

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

62e jaargang
1986 | 1987
november

Euclides 3

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Drs H. Bakker
Mw I. van Breugel
Drs F. H. Dolmans (hoofdredacteur)
W. M. J. M. van Gaans
Prof dr F. Goffree
L. A. G. M. Muskens
Drs C. G. J. Nagtegaal
Drs A. B. Oosten (eindredacteur)
P. E. de Roest (secretaris)
Mw H. S. Susijn-van Zaale
Dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12,
7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 50,- per verenigingsjaar;
studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de
V.V.W.L. f 35,-; contributie zonder Euclides f 30,-.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met
vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drieluik ingewacht
bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen,
tel. 08894-11730. Zij dienen met de machine geschreven
te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van

1 1/2, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De
redactiesecretaris P. E. de Roest, Blijhamsterweg 94,
9672 XA Winschoten, tel. 05970-22027 stuurt
desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De
auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5
exemplaren van het nummer waarin het artikel is
opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52c,
8932 CD Leeuwarden, tel. 058-135976.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille
(buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5,
3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW
leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 44,75. Een collectief
abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 26,50.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567,
9700 AN Groningen, tel. 050-226308. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen
tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend
nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag
leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde
van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers f 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruit-
betaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 39731 (Samsy).

Enige inhoudelijke en didactische aspecten van de digitale wiskunde

Simon van der Salm

1 Inleiding

De afgelopen jaren zijn veel wiskundedocenten in aanraking gekomen met computers. Ze hebben het nodige op eigen houtje geleerd of hebben cursussen bij een instituut gevolgd. In zulke cursussen staat het programmeren van een computer en het leren van een of meer computertalen voorop. Er wordt dus vooral de nadruk gelegd op wat met een computer kan en veel minder op wat een computer is. Een veelvoorkomend misverstand is, dat het begrijpen van de werking van een computer alleen is weggelegd voor technisch hoogbegaafden. Natuurlijk kleven er aan een computer allerlei ingewikkelde technische aspecten die uitsluitend met een technische achtergrond te begrijpen zijn. Echter de techniek van een computer is nauwelijks relevant voor het begrijpen van de werking; de wezenlijke aspecten van computers zijn van mathematische aard. Fundamentele begrippen uit de wiskunde, zoals verzamelingen, functies en operaties, kunnen worden gebruikt voor het beschrijven van het 'gedrag' van de deelschakelingen waarmee een computer wordt opgebouwd. Hierdoor is ook een mathematische beschrijving van de computer in zijn geheel mogelijk. Vooral het werk van de briljante Engelse wiskundige Alan Turing (1912-1954) laat zien, welke nauwe relaties er bestaan tussen wiskunde en programmeerbare machines.

Onder digitale wiskunde versta ik die wiskunde die je kunt gebruiken voor het beschrijven van digitale schakelingen en computers.

Met dit artikel beoog ik een eerste indruk te geven van het gebied van de digitale wiskunde. Ik behandel een aantal schakelingen om duidelijk te maken,

hoe wiskunde hierbij gebruikt kan worden. Naast de inhoudelijk-wiskundige aspecten komen een aantal didactische zaken van de digitale wiskunde, als onderdeel van de informatica, aan de orde.

2 Holonen en holarchieën

Tezamen met het ingewikkelder worden van elektronische schakelingen, zijn er allerlei methodes ontworpen voor het ontwikkelen en beschrijven van die schakelingen.

Hedendaagse schakelingen kunnen honderd-duizenden of zelfs miljoenen actieve componenten bevatten. Het is onmogelijk om de werking van zo'n ingewikkelde schakeling te begrijpen als je alleen in termen van die basiscomponenten zou denken. Zo zou je, bijvoorbeeld, de werking van een auto kunnen herleiden tot de wetmatigheden van de moleculen waaruit die auto is opgebouwd, maar het is praktisch onmogelijk om de werking van een auto te beschrijven in termen van moleculen.

Veel gebezigde termen, betreffende de analyse van schakelingen, die in dit verband genoemd moeten worden, zijn *bottom-up* en *top-down-analyse*.

Theo Kristel heeft, in zijn artikelen 'Gedachten over de didactiek van machinearchitectuur', Euclides 60, 8/9, (1) 1985 en 'Bouwen met zwarte dozen', Euclides 61, 6, 1986 (2), hierover het een en ander verteld. Een belangrijke gedachte is, dat bovengenoemde methodes gebruikt kunnen worden, zowel bij het ontwikkelen en beschrijven van schakelingen (hard-ware), als bij het ontwikkelen van programmatuur (soft-ware).

Een belangrijk kenmerk van, meestal geïntegreerde, elektronische schakelingen is de structuur van hun opbouw. Deze structuur heeft wel iets weg van de organisatiestructuur van grote bedrijven en het leger.

Opvallend kenmerk zijn de bekende hiërarchische, piramidevormige vorm van de opbouw.

Kleine *functionele eenheden* worden samengevoegd tot een grotere, meer omvattende functionele eenheid. Deze nieuwe eenheden worden op hun beurt weer samengevoegd tot nog grotere functionele eenheden.

Een kenmerk van zulke functionele eenheden is hun eenheid en betrekkelijke zelfstandigheid naar buiten toe. Een functionele eenheid is enerzijds te

zien als een 'geheel', anderzijds als een 'deel' van een geheel. Je zou een functionele eenheid dus met het woord 'deel-geheel' kunnen aanduiden.

De filosoof Arthur Koestler gebruikt in zijn boek 'Janus, a summing up' (3) hiervoor een prachtige benaming:

Holon. (Een samenvoeging van het Griekse woord *holos*, dat geheel betekent en het achtervoegsel *on*, dat, naar analogie met proton en neutron, duidt op een deel(tjes)-karakter.

Functionele eenheden zijn dus holonen. De structuur, die we met holonen kunnen construeren, wordt een *holarchie* genoemd. Volgens Koestler is een holarchie een hiërarchie waarbij meer de nadruk gelegd wordt op de zelfstandigheid van functioneren van de afzonderlijke delen.

Een holon is dus naar buiten op te vatten als een deel van een grotere holarchie en naar binnen als een holarchie, die uit kleinere holonen bestaat.

Bij top-down analyse beschouwen we een holon als een holarchie, die weer uit kleinere holonen is opgebouwd, bij bottom-up analyse beschouwen we een holon als een deel van een grotere holarchie.

Een computer, en ook een computersysteem, is op te vatten als een holarchie.

De basisholonen die voor dit artikel van belang zijn, zijn de zogenaamde *poortschakelingen*. Deze poortschakelingen zijn natuurlijk zelf ook weer holonen die uit een holarchische structuur bestaan. Dit is echter niet wezenlijk voor het begrijpen van de werking van een computer.

In dit artikel beschrijf ik een aantal wiskundige aspecten van poortschakelingen.

3 Geschiedkundige kanttekeningen

Niet veel mensen zullen zich ervan bewust zijn, dat, als ze een computer programmeren of luisteren naar de muziek die uit een compact-disc speler komt, de wiskundige wetten, waaraan de basisholonen, waarmee die apparaten zijn opgebouwd, al bijna 140 jaar bekend zijn. We kunnen die wetten beschreven zien in twee monumentale werken van de Engelse wiskundige en logicus *George Boole* (1815-1864). In zijn boeken 'The mathematical analyses of logic' (1847) en 'An investigation of the laws of thought' (1854) (4), onderneemt Boole een poging, om de wetten van het logisch denken door

middel van formele regels te beschrijven.

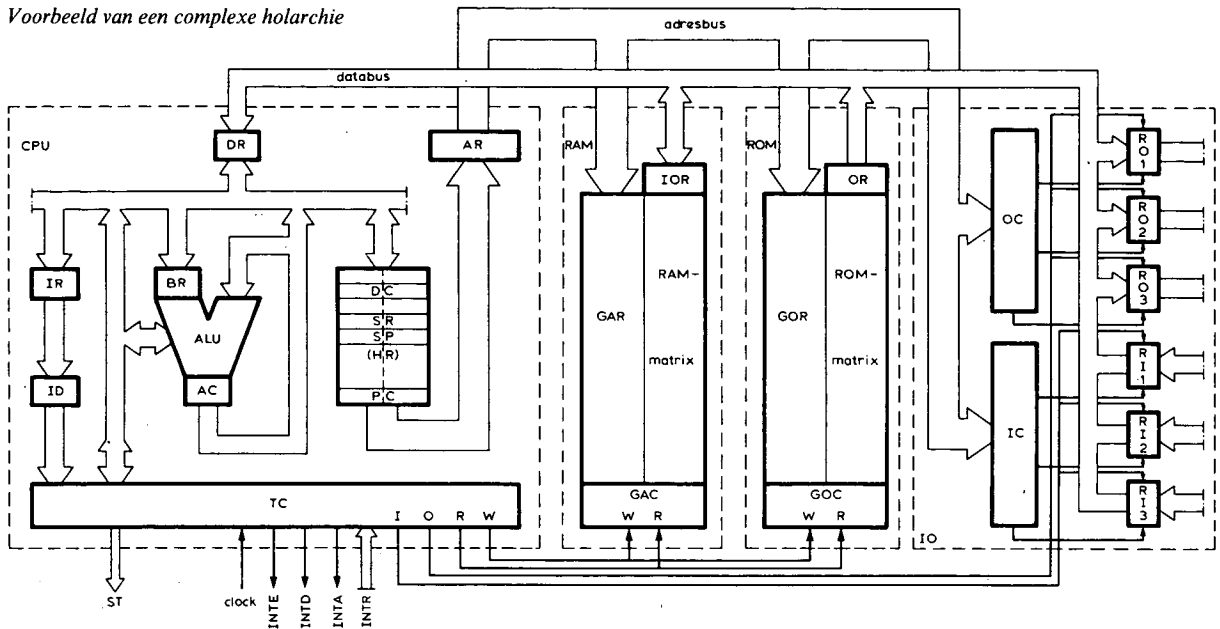
Tot die jaren was de logica niet verder gevorderd dan de logica van de klassieke Grieken en was het syllogisme (Ieder mens is sterfelijk, Socrates is een mens, dus Socrates is sterfelijk) een van de belangrijkste resultaten. Boole heeft de basisbeginselen van de propositielogica beschreven. Dit is een deelgebied van een veel omvattender gebied, het gebied van de symbolische logica, een onderdeel van de wiskunde, dat enorm is uitgebreid door het werk van Bertrand Russell en Alfred Whitehead in de jaren 1910-1913. Tot circa 1935 was de *Booleaanse algebra* alleen onderwerp van theoretische studie. Daarna begon een aantal mensen, onafhankelijk van elkaar en in verschillende landen, ook het praktische belang van deze algebra in te zien.

Dit inzicht heeft veel te maken met de overgang van het gebruik van analoge naar digitale rekenmachines. Analoge computers werden gebruikt voor het opstellen van tijdentabellen en andere soortgelijke toepassingen (5). In *analoge machines* wordt informatie voorgesteld door een analoge grootte (bijvoorbeeld spanning), waarvan de grootte tussen twee uiterste grenzen kan liggen. Iedere waarde tussen die twee grenzen kan informatie vertegenwoordigen. Analoge informatie wordt dus gekenmerkt door *oneindig veel* verschillende waarden.

Een van de nadelen van analoge informatie is de grote storingsgevoeligheid. Een kleine storing verandert de waarden van de analoge grootte en daarmee direct de informatie zelf. Bovendien blijkt het moeilijk om grote holonen voor analoge machines te bouwen.

Een van de eersten, die zich dit realiseerden, was de Duitse ingenieur Konrad Zuse, die rond 1935 een programmeerbare machine bouwde, waarin binaire getallen gebruikt werden voor het representeren van informatie. Zijn machine werkte met relais, waarvan de standen (aan/uit) binaire getallen voorstelden. Voor de operatieregels, waaraan zijn machine moest voldoen, ontwierp hij een *schakelalgebra*, die in wezen een Booleaanse algebra was. Zuse schijnt zich niet bewust geweest te zijn van dit verband tussen schakelalgebra en Booleaanse algebra.

Enige tijd later vond de Amerikaan George Stibitz, onafhankelijk van Zuse, het verband tussen binaire getallen en schakelingen die met relais waren gebouwd.



In 1938 verscheen een baanbrekend artikel van de Amerikaan Claude Shannon over het toepassen van de symbolische logica op relaischakelingen. Eigenlijk bevatte dit artikel een nog belangrijker idee: namelijk dat iedere informatie kan worden beschouwd als een soort fysische grootheid en dat, informatie bewerkt en verwerkt kan worden door computers.

In dit verband wordt met informatie vanzelfsprekend *kwantificeerbare informatie* bedoeld, dus *digitaliseerbare informatie*.

Op grond van technisch-economische redenen gebruikt men binaire getallen om informatie voor te stellen. In principe zouden de getallen van ieder willekeurig getalstelsel hiervoor in aanmerking kunnen komen.

De voordelen van digitale apparaten ten opzichte van analoge zijn de grotere storingsongevoeligheid, gemakkelijker te construeren holarchieën en een breder toepassingsgebied. Ondanks deze voordelen heeft het tot de 70-er jaren geduurd, alvorens men op grote schaal digitale computers en apparaten ging bouwen. Pas door de stormachtige ontwikkeling van de integratietechnologie zijn er kleine digitale basisschakelingen beschikbaar gekomen, basisschakelingen waarmee grote holarchieën gemaakt kunnen worden. Deze basisschakelingen zijn dus de holonen van die holarchieën.

4 Booleaanse algebra's

Uit het voorgaande blijkt, dat de Booleaanse algebra de gemeenschappelijke overlapping vormt van propositielogica, binaire rekenkunde en schakelalgebra. Propositionallogica, schakelalgebra en bijvoorbeeld, de algebra van machtsverzamelingen bezitten allen dezelfde algebraïsche structuur, ze zijn dus isomorf.

Merkwaardig is, dat we de binaire rekenkunde kunnen verklaren in termen van de Booleaanse algebra. Hierover straks meer.

Wat is nu een Booleaanse algebra? Birkhoff en MacLane geven in hun bekende boek 'A survey of modern algebra' (6) de volgende definitie:

Een *Booleaanse algebra* is een verzameling B waarin twee binaire operaties vastgelegd zijn. Deze operaties worden *Booleaanse optelling* en *Booleaanse vermenigvuldiging* genoemd.

Deze twee operaties, aangeduid met $+$ en $\cdot$ voldoen aan de volgende eigenschappen:

Ze zijn *idempotent*, d.w.z.: $a + a = a$ en $a \cdot a = a$ voor ieder element a van B , ze zijn *commutatief*, *associatief* en *wederzijds distributief*, d.w.z.:

$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ en $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$. Daarnaast gelden de zogenaamde *absorptieregels*: $a \cdot (a + b) = a$ en $a + (a \cdot b) = a$.

Verder bevat B twee neutrale elementen, aangeduid met 0 en 1, waarvoor de volgende regels gelden:

$$0 \cdot a = 0; 0 + a = a; 1 \cdot a = a; 1 + a = 1.$$

Aan ieder element a van B is een complementair element toegevoegd, aangeduid met a' .

a en het complement van a , a' voldoen nog aan de volgende regels:

$$a \cdot a' = 0 \text{ en } a + a' = 1.$$

De betekenis van deze regel kan men het best proberen te doorgronden met behulp van een voorbeeld:

Is X een niet-lege verzameling en is $B: = 2^X$ de machtsverzameling van X , dan vormt B , tezamen met de operaties doorsnede en vereniging een Booleaanse algebra.

Zoals bekend zal zijn, gelden in B de wetten van De Morgan. De wetten van De Morgan blijken voor iedere Booleaanse algebra te gelden.

Voor de digitale wiskunde is de volgende verzameling van bijzonder belang. Onder de Booleverzameling verstaan we de verzameling $B: = 0, 1$, waarbij hier met 0 en 1 gehele getallen bedoeld worden. Op de Booleverzameling definiëren we een optelling en een vermenigvuldiging, door middel van de volgende tabellen:

$$\begin{array}{ll} 0 + 0 = 0; & 0 \cdot 0 = 0 \\ 0 + 1 = 1; & 0 \cdot 1 = 0 \\ 1 + 0 = 1; & 1 \cdot 0 = 0 \\ 1 + 1 = 1; & 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

De Booleverzameling tezamen met de twee genoemde operaties vormt een Booleaanse algebra. Hoe passen binaire getallen in dit verhaal?

We kunnen de Booleverzameling en produkten van de Booleverzameling gebruiken om vast te leggen wat we onder binaire getallen kunnen verstaan.

Onder een n -bits binair getal verstaan we een element van het Carthesisch produkt

$$B^n = B \times B \times \dots \times B.$$

Een n -bits binair getal is dus een rijtje van n cijfers, waarvan ieder cijfer een 0 of een 1 is.

Is b een element van B^n , dus een n -bits binair getal, dan kunnen we b schrijven als: $b_{n-1}b_{n-2} \dots b_1b_0$, waarbij de nummering van rechts naar links gekozen is, in overeenstemming met de gebruikelijke volgorde van cijfers in getallen.

Iedere b_i is dus een element van de Booleverzameling. b_i noemen we het i -de bit van het getal b . (bit = binary digit).

De twee binaire operaties op de Booleverzameling

kunnen uitgebreid worden tot operaties op B^n . Hierdoor wordt B ook een Booleaanse algebra. Interessant is ook het oneindige produkt van de Booleverzameling met zichzelf: B^∞ .

Vanzelfsprekend kan op de hierboven beschreven wijze, met B^∞ als onderliggende verzameling een Booleaanse algebra vastgelegd worden.

Merkwaardig is, dat we in deze verzameling een binaire optelling, d.w.z. een rekenkundige optelling kunnen definiëren door middel van de Booleaanse operaties in de verzameling. Hierdoor wordt er op B^∞ een totale ordening vastgelegd en blijkt deze verzameling isomorf te zijn met de verzameling van natuurlijke getallen (inclusief 0).

Deze isomorfie is bepaald door het Euclidisch delingsalgorithme. Nemen we bijvoorbeeld 46 en passen we hierop het algorithme met deler 2 toe, dan krijgen we:

$$46 = 2 \times 23 \text{ rest } 0; 23 = 2 \times 11 \text{ rest } 1; 11 = 2 \times 5 \text{ rest } 1; 5 = 2 \times 2 \text{ rest } 1; 2 = 2 \times 1 \text{ rest } 0 \text{ en } 1 = 2 \times 0 \text{ rest } 1.$$

Door de isomorfie wordt 46 afgebeeld op $\dots 0000101110$ van B^∞ .

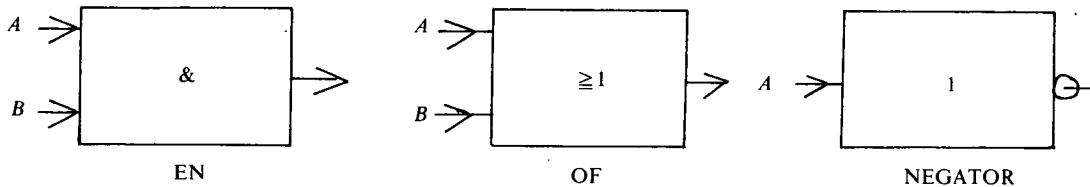
Dit getal vind je, door de gevonden resten van rechts naar links op te schrijven, en het aldus ontstane binaire getal, dat uit een eindig aantal bits bestaat, aan de linkerkant aan te vullen met een oneindig aantal nullen.

Men kan zich door het bovenstaande voorstellen, dat er een groot aantal verbindingen bestaat tussen Booleaanse algebra en binaire rekenkunde. Het is jammer genoeg niet mogelijk om hier een uitvoeriger beschrijving te geven van deze verbindingen. Het bovenstaande dient ter kennismaking met het onderwerp van de digitale wiskunde.

Dat ook de propositielogica met haar rekenregels een Booleaanse algebra vormt, is niet moeilijk in te zien. Men hoeft, in de algemene definitie van de Booleaanse algebra, alleen door *en*, + door *of* en het accent door *niet* te vervangen, om dit in te zien. (7)

5 De basisholonen van computers

Het is gebruikelijk in de digitale techniek om alle schakelingen op te bouwen, uitgaande van drie basisblokjes, die *en-poort*, *of-poort* en *nagatiepoort* genoemd worden.



Figuur 1

In figuur 1 worden de symbolen hiervan getoond.

Het is zelfs mogelijk om schakelingen op te bouwen, uitgaande van één basisblokje.

In digitale schakelingen is er steeds sprake van twee elektrische spanningen; de kleinste kunnen we met 0 aanduiden en de grootste met 1. We spreken over een spanning van *logisch 0-nivo* of *logisch 1-nivo*.

De werking van de *elementaire poortschakelingen*, zoals bovenstaande poortschakelingen genoemd worden, kunnen we weergeven door de volgende tabellen.

A	B	A en B:	A	B	A of B:	A	niet A
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

Dit soort tabellen wordt *waarheidstabellen* genoemd. A en B kunnen we opvatten als de bits van binaire getallen. Van boven naar beneden zien we dan de natuurlijke volgorde van die getallen. Met de drie elementaire poortschakelingen kunnen we uitgebreidere poortschakelingen construeren.

Onder een *en-poort* met *n* ingangen verstaan we een schakeling met *n* ingangen en één uitgang; de uitgang is uitsluitend dan 1 als alle ingangen 1 zijn.

Onder een *of-poort* met *n* ingangen verstaan we een schakeling met *n* ingangen en één uitgang; de uitgang is uitsluitend dan 0 als alle ingangen 0 zijn. In figuur 2 wordt getoond, hoe je met twee elemen-

taire en-poorten een en-poort maakt met drie ingangen.

Dat de algebra van zulke circuits een Booleaanse algebra vormen, is niet zo moeilijk in te zien. Vergelijk de waarheidstabellen van de elementaire poortschakelingen maar eens met de tabellen van de operaties in de Booleverzameling.

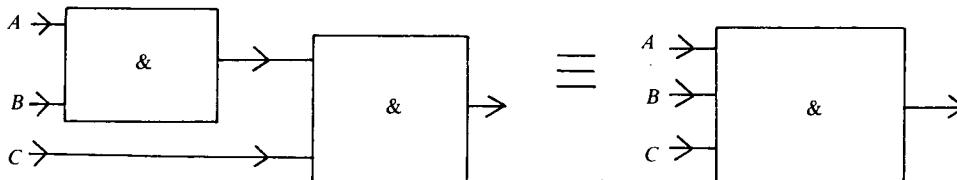
De relatie tussen digitale schakelingen en binaire getallen dringt zich onmiddellijk aan ons op. We kunnen deingangsspanningen van digitale schakelingen voorstellen door middel van een binair getal. Deingangsspanningen van een en-poort met vijf ingangen, kunnen we ons voorstellen als een 5-bits binair getal, terwijl de uitgangsspanning een 1-bits binair getal voorstelt.

6 Combinatorische schakelingen

Met de elementaire poortschakelingen en de poortschakelingen die hiervan zijn afgeleid, kunnen we een oneindig aantal schakelingen bouwen.

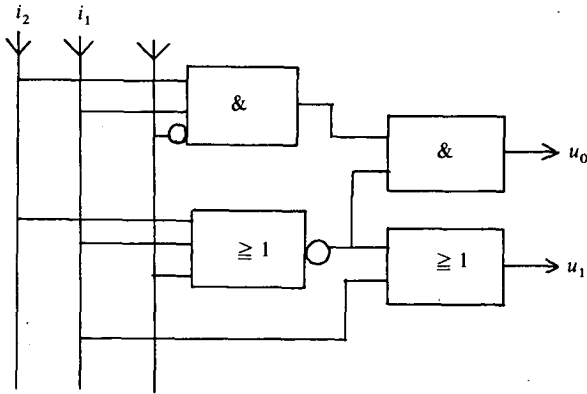
Een bijzondere klasse van zulke schakelingen wordt de klasse van *combinatorische schakelingen* genoemd.

Onder een combinatorische schakeling verstaan we een digitale schakeling met *m* ingangen en *n* uitgangen. Het uitgangsgetal is een functie van hetingangsgetal. De werking van deze schakeling kunnen we representeren door een afbeelding van B^m naar B^n , waarin B de Booleverzameling voorstelt.



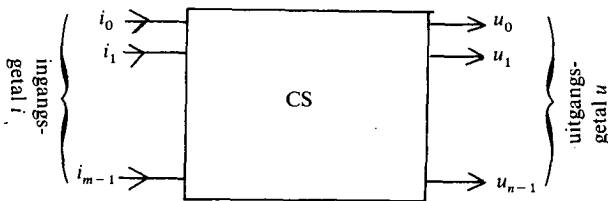
Figuur 2

In figuur 3 is het schema van een zekere digitale combinatorische schakeling te zien.



Figuur 3

In het algemeen kunnen we ons een combinatorische schakeling voorstellen door een blokje zoals in figuur 4 wordt weergegeven.



Figuur 4

Iedere combinatorische schakeling kan worden voorgesteld door middel van een waarheidstabel. Onderstaande tabel is een waarheidstabel van een zekere combinatorische schakeling met drie ingangen en twee uitgangen.

i_2	i_1	i_0	u_1	u_0
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

Merk op, dat de ingangstabellen $i = i_2 i_1 i_0$ van boven naar beneden in de natuurlijke volgorde zijn opgeschreven.

Er bestaat een eenvoudige algoritmische techniek om van een gegeven combinatorische schakeling de bijbehorende waarheidstabel te bepalen.

In het algemeen bevat een waarheidstabel 2^m rijen en $m + n$ kolommen. De waarheidstabel kan in twee delen worden opgesplitst: de linkerkant van de ingangsetallen en de rechterkant van de uitgangsetallen. De uitgangsetallen vormen een $2^m \times n$ -matrix, die ik de *Pierce-matrix* van de combinatorische schakeling zal noemen. Genoemd naar de Amerikaanse wiskundige C.S. Pierce (1839-1914), die als een der eersten met waarheidstabellen werkte.

Deze Pierce-matrix vertegenwoordigt de functie die de werking van de schakeling beschrijft.

De operaties van de Booleverzameling kunnen we ook definiëren voor de verzameling van gelijksoortige matrices. Iedere verzameling van gelijksoortige Pierce-matrices vormt, tezamen met die operaties, een Booleaanse algebra.

Iedere combinatorische schakeling kunnen we door een unieke Pierce-matrix representeren. Het omgekeerde is niet het geval. Twee verschillende combinatorische schakelingen kunnen dezelfde Pierce-matrix hebben.

Een veel voorkomend probleem dat we in de digitale techniek tegen kunnen komen, is het volgende: Gegeven een Pierce-matrix, hoe vinden we een schakeling met een zo klein mogelijk aantal poortschakelingen?

Het antwoord op deze vraag heeft te maken met de zogenaamde *kanonieke uitdrukkingen* van Booleaanse functies.

Een *Booleaanse functie* is een functie van B^m naar B , waarin B de Booleaanse verzameling voorstelt.

Is f een Booleaanse functie, dan kan f worden voorgesteld door middel van *som van produkten* formules en door *produkt van sommen* formules. Deze formules worden kanonieke uitdrukkingen van f genoemd.

Zo'n som van produkten formule zou er bijvoorbeeld als volgt uit kunnen zien:

$$f(i_3, i_2, i_1, i_0) = i_2 i_0' + i_3' i_1.$$

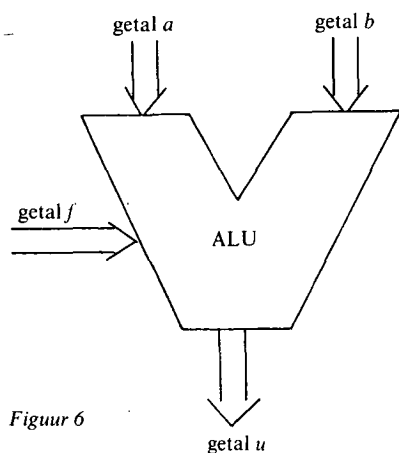
De werking van iedere combinatorische schakeling is te beschrijven door middel van een n -tal van zulke kanonieke uitdrukkingen.

Er bestaat een aantal methoden en algorithmen waarmee de eenvoudigste kanonieke uitdrukkingen kunnen worden afgeleid uit de Pierce-matrix van de gevraagde schakeling. Een van die methoden is gebaseerd op het Karnaughdiagram. In figuur 5 wordt het Karnaughdiagram van een zekere Booleaanse functie getoond.

Figuur 5

$i_1 i_0$ \ $i_3 i_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	0	0	1
11	0	0	0	1
10	0	0	0	0

Tot besluit van deze paragraaf nog een interessante combinatorische schakeling die in elke processor voorkomt: de ALU, de *arithmetic and logic unit*. Het is een combinatorische schakeling met een heel duidelijke holarchische structuur. In figuur 6 wordt het symbool van deze schakeling getoond.



Figuur 6

De ALU kan een aantal bewerkingen uitvoeren op de twee n -bits getallen a en b . Bijvoorbeeld optellen of een en-operatie. Daar de som van twee n -bits binaire getallen een $n + 1$ bits getal kan zijn, is u $n + 1$ bits. Het getal f bepaalt welke operatie er op de getallen

wordt uitgevoerd. De operaties kunnen we beschrijven als afbeeldingen van $B^n \times B^n$ naar B^{n+1} .

7 Informatica in het voortgezet onderwijs

Ongetwijfeld zullen veel lezers van dit artikel begrijpen, wat ik met het 'ongemakkelijke gevoel' bedoel, dat mij bevangt, als een leerling mij vraagt waarom hij of zij wiskunde moet leren. In het middelbare en hogere technische onderwijs, waar ik les geef, is deze vraag gemakkelijker te beantwoorden dan in het voortgezet onderwijs.

Ik kan daar immers wijzen op de toepasbaarheid van de wiskunde in technische vakken die ze op school leren.

Van Dormolen noemt in zijn bekende boek 'Didactiek van de wiskunde' (8) vijf algemene doelstellingen, ieder gerelateerd aan een gebied van menselijke bezigheden: natuurverschijnselen, intermenselijke relaties, goederen en diensten, communicatie en cultuur. Naar mijn mening behoren ook de eerste vier gebieden tot de menselijke cultuur.

De gedachtengang van Van Dormolen is, dat de vraag te beantwoorden zou zijn, door te wijzen op de toepassingsmogelijkheden van de wiskunde op de eerste vier gebieden. Maar is dit antwoord ook relevant? Hoeveel mensen komen er in het 'dagelijkse leven' met wiskunde in aanraking?

Vermoedelijk een zeer klein aantal van degenen die wiskunde leren of hebben geleerd in het voortgezet onderwijs.

Toch ben ik van mening, dat wiskunde een vak dient te zijn in het voortgezet onderwijs, juist omdat wiskunde een produkt is van onze menselijke cultuur. (Waarbij cultuur dan zo breed mogelijk dient te worden opgevat).

Dus niet alleen wiskunde op technische scholen en andere vormen van onderwijs waar wiskunde als toepassing aan de orde komt.

Dit laatste argument, dat je m.b.t. de moderne technologische ontwikkelingen nauwelijks hoort, zou ik ook willen gebruiken m.b.t. de informatica.

Doelstellingen van praktischer aard vind ik van geringer belang dan deze culturele doelstelling. Vanzelfsprekend is er, m.b.t. de informatica, meer gelegenheid om de praktischer doelstellingen te rechtvaardigen.

8 De inhoud van informatica-onderwijs

Een citaat:

Unfortunately, many universities have 'computer science' programs at the undergraduate level that permit students and even encourage students to take this course. When such students have completed their studies, they are rather like people who have somehow become eloquent in some foreign language, but who, when they attempt to write something in that language, find they have literally nothing of their own to say...

... Just so much of computer-science curriculum is concerned with the craft of computation, it is perhaps easy for the teacher of computing science to fall into the habit of merely training. But, were he to do that, he would surely diminish himself and his profession. He would also detach himself from the rest of intellectual life of the university. The university should hold, before each of its citizens, and before the world as large as well, a vision of what it is possible for a man or woman to become.

Uit: Computer power and human reason, Joseph Weizenbaum, blz. 278 (9).

De discussie over de inhoud van het informatica-onderwijs is aanzienlijk lastiger dan de discussie over het al dan niet geven van onderwijs in de informatica aan scholieren in het voortgezet onderwijs.

In elk geval is wel aan te duiden wat informatica-onderwijs niet moet zijn: een veredelde vorm van *knopjesdrukkerij*.

Globaal gesproken vind ik, dat informatica-onderwijs moet gaan over de computer en zijn mogelijkheden, sociaal-economische invloeden van de moderne technologie, filosofie en ethiek van technologie en natuurwetenschappen.

Natuurlijk zal het programmeren van een computer aan de orde dienen te komen. Het leren programmeren van een computer dient, naar mijn mening, ondergeschikt te zijn aan een veel belangrijker doel: het inzicht verschaffen in de relaties tussen informatica en de overige terreinen van de menselijke werkelijkheid.

Het resultaat van het informatica-onderwijs mag niet zijn, het afleveren van mensen zoals ze maar al te vaak te zien zijn op bijvoorbeeld hobby-computerbeurzen: mensen die leven in een zelfgeschapen; intellectueel en cultureel bekrompen wereld.

Het citaat van Weizenbaum moet in het licht van deze opmerkingen gezien worden.

9 Digitale wiskunde op school

In het vak informatica in het voortgezet onderwijs zou ook iets over de opbouw van computers en computersystemen aan de orde kunnen komen. De logische en structurele constructie van deze apparatuur kan immers los gezien worden van de elektronische techniek die deze structuur mogelijk maakt.

Vanaf het niveau van de poortschakelingen heeft de beschrijving van zulke structuren, in de eerste plaats, te maken met wiskunde. Daarom geef ik de voorkeur aan de benaming 'digitale wiskunde' boven de benaming 'digitale techniek'.

Het onderwijs in de digitale wiskunde zou de volgende deelgebieden kunnen omvatten:

- 1 getalstelsels,
- 2 Booleaanse algebra,
- 3 Karnaughdiagrammen,
- 4 poortschakelingen en
- 5 holarchieën die met deze poortschakelingen worden geconstrueerd.

Natuurlijk zouden de moeilijkheidsgraad en abstractieniveau per schooltype moeten verschillen. In de hoogste klassen van havo en vwo zou digitale wiskunde een interessante mogelijkheid bieden, om leerlingen met abstracte structuren in aanraking te brengen.

Een aantrekkelijke kant van de digitale wiskunde is bovendien, dat er gemakkelijk en tegen geringe kosten allerlei modellen gemaakt kunnen worden om de abstractere begrippen van het vak te verduidelijken.

10 Samenvatting

Grote digitale systemen hebben een opbouw met een holarchische structuur. De deelsystemen zijn holonen, ook weer met een holarchische structuur. De opbouw van zulke holarchieën is te beschrijven, uitgaande van poortschakelingen. Digitale wiskunde is de taal die bij die beschrijving gebruikt wordt. In het vak informatica in het voortgezet onderwijs zou digitale wiskunde kunnen worden opgenomen.

Informatica-onderwijs dient zich diepgaand bezig te houden met theorievorming over computers, en filosofische, ethische en sociaal-economische aspecten van moderne technologie en natuurwetenschappen.

Literatuur

- 1 Theo Kristel: *Over de didactiek van machine-architectuur*, Euclides 60, 8/9, 1985.
- 2 Theo Kristel: *Bouwen met zwarte dozen*, Euclides 61, 6, 1986.
- 3 Arthur Koestler: *Janus, a summing up*, Van dit boek bestaat een Nederlandse vertaling met de titel *De menselijke tweespalt* uitgegeven door uitgeverij Uitgeverij De Nederlandse Boekhandel, 1981. In dit boek worden de termen holon en holarchie gedefinieerd.
- 4 George Boole: *An investigation of the laws of thought*, Dover books, 1958.
- 5 Stan Augarten: *Bit by bit, an illustrated history of computers*, Unwin paperback, London, 1984.
- 6 Birkhoff en MacLane: *A survey of modern algebra*, The Mac-Millan Company, New York, 1968.
- 7 E. J. Lemmon: *Moderne logica*, prisma-compendia, 1968.
- 8 Joseph Weizenbaum: *Computer power and human reason*, Freeman and Company, San Francisco, 1976. In dit boek bespreekt Weizenbaum een keur van aspecten van de verhouding tussen informatica en samenleving.
- 9 J. van Dormolen: *Didactiek van de wiskunde*, Oosthoek's Uitgeversmaatschappij, 1974.
- 10 H. Freudenthal: *Mathematics as an educational task*, Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1973. Met betrekking tot dit artikel is hoofdstuk 4 van belang. Freudenthal bespreekt hier doel en nut van de wiskunde.
- 11 R. T. Boute: *Inleiding tot de structuur van digitale systemen*, collegedictaat van de Katholieke Universiteit van Nijmegen, 1983. Dit dictaat behandelt een groot aantal aspecten van de digitale wiskunde.
- 12 J. J. Schrage: *Fundamenteel schakelen*, delen 1 en 2, Educaboek, Culemborg, 1979. Deze boeken zijn leerboeken digitale techniek die voor de HTS geschreven zijn. De behandelde onderwerpen zijn hier en daar misschien wat te technisch voor wiskundelaren, maar geven toch een aardige indruk van het vakgebied.

Over de auteur

Simon van der Salm studeerde aan de HTS voor elektronica te Hilversum, deed staatsexamen Wiskunde MO-A en studeerde Wiskunde MO-B bij de Vrij Leergangen in Amsterdam/Diemen. Sinds 1976 is hij als docent wiskunde en informatietechniek verbonden aan de HTS/MTS voor elektronica te Hilversum.

Mededelingen

Eindexamen wiskunde A en wiskunde B

Regelmatig blijkt dat docenten van de eindexamenklassen vwo nog vragen hebben over het programma en de exameneisen voor de nieuwe vakken wiskunde A en wiskunde B. Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundelaren biedt daarom aan de leden de gelegenheid vragen over het eindexamenprogramma te zenden aan de secretaris, drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Na een inventarisatie van de vragen zal in samenwerking met de inspectie en de CEVO getracht worden de vragen te beantwoorden. De antwoorden zullen in Euclides en de Nieuwe Wiskrant worden geplaatst en een afschrift van deze publikatie zal aan de vragenstellers worden toegezonden.

Belangstellenden wordt verzocht de vragen binnen veertien dagen na verschijnen van dit blad op te zenden.

Conferenties Wiskunde-Didactiek

Het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde (Lerarenopleidingen, Nederlandse Vereniging van Wiskundelaren, OW & OC en SLO) organiseert ook dit schooljaar weer drie-daagse didactiek-conferenties voor wiskundelaren (zowel derde-, tweede- als eerstejaars):

- 12 t/m 14 februari 1987:
Breuk in het breukenonderwijs?
- 12 t/m 14 maart 1987:
Rekening houden met individuele verschillen.
- 2 t/m 4 april 1987:
Zingeving van wiskunde-onderwijs.

Plaats: Conferentie-oord 'De Bosrand' te Ede.

Aanmeldingsformulieren zijn reeds verzonden naar alle scholen. Contactpersoon: L. Kuijk, Moller Instituut/Katholieke Leergangen Tilburg, tel. 013 - 39 46 70.

Open Conferentie Wiskundedidactiek

Op 18 en 19 maart 1987 zal er in de Hoorneboeg bij Hilversum weer een conferentie gehouden worden voor docenten, opleiders en anderen die beroepshalve geïnteresseerd zijn in de didactiek van de wiskunde. Op deze conferentie kunnen deelnemers verslag uitbrengen en discussiëren over zaken die hen aan het hart gaan. Nadere informatie bij Joop van Dormolen, PDI voor de Leraarsopleiding, Heidelberglaan 2, 3584 CS Utrecht, tel. 030 - 53 37 76 / 53 38 97.

De 27e Internationale Wiskunde Olympiade

Dit jaar is de Internationale Wiskunde Olympiade in Warschau gehouden. In verband met de kernramp in Tsjernobyl vond men het in ons land raadzaam niet deel te nemen. De Belgen hebben wel een delegatie gezonden en daaraan hebben we het te danken dat er wel een vertaling in het Nederlands van de opgaven gemaakt is. Hieronder volgen ze.

Eerste dag: woensdag 9 juli 1986

1 d is een strikt positief geheel getal dat niet tot de verzameling $\{2, 5, 13\}$ behoort. Bewijs dat in de verzameling $\{2, 5, 13, d\}$ een koppel getallen (a, b) kan gevonden worden zo dat $a \cdot b - 1$ niet het kwadraat van een geheel getal is.

2 In het vlak worden een driehoek $A_1 A_2 A_3$ en een punt P_0 gegeven.

Men stelt verder dat $A_s = A_{s-3}$ voor elke $s \geq 4$.

De rij punten $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wordt bepaald door P_0 en de volgende werkwijze: voor elke k is P_{k+1} het beeld van P_k in de draaiing met centrum A_{k+1} en draaiingshoek $\frac{2\pi}{3}$.

Weet je nu dat $P_{1986} = P_0$, toon dan aan dat $A_1 A_2 A_3$ een gelijkzijdige driehoek is.

3 Aan elk hoekpunt van een regelmatige vijfhoek wordt een geheel getal toegevoegd zo dat de som van deze vijf getallen strikt positief is.

Indien aan drie opeenvolgende hoekpunten respectievelijk de getallen x, y en z toegevoegd zijn waarbij $y < 0$, dan is de volgende bewerking toegelaten: het drietal (x, y, z) wordt vervangen door $(x + y, -y, y + z)$

Die bewerking wordt hernomen zolang ten minste één van de vijf getallen strikt negatief is.

Bepaal of dit procédé noodzakelijkerwijze stopt na een eindig aantal van deze bewerkingen.

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur.

Aan elke opgave wordt 7 punten toegekend.

Tweede dag: donderdag 10 juli 1986

4 A en B zijn twee opeenvolgende hoekpunten van een regelmatige veelhoek met n zijden ($n \geq 5$) en middelpunt O .

Een driehoek XYZ , die congruent is met de driehoek OAB , wordt om te beginnen zo geplaatst dat de hoekpunten X, Y en Z respectievelijk samenvallen met O, A en B .

De driehoek XYZ verplaatst zich vervolgens in het vlak van de veelhoek zo dat de punten Y en Z op de zijden van de veelhoek blijven liggen en X binnen de veelhoek blijft.

Welke figuur wordt door het punt X beschreven wanneer Y geheel de omtrek van de veelhoek doorloopt?

5 We noemen $\mathbb{R}_+$ de verzameling van alle reële getallen die positief of nul zijn.

Bepaal alle afbeeldingen van $\mathbb{R}_+$ in zichzelf die aan de volgende drie voorwaarden voldoen:

(I) voor alle x en y uit

$$\mathbb{R}_+ : f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(x + y)$$

(II) $f(2) = 0$

(III) voor elke $x \in [0, 2] : f(x) \neq 0$.

6 In het geijkte vlak beschouwt men een eindige verzameling V van punten waarvan de coördinaatgetallen gehele getallen zijn.

Is het mogelijk alle punten van V met één van beide kleuren, rood of wit, te kleuren zodat aan de volgende voorwaarde voldaan voor elke rechte D , evenwijdig met één van de coördinaatassen, is de absolute waarde van het verschil tussen het aantal rode punten en het aantal witte punten die op D liggen, kleiner dan of gelijk aan 1.

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur.

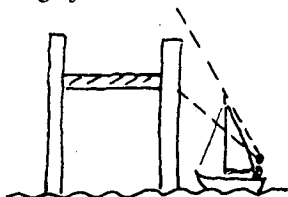
Aan elke vraag wordt 7 punten toegekend.

Tekeningen

George Schoemaker

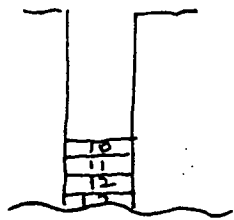
Onder de brug door:

Een tekenlerares voer mee op een zeilschip dat maar net onder een brug door kon. Ze verbaasde zich erover dat ze van te voren niet kon zien of de mast te hoog was of niet. Ze verbaasde zich het meest over zichzelf, dat ze zich dat nooit eerder gerealiseerd had. Ze maakte het volgende tekeningetje.



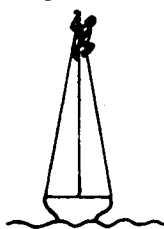
Figuur 1

De omgekeerde peilschaal op de pijler van de brug bood uitkomst. De roerganger kent de hoogte van het schip en leest op de omgekeerde peilschaal de afstand tussen waterniveau en brugdek. Dat verbaasde nu weer een meevarend wiskundige. Hij herkende de vondst. Bij hoogte meten denk je in de richting van laag naar hoog maar in het geval van de brug over het water is het waterniveau variabel. Hij vond het een voorbeeld van blikwisseling. Daar hoort ook een schetsje bij.



Figuur 2

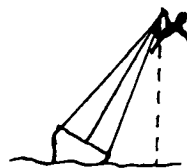
Van de andere kant kwam er een schip aanvaren. Vlak voor de brug werd een opvarende met het bootmansstoeltje in de mast gehesen. Als we hem op de rug hadden kunnen kijken, had het er zo uitgezien.



Figuur 3

Verklaring:

- De roerganger kent niet precies de hoogte van het schip en de man in het bootmansstoeltje kan vlak over het topje van de mast kijken en tijdig waarschuwen.
- De roerganger kent precies de hoogte van het schip en hij weet dat het lukt het schip onder de brug door te varen als het een beetje scheef hangt. De sinus van de hellingshoek is de verkortingsfactor.



Figuur 4

- De roerganger kent heel precies de hoogte van het schip en hij zorgt ervoor dat de marifoonantenne even gedemonteerd wordt.



Figuur 5

- De roerganger neemt het zekere voor het onzekere omdat hij niet precies kan zien wat het effect is van de golven.

We zullen het nooit aan de weet komen want tijdens de doorvaart onder de brug waren de beide schepen gescheiden door een wand in de brug. Voor de lezer die gefixeerd is op vierkeuzevragen: Alle vier lijken redelijke alternatieven.

Steeds is er een tekeningetje waar je datgene in tekent dat relevant is. Bij de tekenlerares was het een zijaanzicht. Je kunt van geen enkele plaats dit zien toch helpt het de werkelijkheid te verklaren. In het geval van de omgekeerde peilschaal is er sprake van een extra verduidelijking van de schaal met meterverdeling op de pijler. Nieuwe informatie die nog niet in de tekst staat. Het is niet nodig vakken op de brugpijler te schilderen met de cijfers 9 tot en met 1.

Bij het verhaal over de hellingshoek hangt er een hulplijn uit het topje van de mast om de zin over de sinus te verklaren.

De marifoonantenne heb ik getekend voor diegenen die niet weten waar zo'n ding meestal zit. Bij alle schetsjes teken je op een andere manier. Dat hangt ervan af waarvoor je het plaatje nodig hebt. In zijn artikel 'Voorbeelden' opgenomen in Euclides van maart 1986 laat Jan van de Craats prachtige stukken wiskunde en mogelijkheden voor wiskunde-onderwijs zien. Hij trekt daarin ten strijde

tegen het eenzijdig en overvloedig gebruik van de Cavalierprojectie waarbij projecterende stralen van de parallelprojectie niet loodrecht op het tafereel staan. Hij beschrijft als voorbeeld van een orthogonale projectie de z.g. ingenieursprojectie.

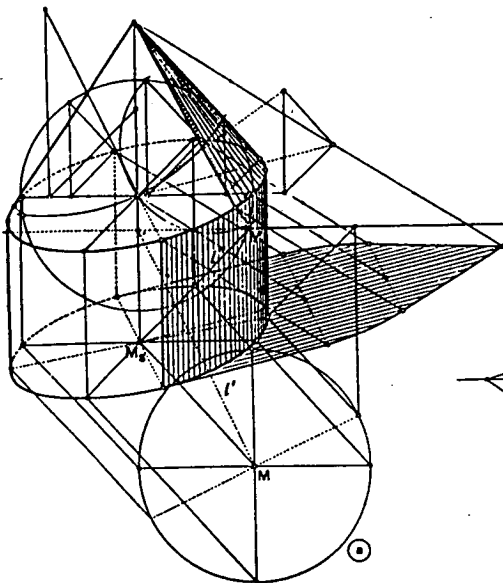
Jan van de Craats verkeert in goed gezelschap als het gaat om de strijd tegen het veelvuldig gebruik van de scheve projectie in schoolboeken. Toen de scheve projectie als enige projectie werd ingevoerd in het stereometrie-onderwijs trok Piet Wijdenes van leer in jaargang 33 (1957/58) van Euclides in het artikel 'Klinografische projectie of scheve?' op pagina 166-183.

Ik citeer:

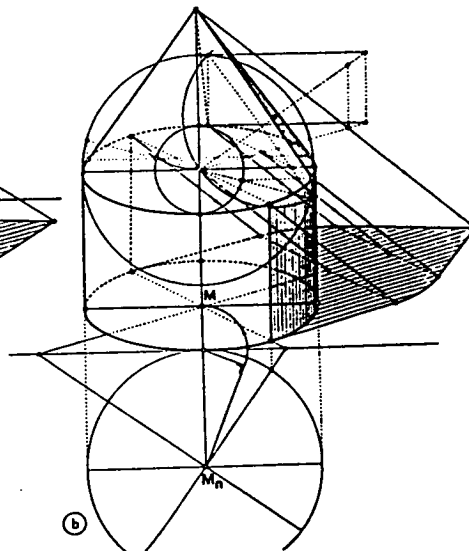
De axonometrie en dus de sterk vereenvoudigde axonometrie, de klinografische projectie, geeft het normale beeld. Zet achter een glasplaat b.v. een sigarenkistje; de glasplaat helt achterover onder een hoek van ongeveer 75° met het horizontale vlak. Zien we naar het voorwerp, dan krijgt men een beeld, dat zeer nabij het beeld ligt, dat ontstaat, als men uit het voorwerp loodlijnen op de glasplaat zou trekken.

Hij wijst op de onnatuurlijke tekenwijze van de cilinder bij de scheve projectie:

En lezer ... kijk eens in de keuken, waar een pan op het fornuis staat; ziet u dan de cilinder van fig. 16a of die van fig. 16b? Moet de school weer iets leren, zoals het net niet buiten de school bestaat?

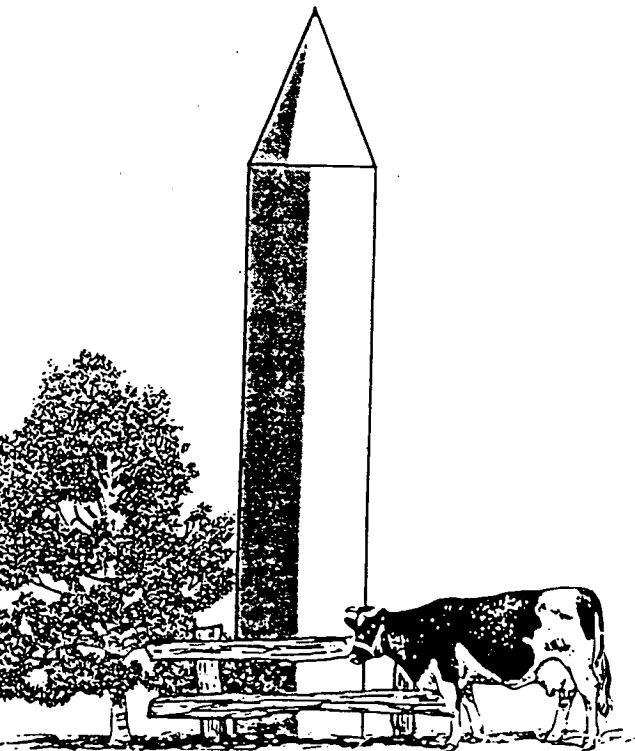


Figuur 6a



Figuur 6b

Ik neem deze fraaie tekening over omdat deze ook het antwoord bevat op de puzzel in de Nieuwe Wiskrant van mei 1983:



Figuur 7

In onze schoolboeken wordt de scheve projectie veelvuldig gebruikt. Waarom eigenlijk? Ik denk dat het berust op een ervaring in de klas dat het zo lastig is kinderen zelf een tekening te laten maken van een kubus. Het was een uitkomst om hiervoor een tekenalgoritme te geven: teken twee vierkanten als volgt:



Figuur 8

Een typisch mechanistische manier van tekenen, zeker niet gestoeld op begrijpen wat je tekent. Als je 't zo doet komt er dezelfde tekening als op het bord staat. Leerlingen konden later een kartonnetje ma-

ken met acht gaatjes voor de hoekpunten van de kubus, bruikbaar als passe-partout. (Dat kan ook bij elke andere projectiemethode)

Als je zo maar vaak genoeg een kubus tekende ging je er vanzelf in geloven: d.w.z. er diepte in zien. Een bepaalde tekenwijze ging overheersen en over de keuze was nooit meer enige discussie. 'Dat doen we in de wiskunde zo' is een zinnetje dat recht heeft op een heleboel argwaan, met een wiskundevlag wordt onwiskundige lading gedekt.

Een docent kan hier tegenin brengen: Dat kan wel zo zijn, maar de scheve projectie biedt leerlingen de gelegenheid om een tekening te maken volgens een simpel algoritme, waarbij ze niet verstrikt raken in hun tekenwijze. En zo lang ze nog steeds getraceerd worden op kubussommen, heeft zo'n onnatuurlijke tekenwijze toch voordelen, al was 't alleen maar dat de diagonaalvlakken van de kubus allemaal goed zichtbaar zijn.

We maken binnen en buiten het wiskunde-onderwijs veelvuldig gebruik van tekeningen om greep te krijgen op een situatie. Het is de moeite waard bij allerhande gebruik van tekeningen ook stil te staan bij de keuze.

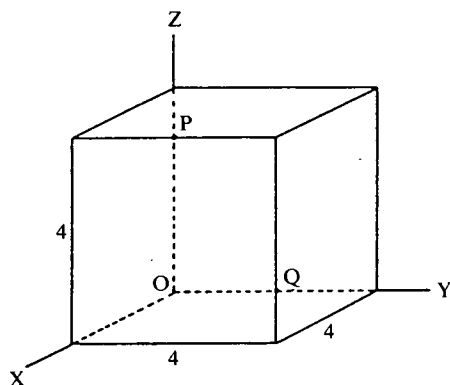
Een opdracht als 'Hier staat een kubus getekend volgens de z.g. scheve projectie. Probeer van een draadfiguur een foto te maken die zo veel mogelijk lijkt op deze tekening.' zou niet misstaan in een wiskundeboek. Daar hoort nog een vraag bij: 'Probeer met de lichtbundel van een diaprojector een schaduw te maken van een kubus die overeenkomt met deze tekening van een kubus'. En daarna zou aan de orde moeten komen waarom die onnatuurlijke tekenwijze toch soms gebruikt wordt.

Onderilstaan bij de keuze van tekeningen versta ik ook het leren tekenen van aanzichten. (Dat zijn orthogonale parallelprojecties waarbij het projectievlak evenwijdig is aan één van de 'hoofdvlakken' van het object.) Maar ik vind het inferieure didactiek om leerlingen met behulp van voorbeelden aanzichten te leren (na)tekenen. Ik vind dat je leerlingen eerst probleempjes op kunt geven waarbij ze uit zichzelf een aanzicht tekenen. Daarna is het moment gekomen stil te staan bij de keuze van representatie en te zeggen: 'Wat jij daar gebruikte noemen we een bovenaanzicht, teken nu ook eens een zijaanzicht en bedenk een situatie waarin je een zijaanzicht heel goed kunt gebruiken.'

Een voorbeeld van zo'n probleempje dat aanleiding geeft tot een bovenaanzicht is te vinden in 'Zie je wel', waar gevraagd wordt naar de verklaring van het 'springen' van je duim tegen de achtergrond als je afwisselend met beide ogen naar je duim kijkt.

Het voorbeeld in het artikel van Jan van de Craats van het legohuisje vind ik prachtig. Leerlingen kunnen dit vergelijken met zo'n scheve parallelprojectie. Maar een uitbanning van de Cavalierprojectie gaat me veel te ver. Sterker, ik wil 'm kunnen blijven gebruiken, al is 't maar om te kunnen laten zien dat 't van de figuur zo'n dooie indruk geeft maar zo simpel te tekenen is.

In het HEWETboek 'Lessen in ruimtemeetkunde 1' staat het volgende vraagstuk:

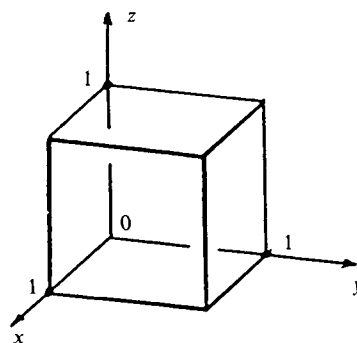


Figuur 9

138 Parallelprojectie van een kubus met assenstelsel.

- a Bob: 'Het punt P heeft de coördinaten $(4, 2, 4)$.
Wim: 'Volgens mij $(0, 0, 3)$.
Wie van de twee heeft gelijk?
- b Welk misverstand zou er m.b.t. het punt Q kunnen bestaan?
- c Bob geeft in de figuur heel precies het punt $(4, 2, 1)$ aan. Waar vind je dat punt in de figuur?
- d En waar vind je het punt $(2, 1, \frac{1}{2})$? En waar het punt $(-4, -2, -1)$?
En $(-40, -20, -10)$?
- e In welke richting is de kubus op het papier geprojecteerd, d.w.z. wat is de richtingsvector van de projectstralen?

Dit vraagstuk kan ook in de ingenieursprojectie worden aangeboden, maar ik zou het nog leuker



Figuur 10 De eenheidskubus in ingenieursprojectie

vinden om dat te doen na het vorige vraagstuk.

Lees twee dekpunten af en vind zo de projecterende richting. Zoek een vlak waarin je op ware grootte kunt tekenen.

Weer een verkenning van verschillende manieren van tekenen: gebruik je schaduwbeelden zoals bij de scheve parallelprojectie (vandaar dat die figuren er zo plat uitzien) of foto's van veraf en isoleer je daarna je keuzeobject zoals bij de orthogonale parallelprojectie (vandaar dat die tekeningen altijd los van hun achtergrond staan) of teken je hoe je de dingen ziet in hun omgeving zoals bij centrale projectie (vandaar dat je een kubus slechts in perspectief getekend ziet als je in de wei staat).

Essentie is niet wat je gebruikt als tekening maar waarom je die tekenwijze kiest. Leerlingen zouden stil moeten staan bij de vraag: 'Hoe haal ik het in mijn hoofd,' oftewel hoe ben ik op 't idee gekomen om het zo te tekenen. In onze schoolboeken staat de tekenwijze meestal voorgeschreven.

Over de auteur

George Schoemaker (1934) begon als onderwijzer in 1951, was wiskundeleraar en corrector, is nu verbonden aan de vakgroep OW & OC en ook bezig met de opleiding van (wiskunde-) leraressen en leraren aan het PDI.

Toetsperikelen¹

H. N. Schuring

Een van de mogelijkheden die een docent heeft om te weten te komen op welk niveau een volgend onderwerp geïntroduceerd moet worden, is zijn gehoor een instaptoets voor te leggen. De bedoeling van zo'n toets is niet om de leerlingenprestaties te beoordelen, maar meer om de kwaliteit van het voorgaande onderwijs te evalueren door bij de leerlingen te meten wat voor vrucht dit onderwijs gedragen heeft.

Het lijkt me goed u ook een instapvraag voor te leggen en wel de volgende: wat betekent CITO?

a Centrum voor Instabiele Teleurgestelde Onderzoekers

b Centrale Inzamelplaats voor het Toenemend Onderwijsoverschot

c Catastrofale Instelling voor Twijfelachtige Onderwijskundigen

d Curieuze Instantie voor Traumatisch Onderwijs.
Er is met deze vraag van alles aan de hand; het is beslist niet gemakkelijk een antwoord te geven op de volgende vragen:

- Met welk doel is deze vraag geconstrueerd?
- Wat is de relevantie van de vraag?
- Is er discussie mogelijk over het goede antwoord?
- Is de vraag wel te beantwoorden voor iemand met kennis op dit gebied en niet door iemand die die kennis niet heeft? (Is de vraag specifiek?)
- Is de vraag efficiënt?
- Wat is de moeilijkheidsgraad van de vraag?
- Differentieert de vraag goede en slechte leerlingen?

- Is de vraagvorm juist gekozen?
Deze vragen zullen in het volgende toegelicht worden aan de hand van enige voorbeelden.
Hiervoor een opmerking over het gebruik van toetsen.

Men kan toetsen geven als:

- selectiemiddel, om te beoordelen in welke mate de leerling het onderwerp beheerst, meestal uitgedrukt in een cijfer, waarop men kan beslissen of de leerling kan doorgaan met het volgende onderwerp
- evaluatiemiddel, om de waarde van het gegeven onderwijs te bepalen, niet om individuele leerlingen te beoordelen
- diagnosemiddel, om eventuele tekorten van individuele leerlingen op te sporen.

Als men niet weet met welk doel een toets is opgegeven, kan men moeilijk beoordelen of het een goede toets is.

Wat denkt u bijvoorbeeld van de volgende toets, nadat het hoofdstuk vergelijkingen van de tweede graad behandeld is:

Los op:

- 1 $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$
- 2 $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$
- 3 $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$
- 4 $\frac{4}{x-4} = x - 1$

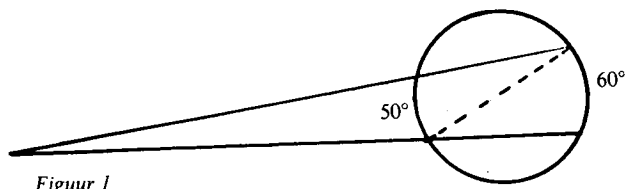
Als evaluatiemiddel, om te onderzoeken in hoeverre de leerlingen in het voorgaande onderwijs geleerd hebben om originele opgaven op te lossen, lijkt dit een goede toets; als selectiemiddel kan men deze toets mijns inziens slechts gebruiken om de zeer goede leerlingen op te sporen. Toch lijken me dergelijke vragen als laatste onderdeel van een selectieproefwerk alleszins verantwoord.

De volgende opgaven zijn afkomstig uit diverse selectieve toetsen. Ze zijn bedoeld als illustratie van de vragen hiervoor gesteld.

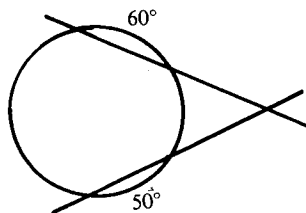
- A Twee lijnen snijden van een cirkel bogen van 50° en 60° af. Men vraagt de hoek van deze lijnen te berekenen en de stelling waarop deze berekening berust te bewijzen.

Dat deze vraag niet éénduidig is, blijkt uit de volgende figuren. Er is wel degelijk discussie mogelijk over het goede antwoord.

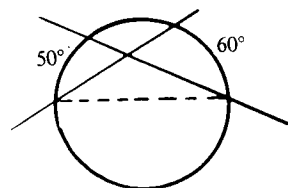
¹ Voordracht gehouden op de elfde gemeenschappelijke studiedag van NVvW en VVWL op 22 maart 1986 te Breda.



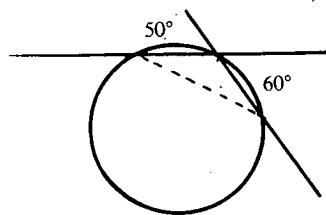
Figuur 1



Figuur 2



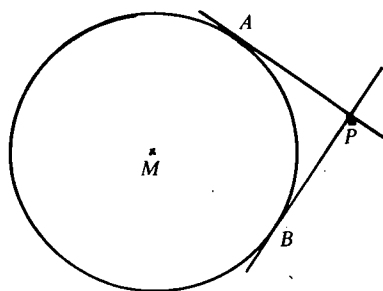
Figuur 3



Figuur 4

Dat deze leerstof niet meer in het centrum van de belangstelling staat, is niet zo verwonderlijk als men weet dat deze vraag in 1829 voorkwam in een toets van de KMA te Breda. Is dit misschien de reden dat de tiendaagse veldtocht in 1830 zo onfortuinlijk verlopen is voor de Nederlanders?

B Het volgende vraagstuk is een bewerking van een eindexamenopgave van voor de Mammoetwet, toen de begrippen pool en poollijn in het curriculum voorkwamen. De redactie van het vraagstuk is zodanig dat vele leerlingen niet op de idee gekomen zijn om de poollijn van P te gebruiken, waardoor de vraag niet efficiënt meer is, doordat veel meer tijd aan dit vraagstuk besteed is dan de opstellers vermoed hadden.



Figuur 5

Gegeven de cirkel $c: x^2 + y^2 = 25$ en het punt $P(7, 1)$.

De raaklijnen aan c door P hebben de punten A en B met c gemeenschappelijk.

Bereken de coördinaten van A en B .

De bedoelde oplossing was:

De poollijn van P is $7x + y = 25$.

Gemeenschappelijke punten met c vindt men uit $50x^2 - 350x + 600 = 0$, dus $x = 3$ of $x = 4$, zodat $A(3, 4)$ en $B(4, -3)$ of omgekeerd.

Vele kandidaten pakten het vraagstuk op de volgende manier aan:

Stel raaklijn door P : $y = m(x - 7) - 1$, dan geldt voor A en B :

$x^2 + m^2(x - 7)^2 + 2m(x - 7) + 1 = 25$, dus $(m^2 + 1)x^2 - (14m^2 - 2m)x + 49m^2 - 14m - 24 = 0$ met $D = 4m^2(49m^2 - 14m + 1) - 196m^4 + 56m^3 + 96m^2 - 196m^2 + 56m + 96 = -96m^2 + 56m + 96$. $D = 0$ geeft $12m^2 - 7m - 12 = 0$, dus $m = \frac{4}{3}$ of $m = -\frac{3}{4}$.

Wat leidt tot $A(3, 4)$ en $B(4, -3)$ of omgekeerd.

C Een andere vraag is in 1978 op het wiskunde II examen gesteld. Hoewel er in 1973 door de inspectie is medegedeeld dat de eindexamenopgaven gereedigd zullen worden overeenkomstig de voorstellen van de nomenclatuurcommissie, was voor veel kandidaten de schrijfwijze $\bar{a} \cdot \bar{b}$ voor het inwendig produkt van twee vectoren niet bekend. (Sommige leerboeken gebruikten de schrijfwijze $(\bar{a}, \bar{b})$.) Voor deze kandidaten had de opgave zodanige originele aspecten dat voor hen de vraag niet meer aan het doel beantwoord heeft waarvoor ze gesteld werd.

In R_2 is de afbeelding A gegeven door $A(\bar{x}) = (\bar{a} \cdot \bar{x})\bar{b} + 2\bar{x}$ met $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$ en $\bar{a} \cdot \bar{b} = \frac{1}{2}$.

De vector $p\bar{a} + q\bar{b}$ is het A -origineel van de vector $2\bar{a} - \bar{b}$. Bereken p en q .

De bedoelde oplossing is: $A(p\bar{a} + q\bar{b}) = (\bar{a} \cdot (p\bar{a} + q\bar{b}))\bar{b} + 2(p\bar{a} + q\bar{b}) = p(\bar{a} \cdot \bar{a})\bar{b} + q(\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{b} + 2p\bar{a} + 2q\bar{b} = 2p\bar{a} + (p + 2\frac{1}{2}q)\bar{b} = 2\bar{a} - \bar{b}$.

EERSTE BEGINSELEN VAN DE ARITHMETICA, OF REKENKUNST, TEN GEBRUIKE DER SCHOLEN. VIERDE DEEL.

*Opgedragen aan 't genootschap der mathematische
wetenschappen, onder de spreuk:*

EEN ONVERMOLIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN;

D O O R,

ARNOLDUS BASTIAAN STRABBE,

*lid en secretaris van het gezegde genootschap; lid van
de sociëteit der kunst-rekenaren te Hamburg, en
leermeeester der wiskunst te Amsterdam.*

TWEDE DUK.

Te AMSTERDAM, bij

J. B. E L W E, boekverkoopst,
op de Pijpenmarkt bij den Dam.

1814.

Dus $p = 1$ en $q = -\frac{4}{5}$.

Kandidaten die de betekenis van $\bar{a} \cdot \bar{b}$ niet kenden waren toch nog in staat punten te scoren doordat ze de bewerking $\cdot$ als een operator opgevat hebben. Als men veronderstelt dat deze operatie associatief is en men voor $(\bar{a} \cdot \bar{a})\bar{b}$ leest $(\bar{a} \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b}$ dan is $(\bar{a} \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = \bar{a} \cdot (\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\bar{a}$, dan krijgt men $A(p\bar{a} + q\bar{b}) = \frac{1}{2}p\bar{a} + \frac{1}{2}q\bar{b} + 2p\bar{a} + 2q\bar{b} = 2\frac{1}{2}p\bar{a} + 2\frac{1}{2}q\bar{b} = 2\bar{a} - \bar{b}$, zodat $p = \frac{4}{5}$ en $q = -\frac{2}{5}$.

Het bovenstaande illustreert nog eens dat leerlingen creatiever kunnen zijn in het bedenken van oplossingsmethoden dan menig constructeur van opgaven verwacht.

D Het volgende voorbeeld is van oudere datum. Het is een oefenopgave uit een rekenboekje van Strabbe, de man die in 1778 het Wiskundig Genootschap opgericht heeft en de eerste secretaris daarvan was. De laatste paragraaf van het vierde deel - voor-

30.) ARLETO, een koopman in de stad Florence, was in 't bijzonder aan vier kooplieden ieder eenige duizend dukaten schuldig, en om die reden in de Domkerk gevlugt. Aidaar kwam bij hem een' zijner goede vrienden, zijnde een domheer, die hem vroeg, wat hij aan die plaats te doen hadt, en waarom hij zoo droevig was? ARLETO verhaalde zijnen toestand, en hoe smartelijk het voor hem was, dat de crediteuren, schoon zij hem alle zijne goederen hadden afgenomen, hem nog daar bij op eene onverdragelijke wijze scholden, en zelfs naar zijn leven stonden; dat hij onder zoodanige drukkende omstandigheden zou moeten bezwijken, zoo niet een boekje, dat hij in handen hadt, 't welk over het geduld handelde, hem eenigermate troost mededeelde. De domheer vroeg hoe veel hij dan ieder van hun schuldig was? ARLETO wilde niet duidelijk antwoorden, maar zeide: „ik ben den „eersten, tweeden en derden te zaamen 900 dukaten min- „der schuldig, dan twee maal zoo veel als den vierden; „als ook den tweeden, derden en vierden te zaamen 900 „dukatens minder, dan drie maal zoo veel als den eersten; „voorts den derden, vierden en eersten te zamen 900 „dukatens minder, dan vier maal zoo veel als den twee- „den, en eindelijk den vierden, eersten en tweeden te „zamen 900 dukaten minder, dan vijf maal zoo veel als „den derden.” De domheer vroeg verder, hoe veel de crediteuren dan ontvangen hadden? ARLETO antwoordde: „Te zamen 2361 dukaten, en wel de eerste zoo „menigmaal $\frac{1}{2}$, als de tweede $\frac{1}{2}$, en de tweede zoo menigmaal $\frac{1}{4}$, als de derde $\frac{1}{4}$, en de derde zoo menigmaal $\frac{1}{8}$, als de vierde $\frac{1}{8}$, voor iedere 100 dukaten van de „schuld.” De domheer zeide hier op: „Mijn ARLETO! is de zaak zoo gelegen, zoo zou, mijns bedunkens, „zoodanig troostboekje nuttiger en dienstiger zijn voor „uwe crediteuren, wijl zij de schade hebben, dan voor „u, om daar uit geduld te leeren.” — ARLETO hernam: „Wie rampspoed heeft, dien helpe God, „'t ontbreekt hem niet aan hoon en spot.”

Uit dit verhaal ontstaat nu de vraag, hoe veel zoodanig verlies voor ieder der vier kooplieden bedraagt? Antw. voor A 3555, B 3096, C 2664, en D 5424 dukaten.

stellen tot-besluit – bevat een 30-tal opgaven waarmee de lezer zichzelf kan testen. Opgave 30 is niet erg efficiënt met het omstandige verhaal waarin de gemoedstoestand van Arletto beschreven is.

Curieus is nog dat er een fout in de opgave staat. Uit de eerste serie gegevens kan men een stelsel van 4 vergelijkingen met 4 onbekenden opstellen:

$$\begin{aligned} A + B + C - 2D &= -900 \text{ met als oplossing: } A = 4500 \\ -3A + B + C + D &= -900 & B = 3600 \\ A - 4B + C + D &= -900 & C = 3000 \\ A + B - 5C + D &= -900 & D = 6000 \end{aligned}$$

Uit de laatste gegevens kan men de verhouding van de aflossingen berekenen, namelijk:

$$\frac{A}{525} = \frac{B}{168} = \frac{C}{112} = \frac{D}{192}$$

maar zo verkrijgt men niet de door Strabbe opgegeven antwoorden. Verandert men in de 28e regel $\frac{1}{3}$ door $\frac{1}{3}$ dan kloppen de antwoorden wel.

Het is niet gemakkelijk om voor de afname van een toets te voorspellen wat de moeilijkheidsgraad zal zijn. Zelfs het vooraf onderling vergelijken van de opgaven in een toets op moeilijkheid is niet eenvoudig. Enige jaren geleden hebben we enkele docenten met veel ervaring in het wiskunde-onderwijs van de bovenbouw van het havo gevraagd om voor een toets op eindniveau havo wiskunde, bestaande uit 8 enkelvoudige vragen, de opgaven onderling te vergelijken op moeilijkheid.

Hiervoor moesten ze van alle 28 paren opgaven schatten welke van de 2 vraagstukken gemiddeld beter gemaakt zal worden door de eigen leerlingen. Uit de schattingen is het mogelijk een volgorde te berekenen van de moeilijkheid van de vraagstukken met een schaalwaarde van deze moeilijkheid. De resultaten waren als volgt (hoge schaalwaarde geeft hoge moeilijkheidsgraad):

opgave	schattingen docenten							
	4	1	5	3	8	7	2	6

schaalwaarde 0,0 0,07 0,27 0,45 0,91 0,99 1,0 1,15
Hierna werden de opgaven aan de leerlingen voorgelegd. Voor elke opgave waren maximaal 10 punten te behalen:

De gemiddelde score per opgave is hieronder vermeld.

opgave	resultaten leerlingen							
	3	1	4	6	5	7	8	2
gem. score	8,9	8,3	5,8	5,4	4,8	3,0	2,6	2,1

U kunt dit experiment zelf uitvoeren met uw klas. Door de paarsgewijze schattingen, mits consistent uitgevoerd, krijgt u een volgorde van de voorspelde moeilijkheid per vraagstuk, geen schaalwaarde want daarvoor zijn meer beoordelaars nodig. De opgaven volgen hierna.

Opgaven wiskunde havo

- Bereken de afstand van het punt (5, 4) tot de lijn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Een parabool, met symmetrie-as evenwijdig aan de x-as gaat door de oorsprong en door de punten (5, 1) en (5, 5). Bereken de coördinaten van de top.
- In $\mathbf{R}_3$ zijn ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel gegeven de punten $A(1, 1, 3)$, $B(-2, 1, 12)$, $C(2, 1, 0)$ en $D(1, -1, -1)$. Hoe is de onderlinge ligging van de lijnen AB en CD ? (kruisen, snijden, evenwijdig?).
- Bereken de standaarddeviatie (standaardafwijking) van de waarnemingsgetallen die in onderstaande frequentietabel staan.

waarnemingsgetal	x_i	-2	-1	0	1	2
frequentie	f_i	1	3	6	5	1
- Acht personen A, B, C, D, E, F, G en H nemen op geheel willekeurige wijze plaats aan een ronde tafel. Hoe groot is de kans dat B naast A komt te zitten?
- Van $[0, 2\pi]$ naar $\mathbb{R}$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2 \sin^2 x - 2 \sin x$. Onderzoek de functie f en teken de grafiek van f .
- Voor welke waarden van $x \in \mathbb{R}$ geldt ${}^2\log \frac{2-x}{3-x} = {}^2\log(x-2) - {}^2\log(x-3)$?
- Gegeven is de functie $f: x \rightarrow \sqrt{\frac{1}{x+1}}$. Bereken de coördinaten van elk punt van de grafiek van f waarin de raaklijn een richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ heeft.

Een minder tijdrovende mogelijkheid om te onderzoeken of men de moeilijkheidsgraad van een toets vooraf kan voorspellen is een schatting per opgave-onderdeel van het gemiddelde percentage dat de leerlingen zullen scoren van het maximaal te behalen puntenaantal op dat onderdeel. Dit percentage wordt de p' -waarde van het onderdeel genoemd. De schatting van de te verwachten p' -waarde per opgave-onderdeel kan men uitvoeren door het kiezen van één van de categorieën voor de p' -waarde, zoals aangegeven in de volgende tabel:

categorie	p'	%
1	$0 \leq p' < 20$	10%
2	$20 \leq p' < 40$	30%
3	$40 \leq p' < 60$	50%
4	$60 \leq p' < 80$	70%
5	$80 \leq p' < 100$	90%

Als men aanneemt dat p' in de categorie 1 betekent dat 10% van het maximaal te behalen puntenaantal gemiddeld gescoord wordt, p' in categorie 2 betekent 30%, enz. . . , dan verkrijgt men een vrij nauwkeurige schatting van de werkelijke gemiddelde score, indien de categorieën goed geschat zijn en het aantal opgave-onderdelen niet te klein is.

De moeilijkheid blijft dat het niet eenvoudig is om de juiste categorie te schatten omdat de werkelijke gescoorde resultaten van veel factoren afhangen.

Enige factoren kunnen zijn:

- Het aantal oplossingsmethoden die tot een goed resultaat kunnen leiden. Indien dit slechts het geval is voor één methode kan dit voor sommige leerlingen een probleem opleveren.
- De hoeveelheid rekenwerk met de kans op rekenfouten.
- De complexiteit van het onderdeel; het aantal denkstappen dat een leerling moet zetten om tot een goede oplossing te komen.
- De redactie van de opgave kan voor elke leerling duidelijk zijn, maar kan ook door sommige leerlingen verkeerd geïnterpreteerd worden. Soms is het onduidelijk voor de leerling wat er nu precies bedoeld wordt.
- De mate van originaliteit van de opgave.
- De plaats van de opgave in de toets.

Deze factoren kunnen elkaar natuurlijk ook beïnvloeden.

Het lijkt me zeer de moeite waard om te trachten criteria op te sporen om de invloed van deze factoren te kunnen vaststellen. Dit vereist veel onderzoek en als men deze schattingen vaak maakt is er goede hoop dat men op den duur in staat zal zijn juiste schattingen te maken.

Tot slot nog enige opmerkingen over de vraagvorm van een toets. Weinig onderwerpen zijn zo omstreken; er zijn voorstanders van meerkeuze vragen en overtuigde tegenstanders, terwijl de argumenten vaak emotioneel geladen zijn.

Misschien is het goed enige voor- en nadelen van de meerkeuze toets en de open vragen toets naast elkaar te zetten:

meerkeuzetoets

- voordeel – grote betrouwbaarheid
– snelle correctie en scoring
– systematische foutenanalyse

- nadeel – tijdrovende constructie
– constructie vereist grote mate van deskundigheid
– niet alles te meten

open vragen toets

- nadeel – eenduidige vraagstelling moeilijk
– beoordelaars kunnen verschillen
– correctie vaak langdurig
– moeilijk objectief correctievoorschrift
– te maken

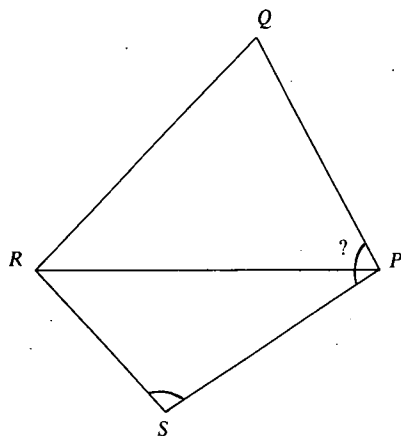
- voordeel – eenvoudiger te construeren
– veel leerstof te meten

Het is duidelijk dat in een meerkeuze toets het tekenen van grafieken en het geven van een logische redenering niet zo goed te beoordelen is als in een open vragen toets.

Een meerkeuze toets kan heel goed gebruikt worden voor diagnostisch gebruik; het is immers niet moeilijk om een foutenanalyse te maken. Als voorbereiding voor een proefwerk waarvoor een cijfer gegeven wordt, heb ik ervaren dat dergelijke toetsen zeer verhelderend kunnen werken voor de leerlingen en voor de docent.

Bij de nadelen van de meerkeuze toets heb ik niet opgenomen dat de leerlingen door raden het goede antwoord kunnen vinden. Dit nadeel is te onder-
vangen door het aantal alternatieven uit te breiden en de mogelijkheid open te laten dat er meer dan één alternatief goed is.

Ik denk dat de tegenstelling tussen de meerkeuze vraagvorm en de open vraagvorm helemaal niet zo groot hoeft te zijn. Er zijn allerlei vormen te bedenken van open vragen waarbij een objectieve scoring mogelijk is en een snelle correctie uitge-
voerd kan worden. Een voorbeeld volgt hierna:



Van vierhoek $PQRS$ zijn RS , RP , RQ , de omtrek en $\angle S$ bekend. Via een aantal van de volgende stappen kan $\angle P$ berekend worden. Schrijf de letters van die stappen, met het goede nummer, in de juiste volgorde op.

- A Bereken PQ met:
 - 1 sinusregel
 - 2 cosinusregel
 - 3 gegeven omtrek
- B Bereken $\angle PRS$ met:
 - 1 sinusregel
 - 2 cosinusregel
 - 3 formule $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- C Bereken $\angle RPQ$ met:
 - 1 sinusregel
 - 2 cosinusregel
 - 3 formule $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- D Bereken $\angle P$ met:
 - 1 sinusregel
 - 2 cosinusregel
 - 3 een andere methode
- E bereken PS met:
 - 1 sinusregel
 - 2 cosinusregel
 - 3 gegeven omtrek
- F bereken $\angle RPS$ met:
 - 1 sinusregel
 - 2 cosinusregel
 - 3 formule $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Een andere mogelijkheid wordt gebruikt in de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Alleen goede antwoorden leveren punten op, berekeningen en beredeneringen worden niet gevraagd. Zo worden rekenfouten wel erg streng afgestraft, maar de correctie vergt nauwelijks tijd. In de tweede ronde worden wel berekeningen en beredeneringen gevraagd. Hier volgt een voorbeeld van zo'n vraag uit de eerste ronde:
 $(5^2 + 9^2)(12^2 + 17^2)$ kan geschreven worden als de som van twee kwadraten van positieve gehele getallen.

Geef zo'n schrijfwijze.

Een van de twee antwoorden $213^2 + 23^2$ of $93^2 + 193^2$ leverde punten op; alle andere antwoorden leverden geen punten op.

Grensgevallen III

P. G. J. Vredenduin

Syllogismen en de lege verzameling

De logica is vanouds de leer van het natuurlijke denken. In de logica worden de regels opgesteld volgens welke het natuurlijke denken opereert, in het bijzonder met het oog op de bewijsvoering. De 'vader' van de logica is Aristoteles. Algemeen bekend is dat hij een theorie opstelde van de syllogismen. Het meest bekende syllogisme luidt:

alle M zijn P

alle S zijn M

dus: alle S zijn P .

Hij stelde veertien dergelijke syllogismen op. Twee ervan wil ik nader onder de loep nemen. Allereerst deze:

alle M zijn P (1)

alle M zijn S (2)

dus: sommige S zijn P . (3)

Waarom is dit juist? Wel, neem een element van M .

Dat is element van P en ook van S . Daarmee hebben we dus een element van S gevonden dat ook element van P is.

Voor Aristoteles was hiermee de kous af. Maar, vraagt de moderne lezer zich af, als M nu eens geen enkel element bevat? Inderdaad, als M leeg is, dan zijn volgens moderne opvattingen (1) en (2) juist en (3) niet. Waarmee dit syllogisme zijn geldigheid verloren heeft.

Een tweede syllogisme dat alleen maar geldig is, als we aannemen dat verzamelingen niet leeg zijn, is:

geen enkele M is P

alle M zijn S

dus: er is een S die niet- P is.

De controle hiervan laat ik aan de lezer over.

Bij Aristoteles was dus M principieel niet leeg. Wij laten wel toe dat een verzameling leeg is en dat heeft, zoals we zullen zien, consequenties voor de logica.

Kunnen we conclusies trekken uit een onware uitspraak?

We hebben hierboven gezegd: volgens moderne inzichten is (1) juist als M leeg is.

Anders gezegd:

als $x \in M$, dan is $x \in P$ (4)

is juist als M leeg is. Dus als er geen enkele x bestaat waarvoor $x \in M$ het geval is.

We trekken in (4) een conclusie uit een premisse waarvan we weten dat hij niet waar is. Kan dat? De praktijk leert dat het natuurlijke verstand zich hier dikwijls tegen verzet.

Een voorbeeld. In Delft gaf ik college aan aanstaande ingenieurs die de lesbevoegdheid wiskunde wensten te verkrijgen. Aan mensen dus die exact geschoold waren, maar wier denken gericht was op de praktijk. Ik stelde het volgende probleem.

a , b en c zijn de lengten van de zijden van een driehoek ABC . Als $a = 3$, $b = 4$ en $c = 9$, dan is $\angle C > 90^\circ$.

Is dit een juiste uitspraak?

Het antwoord luidde algemeen: nee, rare driehoek.

Ze weigerden dus een conclusie te trekken uit een premisse waarvan ze wisten dat hij onwaar is.

Ik splitste de vraag toen in tweeën.

Als $a = 3$, $b = 4$ en $c = 9$, is dan $a^2 + b^2 < c^2$?

Ze vergaten een ogenblik dat a , b en c eigenlijk lengten van zijden van een driehoek waren, liepen dus in de val en zeiden dat het juist was.

Volgende vraag:

als $a^2 + b^2 < c^2$, is dan $\angle C > 90^\circ$?

Dit is uiteraard juist. Men is dan wel verplicht ook te aanvaarden dat

als $a = 3$, $b = 4$ en $c = 9$, dan is $\angle C > 90^\circ$

juist is.

Ik wil dit voorbeeld nog niet nader analyseren, maar er alleen uit opmaken dat het individu een natuurlijke afkeer heeft een conclusie te trekken uit een uitspraak waarvan hij weet dat die onwaar is. Voor een concreet denkend mens is dat tijdverknoeien, een zinloze bezigheid of iets dergelijks.

Een voorbeeld uit de praktijk

Praktijkvoorbeelden hebben het nadeel steeds ietwat gekunsteld te zijn, ten minste als ik ze bedenk. Ik wil het toch proberen.

A is op bezoek bij B. Er ontspint zich een gesprek over schilderijen.

A: Ik heb een hekel aan alle reproducties.

B: Dus ook aan alle reproducties in mijn huis?

A: Ja.

B: Maar ik heb helemaal geen reproducties in huis. Wat is hier gebeurd? A poneert:

als x een reproductie is, dan heb ik een hekel aan x . Hij bevestigt dat ook waar is:

als x een reproductie is in het huis van B, dan heb ik een hekel aan x . (5)

Allicht, als je een hekel hebt aan alle reproducties, dan heb je ook een hekel aan alle reproducties van een bepaald soort. En niemand zal dan eerst onderzoeken of er wel reproducties van deze soort zijn. Zolang A niet weet dat er geen reproducties zijn in het huis van B, is de uitspraak (5) alleszins acceptabel. Als B daarna opmerkt geen reproducties in huis te hebben, betrapt hij A daarmee niet op het onwaar zijn van (5). Men kan deze uitspraak a posteriori hoogstens nutteloos vinden.

Een dag later komt A weer op bezoek bij B. Hij valt met de deur in huis en zegt tegen B:

ik heb een hekel aan alle reproducties in jouw huis. En nu komt heel menselijk protest van B tegen deze uitspraak:

je weet toch dat ik geen reproducties in huis heb; waarom zeg je dan zo iets onzinnigs?

Het heeft er dus de schijn van of de juistheid van de uitspraak:

als x een reproductie in het huis van B is, dan heb ik een hekel aan x

niet alleen afhankelijk is van de concrete situatie, maar ook van de kennisinhoud van A op het moment dat hij deze uitspraak doet.

Dit geeft ons toch wel een onbehaaglijk gevoel.

Een voorbeeld uit de wiskunde

Een leraar vraagt te bewijzen:

er zijn tussen 6400 en 6500 geen kwadraten die zowel deelbaar zijn door 29 als door 37.

Anders geformuleerd:

als x een kwadraat is tussen 6400 en 6500, dan is x niet zowel deelbaar door 29 als door 37. (6)

Jan bewijst dit als volgt. $29 \cdot 37 = 1073$. Het enige veelvoud van 1073 dat tussen 6400 en 6500 ligt, is 6438. Dit is geen kwadraat. Hiermee is het bewijs geleverd.

Kees reageert heel anders. 'Ha, ha; tussen 6400 en 6500 zijn helemaal geen kwadraten. Wat wil je nou nog bewijzen?' Hij weigert dus een conclusie te trekken uit de premisse

x is een kwadraat tussen 6400 en 6500

omdat deze premisse onwaar is. Dat vindt hij een zinloze bezigheid.

Afhankelijk van de kennisinhoud van Jan en Kees zou (6) dan een ware resp. zinloze uitspraak zijn. Een soortgelijke situatie deed zich voor in Delft. Toen de studenten zich realiseerden dat $a = 3$, $b = 4$ en $c = 9$ onmogelijk is, vonden ze als $a = 3$, $b = 4$ en $c = 9$, dan is $\angle C > 90^\circ$ een zinloze uitspraak.

Vergaten ze echter een ogenblik dat a , b en c lengten van zijden van een driehoek voorstellen, dan accepteerden ze:

als $a = 3$, $b = 4$ en $c = 9$, dan is $a^2 + b^2 < c^2$.

Ze accepteerden voorts

als $a^2 + b^2 < c^2$, dan is $\angle C > 90^\circ$

en moesten dan ook wel accepteren:

als $a = 3$, $b = 4$ en $c = 9$, dan is $\angle C > 90^\circ$.

Ook hier hangt het van de toestand van het subject af, of hij een bepaalde uitspraak waar of zinloos vindt. In de wiskunde is een dergelijke situatie moeilijk te verteren. De objectiviteit van de wiskunde zou erdoor in gevaar komen.

Uit pragmatische overwegingen nemen we daarom een beslissing. We aanvaarden:

als voor geen enkele x geldt $f(x)$

dan is de uitspraak 'als $f(x)$, dan $g(x)$ ' een ware uitspraak.

We kunnen het ook anders formuleren. Stel

$F = \{x|f(x)\}$ en $G = \{x|g(x)\}$. Als nu $F = \emptyset$, dan is $F \subset G$.

De lege verzameling is dus deelverzameling van elke verzameling.

Ik heb het probleem betreffende het trekken van een conclusie uit een onware premisse hier alleen van de inhoudelijke kant bekeken. Voor een wiskundige is van groter belang dat bovengenoemde beslissing noodzakelijk is om tot een eenvoudig

sluitend systeem van de formele logica te komen. Ik ga daar niet verder op in. Eventueel kan men er meer over vinden in mijn artikel *Als ... dan* in Euclides 61, nr. 4.

Nu volgen nog enige problemen waarin de zojuist genomen beslissing een belangrijke rol speelt.

Een doorsnede-probleem

Het volgende probleem is niet algemeen bekend en daarom misschien voor vele lezers verrassend.

Onderstel $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. De doorsnede van alle elementen van V noteren we $\cap V$. Dus

$$\cap V = v_1 \cap v_2 \cap \dots \cap v_n$$

Deze notatie gebruiken we ook als het aantal elementen van V niet eindig is. Algemeen is dus

$$\cap V = \{x | \forall v : v \in V \Rightarrow x \in v\}$$

Onderstel nu dat V leeg is. Waaraan is dan $\cap V$ gelijk? Probeer het eens te vinden, voordat u verder leest.

Het antwoord is simpel.

$$\cap \emptyset = \{x | \forall v : v \in \emptyset \Rightarrow x \in v\}$$

Omdat $v \in \emptyset$ voor elke v onwaar is, is $v \in \emptyset \Rightarrow x \in v$ voor elke v waar. Dus is $\cap \emptyset$ de alverzameling.

Het resultaat is, als men er even over nadenkt, minder paradoxaal dan het op het eerste gezicht lijkt. Als men het aantal elementen van V inkrimpt, dan zal $\cap V$ uitdijen (of gelijk blijven). Blijft er geen enkel element over, dan is elke belemmering opgeheven en krijgen we de alverzameling.

Waaraan is $\binom{n}{0}$ gelijk?

Onder $\binom{n}{p}$ verstaan we het aantal manieren waar-

op we p elementen kunnen kiezen uit n elementen. De formulering is ietwat vaag, maar was vroeger gebruikelijk. Deze vaagheid wreekt zich, zodra we

in een grensgeval verzeild raken. Waaraan is $\binom{n}{0}$ gelijk? Op hoeveel manieren kunnen we dus 0 elementen kiezen uit n elementen?

Wat zegt u van de volgende drie antwoorden?

a We kunnen geen 0 elementen kiezen. Het antwoord is dus 0.

b '0 elementen kiezen uit n elementen' is een zinloze woordcombinatie. Dus heeft $\binom{n}{0}$ geen betekenis.

c Er is maar 1 manier om 0 elementen te kiezen uit n elementen, namelijk: afblijven.

Voor al die antwoorden is iets te zeggen. Als men zich niet scherper uitdrukt, komt men er niet uit.

We proberen het opnieuw en omzeilen vage termen als 'manieren' en 'kiezen'.

Onder $\binom{n}{p}$ verstaan we het aantal deelverzamelingen met p elementen van een verzameling met n elementen.

Dan is $\binom{n}{0}$ het aantal deelverzamelingen met 0 elementen van een verzameling met n elementen. Er bestaat één verzameling met 0 elementen, namelijk $\emptyset$. Deze is, zoals we gezien hebben, deelverzameling van elke verzameling. Het antwoord luidt dus: 1.

Waaraan is 0! gelijk?

Onder $n!$ verstaan we het aantal manieren waarop n elementen gerangschikt kunnen worden.

Waaraan is dan 0! gelijk? De situatie is analoog aan die bij $\binom{n}{0}$. Er zijn weer drie antwoorden mogelijk.

a We kunnen 0 elementen niet rangschikken. Het aantal manieren is dus 0.

b '0 elementen rangschikken' is een zinloze woordcombinatie. Dus heeft 0! geen betekenis.

c Er is maar één manier om 0 elementen te rangschikken: niets mee doen.

M.i. is voor het laatste antwoord het minste te zeggen. Hoe het ook zij, een scherpere formulering is gewenst. We proberen het.

Onder $n!$ verstaan we het aantal bijecties dat mogelijk is van een verzameling van n elementen naar zichzelf.

Onder een afbeelding van V naar W verstaan we een verzameling geordende paren (x, y) waarvan $x \in V$ en $y \in W$ met de eigenschap dat elk element van V in precies één van deze paren als eerste element voorkomt.

De afbeelding is een bijectie als bovendien elk element van W in precies één van deze paren als tweede element voorkomt.

$0!$ is het aantal bijecties van $\emptyset$ naar $\emptyset$. W is een bijectie van $\emptyset$ naar $\emptyset$ wil zeggen:

$$1 \quad (u, v) \in W \Rightarrow u \in \emptyset \wedge v \in \emptyset$$

$$2 \quad \forall x : x \in \emptyset \Rightarrow (\exists!(u, v) \in W : x = u) \wedge \\ \wedge (\exists!(u, v) \in W : x = v)$$

In 1 staat dat W een verzameling geordende paren is waarvan het eerste element tot $\emptyset$ behoort en het tweede eveneens.

In 2 betekent ' $\exists!(u, v) \in W : x = u$ ', dat er precies één geordend paar uit W is waarvan het eerste element x is.

Uit 1 zien we dat W geen enkel geordend paar bevat, dus leeg is. Vervang nu in 2 W door $\emptyset$. Er komt dan een ware uitspraak, omdat de premisse $x \in \emptyset$ voor elke x onwaar is.

De lege verzameling is dus de enige bijectie van $\emptyset$ naar $\emptyset$. Daarom is $0! = 1$.

Opmerking. Zelfs als men de vage omschrijving van $\binom{n}{p}$ en van $n!$ handhaaft en niet vervangt door de moderne scherpere, bestaat er een mogelijkheid de grensgevallen op pragmatisch verantwoorde wijze te beslissen.

We leiden daartoe de formule af:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (7)$$

Substitueer hierin n voor p . Er komt:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!}$$

Hierin heeft $0!$ nog geen betekenis. Maar wel weten we dat $\binom{n}{n} = 1$. Uit n elementen kunnen we immers maar op 1 manier n elementen kiezen. Om de formule sluitend te maken, ligt het voor de hand af te spreken dat $0! = 1$.

Nu $\binom{n}{0}$. Substitueer in (7) 0 voor p . Er komt:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!}$$

Dit is gelijk aan 1. Voor de hand ligt dan af te spreken dat $\binom{n}{0} = 1$. Hetgeen we trouwens ook konden suggereren door eraan te denken dat

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \text{ en hierin } 0 \text{ voor } p \text{ te substitueren.}$$

Waarom is a^0 gelijk en in het bijzonder 0^0 ?

Eerst weer ouderwets. Onder a^b verstaan we het produkt van b factoren die allemaal gelijk aan a zijn.

Dan is a^0 gelijk aan het produkt van 0 factoren die allemaal gelijk aan a zijn.

En nu staat ons verstand stil. De traditionele oplossing van dit grensprobleem gaat via $\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p}$. Ik

doe het liever anders.

Onder a^b verstaan we het aantal afbeeldingen van een verzameling met b elementen naar een verzameling met a elementen. Dan is a^0 het aantal afbeeldingen van een verzameling met 0 elementen naar een verzameling met a elementen.

Onderstel A heeft a elementen. Hoe krijgen we een afbeelding van $\emptyset$ naar A ?

We moeten dan een verzameling W vinden van geordende paren (u, v) zo dat $u \in \emptyset$ en $v \in A$ en dat elk element van $\emptyset$ in precies één van deze paren als eerste element voorkomt. Dit wil zeggen:

$$1 \quad (u, v) \in W \Rightarrow u \in \emptyset \wedge v \in A$$

$$2 \quad \forall x : x \in \emptyset \Rightarrow \exists!(u, v) \in W : x = u$$

In 1 wordt geëist dat elk eerste element uit de paren van W element van $\emptyset$ is. Hetgeen met zich meebrengt dat $W = \emptyset$.

Substitueer in 2 $\emptyset$ voor W . Er komt dan een ware uitspraak, omdat voor elke x de premisse $x \in \emptyset$ onwaar is.

Er is dus precies één afbeelding van $\emptyset$ naar A , de lege afbeelding. Dus is $a^0 = 1$.

Omdat het in de bovenstaande redenering irrelevant is of A niet of wel leeg is, geldt dit resultaat ook voor $a = 0$. Dus is $0^0 = 1$.

Het grensgeval 0^0 is hiermee tot een oplossing gebracht. Met behulp van traditionele redeneringen slaagt men daar niet in.

Toegift

Hoeveel partities heeft de lege verzameling?

Moderne verbindingssystemen

Henk Nieland

Wachtproblemen vereisen grondige wiskundige aanpak

Iedereen moet wel eens wachten: op het postkantoor, in het verkeer, bij het telefoneren en in allerlei andere situaties waarbij velen gebruik willen maken van dezelfde diensten. De snelle opmars van de computer, in combinatie met sterk verbeterde verbindingen, maakt een aanzienlijke uitbreiding van de dienstverlening mogelijk, bijvoorbeeld kabeltelevisie, Viditel, elektronische post, etc. De plannen rond Teleport Amsterdam als centrum voor Europese telecommunicatie wijzen erop dat Nederland in deze sector een belangrijke rol kan spelen. Maar ondanks de ruimere mogelijkheden blijven ook bij deze moderne systemen wachtproblemen bestaan. 'De enorme toename van informatiestromen leidt in de praktijk opnieuw tot wachttijden', zegt dr. ir. O.J. Boxma van het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) in Amsterdam. 'Dat komt mede doordat men nieuwe vindingen al in praktijk brengt voordat we de kwaliteit ervan goed kunnen beoordelen. Wiskundig onderzoek naar die kwaliteit (bijvoorbeeld hoe de snelheid van het systeem afhangt van het verkeersaanbod) is van groot economisch en maatschappelijk belang, want wachten kost geld en is niet prettig'. Begin juni waren op het CWI 's werelds kopstukken op het gebied van verkeersproblemen in computer- en communicatiesystemen bijeen. Onderwerp was de wachtproblematiek bij de verwerking van informatiestromen, zoals men die tegenkomt in de telefonie, in computernetwerken, bij satellietverbindingen, etc. Initiatiefnemer was prof. dr. ir. J. W. Cohen, hoogleraar aan de Rijksuniversiteit

Utrecht, en adviseur van het CWI. Onlangs is hem de AKZO-prijs 1986 toegekend, speciaal voor zijn werk aan de prestatie-analyse van computersystemen.

Telefoon

Van de ruim veertig sprekers op het congres 'Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation' kwamen er zo'n twintig uit de VS, waarvan de helft van Bell Laboratories, genoemd naar de uitvinder van de telefoon Alexander Graham Bell. Met de telefoon is het ook allemaal begonnen. In het begin van deze eeuw raakten de beschikbare lijnen in telefooncentrales steeds vaker overbelast. De vraag was hoeveel extra lijnen men moest aanleggen om de kans op overbelasting binnen de perken te houden. In 1909 publiceerde de Deense wiskundige A. K. Erlang een artikel 'Waarschijnlijkheidstheorie en telefoongesprekken' dat het begin vormt van de zgn. wachtrijtheorie. Het gaat er daarbij om te bepalen hoe goed diensten voor collectief gebruik functioneren. Vooral na de Tweede Wereldoorlog ging men zich realiseren dat de voor de telefonie zo succesvolle wachtrijtheorie ook opging in veel andere situaties, zoals bij het wegverkeer, banken, ziekenhuizen, fabrieken, etc. Aan het eind der jaren zestig bleek ook het gedrag van ingewikkelde computersystemen uitstekend met vrij eenvoudige wachtrijmodellen te kunnen worden beschreven. Prof. Cohen heeft veel bijgedragen aan de fundamenteën van de wachtrijtheorie. Vooral zijn inmiddels klassieke boek: 'The single server queue' uit 1969 heeft grote invloed gehad. Thans blijkt dat dezelfde theorie in principe ook opgaat voor nieuwe technologieën zoals satellietverbindingen en kantoorautomatisering. De wiskundige beschrijving van de bijbehorende wachtrijmodellen is echter een stuk ingewikkelder.

Grens

Enkele karakteristieke elementen van de wachtrijtheorie komen goed naar voren in het volgende voorbeeld. In een kapsalon werkt één kapper, die klanten bedient in volgorde van binnenkomst. Stel hij heeft per klant precies een kwartier nodig. Als er

elk uur één klant komt, dan hoeft deze dus niet te wachten. Dat geldt ook nog als er precies om het kwartier een klant komt. Maar in de praktijk gaat dat niet zo regelmatig. Ook heeft de kapper bij de ene klant meer werk dan bij de andere. Als de klanten op willekeurige tijdstippen binnenkomen met een gemiddelde van twee per uur, dan leert de theorie (onder enkele extra aannamen) dat de gemiddelde wachttijd een kwartier is. Die wachttijd neemt snel toe naarmate de klantenstroom groeit: bij drie klanten per uur is het al één uur, en bij een gemiddelde van vier per uur (de kritische grens) wordt de gemiddelde wachttijd zelfs oneindig lang! Zulke verschijnselen kennen we ook uit het verkeer: op het spitsuur leidt een kleine toename van de verkeersstroom al gauw tot een enorme toename van aantal en omvang der files. Voor een goede dienstverlening moet men ruim onder de kritische grens blijven. Bij een aanbod van vier klanten per uur moet er dus een kapper bijkomen, of de kapper moet volgens afspraak gaan werken, om het willekeurige karakter van het aanbod (de oorzaak van de wachtperikelen) op te heffen. Welke maatregel hij treft is natuurlijk ook een economische afweging. De kapper zal voor zijn beslissing geen wiskundige berekening nodig hebben, maar in computersystemen, waar soortgelijke wachtverschijnselen optreden, is een grondige wiskundige analyse onontbeerlijk.

Spreiding

Bij alle verschillen tussen een kapsalon, een telefooncentrale, het wegennet, etc. is op al deze systemen hetzelfde abstracte wachtrijmodel van toepassing. Bij een stelsel van bedieningscentra, elk uitgerust met een aantal bedienden, komen klanten met bepaalde vragen. In het algemeen moeten zij enige tijd wachten voor ze aan de beurt zijn. Aankomst, bediening en de weg die binnen het stelsel wordt doorlopen, worden ten dele door het toeval bepaald. De theorie doet dan ook alleen uitspraken in termen van kansen, bijvoorbeeld hoe groot de kans is dat er bij bedieningscentrum B meer dan vier klanten wachten. De belangrijkste uitdaging van de wachtrijtheorie ligt op het moment bij moderne communicatiesystemen, bijvoorbeeld netwerken van computers. De technologie (compu-

ters, verbindingen) maakt het nu mogelijk de taken van zo'n systeem te spreiden over een (groot) aantal deelsystemen. Maar hoe meer verbindingen, hoe ingewikkelder de verkeersregeling. Een der deelnemers aan het congres op het CWI was prof. L. Kleinrock, hoofd van de afdeling informatica van de Universiteit van Californië in Los Angeles. Bijna twintig jaar geleden vond hij het 'time sharing' principe uit. Bij de kapper zou dat betekenen dat de klant bij stukje en beetje wordt geknipt, telkens onderbroken door wachtperiodes. Deze voor een kapper absurde werkwijze is echter in computers een effectieve methode gebleken om de doorstroming te bevorderen. Nu bestudeert prof. Kleinrock onder meer de problematiek van gespreide systemen. Volgens hem weten we nog zeer weinig van de optimale inrichting van zulke systemen. Hun gedrag is nog moeilijk te voorspellen, hetgeen weer onzekerheden met zich meebrengt bij het ontwerpen. In de praktijk voert men ze toch maar in en hoopt van de fouten te leren. Dat leidt tot hoge kosten, lange responstijden, lage efficiency, etc.

Kleinrock illustreert de problemen die men bij gespreide systemen kan tegenkomen met een voorbeeld op het gebied van 'gemeenschappelijke kennis'. Twee legers A en B willen een derde leger, dat tussen hen in ligt, aanvallen. A en B zijn afzonderlijk niet sterk genoeg om de vijand te verslaan, maar samen zijn ze dat wel. Om succes te hebben moeten ze dus gelijktijdig aanvallen. Stel dat beide legers alleen via koeriers met elkaar kunnen communiceren. Leger A stuurt een koerier door de vijandelijke linies naar B met het voorgestelde tijdstip. Zelfs als deze er door komt zal leger B nog niet aanvallen. Eerst moet het namelijk aan A laten weten dat de boodschap goed is overgekomen. Het is eenvoudig in te zien dat dit leidt tot een 'deadlock' situatie, waar noch A, noch B ooit tot een beslissing zullen komen wegens gebrek aan gemeenschappelijke kennis.

CWI

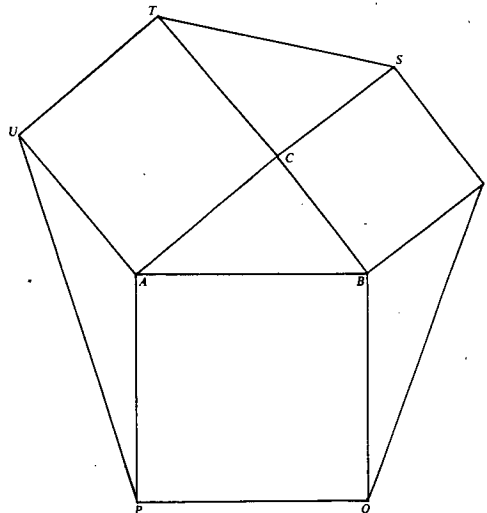
Ook op het CWI wordt intensief gewerkt aan wachtproblemen. Men bestudeert er onder meer de zgn. Local Area Networks (LAN), computernetwerken in een geografisch klein gebied. Door de kleine afstanden kan zeer snel informatie worden

uitgewisseld tussen grote aantallen 'werkstations' (terminals, personal computers, minicomputers, e.d.). Dergelijke LAN's zijn zeer geschikt voor gebruik binnen een kantoor, bedrijf of universiteit. Door de complexiteit van moderne computernetwerken loopt men tegen twee grenzen aan: er zijn zoveel afhankelijkheden dat een wiskundige analyse onuitvoerbaar wordt, en het uitrekenen van de prestatiematen (bijvoorbeeld de responstijd) vergt zoveel bewerkingen dat geen computer dat aankan. Daarom schakelt men bij het bestuderen van wachtrijen steeds meer speciale computerprogramma's in, onder meer om bepaalde onderdelen te simuleren. Het CWI heeft zich in Nederland op dit gebied ontwikkeld tot toonaangevend centrum.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

551 In onderstaande figuur zijn $APQB$, $BRSC$ en $CTUA$ vierkanten. Gegeven zijn QR , ST en UP . Construeer $\triangle ABC$. (H. N. Schuring)



552 Ditmaal een probleem dat uit het leven gegrepen is. Een kennis van mij verzamelt suikerzakjes. Ik doe mee aan de acquisitie. In Italië kwam ik geregeld in een restaurant waar bij de koffie een suikerzakje werd verstrekt waarop een of andere fraaie automobiel uit de oertijd afgebeeld stond. Na enige tijd heb ik de inventaris opgemaakt. Ik had 13 suikerzakjes waaronder precies 10 verschillende. Ik vroeg mij toen af: hoeveel verschillende zullen er in totaal zijn? Of, iets preciezer geformuleerd: welk totaal aantal verschillende is het meest waarschijnlijk? Gevraagd wordt dit uit te rekenen.

Na afloop heb ik bij de eigenaar van het restaurant geïnformeerd naar de werkelijke situatie. Die zal ik tegelijk met de oplossing meedelen.

Neem aan dat elke keer de kans op het krijgen van een suikerzakje van een bepaalde soort voor alle soorten even groot is.

- a Vind alle tripels natuurlijke getallen y, x, z waarvoor geldt dat y^2, x^2, z^2 in deze volgorde een rekenkundige rij vormen.
- b Aan het stelsel
- $$x^2 + x + 2 = y^2$$
- $$x^2 - x - 2 = z^2$$
- voldoet het rationale tripel $x = -\frac{17}{16}, y = \frac{23}{16}, z = \frac{7}{16}$. Leid hieruit af dat er ook een rationaal tripel voldoet waarvan x positief is en vind dit tripel.

Oplossingen

547 Geef een klassifikatie van de lineaire ornamenten waarvoor er een kleinste niet-identieke translatie t bestaat die het ornament in zichzelf doet overgaan.

Behalve t zijn er in principe mogelijk:

een lijnspiegeling in de lijn l van het ornament (ls)

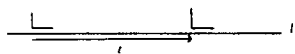
een lijnspiegeling in een as loodrecht op l (as)

een puntspiegeling (ps)

een schuifspiegeling (ss) waarvoor geldt $ss^2 = t$.

Realiseerbaar zijn de volgende mogelijkheden:

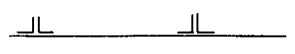
- 1 geen spiegeling van de vorm ls, as, ps of ss (figuur 1)
- 2 alleen een ls (figuur 2)
- 3 alleen een as (figuur 3)
- 4 alleen een ps (figuur 4)
- 5 alleen een ss (figuur 5).



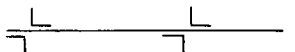
Figuur 1



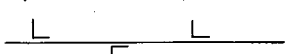
Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5

Nu de mogelijke combinaties. We zien dat

ls een spiegeling is in l (figuur 6)

as een spiegeling is in m (figuur 7)

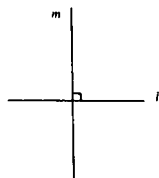
ps een samenstelling is van twee spiegelingen in l en m (figuur 8)

ss een samenstelling is van drie spiegelingen in l, m_1 en m_2 met $d(m_1, m_2) = \frac{1}{4}|t|$.



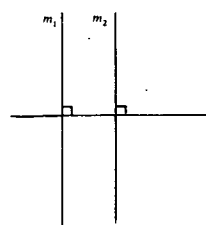
Figuur 6

Figuur 7



Figuur 8

Figuur 9



Als er een ps en een as mogelijk zijn, dan moeten we twee gevallen onderscheiden:

- a de as van as valt samen met de as m van ps ; in dat geval geldt $as \circ ps = ls$
- b de as van as valt niet samen met de as m van ps ; in dat geval is de afstand van deze assen $\frac{1}{4}|t|$ en geldt $as \circ ps = ss$.

Dus

$$as \wedge ps \Rightarrow ls \vee ss$$

Men ziet nu gemakkelijk op analoge manier dat

$$ps \wedge ls \Rightarrow as$$

$$as \wedge ls \Rightarrow ps$$

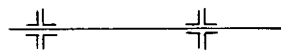
$$ls \wedge ss \Rightarrow \text{translatie over } \frac{1}{2}|t| \text{ (en dit is in strijd met de aanname dat } t \text{ de kleinste translatie is waarvoor het ornament invariant is)}$$

$$as \wedge ss \Rightarrow ps$$

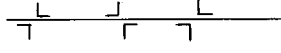
$$ps \wedge ss \Rightarrow as$$

Zodat de volgende twee mogelijkheden de enig overblijvende zijn:

- 6 ps, as en ls zijn mogelijk (en ss niet) (figuur 10)
- 7 ps, as en ss zijn mogelijk (en ls niet) (figuur 11).



Figuur 10



Figuur 11

Wie de smaak te pakken gekregen heeft, kan nu zich afvragen welke mogelijkheden er zijn t.a.v. tweedimensionale ornamenten. Hij kan dan bovendien ook rotaties erbij betrekken.

548 18 clubs spelen een halve competitie. De competitieleider maakt het rooster zo dat men na een minimaal aantal speeldagen vastloopt. Hoe groot is dit minimum?

Hieronder een rooster waarbij na 9 speeldagen de competitie vastloopt. De bovenste 9 clubs moeten op een zelfde speeldag tegen elkaar spelen en dat is niet mogelijk.

1 2 3 4 5 6 7 8 9
 2 3 4 5 6 7 8 9 1
 3 4 5 6 7 8 9 1 2
 4 5 6 7 8 9 1 2 3
 5 6 7 8 9 1 2 3 4
 6 7 8 9 1 2 3 4 5
 7 8 9 1 2 3 4 5 6
 8 9 1 2 3 4 5 6 7
 9 1 2 3 4 5 6 7 8

Rest nog het bewijs dat na 8 speeldagen vastlopen onmogelijk is. Onderstel alle clubs hebben 8 wedstrijden gespeeld en moeten er dus nog 9 spelen. Men kan in elk geval nu 5 koppels vormen:

$a_1-a_2, a_3-a_4, a_5-a_6, a_7-a_8, a_9-a_{10}$

Misschien kunnen we geen zesde koppel vormen. Kies a_{11} en a_{12} . Deze hebben dan elk reeds tegen 9 van de clubs $a_1, \dots, a_{10}$ gespeeld. Dan is er in elk geval een paar, bijv. a_3 en a_4 , zo dat a_{11} nog niet tegen de een (a_3) en a_{12} nog niet tegen de ander (a_4) gespeeld heeft. We vervangen a_3-a_4 door a_3-a_{11} en a_4-a_{12} .

Zo gaan we verder. Ten slotte zijn er 8 koppels gevormd (na eventuele hernoeming):

$a_1-a_2, a_3-a_4, \dots, a_{15}-a_{16}$ (1)

Onderstel a_{17} en a_{18} moeten nog tegen 9 van deze clubs spelen (en dus niet tegen elkaar). Dit geval willen we iets zorgvuldiger bekijken. Neem aan dat a_{17} nog spelen moet tegen

$a_1, a_3, a_5, a_6, a_7, a_8, a_{11}, a_{12}, a_{13}$ en a_{18} tegen (2)

$a_1, a_4, a_5, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{14}, a_{15}$ (3)

De clubs uit (2) vervangen we door de clubs waartegen ze volgens (1) zouden moeten spelen. Dan gaat (2) over in

$a_2, a_4, a_6, a_5, a_8, a_7, a_{12}, a_{11}, a_{14}$ (4)

(3) en (4) zijn twee deelverzamelingen met 9 elementen van een verzameling met 16 elementen en hebben dus in elk geval een element gemeen. Bijv. a_7 . Dat houdt in dat a_{17} nog spelen moet tegen a_8 en a_{18} tegen a_7 . We vervangen dan a_7-a_8 door a_7-a_{18} en a_8-a_{17} . Waarmee we zien dat men de achtste speeldag niet vast kan lopen.

Nu 16 clubs. Ook hier kan men na 9 speeldagen vastlopen. Zie het hier volgende diagram.

2 3 4 5 6 7 8
 3 4 5 6 7 8 9 1
 4 5 6 7 8 9 1 2
 5 6 7 8 9 1 2 3
 6 7 8 9 1 2 3 4
 7 8 9 1 2 3 4 5
 8 9 1 2 3 4 5 6
 9 1 2 3 4 5 6 7
 1 2 3 4 5 6 7 9 8

Maar niet eerder. Neem aan dat er 8 speeldagen verlopen zijn. Ieder moet dus nog 7 wedstrijden spelen. Op dezelfde manier als bij 18 clubs kan men 7 koppels vormen:

$a_1-a_2, a_3-a_4, \dots, a_{13}-a_{14}$

Blijven over a_{15} en a_{16} . Als deze niet nog tegen elkaar moeten spelen, kan het nu echter zijn dat a_{15} bijv. nog moet spelen tegen $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{13}$ en a_{16} eveneens. Hier houdt dus de analogie met het geval 18 clubs op.

Beschouw nu alleen de clubs $a_1, a_2, \dots, a_{14}$. De clubs met oneven index moeten elk nog 5 wedstrijden spelen tegen de overige; die met even index 7. Dus zullen er in elk geval twee clubs met even index nog tegen elkaar moeten spelen. Neem aan dat a_2 nog spelen moet tegen a_4 . We vervangen dan

a_1-a_2, a_3-a_4

door

$a_2-a_4, a_1-a_{15}, a_3-a_{16}$

Waarmee aangetoond is dat vastlopen niet mogelijk is.

De redenering is generaliseerbaar voor resp. $4n + 2$ en $4n$ clubs.

549 Een aantal personen hebben bezittingen ter waarde $p_1, \dots, p_n$. De (een) rijkste geeft de helft van zijn bezittingen aan de (een) armste. Dit proces wordt steeds herhaald. Hoe kan het verlopen?

Onderstel dat het bezit van de rijkste a en dat van de armste b is. We onderscheiden drie gevallen.

a $a = 2b$. A bezit a en B bezit b . Nadat A de helft van zijn bezit aan B gegeven heeft, zal het bezit van A gelijk zijn aan b en dat van B aan a . Het proces repeteert dus.

b $a < 2b$. Na de eerste transactie is het bezit van A geworden $\frac{1}{2}a$ en dat van B $\frac{1}{2}a + b$. Omdat $\frac{1}{2}a < b$ is nu $b_1 = \frac{1}{2}a$ het kleinste bezit. Omdat $\frac{1}{2}a + b > a$, is $a_1 = \frac{1}{2}a + b$ het grootste. Weer is $a_1 < 2b_1$.

Men kan het proces dus onbeperkt voortzetten. Er ontstaat een monotoon stijgende rij $a_1, a_2, \dots$ en een monotoon dalende $b_1, b_2, \dots$. Beide zijn begrensd en hebben dus een limiet. Noem deze resp. α en β . Uit het ongerijmde bewijst men met enig geduld, maar zonder veel moeite, dat $\alpha = 2\beta$.

Omdat voor elke k geldt $a_k + b_k = a + b$, is ook $\alpha + \beta = a + b$. Dus is

$\alpha = \frac{2}{3}(a + b)$ en $\beta = \frac{1}{3}(a + b)$

Het proces verloopt dus asymptotisch.

c $a > 2b$. Weer bezitten A en B na de eerste transactie $\frac{1}{2}a$ en $\frac{1}{2}a + b$. Nu is echter $\frac{1}{2}a + b < 2 \cdot \frac{1}{2}a$.

In het algemeen zullen nu B en A niet weer de rijkste en de armste zijn. Mocht dit wel het geval zijn, dan hebben we het geval b bereikt. Mocht het niet het geval zijn, dan gaan we net zo lang door totdat geval b bereikt is, d.w.z. totdat de rijkste minder dan 2 keer zoveel bezit als de armste. De vraag is of deze situatie inderdaad bereikt wordt.

Stel dat aanvankelijk het aantal geordende paren (p_i, p_j) met $p_i > 2p_j$ gelijk is aan k . Uit het bovenstaande zien we, dat na de eerste transactie dit aantal in elk geval 1 kleiner is geworden en misschien nog wel meer kleiner. Daaruit volgt dat het proces inderdaad afloopt.

We kunnen het dus voortzetten, totdat geval b (of a) bereikt wordt, waarna proces asymptotisch (of repeterend) verloopt.

Gevraagd wordt dit resultaat toe te passen op het geval $p_1 = 1, p_2 = 2, \dots, p_n = n$.

De bezittingen zijn dan:

na de 1^e transactie $2, \dots, n-1, \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}(n+2)$

na de 2^e transactie $3, \dots, n-2, \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}(n+2), \frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(n+3)$

...

na de $(i-1)^e$ transactie $i, \dots, n-i, \frac{1}{2}(n-i+2), \dots, \frac{1}{2}(n+i)$, m.u.v. $\frac{1}{2}(n+1)$ ($i \leq \frac{1}{2}n+1$)

Wat nu volgt is peuterwerk. Ik geef alleen de grote lijn weer. Ik onderscheid drie gevallen.

- 1 $n = 3k$. Onderstel het kleinste bezit is i en het grootste $n - i$. Dan zal het geval b of a bereikt worden, zodra $n - i \leq 2i$, dus als $i = \frac{1}{3}n = k$.
We moeten nu nog nagaan of dan inderdaad i het kleinste is en niet $\frac{1}{2}(n - i + 2)$ nog kleiner. En of inderdaad $n - i$ het grootste is en niet $\frac{1}{2}(n + i)$ nog groter. Dit blijkt te kloppen.
Het kleinste bezit is nu dus $\frac{1}{3}n$ en het grootste $\frac{2}{3}n$. Het proces gaat repeteren.
- 2 $n = 3k + 1$. Onderstel het kleinste bezit is i en het grootste $n - i$. Geval b of a wordt bereikt, zodra $n - i \leq 2i$, dus zodra $i \geq \frac{1}{3}n$, dus als $i = k + 1$.
Nu blijkt het kleinste te zijn $i = k + 1$, echter het grootste niet $n - i$, maar $\frac{1}{2}(n + i) = 2k + 1$.
Het proces verloopt asymptotisch naar de limieten $\frac{1}{3}(k + 1 + 2k + 1) = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}n + \frac{2}{3}$.
- 3 $n = 3k + 2$. Op dezelfde manier vinden we dat nu geval b bereikt wordt bij $i = k + 1$. Het kleinste bezit is dan $k + 1$ en het grootste $\frac{1}{2}(n + i) = 2k + \frac{3}{2}$.
Het proces verloopt asymptotisch naar de limieten $\frac{1}{3}(k + 1 + 2k + \frac{3}{2}) = \frac{1}{3}n + \frac{1}{6}$ en $\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$.

550 Het produkt van de cijfers van het decimaal geschreven natuurlijke getal n noemen we $f_1(n)$. Verder is $f_1 f_1(n) = f_2(n)$, $f_1 f_2(n) = f_3(n)$ enz.

Hoe loopt dit proces af?

Laat n het decimaal geschreven getal $[a_i a_{i-1} \dots a_0]$ zijn. Dan is $n = a_i 10^i + a_{i-1} 10^{i-1} + \dots + a_0$

en

$$f_1(n) = a_i a_{i-1} \dots a_0$$

Omdat

$$a_{i-1} a_{i-2} \dots a_0 < 10^i$$

is

$$a_i 10^i > f_1(n) \text{ en dan ook } n > f_1(n).$$

Het proces loopt dus af en eindigt op één van de getallen 0, 1, ..., 9.

Noem dit getal $g(n)$. Voor welke n is $g(n) = 1$?

Het volledig g -origineel van 1 bestaat uit:

a alle getallen 11...1

b alle getallen waarvoor $f_1(n) = 11...1$.

Merk op dat

een van de cijfers van n is even $\Rightarrow g(n)$ is even

een van de cijfers van n is 5 $\Rightarrow g(n) = 5 \vee g(n) = 0$.

In geval b is n dus het produkt van uitsluitend factoren 3 en 7. Is n deelbaar door 3, dan het het aantal 1'en van 11...1 gelijk aan $3k$.

Is n deelbaar door 7, dan is het aantal 1'en van 11...1 gelijk aan $6k$.

In beide gevallen bevat 11...1 een factor 37.

Geval b is dus uitgesloten. Het volledig g -origineel van 1 bestaat uit de getallen 11...1.

Nu het volledig g -origineel van 3 en van 7. Dit bestaat uit:

a alle getallen die bestaan uit één cijfer 3 (7) en verder uitsluitend 1'en

b alle getallen waarvan het f_1 -beeld een van de getallen sub a is.

Weer komen daarbij alleen in aanmerking getallen die geen andere factoren dan 3 en 7 hebben.

Kijk alleen naar de laatste twee cijfers, dus reken modulo 100.

De machten van 3 mod 100 zijn 03, 09, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89, 67, 01.

Omdat $7 = 3^{15} \pmod{100}$, zijn alle getallen $3^{7^i} \pmod{100}$ in bovenstaande rij vervat.

De getallen sub b eindigen op 11, 13, 17, 31 of 71. Deze komen in de genoemde rij niet voor. De sub b genoemde verzameling is dus leeg en het volledig g -origineel van 3 (7) bestaat uit de sub a genoemde getallen.

Mededelingen

Wintersymposium

Het Wintersymposium van het Wiskundig genootschap heeft deze keer als thema: 'Mathematische Modeltheorie'. Het symposium wordt gehouden op zaterdag 3 januari in het gymnasium Johan van Oldenbarnevelt, Groen van Prinstererlaan 33, 3818 JN Amersfoort.

Het programma is als volgt:

10.00-11.00 dr. F. Verhulst (RU, Utrecht)

Economische groei modellen.

11.15-12.15 drs. J. de Lange (OW & OC, Utrecht)

Mathematiseren en modelleren bij wiskunde A.

13.30-14.30 dr. A. van Harten (Rijkswaterstaat)

Operations research en onderhoudstechnieken.

U kunt zich voor dit symposium uitsluitend schriftelijk opgeven bij J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ 's-Gravenhage. Op verzoek kunt u een prospectus met samenvattingen van de voordrachten thuisgestuurd krijgen. Deze prospectussen zullen begin december naar de scholen worden gestuurd.

Indien u wilt deelnemen aan de gezamenlijke lunch, stort u f10,- op girorekening 623553, t.n.v. J. W. Maassen 's-Gravenhage, onder vermelding 'lunch wintersymposium'.

Cito bepleit nader onderzoek van examenresultaten

Examenresultaten vormen een bron van informatie, die tot nu toe weinig benut wordt. Er kan veel meer worden gedaan met de examenresultaten die jaarlijks binnenkomen bij het Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling (Cito). Nader onderzoek van deze gegevens kan informatie opleveren over de kwaliteit van het onderwijs. Deze informatie is bruikbaar voor het onderwijs zelf, de inspectie en de onderwijsbeleidsmakers.

Dat schrijft het Cito in een rapport aan het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen. In 1985 verzocht het ministerie het Cito na te gaan hoe beter gebruik gemaakt zou kunnen worden van de examengegevens die bij het Cito liggen opgeslagen. Het instituut voor toetsontwikkeling verrichtte niet alleen

onderzoek naar de mogelijkheden van een betere benutting van examenresultaten, maar voerde tevens bij wijze van voorbeeld enkele analyses uit.

Randstad

Eén van die 'voorbeeld'analyses betreft een vergelijking van de prestaties van kandidaten uit de randstad met de prestaties van kandidaten uit de rest van Nederland. Deze vergelijking is gemaakt aan de hand van meerkeuze-examens uit 1985 voor de schooltypen lbo, mavo, havo en vwo. Daaruit blijkt dat kandidaten uit de randstad minder presteren dan de kandidaten uit de rest van het land. Gemiddeld behalen de randstedelingen 0.4 cijferpunt minder. Het grootste verschil wordt geconstateerd bij Duits en het kleinste bij Engels.

Mavo

Sinds 1983 is het voor mavo-kandidaten mogelijk examen te doen op twee niveaus, te weten op C- en op D-niveau. Ook mogen zij herkansen in twee vakken en wel om hun cijfer te verbeteren, maar ook om examen op een ander niveau te doen, profielverandering genaamd. Het aantal mavo-kandidaten dat herkanste nam hierdoor fors toe in 1983 en latere jaren. Het Cito is in één van zijn 'voorbeeld'analyses nagegaan op welke wijze mavo-kandidaten gebruik maken van deze herkansingsmogelijkheid. Zo bleek dat C-kandidaten verhoudingsgewijs meer herkennen dan D-kandidaten. Veel profielverbeters (C-kandidaten die alsnog op D-niveau examen doen) slagen er overigens niet in om inderdaad een voldoende cijfer op D-niveau te behalen. Uit de analyses van het Cito bleek verder dat er wat deelname en behaalde kwalificatie betreft geen verschillen zijn te constateren tussen jongens en meisjes.

Feiten

Volgens het Cito is het heel goed mogelijk gegevens af te leiden uit de examenresultaten. Het instituut wijst er echter op dat dergelijke analyses slechts feitenmateriaal opleveren. Als men de oorzaken van de feitelijke constatering op het spoor wil komen, zal nader onderzoek verricht moeten worden.

Betaling contributie

Ongeveer 90% van de leden betaalt de contributie op tijd: aan het begin van het verenigingsjaar. De bijna 10% leden, die te laat betalen, zijn voor de vereniging erg duur. Het opsporen en (herhaald) aanschrijven kost veel geld.

Daarom verzoekt het bestuur de leden die hun contributie voor het lopende verenigingsjaar nog niet hebben betaald, dit per omgaande te doen. Aan degenen die toch aangeschreven moeten worden zullen de kosten hiervan (f2,50) in rekening worden gebracht. Na 1 mei 1987 bedraagt de verhoging f10,-.

Namens het bestuur, de penningmeester.

Boekbespreking

R. van Asselt e.a., *Wiskunde voor het hoger beroepsonderwijs*, uitg. Educaboek – Stam Technische Boeken.

Onder eindredactie van genoemde auteur is de tweede druk verschenen van de beide delen waaruit het hier te bespreken werk bestaat. Dat zo kort na de verschijning van de eerste druk deze tweede verschijnt moge wijzen op een goede ontvangst van dit werk in het veld.

Na kennismaking en bestudering van dit werk verbaast mij dat niets. De beide boeken zien er op het eerste gezicht al buitengewoon aantrekkelijk uit. Er is zeer veel zorg besteed aan de presentatie van de stof. Een ruim opgezette bladspiegel, geen teksten en/of formules op elkaar gedrongen om ruimte te sparen, een brede kantlijn, dat alles maakt van het werk een overzichtelijk geheel. Talloze figuren lichten de tekst op goede, functionele wijze toe. De diverse hoofdstukken worden voorafgegaan door voor de student geformuleerde 'leerdoelen'. Tussen de hoofdstukken zijn historische notities gemaakt. Het gepresenteerde wordt op deze wijze voor de student in een goede context geplaatst. Dit geldt temeer daar in deze notities duidelijk gewezen wordt op de praktische situaties waaruit wiskunde is ontstaan.

De auteurs hebben gepoogd een goede aansluiting te creëren op de vooropleiding van de hbo-student. Daar hierbij van een grote diversiteit sprake is hebben de schrijvers gekozen voor een ruim aanbod in het eerste hoofdstuk: 'Herhaling en verdieping van basiskennis en basisvaardigheden' (75 blz.).

De ondertitel van het boek is 'Analyse en numerieke wiskunde'. In het 'woord vooraf' schrijven de auteurs dat zij zich onder andere ten doel stellen 'de inhoudelijke samenhang tussen de analyse en de numerieke wiskunde te laten zien'. Ik meen dat zij in deze doelstelling zeer wel geslaagd zijn. Hierbij is een zeer functioneel gebruik gemaakt van de programmeerbare zakrekenmachine.

Om een indruk te geven van de boeken geef ik hieronder de titels van de overige hoofdstukken.

deel 1: numeriek rekenen; functies en relaties; zakcomputer en grafieken; limieten en continuïteit; zakcomputer en limieten; differentiaalrekening; interpolatie en approximatie van functie-waarden; toepassingen van de differentiaalrekening; het numeriek oplossen van niet-lineaire vergelijkingen met één onbeken-

de; integraalrekening; numerieke integratie; toepassingen van de integraalrekening; het gebruik van de computer bij numerieke integratie.

deel 2: vectoralgebra en matrixrekening; numerieke methoden uit de matrixrekening; complexe getallen; het numeriek bepalen van complexe oplossingen; differentiaalvergelijkingen; het numeriek oplossen van gewone differentiaalvergelijkingen; bijzondere onderwerpen (poolcoördinaten, cilinder- en bolcoördinaten, vectorfuncties, scalarvelden, herhaalde integratie, toepassingen van herhaalde integratie in de mechanica, vectorvelden, divergentie van vectorvelden, rotatie van vectorvelden); numerieke benadering van meervoudige integralen.

Beide delen worden besloten met een bijlage waarin programmatuur bij enige hoofdstukken is opgenomen, een register en een lijst van wiskundige symbolen (tekens). De omvang van de boeken: deel 1, 478 blz. en deel 2, 545 blz.

Van de vele vraagstukken zijn de uitwerkingen en antwoorden opgenomen in 2 afzonderlijke boeken van resp. 308 en 245 bladzijden.

Als geheel: boeken van grote kwaliteit die ik van harte wil aanbevelen.

W. Kleijne

Kalender

3 januari 1987: Amersfoort, Wintersymposium Wiskundig Genootschap.

12-14 februari 1987: Ede, Didactiek-conferentie.

12-14 maart 1987: Ede, Didactiek-conferentie.

18 en 19 maart 1987: Hilversum, Andere didactiek-conferentie.

28 maart 1987: Kapellen, Studiedag NVvW/VVWL.

2-4 april 1987: Ede, Didactiek-conferentie.

'Wie in onze tijd de wetenschap ontlopen wil, zal een flink eind moeten reizen en niet al te veel bagage kunnen meenemen.'

De ontwikkeling van wetenschap

Een inleiding in de wetenschapsfilosofie

Dr. ir. G.H. de Vries



Naast de vraag naar de praktische rol van de wetenschap in de samenleving, hebben de volgende overwegingen de inhoud van deze wetenschapsfilosofische inleiding bepaald:

- het werk van Popper, Lakatos, Kuhn vormt de kern van de huidige wetenschapsfilosofie;
- om het werk van een filosoof uiteen te kunnen zetten, moet men ingaan op de problemen die tot dat werk geleid hebben;
- het is nuttig kennis te nemen van specifieke problemen uit verschillende vakgebieden.

De derde overweging leidde ertoe dat de sociale wetenschappen én de natuurwetenschappen in één boek zijn behandeld.

Aanbevolen aan ieder die zich interesseert voor de plaats van de wetenschap in maatschappij en cultuur.

De ontwikkeling van wetenschap

Dr. ir. G.H. de Vries

ISBN 90 01 92364 X ing 163 p

Ook verkrijgbaar in de boekhandel



Wolters-Noordhoff bv

Postbus 58

9700 MB Groningen

Telefoon (050) 22 68 88

Wolters-Noordhoff

Inhoud

S. van der Salm: Enige inhoudelijke en didaktische aspecten van de digitale wiskunde 65

De 27 Internationale Wiskunde-Olympiade 74

G. Schoemaker: Tekeningen 75

H. N. Schuring: Toetsperikelen 79

P. G. J. Vredenduin: Grensgevallen III 85

H. Nieland: Moderne verbindingssystemen 89

Recreatie 91

Mededelingen 73, 95

Boekbespreking 96

Kalender 96

Adressen van auteurs

H. Nieland, p/a C. W. I. Kruislaan 413,
1098 SJ Amsterdam

S. A. M. van der Salm, Bodemanstraat 15,
1216 AH Hilversum

G. Schoemaker, OW & OC, Tiberdreef 4,
3561 GG Utrecht

H. N. Schuring, p/a CITO, Postbus 1034,
6805 MG Arnhem

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148,
6865 HN Doorwerth