2}{3}$
- C) $\frac{2}{3}$
- D) $\frac{3}{2}$

Figuur 5

Ook scores op sommige andere vragen kunnen aanleiding geven tot somberheid. De door ons toegevoegde open vraag had de gedaante van figuur 6:



Teker de grafiek van de functie $f(x) = x^2$.

Figuur 6

We hebben nog geaarzeld of deze opgave niet te eenvoudig was. Immers, wanneer iedereen een bepaalde vraag van een toets goed beantwoordt, dan differentieert zo'n item niet en had het voor ons doel net zo goed weggelaten kunnen worden. Wijs geworden door de ervaring met snel te moeilijke transferopgaven lieten we deze 'eenvoudige' vraag toch staan. En zie: slechts 61% leverde een aanvaardbare grafiek. Weliswaar tekende, naast die 61%, nog wel 28% iets paraboolachtigs en maar 11% een rechte lijn of iets wat daar op lijkt, maar toch... Als je als leraar het percentage goede antwoorden aan het eind van 3 vwo op deze vraag zou moeten voorspellen, zou je een hoger getal dan 61 noemen.

Kennelijk ben je geneigd het wenselijke met de realiteit te verwarren.

7 Hints per computer

De oorspronkelijke opzet was de test in een papieren vorm af te nemen. Dit leidde tot een soort ingewikkelde scheurkalender voor elke opgave: de leerlingen mochten geen hulpvragen zien, voordat ze besloten hulp te gebruiken en afhankelijk van het gekozen antwoordalternatief moest wel of geen uitleg tevoorschijn komen.

Deze vorm bleek werkbaar bij de try-outs, maar er kleefden ook nadelen aan. Zo kon men soms een leerling met rode blos minuten lang zien (en horen!) ploeteren met een uiteengebogen paperclip om een papieren raampje open te krijgen, waarachter de volgende hint beloofd was. Het kan best zijn, dat dit gedoe het hintgebruik afremde. Er waren namelijk heel wat leerlingen, die opgaven niet tot een goed einde brachten, maar toch geen hulp gebruikten. Lastig voor ons was verder, dat een 'verscheurd' boekje geen tweede keer gebruikt kon worden.

Vanaf zeker moment kon het project van microcomputers gebruik maken en sommigen van het team waren er toen zeer voor de afname te automatiseren. Er zouden dan bijvoorbeeld ook per leerling tijden gemeten kunnen worden. Anderen, met name de schrijvers van dit verhaal, hadden zo hun twijfels. Sommige plaatjes kwamen niet zo mooi op het scherm en lag het werken met een beeldscherm niet te ver af van het gewone werk met pen en papier? En was het vanuit de scholen gezien niet

veel eenvoudiger wanneer er iemand met een kofertje papieren langskwam dan met een circus van chauffeurs, sjouwers, installateurs en apparaten? Uiteindelijk bleek dat er op scholen toch veel mogelijk is, misschien in dit geval ook omdat het woord computer bij een flink aantal leerlingen en leraren nog glimmende oogjes doet ontstaan. Enkele ervaringen met de micro's lijken ons vermeldenswaard. Ten eerste: de leerlingen hadden verassend snel door hoe de apparaten bediend moesten worden. Je moet er kennelijk voor waken de mogelijk zelf ondervonden drempelvrees bij de kennismaking met zo'n technisch wonder te projecteren op de generatie die met elektronica is opgegroeid.

Ten tweede: het om hulp vragen bleek aanzienlijk te zijn toegenomen. Dit zal waarschijnlijk mede veroorzaakt zijn door het feit, dat een druk op de knop veel sneller, simpeler en onopvallender is dan de hiervoor beschreven scheurprocedure. (In de gewone les zal het om hulp vragen ook niet altijd even gemakkelijk zijn: ook hier trekt het de aandacht en vaak heeft de leraar geen tijd. Een computerprogramma met hulpaanwijzingen bij gewone opgaven zou zijn voordelen kunnen hebben.)

Tenslotte: wij twijfelaars hoefden niet op alle punten bakzeil te halen. We slaagden erin een zekere mate van papiergebondenheid bij de afname te handhaven. De opgaven stonden op papier, de hints op het scherm en ook daar werd telkens naar het papier terug verwezen. Dit om er voor te zorgen dat de leerlingen steeds de opgaven schriftelijk zouden uitwerken. Te veel bezig zijn met het scherm zou tot hoofdrekken en te snel hints vragen kunnen leiden.

8 Onderzoek op scholen

Bij het onderzoeken van onderwijs kan de storing die het bezoek van een onderzoekersteam in de school veroorzaakt aanzienlijk zijn. In ons geval waren er na diverse proefafnamen op andere scholen op de scholen waar de uiteindelijke transfertest zou worden afgenomen onder meer twee blokuren kort na elkaar nodig en moesten daarbij klassen in tweeën worden gesplitst. Bovendien kwamen we met een batterij van 18 microcomputers, die in een lokaal moesten worden geïnstalleerd.

Eén en ander maakte het moeilijk scholen zodanig

te kiezen dat daarmee het onderzoeksdesign zo goed mogelijk was gediend. Voor vergelijking van leerboekeffecten is nodig dat de onderzochte klassen niet systematisch op andere variabelen dan het gebruikte leerboek verschillen. Zo moeten bijvoorbeeld niet alle scholen met een bepaalde methode in de grote stad liggen en die met een andere methode op het platteland. Maar hoe krijg je een willekeurige leraar van een willekeurige school zo ver dat hij zich zoveel tijdsinvestering en rompslomp op de hals haalt ten dienste van hem verder onbekende personen van een universiteit? We moesten veeleer gebruik maken van goede relaties die we via het schoolpracticum of nascholingscursussen hadden opgebouwd. Daardoor lukte het ons om in vrij korte tijd, zelfs in de hectische periode die aan de grote vakantie vooraf gaat, een grote hoeveelheid data te verzamelen.

Psychologen hebben de neiging grote testbatterijen op te stellen: er zijn vele interessante variabelen die meteen even meegemeten kunnen worden. Toch moet er bij volgende onderzoeken op gelet worden dat de inbreuk op de gewone gang van zaken in een school zo gering mogelijk is, zodat scholen ook op grond van andere criteria dan goede relaties kunnen worden uitgekozen.

Ook heel belangrijk is, dat leraren en leerlingen uitslagen van testen in een leesbare vorm terugkrijgen. Nogal eens hoorden we dat er soms onderzoeken waren uitgevoerd waar men later nooit meer iets van vernomen had.

9 Slotwoord

Tot zover de verzameling van nevenopbrengsten van ons onderzoek van wiskunde-onderwijs. Leraren die wel eens somber zijn over de prestaties van hun eigen leerlingen kunnen uit sommige delen van dit verhaal de troost van de gedeelte smart putten; anderen komen misschien tot de conclusie dat hun somberheid ongegrond is. Hopelijk valt ook voor onderzoekers onder de lezers iets uit onze ervaringen te leren. In een afsluitend artikel hopen we u over verdere resultaten van het onderzoek te informeren.

10 Literatuur

- W. J. Bos: *Setvorming, wat valt er aan te doen?*, Euclides 58, 3, 1982.
 H. Broekman: *Leerstijlaspecten; rigiditeit versus flexibiliteit*, Euclides 60, 3, 1984.
 P. M. van Hiele: *Op weg naar oplosmethoden met ruime toepasbaarheid*, Euclides 60, 10, 1985.
 J. Chr. Perrenet: *Een transfertest voor wiskunde*, Euclides 61, 4, 1985.
 N. Schuring: *Toetsperikelen*, Euclides 62, 3, 1986.
 D. A. Trisman: *The development and administration of a set of mathematics items with hints*; Research Report, Princeton N. J., Educational Testing Service, 1982.

Over de auteurs

Wim Groen was wiskundeleraar en is sinds enige tijd lerarenopleider.

Jacob Perrenet is wiskundige en psycholoog; hij verrichtte onderzoek in het rekenonderwijs en geeft wiskundecursussen.

Beiden werken sinds 1985 als wiskundendidacticus mee aan het beschreven VU-project.

De Tweede Vlaamse Wiskunde Olympiade

P. G. J. Vredenduin

De eerste ronde werd gehouden op 21 januari 1987. 4284 leerlingen van 177 scholen hebben deelgenomen. In tegenstelling tot verleden jaar mochten thans ook 'gemotiveerde' leerlingen van het vierde jaar deelnemen. De aantallen deelnemers uit de verschillende leerjaren waren:

238 uit het vierde jaar

2031 uit het vijfde jaar

1971 uit het zesde jaar

44 uit een aanvullend (zevende) jaar.

De moeilijkheidsgraad van de opgaven ligt, vergeleken bij het voorgaande jaar, iets hoger.

De moeilijkste vraag bleek nr. 21 te zijn; slechts 3,41% gaf het juiste antwoord. Van de eerste tien vragen was nr. 6 het moeilijkst (28,51% goed). De makkelijkste vragen waren, in volgorde, de nrs. 4, 3, 10, 26, 5 (minder dan 6% liet de vraag onbeantwoord; omdat een onbeantwoorde vraag milder beoordeeld wordt dan een fout beantwoorde is het percentage onbeantwoorde significant voor de moeilijkheidsgraad).

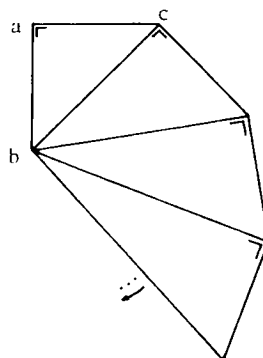
Evenals verleden jaar zal de tweede ronde gelijklopend zijn met de 'American Test'. De derde ronde werd afgenomen op 29 april.

Hier volgen de vragen.

- De grafiek van een kwadratische functie $f(x)$ snijdt de Y-as in $+16$ en de X-as in $+2$ en $+8$. De kleinste waarde van $f(x)$ is gelijk aan
A. -16 B. -9 C. -6 D. -5 E. 5

- Vertrekkend van een gelijkbenige rechthoekige driehoek abc met rechthoekszijden 1, als eerste driehoek bouwt men nieuwe rechthoekige drie-

hoeken aan zodanig dat een rechthoekszijde samenvalt met de schuine zijde van de vorige driehoek en de andere rechthoekszijde opnieuw 1 is.



Figuur 1

Waaraan is de oppervlakte van de 8ste driehoek in de constructie gelijk?

- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$ E. 4

-
3. De helft van -2^{-2} is gelijk aan

- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{8}$ E. 2

-
4. Welke van de volgende vijf uitspraken is waar?

- A. Het kwadraat van een oneven getal is soms even
B. Als x even is, zijn x en $2x$ twee opeenvolgende even getallen
C. Als x even is, is $(x-1)(x+1)$ oneven
D. Als x even is, is $107x$ soms oneven
E. Als x en y oneven zijn, is $3(x+y)$ oneven

-
5. Als $V = \{a, b, \{c, d\}\}$ dan geldt

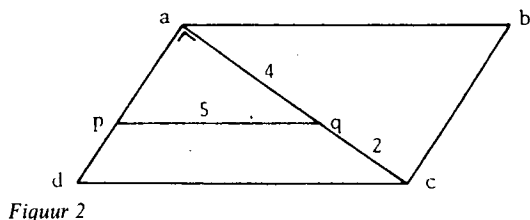
- A. $c \in V$ B. $\{c, d\} \subset V$ C. $\{a, b, c, d\} \subset V$
D. $\{\{c, d\}\} \subset V$ E. $\{c\} \in V$

-
6. Zij $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dan heeft de vergelijking

$$x^5 + mx^4 + m^2x^3 + m^3x^2 + m^4x + m^5 = 0$$

- A. vijf verschillende reële oplossingen
B. precies drie verschillende reële oplossingen waarvan er twee dubbele wortels zijn
C. precies drie verschillende reële oplossingen die elk één keer voorkomen
D. juist één reële oplossing die driemaal voorkomt
E. juist één reële oplossing die éénmaal voorkomt

7. In het getekende parallellogram $abcd$ is $\|aq\| = 4$, $\|qc\| = 2$, $\|pq\| = 5$, $pq \parallel cd$ en $\angle cad$ een rechte hoek



Figuur 2

Wat is de oppervlakte van dit parallellogram?
A. 18 B. 24 C. 27 D. 30 E. 36

8. In een kubus met ribbe van 4 dm passen precies 8 bollen met straal 1 dm (zie fig. 1). Om die 8 bollen te schilderen heeft men 1 liter verf nodig.

In een tweede kubus met ribbe 8 dm passen ook precies 8 bollen maar zij hebben dan ook een straal van 2 dm (zie fig. 2).

Vooraanzicht

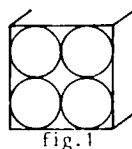


fig. 1

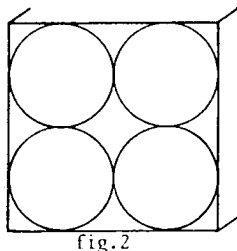


fig. 2

Een derde kubus heeft ook een ribbe van 8 dm maar nu liggen er zowel in de breedte, als in de hoogte, als in de diepte 4 bollen (i.p.v. 2) naast elkaar (zie fig. 3).

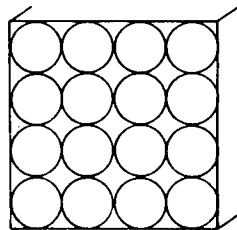


fig. 3

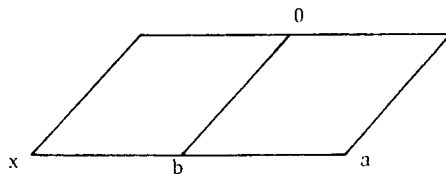
Figuur 3

Hoeveel liter verf heeft men nodig om de bollen van de 2de en de 3de kubus te schilderen?

- A. 4 B. 8 C. 10 D. 12 E. 16

9. De getekende figuur bestaat uit 2 ruiten die tesamen een parallellogram vormen.

Als we vector $\vec{ox}$ verkort door $\vec{x}$ voorstellen dan is $\vec{x}$ gelijk aan



Figuur 4

- A. $2\vec{ab}$ B. $\vec{b} - \vec{a}$ C. $2\vec{a} - \vec{b}$ D. $\vec{a} - 2\vec{b}$
E. $2\vec{b} - \vec{a}$

10. Een tafel kost inclusief de BTW van 19%, x fr. Zonder de BTW kost deze tafel (in fr.)

- A. $\frac{x}{1,19}$ B. $0,81 \cdot x$ C. $x - 0,19x$
D. $\frac{x}{0,81}$ E. $0,19x$

11. Laat α en β reële getallen zijn zodanig dat $\alpha + \beta = 1$ en $-\alpha\beta = 1$

Welke van de volgende gelijkheden is juist?

- A. $\alpha^2 + \beta^2 = 2$ B. $\alpha^3 + \beta^3 = 3$
C. $\alpha^4 + \beta^4 = 6$ D. $\alpha^5 + \beta^5 = 12$
E. $\alpha^6 + \beta^6 = 18$

12. De inverse functie (voor de samenstelling) van $f(x) = 2x^3 + 1$ is

- A. $g_1(x) = \frac{1}{2x^3 + 1}$ B. $g_2(x) = \frac{2}{x^3} + 1$
C. $g_3(x) = 2\sqrt[3]{x} + 1$ D. $g_4(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$
E. $g_5(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2} - 1$

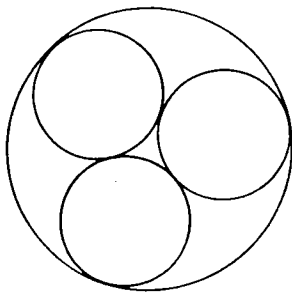
13. Hoeveel woorden van 4 verschillende letters kan men vormen als 2 van de 4 letters die er in voorkomen gekend zijn?

- A. 2208 B. 6624 C. 13248
D. 13824 E. 16224

14. De vergelijking $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = k$ heeft in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ precies twee verschillende wortels als en slechts als

- A. $k \geq 0$ B. $k \geq 2$
C. $k > 2$ D. $k \geq 4$ E. $k > 4$

15. Drie cirkels met zelfde straal r liggen binnen een grotere cirkel met straal R zodanig dat ze elkaar twee aan twee raken en zodanig dat ze alle drie de grote cirkel raken.
Welke van de volgende betrekkingen is correct?



Figuur 5

A. $r = \frac{R}{3}$ B. $r = \frac{R}{2}$

C. $r = R(2\sqrt{3} - 3)$ D. $r = R\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

E. geen van de vorige

16. Hoeveel reële oplossingen heeft de vergelijking $|2x - 3| + |x - 3| = |4x - 1|$?
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 8

17. Is $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

dan

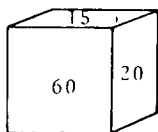
A. $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$

C. $0 \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

E. $-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \leq \frac{1}{2}$

18. Het aantal positieve delers van 10125×10^3 is
A. 16 B. 72 C. 140 D. 625 E. 8192

19. Op deze kubus staan zes verschillende natuurlijke getallen waarvan de som 350 niet over-

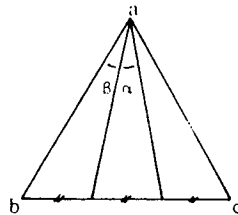


Figuur 6

schrijdt. Eén van de twee getallen die op twee evenwijdige, tegenover elkaar liggende vlakken staan is steeds een drie- of viervoud van het andere getal. Wat is de som van de drie ontbrekende getallen?

- A. Minder dan 230 B. 230 C. 245
D. 250 E. 265

20. In een gelijkzijdige driehoek abc zijn de drie lijnstukjes op de basis $[bc]$ even lang.



Figuur 7

Dan is

A. $\alpha = \beta$ en $\alpha + \beta = 40^\circ$

B. $\alpha < 20^\circ < \beta$ en $\alpha + \beta < 40^\circ$

C. $\alpha < 20^\circ < \beta$ en $\alpha + \beta > 40^\circ$

D. $\beta < 20^\circ < \alpha$ en $\alpha + \beta < 40^\circ$

E. $\beta < 20^\circ < \alpha$ en $\alpha + \beta > 40^\circ$

21. $a, n \in \mathbb{N}_0$ en a^n geeft bij deling door 73 een rest 2
 a^{n+1} geeft bij deling door 73 een rest 69

Voor de rest r bij deling van a door 73 geldt

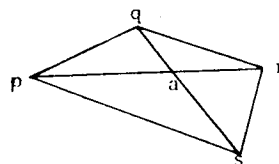
A. $0 \leq r < 10$ B. $10 \leq r < 30$

C. $30 \leq r < 50$ D. $50 \leq r < 70$ E. $r \geq 70$

22. In een roostervoorstelling van een relatie R in een verzameling A duidt men door middel van stippen aan welke koppels tot de relatie behoren. Hoeveel verschillende reflexieve relaties bestaan er in een verzameling met 3 elementen?

A. 8 B. 9 C. 36 D. 64 E. 512

23. Zij $pqrs$ een convexe vierhoek en a het snijpunt van zijn diagonalen pr en qs . De oppervlakten



Figuur 8

van de driehoeken pqa , qra , rsa zijn respectievelijk 72 , 54 , 72 m^2 . De oppervlakte van de driehoek spa is dan (in m^2)

A. 54 B. 60 C. 90 D. 96 E. 108

24. Zij $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ dan geldt

A. $a < b^2$ B. $a < a^2$ C. $\sqrt{a} < a$

D. $\frac{1}{a} > b$ E. $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

25. Welke van de volgende getallen is irrationaal?

A. 0,01001000100001000001 ...

B. 0,101010101010 ...

C. 0,3250202020202 ... D. 0,9999999 ...

E. 3,14

26. A en B zijn verzamelingen. Welke van de volgende uitspraken is FOUT?

A. $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ en $x \notin B$

B. $x \in A$ en $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

C. $x \in A$ en $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B$

D. $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ en $x \notin B$

E. $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A \cup B$

27. Welke van de volgende functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ heeft periode 3π ?

A. $f_1(x) = \frac{3}{2} \sin x$ B. $f_2(x) = \sin(x + \pi)$

C. $f_3(x) = \sin\left(\frac{2x}{3} + 1\right)$ D. $f_4(x) = \sin \frac{3x}{2}$

E. $f_5(x) = 3 \sin 2x$

28. De oplossingenverzameling in $\mathbb{R}$ van $\frac{1}{x} < 3$ is

A. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3}\right\}$

B. $\left]0, \frac{1}{3}\right[$

C. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{3}\right\}$

D. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

E. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \left[0, \frac{1}{3}\right]\right\}$

29. De cijfers van 1 tot en met 9 zet men in een willekeurige volgorde achter elkaar. Zo bekomt men een getal van 9 cijfers. Welke is de kans dat dit getal deelbaar is door 18?

A. $\frac{1}{18}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{9}$ E. $\frac{17}{18}$

30. Hoeveel getallen, bestaande uit 3 oneven niet noodzakelijk verschillende cijfers, zijn deelbaar door 3?

A. 30 B. 40 C. 41 D. 50 E. 72

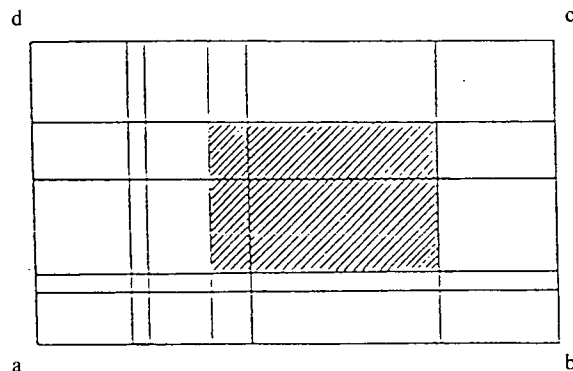
De derde ronde

Op woensdag 29 april 1987 heeft de derde ronde plaats gehad van de tweede Vlaamse Wiskunde Olympiade. Plaats: de Campus van de Leuvense Universiteit te Heverlee. Tijd: 3 uur.

Degenen die in de tweede ronde, het multiple-choice werk dat uit de V.S. is verkregen, de beste resultaten behaalden, zijn uitgenodigd deel te nemen aan de derde ronde. Het waren er 69. Hieronder volgen de opgaven.

1. Beschouw een rechthoek $abcd$

Kies op $]ab[$ n verschillende punten en op $]ad[$ m verschillende punten



Trek door al deze gekozen punten evenwijdigen met respectievelijk ad en ab .

Hoeveel rechthoeken zijn er in deze figuur terug te vinden? (De gearceerde rechthoek is één van de mogelijkheden).

2. Twee evenwijdige rechten A en B worden gesneden door twee andere rechten C en D . De snijpunten met A worden met a en a' benoemd en deze met B , b en b' .

Als x het middelpunt is van het lijnstuk $[aa']$ en y het middelpunt van het lijnstuk $[bb']$, toon dan dat

$$|xy| \leq \frac{|ab| + |a'b'|}{2}$$

($|xy|$) stelt de lengte van het lijnstuk $[xy]$ voor)

3. Bepaal alle continue functies $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \rightarrow f(x)$ die voldoen aan

$$\{f(x)\}^3 = -\frac{x}{12}(x^2 + 7x\{f(x)\} + 16\{f(x)\}^2)$$

4. Toon aan:
voor elke $p \in \mathbb{R}$ met $p > 1$ geldt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + (n-1)^p + n^p + (n-1)^p + \dots + 2^p + 1^p}{n^2} = +\infty$$

Wat is de limiet als $p = 1$?

Verschenen

Green, Gross, *Unified String Theories*, John Wiley & Sons, £ 67.55, 745 blz.

Het boek bestaat uit 2 delen: deel I bevat 10 lectures die een wat meer inleidend karakter vertonen; deel II wordt gevormd door een 20-tal seminars, verdeeld over een groot aantal aandachtspunten m.b.t. de stringtheorie.

J. Necas, *Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations*, John Wiley & Sons, £ 14.95, 163 blz.

Dit boekwerkje is gewijd aan randwaarde problemen voor niet-lineaire, tweede orde elliptische partiële differentiaalvergelijkingen. Korte inleidingen over Sobolev en Morrey-Campanato ruimten en over approximatie-methoden zijn opgenomen. Tevens zijn enkele niet-standaard toepassingen over elasticiteit toegevoegd.

Fomenko, Fuchs, Gutenmacher, *Homotopic Topology*, Akadémiai Kiadó Budapest, \$ 33.-, 310 blz.

Dit boek wordt aangekondigd als een leerboek dat zowel beginselen als gecompliceerde resultaten uit de homotopie behandelt. Inhoud: Homotopy; Homology; Spectral Sequences; Cohomology operations; The Adams spectral sequence. Er zijn geen opgaven opgenomen.

N. van Veen, R. Wissing, *Programmeercursus BASIC*, (AMBI-T.6), Academic Service, f 55.-, 384 blz.

In dit boek ligt de nadruk op het programmeren: het ontwerpen en schrijven van goed gestructureerde en leesbare programma's. Dit wordt geïllustreerd aan de hand van een groot aantal voorbeelden. Als taal werd BASIC gekozen. Het boek kan worden gebruikt als leerboek voor het AMBI-examen T.6.

F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, John Wiley & Sons, £ 27.50, 222 blz.

Het centrale onderwerp van dit boek is de reconstructie van een functie vanuit lijn- of vlak-integralen, met nadruk op toepassingen (o.a. radiologie). Het behandelt zowel de mathematische theorie als praktische vragen en reconstructie-algoritmen.

L. L. Ivanov, *Algebraic Recursion Theory*, Ellis Horwood Ltd., £ 37.50, 257 blz.

Het onderwerp berekenbaarheid, voortgekomen uit de logica en de theoretische informatica, wordt behandeld vanuit een algebraïsch-axiomatische opzet. Klassieke stellingen maar ook recente resultaten uit de recursietheorie worden gepresenteerd, alle voorzien van zuiver algebraïsche bewijzen.

Het boek houdt het midden tussen een naslagwerk en een leerboek. Er is daartoe een uitvoerige lijst referenties opgenomen en elk hoofdstuk wordt afgesloten met een opgaven sectie.

Soms is tellen zo eenvoudig niet

Drs. W. Kleijne, H. N. Schuring

Vooraf

Naar aanleiding van zijn huiswerk confronteerde de zoon van een der auteurs van dit artikel zijn vader met een probleempje uit de combinatoriek. Na enige wijzigingen gaf dit aanleiding tot een niet triviaal telprobleem. Het gevolg was diep nadenken, studie en overleg met de andere auteur. En zoals dat zo vaak gaat, neemt een dergelijk probleem op zeker moment dan bezit van je.

Je beleeft een ongelooflijk plezier aan het werken met zo'n probleem. En als je dan ook nog enige resultaten boekt dan is dat aanleiding genoeg om het een en ander op schrift te stellen en ter lezing aan te bieden. Wellicht zijn er lezers die net zo'n plezier aan dit probleem beleven als wij. Wellicht zijn er ook die bewijzen weten te geven die wij niet vonden. (We houden ons aanbevolen!)

Niet alleen het ontstaan van dit stukje is terug te voeren tot een probleem gesteld in een lessituatie, maar ook zijn sommige delen van het geschrevene zelf stellig te gebruiken in de klas. Diverse elementen zijn nuttig om met leerlingen te bespreken, andere zijn aardig om aan leerlingen door te geven of geschikt om leerlingen aan te laten werken...

Een telprobleem

Men heeft n verschillende bakjes en een onbeperkt aantal balletjes, waarvan er k verschillende soorten zijn te onderscheiden, met $1 \leq k \leq n$.

Van elke soort zijn er ten minste n balletjes die onderling niet te onderscheiden zijn.

Op hoeveel manieren kan men in elk bakje precies één balletje doen?

Het is eenvoudig in te zien dat het antwoord k^n is. Het probleem wordt aanmerkelijk lastiger wanneer de extra voorwaarde gesteld wordt dat van elk van de k verschillende soorten balletjes er ten minste één in een bakje gedaan moet worden.

De vraag van het probleem (P) is: Op hoeveel manieren kan men onder deze voorwaarde in elk bakje precies één balletje doen?

Het antwoord dat we gevonden hebben is:

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{k-i} (k-i)^n. \quad (1)$$

Een elementair bewijs van (1), bijvoorbeeld met volledige inductie, is ons niet bekend. Wel is het bewijs te leveren met behulp van verzamelingstheoretische overwegingen.

Daarvoor maken we de volgende afspraken:

De vereniging van i verschillende verzamelingen V_i

noteren we: $\sum_i V_i$, dus $\sum_i V_i = \bigcup_i V_i$.

De doorsnede van i verschillende verzamelingen V_i

noteren we: $\prod_i V_i$, dus $\prod_i V_i = \bigcap_i V_i$.

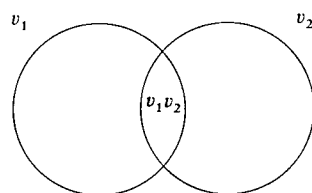
Het kardinaalgetal van een verzameling V noteren we: $\mu(V)$.

$$\begin{aligned} \text{Nu geldt: } \mu\left(\sum_{i=1}^k V_i\right) &= (\mu(V_1) + \mu(V_2) + \dots + \mu(V_k)) - (\mu(V_1 V_2) + \mu(V_1 V_3) + \dots + \\ &\mu(V_{k-1} V_k)) + (\mu(V_1 V_2 V_3) + \dots + \mu(V_{k-2} V_{k-1} V_k)) \\ &+ \dots + (-1)^{k-1} \mu\left(\prod_{i=1}^k V_i\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Alvorens (2) te bewijzen geven we eerst enige voorbeelden.

Voorbeeld 1:

$$\mu(V_1 + V_2) = \mu(V_1) + \mu(V_2) - \mu(V_1 V_2).$$

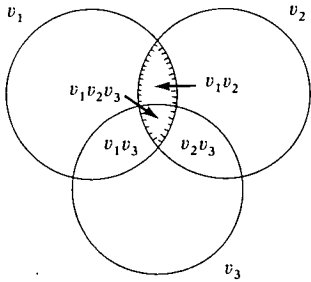


Figuur 1

Het Venn-diagram (fig. 1) illustreert dit duidelijk.

Voorbeeld 2: Voor $k = 3$ geeft (2):

$$\mu(V_1 + V_2 + V_3) = (\mu(V_1) + \mu(V_2) + \mu(V_3)) - (\mu(V_1V_2) + \mu(V_2V_3) + \mu(V_1V_3)) + \mu(V_1V_2V_3). \quad (3)$$



Figuur 2

Uit het Venn-diagram (fig. 2) volgt dat de elementen van $V_1V_2 \setminus V_1V_2V_3$, $V_1V_3 \setminus V_1V_2V_3$ en $V_2V_3 \setminus V_1V_2V_3$ dubbel geteld zijn bij $\mu(V_1) + \mu(V_2) + \mu(V_3)$, terwijl dan de elementen van $V_1V_2V_3$ driemaal geteld zijn.

Dus als men van $\mu(V_1) + \mu(V_2) + \mu(V_3)$ aftrekt $\mu(V_1V_2) + \mu(V_1V_3) + \mu(V_2V_3)$ heeft men de elementen $V_1V_2V_3$ driemaal geteld en ook driemaal afgetrokken, zodat in (3) toegevoegd moet worden $\mu(V_1V_2V_3)$.

Deze methode kan gegeneraliseerd worden. Men kan eventueel zelf het geval $k = 4$ proberen. Voor grotere waarden van k wordt het vrij gecompliceerd. Men kan dan gemakkelijker het volgende algemene bewijs van (2) kiezen.

Zij $V_i \subset U$, dan noteren we het complement van V_i ten opzichte van U met $\bar{V}_i$, dus $\bar{V}_i = U \setminus V_i$.

Voor elk element $x \in U$ definiëren we een karakteristieke functie f_{V_i} als volgt:

$$f_{V_i}(x) = 1 \text{ als } x \in V_i \text{ en } f_{V_i}(x) = 0 \text{ als } x \in \bar{V}_i.$$

$$\text{Gevolg: } f_{\bar{V}_i}(x) = 1 - f_{V_i}(x).$$

Nu geldt:

$$\begin{aligned} f_{V_iV_j}(x) &= \min(f_{V_i}(x), f_{V_j}(x)) = f_{V_i}(x) \cdot f_{V_j}(x) \text{ en} \\ f_{V_i \cup V_j}(x) &= \max(f_{V_i}(x), f_{V_j}(x)) = \\ &= f_{V_i}(x) + f_{V_j}(x) - f_{V_iV_j}(x) = \\ &= f_{V_i}(x) + f_{V_j}(x) - f_{V_i}(x) \cdot f_{V_j}(x) = \\ &= 1 - (1 - f_{V_i}(x))(1 - f_{V_j}(x)) = 1 - f_{\bar{V}_i}(x) \cdot f_{\bar{V}_j}(x). \end{aligned}$$

$$\text{Stelling: } f_{\sum_{i=1}^k V_i}(x) = 1 - \prod_{i=1}^k f_{\bar{V}_i}(x). \quad (4)$$

Het bewijs van (4) kan geleverd worden met volledige inductie:

1°. Het te bewijzen is juist voor $k = 1$, want

$$f_{V_1}(x) = 1 - f_{\bar{V}_1}(x).$$

$$2^\circ. \text{ Stel dat } f_{\sum_{i=1}^k V_i}(x) = 1 - \prod_{i=1}^k f_{\bar{V}_i}(x).$$

$$\text{Dan is: } f_{\sum_{i=1}^{k+1} V_i}(x) = f_{\sum_{i=1}^k V_i + V_{k+1}}(x) =$$

$$f_{\sum_{i=1}^k V_i}(x) + f_{V_{k+1}}(x) - f_{\sum_{i=1}^k V_i}(x) \cdot f_{V_{k+1}}(x) =$$

$$f_{\sum_{i=1}^k V_i}(x)(1 - f_{V_{k+1}}(x)) + f_{V_{k+1}}(x) =$$

$$f_{\sum_{i=1}^k V_i}(x) \cdot f_{\bar{V}_{k+1}}(x) + 1 - f_{\bar{V}_{k+1}}(x) =$$

$$(1 - \prod_{i=1}^k f_{\bar{V}_i}(x)) f_{\bar{V}_{k+1}}(x) + 1 - f_{\bar{V}_{k+1}}(x) =$$

$$1 - \prod_{i=1}^{k+1} f_{\bar{V}_i}(x).$$

3°. Volgens het axioma van volledige inductie is (4) juist voor alle $k \in \mathbb{Z}^+$.

Schrijven we (4) uit, dan komt er:

$$\begin{aligned} f_{\sum_{i=1}^k V_i}(x) &= 1 - \prod_{i=1}^k f_{\bar{V}_i}(x) \\ &= 1 - (1 - f_{V_1}(x))(1 - f_{V_2}(x)) \dots (1 - f_{V_k}(x)) = \\ &= f_{V_1}(x) + f_{V_2}(x) + \dots + f_{V_k}(x) - f_{V_1}(x) \cdot f_{V_2}(x) - \\ &\dots - f_{V_1}(x) \cdot f_{V_k}(x) - \dots - f_{V_{k-1}}(x) \cdot f_{V_k}(x) \\ &= f_{V_1}(x) \cdot f_{V_2}(x) \cdot f_{V_3}(x) + \dots \\ &\quad + f_{V_{k-2}}(x) \cdot f_{V_{k-1}}(x) \cdot f_{V_k}(x) - \dots \\ &\quad + (-1)^{k-1} f_{V_1}(x) \cdot f_{V_2}(x) \cdot \dots \cdot f_{V_k}(x) = \\ &= \sum_{i=1}^k f_{V_i}(x) - \sum_{i < j} f_{V_iV_j}(x) + \sum_{i < j < k} f_{V_iV_jV_k}(x) - \dots + \\ &\quad (-1)^{k-1} f_{V_1 \dots V_k}(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Als $V_i, V_j \subset U$ dan geldt $\mu(V_i) = \sum_{x \in U} f_{V_i}(x)$ voor elk

element $x \in U$, terwijl $\mu(V_i V_j) = \sum_{x \in U} f_{V_i V_j}(x)$ en

$\mu(V_i + V_j) = \sum_{x \in U} f_{V_i + V_j}(x)$, zodat volgens (5):

$$\begin{aligned} \mu\left(\sum_{i=1}^k V_i\right) &= \sum_{x \in U} f_{\sum_{i=1}^k V_i}(x) = \\ &= \sum_{x \in U} \left(\sum_{i=1}^k f_{V_i}(x) - \sum_{i < j} f_{V_i V_j}(x) + \dots + (-1)^{k-1} f_{\prod_{i=1}^k V_i}(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{x \in U} f_{V_i}(x) \right) - \sum_{i < j} \left(\sum_{x \in U} f_{V_i V_j}(x) \right) + \dots \\ &+ (-1)^{k-1} \sum_{x \in U} f_{\prod_{i=1}^k V_i}(x) = \\ &= \sum_{i=1}^k \mu(V_i) - \sum_{i < j} \mu(V_i V_j) + \dots + (-1)^{k-1} \mu\left(\prod_{i=1}^k V_i\right) \quad (6) \end{aligned}$$

Hiermee is (2) bewezen.

Nu terug naar probleem (P) en formule (1).

Zij U de verzameling van alle mogelijke vullingen van de n bakjes met k verschillende balletjes waarbij het niet noodzakelijk is dat alle k voorkomen.

Duidelijk is dat $\mu(U) = k^n$.

Zij V_i de verzameling van deze vullingen waarin de i -de soort niet voorkomt, dan is $\mu(V_i) = (k-1)^n$. (Het is niet noodzakelijk dat de andere $(k-1)$ soorten alle voorkomen.

$V_i V_j$ is de verzameling van deze vullingen waarin zowel de i -de als de j -de soort balletjes ontbreken, zodat $\mu(V_i V_j) = (k-2)^n$.

$\prod_{i=1}^k V_i$ is de verzameling van de vullingen waarin alle

k soorten balletjes ontbreken, zodat $\mu\left(\prod_{i=1}^k V_i\right) = (k-k)^n = 0$. Dit is in overeenstemming met het

inzicht dat $\prod_{i=1}^k V_i = \emptyset$.

Voorts geldt $\sum_{i=1}^k \mu(V_i) = k(k-1)^n = \binom{k}{k-1} (k-1)^n$

en $\sum_{i < j} \mu(V_i V_j) = \binom{k}{k-2} (k-2)^n$.

Het antwoord van probleem (P) is het kardinaal-

getal van de verzameling $U \setminus \sum_{i=1}^k V_i$, dus

$$\begin{aligned} \mu\left(U \setminus \sum_{i=1}^k V_i\right) &= \mu(U) - \mu\left(\sum_{i=1}^k V_i\right) = \text{(volgens (6))} \\ &= \mu(U) - \left(\sum_{i=1}^k \mu(V_i) - \sum_{i < j} \mu(V_i V_j) + \dots + (-1)^{k-1} \mu\left(\prod_{i=1}^k V_i\right) \right) \\ &= \mu(U) - \sum_{i=1}^k \mu(V_i) + \\ &+ \sum_{i < j} \mu(V_i V_j) - \dots + (-1)^k \mu\left(\prod_{i=1}^k V_i\right) = \\ &= k^n - \binom{k}{k-1} (k-1)^n + \binom{k}{k-2} (k-2)^n - \dots + \\ &+ (-1)^{k-1} \binom{k}{1} 1^n + 0 = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{k-i} (k-i)^n. \end{aligned}$$

En hiermee is formule (1) afgeleid.

Gevolgen

Uitgaande van (1) zijn er enige formules af te leiden die tot aardige consequenties aanleiding geven.

1 Voor $k = n$ leidt het probleem (P) tot het aantal permutaties van n objecten, dus

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{n-i} (n-i)^n = n! \quad (7)$$

Pogingen om (7) onafhankelijk van het voorgaande door middel van volledige inductie te bewijzen strandden alle.

Wel gaven ze een interessant bijproduct.

De inductiestap: Uitgaande van de juistheid voor

$$n = p \text{ (dus } \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p}{p-i} (p-i)^p = p!)$$

te bewijzen de juistheid voor $n = p + 1$

$$\begin{aligned} &(\text{dus } \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{p+1}{p+1-i} (p+1-i)^{p+1} = \\ &(p+1)! \text{) geeft te bewijzen:} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{p+1}{p+1-i} (p+1-i)^{p+1} =$$

$$(p+1) \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p}{p-i} (p-i)^p$$

$$\text{of } \sum_{i=0}^p (-1)^i (p+1) \binom{p}{p-i} (p+1-i)^p =$$

$$(p+1) \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p}{p-i} (p-i)^p$$

$$(\text{immers } (n+1) \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} (k+1))$$

$$\text{of } \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{p}{p-i} (p+1-i)^p =$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p}{p-i} (p-i)^p. \quad (8)$$

2 Voor $p = 3$ geeft (8):

$$\sum_{i=0}^3 (-1)^i \binom{3}{3-i} (4-i)^3 =$$

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \binom{3}{3-i} (3-i)^3$$

$$\text{dus } \binom{3}{3} 4^3 - \binom{3}{2} 3^3 + \binom{3}{1} 2^3 - \binom{3}{0} 1^3 =$$

$$\binom{3}{3} 3^3 - \binom{3}{2} 2^3 + \binom{3}{1} 1^3$$

$$\text{of } \binom{3}{3} 4^3 - \left(\binom{3}{2} + \binom{3}{3} \right) 3^3 + \left(\binom{3}{1} + \binom{3}{2} \right) 2^3$$

$$- \left(\binom{3}{0} + \binom{3}{1} \right) 1^3 = 0$$

$$\text{dus } \binom{3}{3} 4^3 - \binom{4}{3} 3^3 + \binom{4}{2} 2^3 - \binom{4}{1} 1^3 = 0$$

$$\text{of } \binom{4}{4} 4^3 - \binom{4}{3} 3^3 + \binom{4}{2} 2^3 - \binom{4}{1} 1^3 = 0.$$

3 Op dezelfde manier als in 2 kan men uit (8) bewijzen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{n-i} (n-i)^{n-1} = 0. \quad (9)$$

4 Uit (9) volgt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{n-i} (n-i)^{n-1} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{n-i-1} \frac{n}{n-i} (n-i)^{n-1} =$$

$$n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{n-1-i} (n-i)^{n-2} = 0.$$

$$\text{Dus } \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{n-1-i} (n-i)^{n-2} =$$

$$\binom{n-1}{n-1} n^{n-2} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{n-1-i} (n-i)^{n-2} = 0. \quad (10)$$

Indien men in (9) voor n kiest $n-1$, dan volgt

$$\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \binom{n-1}{n-1-i} (n-1-i)^{n-2} =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \binom{n-1}{n-i} (n-i)^{n-2}$$

$$(\text{neem } i+1 = i) = 0.$$

$$(11)$$

(11) van (10) aftrekken geeft:

$$n^{n-2} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\binom{n-1}{n-1-i} + \binom{n-1}{n-i} \right) (n-i)^{n-2} =$$

$$n^{n-2} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{n-i} (n-i)^{n-2} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{n-i} (n-i)^{n-2} = 0.$$

Generalisatie geeft

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{n-i} (n-i)^p = 0 \text{ voor } p \in \mathbb{Z}^+ \text{ en}$$

$$0 < p < n.$$

$$(12)$$

Voor $p = 0$ wordt (12)

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{n-i} - \binom{n}{0} =$$

$$(1-1)^n - \binom{n}{0} = -1.$$

5 Stelt men in (1):

$$C_k^n = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{k-i} (k-i)^n$$

dan geldt de recurrente betrekking

$$C_k^n = k (C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}).$$

We kunnen dat als volgt inzien:

$$C_{k-1}^{n-1} = \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i \binom{k-1}{k-1-i} (k-1-i)^{n-1} =$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \binom{k-1}{k-i} (k-i)^{n-1} =$$

$$- \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{k-i} (k-i)^{n-1}$$

$$\text{en } C_k^{n-1} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{k-i} (k-i)^{n-1} =$$

$$k^{n-1} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{k-i} (k-i)^{n-1},$$

$$\text{zodat } C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1} = k^{n-1} +$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left((-1)^i \binom{k}{k-i} (k-i)^{n-1} - (-1)^i \binom{k-1}{k-i} (k-i)^{n-1} \right) =$$

$$k^{n-1} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (k-i)^{n-1} \left(\binom{k}{k-i} - \binom{k-1}{k-i} \right) = k^{n-1} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (k-i)^{n-1} \binom{k-1}{k-i-1}$$

$$\left(\text{immers } \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \right)$$

$$= k^{n-1} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (k-i)^{n-1} \binom{k}{k-i} \frac{k-i}{k}$$

$$(\text{want } \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} \frac{p+1}{n+1})$$

$$= k^{n-1} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (k-i)^n \binom{k}{k-i} \frac{1}{k}.$$

Vermenigvuldigen met k geeft:

$$k (C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}) = k^n + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{k-i} (k-i)^n =$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{k-i} (k-i)^n = C_k^n.$$

Met behulp van deze recurrente betrekking zijn we in staat waarden van C_k^n te bepalen op de manier van de driehoek van Pascal, rekening houdend met de factor k :

Finale

Zoals meestal het geval is bij dit soort telproblemen is het aantal toepassingssituaties legio. Bijvoorbeeld: een rij van n stoelen die geveerd wor-

den, elk in één kleur. Totaal staan er k kleuren ter beschikking.

Blikwisseling komt neer op het stapelen van de geveerde stoelen, dezelfde kleur op één stapel.

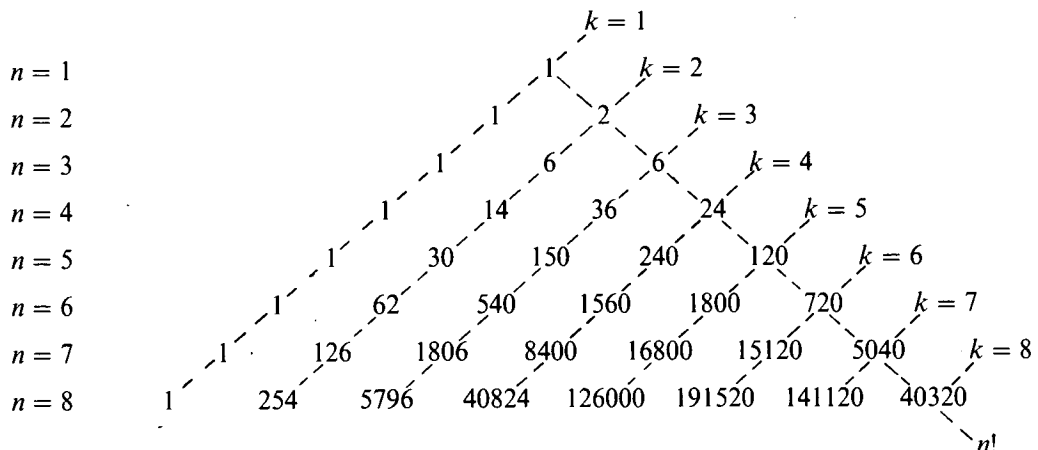
Met deze blikwisseling komt het probleem (P) neer op het volgende: Op hoeveel manieren kunnen we n verschillende balletjes in k verschillende bakjes doen als in elk van de bakjes er ten minste één balletje komen moet? ($1 \leq k \leq n$)

Dit telprobleem komt in combinatoriekboeken wel voor, bijvoorbeeld in: Daniel I. A. Cohen, 'Basic Techniques of Combinatorial Theory' (J. Wiley, New York). Cohen geeft als oplossing van (P): $k! S_k^n$ waarbij S_k^n Stirling-getallen zijn van de tweede soort. S_k^n is het aantal manieren om n verschillende balletjes in precies k niet te onderscheiden bakjes te doen.

Van deze Stirling-getallen bestaan er tabellen, bijvoorbeeld in: M. Abramowitz, 'Handbook of Mathematical Functions' (Dover, New York). Deze geven een aanmerkelijke tijdsbesparing bij het berekenen van de antwoorden van (1).

De formules (7) en (9) zijn samen met (12) het vermelden waard. Naar onze mening dagen ze uit tot verder onderzoek.

Zijn er lezers (of leerlingen van hen) die een vervolg schrijven?



Mededelingen

Leidse nalezing wiskunde en informatica

Op zaterdag 7 november wordt aan de Leidse Universiteit de Nalezing wiskunde en informatica gehouden. Het doel van de Nalezing is Leidse afgestudeerden, leraren, praktijkwiskundigen en andere geïnteresseerden op de hoogte te brengen van recente ontwikkelingen in de wiskunde en informatica aan de Leidse Universiteit. Tijdens het ochtendgedeelte worden plenaire lezingen gehouden door prof. dr. G. van Dijk en dr. L. P. J. Groenenwegen. Na de lunch bestaat een ruime keuzemogelijkheid uit voordrachten, practica en demonstraties op het gebied van onderwijs, wiskunde en informatica. De dag wordt besloten met een informeel gedeelte waar de deelnemers in de gelegenheid worden gesteld studiegenoten, docenten en andere vakgenoten te ontmoeten.

Aanmelding dient zo spoedig mogelijk, maar uiterlijk vrijdag 23 oktober telefonisch te geschieden bij het bureau van de subfaculteit wiskunde en informatica, telefoon 071 - 27 71 06 / 27 71 00. Ook voor nadere inlichtingen kunt u zich tot het bureau wenden.

Wiskunde 12-16

Conferentie van de VALO-Wiskunde en Informatica d.d. 3 en 4 december 1987 in het EUROASE-hotel te Beekbergen.

Op 3 en 4 december a.s. organiseert de VALO-Wiskunde en Informatica een conferentie over 'Wiskunde 12-16' voor wiskundeleraren in LBO, MAVO en onderbouw HAVO/VWO. Doel van deze conferentie is de wiskundeleraren te informeren over recente ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs aan 12-16-jarigen en hen bij deze ontwikkelingen te betrekken. Het wiskundeonderwijs in de eerste fase van het voortgezet onderwijs zal in de komende jaren grote inhoudelijke veranderingen ondergaan. De staatssecretaris, mev. N. Ginjaar-Maas, heeft het OW & OC te Utrecht en de SLO te Enschede verzocht om, onder leiding van prof. F. v.d. Blij, een nieuw wiskundeprogramma te gaan ontwikkelen. Een programma dat moet aansluiten op het nieuwe reken-/wiskundeonderwijs in de basisschool, op het nieuwe wiskundeonderwijs in de bovenbouw en op het vervolgonderwijs; en dat aan 12-16-jarige leerlingen de gelegenheid zal bieden zinvolle en motiverende wiskunde te bedrijven als onderdeel van de basisvorming.

De VALO (Veldadvisering leerplanontwikkeling) Wiskunde en Informatica is een door de overheid ingestelde commissie die tot taak heeft namens het onderwijsveld om onder andere over deze wiskundeleerplanontwikkeling te adviseren. Daarom nodigt de VALO wiskundeleraren in de onderbouw van het voortgezet onderwijs uit aan genoemde conferentie deel te nemen. Het is de bedoeling jaarlijks een dergelijke conferentie te organiseren.

Aan deze eerste VALO-conferentie 'Wiskunde 12-16' kunnen 75 leraren deelnemen. Opgemerkt zij dat het bevoegd gezag van de school verlof kan verlenen op grond van Rechtspositiebesluit, deel A, artikel I-C 30.

Deelname is gratis; reiskosten worden vergoed.

Inschrijfformulier vóór 15 oktober 1987 aanvragen bij:

VALO-Wiskunde en Informatica t.a.v. mev. H. Hesselink, Postbus 2061, 7500 CB Enschede. Op dit adres kan schriftelijk of telefonisch (053-84 08 40) nadere informatie worden aangevraagd.

Boekbesprekingen

A. van Rooy, *Analyse voor Beginners*, Epsilon-uitgaven, Utrecht 1986, ISBN 90-5041-005-7, 278 bladzijden, f29,90.

Dit boek, dat mede door steun van het Wiskundig Genootschap tot stand is gekomen, is vrijwel de tekst van de syllabus van het college Analyse aan eerstejaarswiskundestudenten dat de auteur de afgelopen vier jaar in Nijmegen heeft gegeven.

De inhoud omvat de theorie van rijen en reeksen, convergentie, continuïteit en differentieerbaarheid van functies van een en twee variabelen, stijgen/dalen/extreme waarden van functies van een variabele, de functies $\exp/\log/\sin/\cos/\tan$ en aanverwanten, differentiaalvergelijkingen, integralen en numerieke aspecten: iteraties om oplossingen van vergelijkingen als $x = 2 - \exp(x)$ te benaderen, de methode van Newton-Raphson, numerieke benaderingen voor integralen.

De poging een boek te schrijven dat een beginner op eigen gelegenheid kan lezen lijkt mij voortreffelijk geslaagd. Dit komt onder andere door de volgende keuzen van de auteur.

Elk hoofdstuk bouwt hij op een didactisch verantwoorde manier op. Eerst voorbeelden van wat er komen gaat, soms zelfs volledig uitgewerkt, zodat je je kan afvragen of je de te ontwikkelen theorie wel nodig hebt, soms half uitgewerkt en na ontwikkeling van de theorie afgemaakt. Vervolgens de theorie, maar lastige of niet inzichtelijke bewijzen worden tot het eind van het boek uitgesteld. Daarna toepassingen en opgaven. Het hoofdstuk wordt afgesloten met een stukje historie over een wiskundige die op het betreffende terrein veel werk gedaan heeft of over de ontwikkeling van een bepaald begrip, bijvoorbeeld π . Een andere manier om het boek goed leesbaar te maken is de af en toe weinig traditionele volgorde waarin de onderwerpen gepresenteerd worden. Zo behandelt hij de lineaire benadering van een functie voordat hij aan het begrip differentieerbaarheid toekomt. De theorie van de differentiaalvergelijkingen (summier: alleen eerste- en tweede orde homogene lineaire dv 's komen aan de orde) komt voor die over integralen. Allerlei limietstellingen baseert hij op limieten van rijen. De theorie over de reële getallen en die van de continue functies worden pas aan het eind van het boek behandeld. Deze laatste keuze brengt ook wel een paar nadelen met zich mee. Een voorbeeld hiervan is dat de voor de hand liggende stelling dat een functie die continu op $[a, b]$ is integreerbaar over $[a, b]$ is, nu ontbreekt in het hoofdstuk over integralen.

Niet in de laatste plaats is het boek zeer goed te lezen door de stijl waarin het geschreven is. Voorbeelden hiervan zijn: De eerste zin: 'Kun je oneindig veel getallen bij elkaar optellen?' Het veelvuldig hanteren van verrassingen als, eerst laten zien dat een bepaalde rij som 1 en vijf regels later som 0 heeft. Steeds duidelijk maken waarom iets wel of niet of juist op deze en niet gene wijze gedaan wordt. 'Een bewijs van stelling 5.8 (rekenregels voor limieten van rijen) stellen we uit tot paragraaf 21. De reden hiervoor is nogal frivool. We zouden het bewijs ook wel hier kunnen geven, maar het is nogal bewerkelijk en niet verhelderend. We kunnen beter eerst wat routine opdoen in het werken met convergentie. Daarna is het bewijs een kleinigheid.' Tot slot nog een citaat uit dit boek, dat ik van harte aan docenten wiskunde bovenbouw havo/vwo aanbeveel. 'Zo is de sinusfunctie integreerbaar over $[0, \pi/2]$, want hij (zij?)BZ is daar stijgend en over $[\pi/2, \pi]$ (waar hij dalend is). Als er in deze wereld nog gerechtigheid bestaat, moet de sinus ook over $[0, \pi]$ integreerbaar zijn. En jawel.' (volgt de betreffende stelling over het integreerbaar zijn over $[a, b]$ van een functie als zij dat over $[a, c]$ en $[c, b]$ is).

Bert Zwaneveld

Jeff Duntemann, *Turbo Pascal Compleet*, Academic Service, 432 blz., f 68,-.

Sinds november 1983 brengt Borland Int. een Turbo Pascal compiler op de markt voor PC-DOS, MS-DOS en CP/M machines. De strategie die Borland volgt – goede prijs/prestatie verhouding (Turbo Pascal kost $\pm$ f 275,-) – heeft ertoe bijgedragen dat deze compiler een groot succes werd.

Duntemann is er in geslaagd een boek te schrijven dat een goede inleiding geeft in de taal Pascal maar bovendien duidelijk beschrijft wat de mogelijkheden van de compiler zijn, iets wat men maar in weinig boeken tegenkomt.

Het boek behandelt de versie 3.0 terwijl in de tweede druk nog een aanvulling zal worden opgenomen voor MSX-computers. Deel 1 en deel 2 van het boek behandelen de volgende onderwerpen: structuur en opbouw van programma's, gegevenstypen en -structuren, controle over besturingsstromen, procedures en functies, gebruik van strings en I/O-controle.

Verder wordt er voor de IBM-PC bezitters ingegaan op schermbesturing en grafische routines.

Vooraf deel 2 is door zijn overzichtelijkheid een prima naslagwerk.

Deel 3 van het boek behandelt de editor en het gebruik van de compiler.

Wat opvalt aan dit boek is de praktische benadering aangevuld met veel duidelijke voorbeelden. Ook aan de lay-out is veel aandacht besteed wat het boek duidelijk en overzichtelijk maakt.

Verder is nog een aantal appendices opgenomen over utilities voor Turbo, lijst met foutmeldingen en een woordenlijst.

Dit alles tezamen maakt het boek geschikt voor zowel de beginnende als de gevorderde programmeur.

Rudolf Winius

Detlef Laugwitz, *Zahlen und Kontinuum*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 296 blz., DM 38,-.

Dit werk, verschenen als Band 5 in de serie Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, draagt als ondertitel: Eine Einführung in die Infinitesimalmathematik. Daarmee is precies aangegeven waar het in dit boek om gaat.

De schrijver sluit nauw aan bij datgene wat Leibniz en Euler over resp. oneindig kleine en oneindig grote getallen hebben gezegd. Het komt er eenvoudigweg op neer dat aan de 'gewone' getallen een element wordt geadjungeerd: een zg. oneindig groot getal. Bovendien wordt het principe van Leibniz van toepassing verklaard: rekenregels die gelden voor gewone getallen gelden eveneens voor de uitgebreide getallenverzameling. Daarmee is deze laatste dan tevens in het bezit van een oneindig klein getal als omgekeerde van het oneindig grote.

Hiervan uitgaande bouwt de schrijver op eenvoudige wijze een behoorlijk stuk van de analyse op.

De presentatie van de stof is uitermate helder. Vele voorbeelden en opgaven lichten de theorie op functionele wijze zeer goed toe. Daarmee is dit werk buitengewoon geschikt voor een eerste kennismaking met de infinitesimaalrekening.

W. Kleijne

Eindronde Wiskunde W. F. J. van Tour, uitg. S.M.D.

Een boek waarmee de volgende doelgroepen bereikt moeten worden.

- Mavo leerlingen die zich voorbereiden op het wiskunde examen
- Mavo herprofileerders
- Zij die een onvolledige methode gebruiken. Om dan in plaats van of naast de methode dit boek te gebruiken.

Dit boek bestaat uit tien hoofdstukken. In elk hoofdstuk, behalve het laatste, komt eerst een hoeveelheid theorie aan de orde gevolgd door een hoeveelheid examenopgaven uit voorgaande jaren. De theorie is volledig maar kort en voldoende voor hen die stof herhalen. Het laatste hoofdstuk bevat de uitwerkingen van de opgaven.

De auteur stelt dat er van een didactisch doorwrocht geheel geen sprake is. Als naslagwerk voor de examenkandidaat mag dit geen bezwaar zijn en is dit boek goed te gebruiken. De uitwerkingen van de opgaven hadden m.i. wat uitvoeriger gekund i.v.m. de te plegen zelfstudie van de kandidaat. Om dit boek in plaats van de methode te gebruiken zou ik afraden en liever een betere methode aanschaffen.

Als in dit boek elk jaar weer de oudste opgaven worden vervangen door opgaven uit de nieuwste examens blijft dit een zeer bruikbaar boek. Dit laatste is van groot belang voor de leerlingen die het van de training moeten hebben. Juist nu de wiskunde-examens voor het mavo veranderd zijn t.w. van twee zittingen naar een zitting, vergroting van het deel meerkeuze vragen t.o.v. de open vragen, en geen 'opstapvragen' meer bij de open vraagstukken.

Een jaarlijkse verversing van de oefenstof wil ik ten zeerste bepleiten.

A. Poortema

R. De Paepe, *Basiswiskunde van het Secundair Onderwijs*, 5 delen, Acco, Leuven, Amsterdam.

Ir. De Paepe is docent aan de Koninklijke Militaire School.

Wie in België zijn studie na het beëindigen van het secundair onderwijs (ons vwo) wil voortzetten, moet zich voor enkele vervolgstudies onderwerpen aan een toelatingsprocedure. De moeilijkste daarvan zijn de studie aan de KMS en de opleiding voor burgerlijk ingenieur. Basiswiskunde van het Secundair Onderwijs bevat die leerstof die de leerling moet beheersen om tot een van deze studies toegelaten te worden. Daarnaast kan de serie ook voor andere doeleinden gebruikt worden, bijv. voor zelfstudie of als vademecum.

Een bijgevoegd, enigszins verouderd prospectus, geeft de volgende informatie over de samenstelling van de serie:

Boek 1, *Moderne wiskunde voor later en hoger secundair onderwijs*, 272 blz., 695 BF/f 49,75.

Boek 2, *Aanvullingen*, 272 blz., 595 BF/f 42,50

Boek 3, *Oefeningen bij Boek 1*, 352 blz., 795 BF/f 57,-

Boek 4, *Oefeningen bij Boek 2*, in voorbereiding.

Het formaat van de boeken is groot, nl. $19,5 \times 27$ cm.

Aangekondigd wordt in het prospectus de splitsing van deel 1 in twee delen. Deze is inmiddels geschied en mij zijn toegezonden:

Boek 1/A, 272 blz., 1984

Boek 1/B, 296 blz., 1984.

Deze boeken bevatten de stof voor de onderbouw (klas 1-3) resp. de bovenbouw (klas 4-6) van het SO en die verplicht is voor de leerlingen van alle afdelingen.

Inmiddels is ook boek 4 verschenen; de omvang bedraagt 272 blz.

Deel 1/A. Bij het beoordelen van de inhoud moet men rekening houden met het doel waarvoor de boeken geschreven zijn. Het gaat om toelating tot studies waarbij het kunnen beoefenen van wiskunde van meer belang is dan een diepgaande theoretische fundering. Expliciet wordt dan ook in het prospectus vermeld dat geen nadruk gelegd is op een 'ver doorgedreven theoretische rechtvaardiging'.

Opvallend is in dit verband dat de meetkunde desondanks van meet af aan streng axiomatisch opgezet is. Het halfvlak is echter intuïtief ingevoerd en niet gedefinieerd. Ik mis dan ook het axioma betreffende het convex zijn van het halfvlak.

De invoering van de reële getallen geschiedt daarentegen in een snel tempo: in twee bladzijden is het reële getal met behulp van gradatie van een rechte lijn, inclusief axioma van Archimedes en continuïteitsaxioma, tot stand gekomen. Gezien het beoogde doel kan ik de auteur daarin geen ongelijk geven.

Wat ik echter erg jammer vind, is dat op veel plaatsen in de boeken zich een gebrek voordoet aan mathematische scherpte. Ook bij de begripsvorming doet dit euvel zich voor.

Ik vind de boeken dan ook meer geschikt als vademecum dan als leerboek. Als men de kennis eenmaal gehad heeft, kan ik mij voorstellen dat men het bij het opruimen ervan niet zo nauw neemt. Bij een eerste kennismaking is de precisie, die ik in de Vlaamse schoolboeken tot mijn vreugde zo veelvuldig tegenkom, aan te bevelen.

Iets anders dat mij opgevallen is, is de manier waarop de auteur de logische symboliek hanteert. Met name de kantoren en soms ook het implicatieteken worden op een manier gebruikt die nieuw voor mij is. Het voordeel van deze manier is, dat ze nauw aansluit bij het natuurlijke taalgebruik.

Aan het eind van deel 1/A komen vergelijkingen en ongelijkheden aan de orde, zowel van de eerste en tweede graad, gebroken en met wortels. Ik krijg de indruk dat de auteur zich hier eerst recht in zijn element voelt. Met grote zorgvuldigheid worden oplossingsmethoden gegeven, gevallen onderscheiden en methoden uiteengezet om opgaven te maken waarin parameters voorkomen.

Ook in deel 1/B ziet men duidelijk de praktische instelling van de auteur. Gezien de doelstelling van het boek dient men deze instelling te respecteren. Uit wiskundig oogpunt vind ik deel 1/B belangrijk beter dan deel 1/A. Dit is verklaarbaar. Juist als het om fundamentele zaken gaat, zal een praktische instelling mathematische incorrectheid als gevolg kunnen hebben. Dat wrekt zich daardoor in deel 1/B minder dan in 1/A. Wel moet me van het hart dat ik de invoering van het begrip oneindig (p. 131) ontoelaatbaar vind, maar dat is dan ook weer een fundamentele zaak. De begrippen continuïteit, limiet, differenttiëren en integreren komen op verantwoorde manier uit de verf. Over de overige delen wil ik kort zijn. Boek 2 behandelt die onderwerpen die alleen in de wiskundig sterke afdelingen gedoceerd worden. Ik noem er enkele: algemene theorie van het oplossen van lineaire stelsels vergelijkingen, axiomatische stereometrie, kegelsneden, oppervlakte en inhoud, complexe getallen, rijen en reeksen. Gezien de diepgang waarmee deze onderwerpen besproken worden, kan men (vergeleken met ons programma) van geavanceerde wiskunde spreken.

De boeken 3 en 4 bevatten de vraagstukken die voorkomen in de boeken 1/A en 1/B resp. 2, enigszins uitgebreid en van uitgewerkte oplossingen voorzien.

De boeken zijn door de uitgever zeer goed verzorgd. Ik wens ze succes toe.

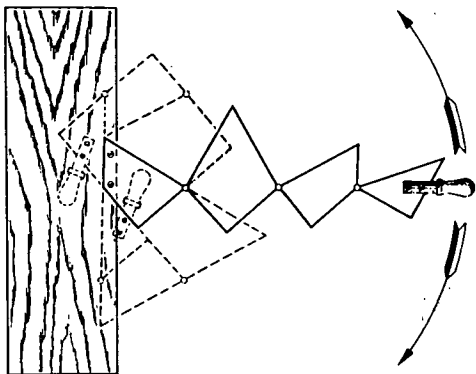
P. G. J. Vredenduin

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

574. De prijswinnaars van de Olympiade tweede ronde 1987 kregen als geschenk: *Mathematical Snapshots* van H. Steinhaus (Oxford University Press). Een reden voor mij het boekje aan te schaffen en er eens in te neuzen. Op de eerste bladzijde was het al meteen raak.

In onderstaande figuur zien we een drietal vierhoeken en een driehoek, scharnierend met elkaar verbonden. Door ze volgens de pijl naar boven te bewegen vormen ze ten slotte een vierkant. Beweegt men ze naar beneden dan ontstaat een gelijkzijdige driehoek.



Wordt gevraagd een dergelijk stel vierhoeken plus een driehoek te construeren. Hoe verhouden zich hun zijden?

575. Uit het boek van Steinhaus ook nog deze opgave. Generaal N beschikt over twee soorten tanks, A en B . Generaal Z eveneens over twee soorten, C en D . Een tank van soort A heeft een kans van 60% het te winnen van een tank van soort C . B wint met 70% kans van D , C met 80% van B en D met 60% van A . Beide generaals willen graag winnen.

N kiest daartoe zijn tanks zo dat de hoeveelheden van soort A en B zich verhouden als $p : (1 - p)$ en deelt aan Z mee welke waarde p heeft. Z past zijn strategie hierbij aan. Hij kiest zijn tanks zo dat de aantallen van C en D zich verhouden als $q : (1 - q)$ en deelt aan N de waarde van q mee. Dat is voor N aanleiding zijn

strategie te wijzigen. Enzovoorts. Hier komt geen einde aan, tenzij...

Wordt gevraagd onder welke voorwaarde het proces niet oneindig voortloopt.

Om misverstand te voorkomen: als een tank verliest, wil dat niet zeggen dat hij buiten gevecht gesteld wordt.

576. Ten slotte nog deze opgave uit het boek van Steinhaus. In een stad wordt door de burgerij de stadsraad gekozen. Uit deze raad moeten vijf wethouders aangewezen worden. De burgerij bepaalt door stemming uit welke partijen en in welke aantallen deze vijf wethouders aangewezen worden. Bijv. 3 uit partij C , 1 uit partij V en 1 uit partij P . Meer partijen zijn er niet. De zetels worden verdeeld naar evenredigheid van het aantal op de partij- en uitgebrachte stemmen. Onderstel dat zo blijkt dat partij C recht heeft op 2,76 wethouders, partij V op 0,85 en partij P op 1,39. Dan krijgt in eerste instantie C 2 wethouders, V geen enkele en P 1 wethouder toegewezen. Omdat C en V de grootste resten hebben, krijgen ze er beide nog 1 restzetel bij. Dus krijgen C , V en P resp. 3, 1 en 1 wethouder.

We kunnen van dit gebeuren een meetkundige voorstelling maken. Teken een gelijkzijdige driehoek met hoogte 5. De zijden noemen we C , V en P . Zoals bekend is de som van de afstanden van een punt binnen deze driehoek tot de drie zijden gelijk aan 5. Teken nu het punt waarvoor deze afstanden resp. zijn 2,76, 0,85 en 1,39. Dit punt stelt de bovenstaande stemverhouding voor. Met dit punt correspondeert dus een wethouderverdeling (3, 1, 1). De verzameling van de punten waarbij de wethouderverdeling (3, 1, 1) hoort, zal een veelhoek zijn. Zo kunnen we de driehoek verdelen in veelhoeken die horen bij de verdelingen (5, 0, 0), (4, 1, 0), (4, 0, 1), (3, 2, 0), ..., (0, 0, 5). Teken de driehoek en construeer deze verdeling.

Ditmaal wil ik u weer vragen uw oplossing binnen een maand in te sturen aan mij; adres zie boven. Ik raad u natuurlijk aan het boek van Steinhaus aan te schaffen; het is niet duur. Maar doe dit niet om de oplossing te vinden.

Het figuurtje staat er wel in, maar het bewijs ontbreekt.

Kalender

sept. 1987: Enschede, Studium Generale

11 sept. 1987: Utrecht, Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

31 okt. 1987: Utrecht, Jaarvergadering/Studiedag NVvW

7 nov. 1987: Leiden, Nalezing wiskunde en informatica

3 en 4 dec. 1987: Beekbergen, Conferentie Wiskunde 12-16

23 juli-3 aug. 1988: Budapest, ICME-Congres

Inhoud

Ned. Ver. van Wiskundeleraren: Verslag verenigingsjaar 1986-1987 33

Huub Jansen: Verslag van een ATMi-conferentie 34

Leen Bozuwa: Kan men nog rekenen op de Pabo? 39

Jacob Perrenet, Wim Groen: Transfertest halfweg 43

P. G. J. Vredenduin: De Tweede Vlaamse Wiskundeolympiade 51

drs. W. Kleyne, H. Schuring: Soms is tellen zo eenvoudig niet 56

Mededelingen 61

Boekbesprekingen 42, 55, 61, 62, 63

Recreatie 64

Kalender 64

Adressen van auteurs

Leen Bozuwa, Merwedekade 90, 3311 TH Dordrecht

Huub Jansen, p/a Postbus 2061, 7500 CB Enschede

drs. W. Kleyne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn

Jacob Perrenet, Groenburgwal 11, 1011 HR Amsterdam

H. Schuring, Van Heemstralaan 21, 6814 KB Arnhem

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth