

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

61e jaargang
1985 | 1986
juni | juli

Euclides 10

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Drs H. Bakker
Mw I. van Breugel
Drs F. H. Dolmans (hoofdredacteur)
W. M. J. M. van Gaans
Prof dr F. Goffree
L. A. G. M. Muskens
Drs C. G. J. Nagtegaal
Drs A. B. Oosten (eindredacteur)
P. E. de Roest (secretaris)
Mw H. S. Susijn-van Zaale
Dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12,
7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 50,- per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 35,-; contributie zonder Euclides f 30,-. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894-11730. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van

1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P. E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-22027 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52^c, 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-135976.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 44,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 26,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949. Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers f 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan: Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 39731 (Samsy).

Euclides

Inhoud van de 61e jaargang

1985/1986

Artikelen

Hans Aalmoes

Een olifant op zijn tenen getrapt, 190

Rente op rente op rente, 213

Piet van Blokland

Statistiek en Computers, 247

Jan Breeman

Geef ze de ruimte, 74

Harrie Broekman

Leerstijlaspecten. Wie ziet wat?, 161

Harrie Broekman en Johan Weterings

Zulke goede resultaten? Was die toets wel goed?,
77

*Interpretatie en evaluatie van het Tweede
Wiskundeproject*, 97

Gesloten vragen binnen de wiskunde: nee, 130

Jan van der Craats

Voorbeelden, 231

Rijkje Dekker

Een context, vijf leerlingen, 168

A. C. van Essenberg, D. P. M. Krins en

J. C. G. van Steen

*De betekenis van het Tweede Wiskundeproject
voor het onderwijsbeleid*, 61

Hans Freudenthal

De waarheid omtrent Bourbaki, 330

Gerrit van den Heuvel

Een 6, maar toch, 277

HEWET in de onderbouw?, 268

Fred Korthagen

Ervaringen met LOGO, 241

Theo Kristel

Bouwen met zwarte dozen, 199

Bram Lagerwerf

Uitdagen, 193

A. J. Th. Maassen

Integraalrekening en R^+ , 178

Ir. Henk Mulder

*De knikkergoot, het probleem van de evenwijdige
krommen*, 273

Henk Nieland

*Amsterdams wiskundige ontbindt snel met
computer*, 157

H. Nieland

Wiskunde op de computer, 339

J. Chr. Perrenet

Wiskunde in de psychologiestudie, 112

Een transfertest voor wiskunde, 137

Martinus Riemersma

Euclides en aktietaal, 345

S. A. M. van der Salm

Differentialen: een didactisch probleem?, 217

J. W. Solberg

Gelegenheid om te leren. En toch...!, 66

H. N. Schuring

*Enige resultaten van het Tweede Wiskunde
Project*, 57

De Nederlandse Wiskundeolympiade 1985, 265

A. Snauwaert

Een nieuw leerplan wiskunde in Vlaanderen, 153

Mike Staring en Jeroen Staring

Overlopers: op jacht naar macht?, 258

Agnes Verweij

Aspecten van Meetkundeonderwijs:

Mooi meegenomen?, 70

P. G. J. Vredenduin

Het Tweede Wiskundeproject van de IEA, 49

Grootheid, eenheid, dimensie, 106

In memoriam Johan H. Wansink, 129

Als... dan, 145

Vectoren een historische beschouwing, 253

Grensgevallen, 317

Grepen uit de geschiedenis van het negatieve getal,
331

De eerste Vlaamse Wiskunde Olympiade, 323

F. Visser

Een wiskundeproject in Hamburg, 151

Gerdientje Visser

Wiskunde, leerstijlen en meisjes, 209

E. Warries en W. J. Pelgrum

*Het IEA-Tweede Wiskundeproject: Wat nu
verder?*, 85

J. van IJzeren

Een directe weg naar a , $\ln a$ van $\log x$, 117

H. Zunneberg

Het punt van Fermat?, 321

Themanummers

Pythagoras-special, *Euclides 61*, 1 aug.-sept.

Lerarenopleiding-special, *Euclides 61*, 9 mei

Diversen

Bij het begin van de 61e jaargang, 1

Examen vwo wiskunde B 1985, 89

Examen vwo wiskunde A 1985, 2e periode 89

Verslag verenigingsjaar '84-'85, 91

Studiedag/Jaarvergadering oktober '85, 92

Cryptokubus, 192

Jaarrede, 225

Notulen van de jaarvergadering, 227

Examen vwo Wiskunde A 1986 1e periode 341

Mededelingen

48, 56, 65, 94, 126, 136, 144, 158, 167, 189, 207,
208, 216, 230, 240, 253, 254, 257, 284, 344, 347,
348

Kalender

224, 253, 284, 348

Korrel

126

Boekbespreking

95, 136, 198, 216, 224, 276, 284, 320, 338

Recreatie

116, 128, 159, 222, 282, 346

Grensgevallen I

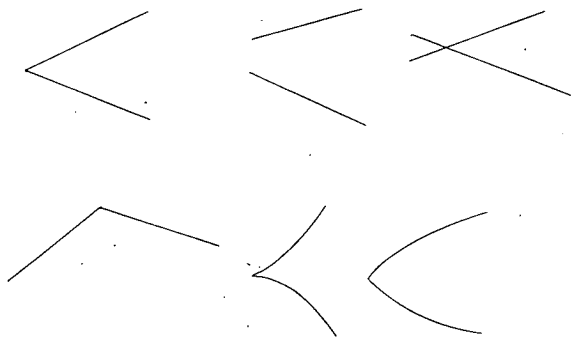
P. G. J. Vredenduin

1 De gestrekte hoek

We kunnen het begrip hoek bijv. op de volgende manier uitbrengen. Eerst enkele voorbeelden uit het dagelijks leven waarin de term 'hoek' voorkomt:

die auto gaat de hoek om,
deze twee balken (in het plafond van een schuur) maken een hoek met elkaar,
deze tafel heeft zes hoeken.

Daarna voorbeelden en non-voorbeelden. Is dit een hoek?



Figuur 1

En nu expliciteren. We hebben de keus tussen twee mogelijkheden:

- a een hoek is een figuur die bestaat uit twee halve rechten met hetzelfde eindpunt;
- b een hoek is een figuur die bestaat uit twee halve rechten met hetzelfde eindpunt die niet in elkaars verlengde liggen.

We moeten een keus doen. Elke keus is mogelijk en gemakkelijk door een redenering te onderbouwen. Wie a kiest, neemt een passer. Hij draait de benen hoe langer hoe verder uit elkaar, totdat ze uiteindelijk in elkaars verlengde liggen. Waarom zou je het nu plots geen hoek meer noemen?

Wie b kiest vraagt: als je rechtdoor loopt, is er dan iemand die zegt dat je een hoek omslaat?

In ons geval kiezen we a. Een figuur die bestaat uit twee halve lijnen met hetzelfde eindpunt die in elkaars verlengde liggen, noemen we dus ook een hoek. We geven deze een speciale naam: gestrekte hoek.

Slikt u s.v.p. al uw didactische bezwaren tegen mijn ontwikkeling van het begrip hoek maar in. Waar het me om gaat is: over een grensgeval wordt beslist.

Deze dictatoriale bezigheid moet natuurlijk niet op willekeur berusten, maar op goede gronden. Over deze gronden wil ik het in dit artikel hebben.

2 Het trapezium

Van mijn wiskundeleraar heb ik op de hbs geleerd: Definitie. Een trapezium is een vierhoek waarvan twee zijden evenwijdig zijn en de andere twee niet. Velen zullen tegenwoordig verbaasd zijn over de inhoud van deze definitie. Waarom wordt het parallellogram uitgesloten? Maar dit speelde in 1921 en toen was het algemeen gebruik een trapezium zo te definiëren.

De gevolgen van het uitsluiten van het parallellogram blijven niet uit. Hieronder een serie vraagstukken waarin dit gedemonstreerd wordt. De vraagstukken gaan alle over vierhoek $ABCD$: S is het snijpunt van de diagonalen.

- a1 Als $AS : SC = BS : SD$, dan is $ABCD$ een trapezium of een parallellogram.
- a2 Als de vierhoek een ingeschreven cirkel heeft met middelpunt I en $AI \perp BI$, dan is $ABCD$ een trapezium of een parallellogram.
- b1 Als $AB \parallel CD$ en $AC = BD$, dan is $ABCD$ een gelijkbenig trapezium of een rechthoek.
- b2 Als $AB = CD$ en $\angle B = \angle C$, dan is $ABCD$ een gelijkbenig trapezium of een rechthoek.
- b3 Als $AS = BS$ en $CS = DS$, dan is $ABCD$ een gelijkbenig trapezium of een rechthoek.

Als je deze vijf vraagstukken bekijkt, krijg je wel het gevoel dat er iets hapert aan de doelmatigheid van de begripsvorming. Zou het niet praktisch zijn, als je één term had voor 'trapezium of parallellogram' en één term voor 'gelijkbenig trapezium of rechthoek'? Wel, dat is gemakkelijk te verwezenlijken. In plaats van 'trapezium of parallellogram' zeggen we kortweg 'trapezium' en in plaats van 'gelijkbenig trapezium of rechthoek' dan 'symmetrisch trapezium'. We veranderen de definitie van trapezium dus in:

Definitie. Een trapezium is een vierhoek waarvan twee zijden evenwijdig zijn.

Door deze wijziging is het grensgeval: ook de andere twee zijden zijn evenwijdig, mee opgenomen. Dit is een beslissing en zoals we gezien hebben op goede gronden. De formuleringen worden er eenvoudiger door. De gronden zijn dus van pragmatische aard.

3 Het vierkant

Een leraar tekent een vierkant. Hij vraagt een leerling die nog niet door de corresponderende wiskundige molen gegaan is en zich dus nog op het nulde niveau bevindt, of dit een rechthoek is. De leerling antwoordt: nee. En de leraar vindt: ja.

Achtergrond van het meningsverschil is weer de definitie (explicitering) van het begrip rechthoek. We hebben de keus tussen:

- a een rechthoek is een vierhoek met vier rechte hoeken en
- b een rechthoek is een vierhoek met vier rechte hoeken waarvan de zijden niet alle vier even lang zijn.

De leerling kiest b, de leraar a. Waarom kiest hij a? De situatie is analoog aan die bij het trapezium. Kies eerst eens alternatief b. En maak dan de volgende drie vraagstukken.

- c1 Als in een parallellogram de diagonalen even lang zijn, dan is het een rechthoek of een vierkant.
- c2 Als de lijnstukken AC en BD middellijnen van een cirkel zijn, dan is vierhoek $ABCD$ een rechthoek of een vierkant.
- c3 Als viervlak $ABCD$ orthocentrisch is en P , Q , R en S zijn de middens van resp. de ribben AB ,

BC , CD en DA , dan is vierhoek $PQRS$ een rechthoek of een vierkant.

Bedenk nu liever één term voor 'rechthoek of vierkant'. Dat is niet moeilijk. In plaats van 'rechthoek of vierkant' zeggen we liever 'rechthoek'. D.w.z. we kiezen alternatief a.

4 Evenwijdigheid

We kunnen evenwijdigheid op twee manieren definiëren.

a Definities:

$l // m$ wil zeggen: l en m liggen in één vlak en $l \cap m = \emptyset$.

$\alpha // \beta$ wil zeggen: $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

$l // \alpha$ wil zeggen: $l \cap \alpha = \emptyset$.

Een andere manier is in te haken op de betekenis van even-wijdig.

b Definities:

$l // m$ wil zeggen: $P, Q \in l \Rightarrow d(P, m) = d(Q, m)$.

$\alpha // \beta$ wil zeggen: $P, Q \in \alpha \Rightarrow d(P, \beta) = d(Q, \beta)$.

$l // \alpha$ wil zeggen: $P, Q \in l \Rightarrow d(P, \alpha) = d(Q, \alpha)$.

Het verschil is duidelijk. Als $l = m$, dan is volgens de eerste definitie niet $l // m$ en volgens de tweede wel. Analoog als $\alpha = \beta$. Als l in α ligt, dan is volgens de eerste definitie niet $l // \alpha$ en volgens de tweede wel. In geval a zijn dus de grensgevallen niet meegerekend, in geval b wel.

We kiezen alternatief b. Waarom? Als je alternatief a kiest en dus niet accepteert dat $l // l$, dan geldt niet: $l // m \wedge m // n \Rightarrow l // n$. Immers voor $l = n$ en $l // m$ is het linker lid waar en het rechter niet. Als je aanneemt dat wel $l // l$, dan is evenwijdigheid van lijnen wel transitief. Het is dan een equivalentierelatie. Met alle voordelen van dien. Zo laat zich nu richting definiëren als equivalentieklasse.

Ik daal nog even af naar het niveau van de vorige voorbeelden. We zien dat we in geval b verlost zijn van formuleringen als:

als twee cirkels in hetzelfde vlak liggen, dan zijn hun assen evenwijdig of vallen ze samen;

als l in α ligt en $m // l$, dan is $m // \alpha$ of ligt m in α .

5 Gelijkstandig en homothetisch

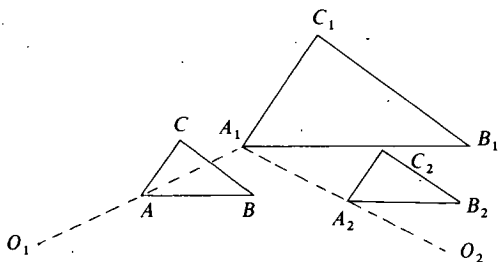
De afbeelding (van een vlak op zichzelf) waarbij het beeld P' van P bepaald wordt door $OP' = k \cdot OP$ ($k \neq 0$) heet vermenigvuldiging t.o.v. O met factor k .

Voor 1968 definieerden we dan:

a Definitie. Als er een vermenigvuldiging is waarbij figuur F_2 beeld is van F_1 , dan zeggen we dat F_2 gelijkstandig is met F_1 .

Totnogtoe hebben we steeds de voorkeur gegeven aan het alternatief waarin de grensgevallen mee in de definitie opgenomen worden. Opvallend is dat hier het grensgeval ' $k = 0$ ' juist per definitie wordt uitgesloten. Waarom? Vanwege de dramatische gevolgen van het toelaten van een vermenigvuldigingsfactor 0. Laat je $k = 0$ toe, dan zou elke figuur gelijkstandig zijn met elk punt, terwijl omgekeerd een punt alleen maar gelijkstandig zou zijn met een punt. De relatie gelijkstandig zou niet symmetrisch zijn en niet steeds een inverse hebben. Nu is hij wel symmetrisch en heeft hij steeds een inverse. Is hij ook transitief?

In onderstaande figuur is $\triangle ABC$ t.o.v. O_1 vermenigvuldigd met 2 en het beeld t.o.v. O_2 met $\frac{1}{2}$. Nu zijn $\triangle ABC$ en $\triangle A_2B_2C_2$ congruent, maar niet gelijkstandig.



Figuur 2

$\triangle A_2B_2C_2$ is wel beeld van $\triangle ABC$ bij een translatie. De relatie gelijkstandig is dus niet transitief. We hebben immers gevonden:

als F_2 gelijkstandig is met F_1 en F_3 met F_2 , dan is F_3 gelijkstandig met F_1 of het beeld van F_1 bij een translatie. Niet leuk, maar het remedie ligt voor het grijpen. Bedenk een nieuwe term voor: gelijkstandig of beeld bij een translatie. Deze term is: homothetisch. Zo krijgen we alternatief b.

b Definitie. Twee figuren zijn homothetisch als de één beeld is van de ander bij een vermenigvuldiging of een translatie.

De relatie homothetisch is een equivalentierelatie. De homothetische afbeeldingen vormen daardoor een commutatieve groep.

6 Continue vervorming

a De driehoek

Een driehoek ontstaat door drie punten te nemen die niet op één rechte liggen en die door lijnstukken te verbinden. Expliciet is het geval dat de drie punten wel op één rechte liggen, uitgesloten. Waarom?

Sluit dit geval niet uit en neem dan een driehoek met collineaire hoekpunten. Die heeft wonderlijke eigenschappen. De hoogtelijnen gaan niet door één punt, de zwaartelijnen hebben niet precies één punt gemeen, er is geen omgeschreven cirkel. Reken je de puntcirkel tot de cirkels, dan is er een ingeschreven cirkel, maar zijn er maar twee aangeschreven cirkels. En het kan zijn dat een driehoek twee gelijke hoeken van 0° heeft en de overstaande zijden niet aan elkaar gelijk zijn. Het is dus ondoelmatig dit grensgeval tot de driehoeken te rekenen.

b Cirkel en ellips

Een ellips is de verzameling van de punten P waarvoor $PF_1 + PF_2 = c$ ($c > F_1F_2$). Voor $F_1 = F_2$ wordt dit een cirkel. Zullen we dit grensgeval tot de ellipsen rekenen?

Ga na of de eigenschappen van de ellips ook voor de cirkel gelden. Dit blijkt het geval te zijn. Helaas niet helemaal; zo zijn de richtlijnen bij de cirkel verdwenen. Maar desondanks blijft het praktisch de cirkel tot de ellipsen te rekenen.

c Nu kunnen we het probleem van de grensgevallen iets algemener stellen. Een grensgeval ontstaat door continue vervorming. Ik wil daar niet nader theoretisch bij stilstaan; de bedoeling is ieder duidelijk. Heeft het grensgeval dezelfde eigenschappen die het algemene geval heeft, dan rekenen we het grensgeval mee. Zijn de eigenschappen afwijkend, dan rekenen we het niet mee.

Daarom rekenen we het vierkant tot de rechthoeken, het parallellogram tot de trapezia, kiezen we alternatief b bij de evenwijdigheid en rekenen we de translatie tot de homothetieën. En sluiten we bij de

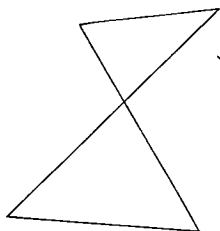
vermenigvuldiging uit dat de vermenigvuldigingsfactor 0 is.

- d Dit artikel is speciaal ingesteld op de schoolwiskunde. Daarbuiten gaat men vaak anders te werk. Men kiest een algemene definitie en merkt dan vanzelf wel welke bijzondere gevallen eronder vallen. Denk bijv. maar aan de definitie van een topologische ruimte, van continuïteit en van limiet. Iets daarover vindt men in het Vademecum, in Nomenclatuur in verband met de eindexamens, onder analyse (in de eerste editie onder Uittreksel uit het rapport van de nomenclatuurcommissie).

7 Een paar probleempjes

Er zijn meer gevallen te bedenken, maar de behandeling zou saai worden. In plaats daarvan leg ik de lezer liever een aantal probleempjes voor die hij naar believen zelf kan onderzoeken.

- In de definitie van een ellips staat: $c > F_1 F_2$. Zullen we het grensgeval $c = F_1 F_2$ meerekenen?
- Een parabool is de verzameling van de punten P waarvoor $PF = d(P, l)$. Zullen we het grensgeval: P ligt op l , meerekenen?
- Laten we puntcirkels toe tot de cirkels?
- Een snijdend lijnenpaar is een grensgeval van een hyperbool. We kunnen het door continue vervorming uit een hyperbool krijgen. Het wordt wel eens een ontaarde hyperbool genoemd. Gaarne commentaar.
- De formule: opp. $\triangle ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$ geldt ook voor een 'platgeslagen driehoek'. Is dat reden om deze toch maar tot de driehoeken te rekenen?
- Is een gelijkzijdige driehoek gelijkbenig? Zo ja, welke zijde is dan de basis? Een vervelend probleem, waar we bij ons onderwijs wijselijk overheen lopen.
- Rekent u



tot de vierhoeken?

Figuur 3

Boekbesprekingen

M. Sutter, *40 grafische programma's in MSX-BASIC*, Academic Service, f29,50 (125 p.).

Het betreft hier een uit het Duits vertaald boekje waarbij niet zoals in de oorspronkelijke uitgave, de standaard Microsoft-BASIC wordt gebruikt, maar gekozen is voor de MSX-BASIC. De weergegeven programma's zijn kort, zodat het invoeren niet te veel tijd vergt en ook het naar eigen wens aanvullen gemakkelijk is te realiseren. Enige kennis van programmeren wordt wel verondersteld en ook wat wiskundige achtergrond is nodig om de programma's te begrijpen. Verder zou een wat meer systematische opbouw de aantrekkelijkheid verhogen. De vertaling van LOGO-programma's naar BASIC maakt dit boek voor een grote groep gebruikers interessant.

Helaas is deze eerste druk niet vrij van fouten. Al met al een erg leuk boekje om de grafische mogelijkheden van je computer te ontdekken.

Jan Tjaarda

M. Sutter, *40 grafische programma's in IBM- en GW-BASIC*, Academic Service, f29,50 (125 p.).

Dit boekje komt overeen met het boek '40 grafische programma's in MSX-BASIC', met dien verstande dat in deze uitgave is gekozen voor de taal van de IBM en IBM-compatibele machines. Voor de rest verwijzen we u naar de bespreking van voornoemd boek.

Harm Bakker

Het punt van Fermat

H. Zunneberg

Het punt van FERMAT is het punt F , gelegen in driehoek ABC , waarvoor geldt:

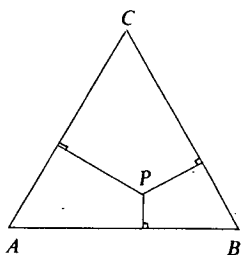
$$\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120^\circ.$$

Het bijzondere van dit punt F is dat geldt:

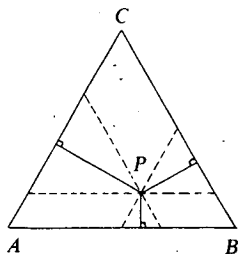
$$FA + FB + FC \leq PA + PB + PC \text{ voor elk punt } P.^*)$$

Deze eigenschap is te bewijzen m.b.v. de volgende *hulpstelling*: Voor elk punt P , gelegen niet buiten een gelijkzijdige driehoek is de som van de afstanden van P tot de zijden gelijk aan de hoogte (h) van die gelijkzijdige driehoek. Voor punten buiten die driehoek is de som groter dan h .

De juistheid van de hulpstelling toont men als volgt aan: ga uit van figuur 1a. Trek hierin lijnen door P evenwijdig aan de zijden van de gelijkzijdige driehoek ABC (fig. 1b). Geef vervolgens de afstanden, die hoogtelijnen in gelijkzijdige driehoeken zijn geworden, dezelfde richting. De juistheid blijkt uit



Figuur 1a



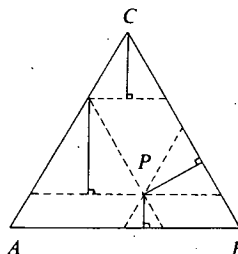
Figuur 1b

*) We beperken ons tot een scherphoekige driehoek.

Beauty is the first test: There is no permanent place in the world for ugly mathematics.

G. H. Hardy

figuur 1c, waarin de driehoekjes, grenzend aan BC congruent zijn.

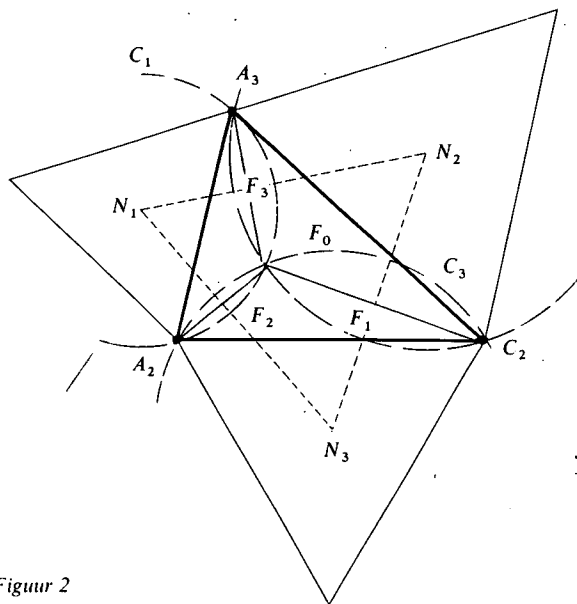


Figuur 1c

In het geval dat P buiten de driehoek ligt kan dezelfde methode worden toegepast. We zien verder in de figuren 1a en 1b dat de hoeken bij P 120° zijn.

Spiegelt men P in de zijden van de gelijkzijdige driehoek, dan ontstaan drie punten, die hoekpunten zijn van een driehoek, waarvan P het punt van FERMAT is.

Omgekeerd kan men bij elke scherphoekige driehoek een gelijkzijdige driehoek construeren zoals blijkt uit figuur 2. N_1 , N_2 en N_3 zijn de zwaartepunten van de gelijkzijdige driehoeken grenzend aan de zijden van driehoek $A_1A_2A_3$ en men kan de omgeschreven cirkels C_1 , C_2 en C_3 van deze gelijkzijdige driehoeken tekenen, waarbij C_1 het punt N_1 als middelpunt heeft, enz. Stel C_1 en C_2 snijden elkaar in F_0 dan geldt: $\angle A_2F_0A_3 = \angle A_3F_0A_1 = 120^\circ$. Hieruit volgt: $\angle A_2F_0A_1 = 120^\circ$ en daarom moet F_0 op C_3 liggen. F_0 is dus het punt van FERMAT.



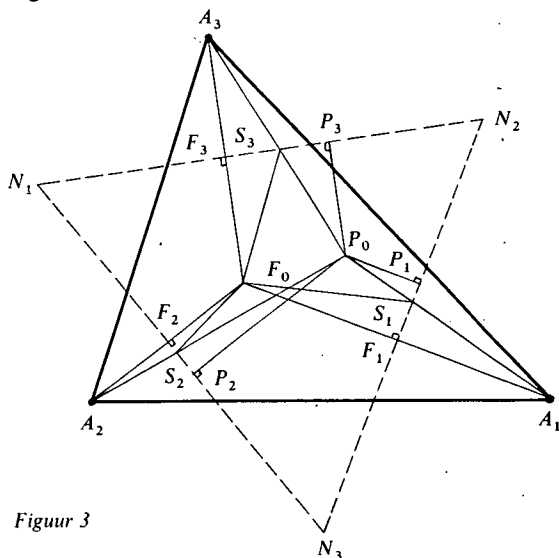
Figuur 2

Verder geldt nu dat $N_1A_2N_3F_0$, $N_2A_1N_3F_0$ en $N_1A_3N_2F_0$ vliegers zijn met resp. N_1N_3 , N_2N_3 en N_1N_2 als symmetrieassen, dus geldt:

$A_2F_0 \perp N_1N_3$, $A_1F_0 \perp N_2N_3$ en $A_3F_0 \perp N_1N_2$.

De vierhoeken $N_1F_2F_0F_3$, $N_2F_1F_0F_3$ en $N_3F_1F_0F_2$ zijn dus koordenvierhoeken, waarin de hoeken bij F_0 elk 120° zijn, dus de hoeken van driehoek $N_1N_2N_3$ zijn elk 60° , dus $N_1N_2N_3$ is gelijkzijdig.

Dat $F_0A_1 + F_0A_2 + F_0A_3$ minimaal is blijkt uit figuur 3.



Figuur 3

Neem binnen driehoek $A_1A_2A_3$ en binnen driehoek $N_1N_2N_3$ het punt $P_0 \neq F_0$, dan geldt:
 $P_0A_1 + P_0A_2 + P_0A_3 =$
 $(P_0S_1 + S_1F_0) + (P_0S_2 + S_2F_0) +$
 $(P_0S_3 + S_3F_0) > P_0P_1 + F_0F_1 + P_0P_2 + F_0F_2$
 $+ P_0P_3 + F_0F_3 =$
 $P_0P_1 + P_0P_2 + P_0P_3 + F_0F_1 + F_0F_2 + F_0F_3 =$
 $2h = F_0A_1 + F_0A_2 + F_0A_3$ (hulpstelling).
 Ligt P_0 buiten $N_1N_2N_3$ dan gaat men analoog te werk.

Opmerkingen: Deze meetkunde vind ik klassiek vanwege de begrippen driehoek en afstand, en mooi vanwege de eenvoud en de helderheid. **GEEN FORMULES!!**

Leerlingen blijken geboeid door meetkunde wanneer ik er, helaas veel te weinig, aandacht aan besteed in de klas. De hulpstelling kwam ter sprake in vwo 5 en het was pijnlijk te constateren hoe goede leerlingen hun heil zochten in formules en rekenen.

Een zeer goede leerling verifieerde moeizaam m.b.v. gonio-formules de gelijkzijdigheid van driehoek $N_1N_2N_3$, maar het meetkundig inzicht bleef achter de formules verborgen.

Niet de leerling, maar het leerplan schiet tekort. In de zestiger jaren klonk de slogan:

'EUCLID MUST GO'.

In 1986 kunnen we vaststellen:

'EUCLID IS GONE'.

De Eerste Vlaamse Wiskunde Olympiade

P. G. J. Vredenduin

Op 15 januari 1986 heeft de eerste ronde plaats gehad van de Eerste Vlaamse Wiskunde Olympiade. Deel konden nemen alle leerlingen "van de vijfde en zesde leerjaren van het Secundair onderwijs en dit van om het even welke afdeling, in om het even welk onderwijstype van om het even welk onderwijsnet, zonder onderscheid".

Het aantal deelnemers bedroeg 2093. Dit was boven verwachting veel. Vandaar dat men het aanvankelijke plan twee ronden te houden heeft herzien en nog een ronde heeft ingelast. Deze is gehouden op 26 februari 1986. Ongeveer 22% van de deelnemers van de eerste ronde werden geselecteerd om aan de tweede ronde te mogen deelnemen. De eerste ronde werd aan de scholen afgenomen, de tweede centraal in elke provincie in één stad.

De eerste ronde bestond uit 30 multiple choice vragen. De werktijd bedroeg 3 uur. Ieder kreeg 30 bonuspunten en verder 4 punten per goed antwoord en -1 punt voor elk fout antwoord. Voor een niet beantwoorde vraag werd geen punt gegeven of afgetrokken.

De tweede ronde bestond eveneens uit 30 multiple choice vragen. De werktijd bedroeg echter slechts 90 minuten. De vragen waren dezelfde als de op dezelfde dag afgenomen 'American Test'. Er werden geen bonuspunten gegeven. Voor elk goed antwoord kreeg men 5 punten, voor elke niet beantwoorde vraag 2 punten en voor elk fout antwoord 0 punten.

Uit de deelnemers aan de tweede ronde zijn er 65 geselecteerd die aan de derde ronde mogen deelnemen. Van deze 65 behoren er 16 tot het vijfde leerjaar en 49 tot het zesde. Ze wordt afgenomen op

16 april in Brussel en zal uit open vragen bestaan. Ten slotte zullen uit de prijswinnaars van de derde ronde er 3 worden gekozen die aan de internationale olympiade mogen meedoen.

Hieronder volgen de vragen van de eerste twee ronden.

Eerste ronde

- 1 Het scalair produkt (inprodukt) van twee vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ wordt voorgesteld door $\vec{u} \cdot \vec{v}$
Men weet nu van drie vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ dat
 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$
Hieruit volgt dat
A $\vec{c} = -\vec{a}$
B $\vec{b}$ is orthogonaal met $\vec{a} + \vec{c}$
C $\vec{b} = 0$ of $\vec{a} + \vec{c} = 0$
D $\vec{a}$ is orthogonaal met $\vec{b}$ en $\vec{c}$ is orthogonaal met $\vec{b}$
E $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ zijn collineair.
- 2 Beschouw de volgende vierkantsvergelijking in x
 $\sin \alpha \cdot x^2 - \cos \alpha \cdot x + \tan \alpha = 0$
waarbij α een konstante is ($\neq k\frac{\pi}{2}$ met $k \in \mathbb{Z}$)
Wanneer men de som en het produkt van de wortels van deze vierkantsvergelijking vermenigvuldigt dan vindt men
A 1 B $\sin \alpha$ C $-\sin \alpha$ D $-\frac{1}{\sin \alpha}$ E $\frac{1}{\sin \alpha}$
- 3 Hoeveel verschillende delers heeft het getal 30030
($= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$)?
A 6 B 36 C 62 D 64 E 128
- 4 Een brandweerman staat op de middelste sport van een brandweperladder tijdens het blussen van een brand. Als de rook wat minder dik is kan hij 9 treden hoger klimmen om beter het bluswerk te doen. Een tijdje later wordt de rook weer dikker en moet hij 11 treden terug naar beneden. Tenslotte is de rookontwikkeling praktisch opgehouden en kan hij tot boven aan de ladder op de hoogste sport klimmen en dit betekent 17 treden naar omhoog.
Het aantal sporten van de ladder is
A 29 B 30 C 31 D 32 E 33
- 5 $\frac{1}{4}$ van 8^{16} is
A 2^{16} B 4^{23} C 8^4 D 2^{24} E 4^8

- 6 Een van de hoeken van een driehoek heeft maat α , een tweede hoek heeft maat 2α . De cosinus van de derde hoek is

A $-\cos 3\alpha$ B $\cos(2\pi - 3\alpha)$

C $\cos 3\alpha$ D $\cos(\frac{\pi}{2} + 3\alpha)$

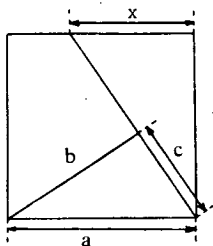
E $\cos(\frac{\pi}{2} - 3\alpha)$

- 7 Wanneer men een rationaal getal decimaal uitschrijft (als een kommagetal) dan kan het gebeuren dat dit aanleiding geeft tot oneindig veel decimalen. Er treedt dan echter een repeterend gedeelte op b.v. $\frac{4}{11} = 0,36\ 36\ 36\ 3 \dots$

Welk is de 1986ste decimaal in de decimale ontwikkeling van $\frac{10}{41}$?

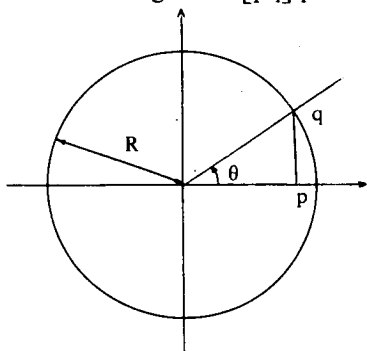
A 0 B 2 C 3 D 4 E 9

- 8 Welk is de waarde van x in volgend vierkant?



A $\frac{ab}{c}$ B $\frac{b}{ac}$ C $\frac{ac}{b}$ D $\frac{c}{ab}$ E c

- 9 Welk is de lengte van de straal R van de gegeven cirkel indien de lengte van $[pq]$ precies $\tan \theta$ is?

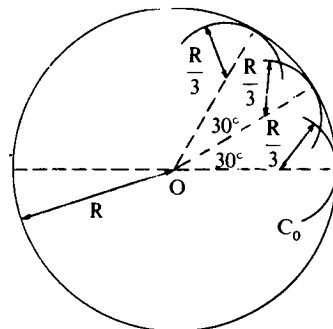


A $\frac{\tan \theta}{\cos \theta}$ B $\sin \theta \cdot \tan \theta$ C $\frac{1}{\sin \theta}$ D $\frac{1}{\cos \theta}$

E geen van de vorige

- 10 In het binnengebied van een cirkel met straal R en middelpunt O , construeert men een kleinere cirkel C_0 met straal $\frac{R}{3}$ die de grote cirkel inwendig raakt;

daarna construeert men de cirkels $C_1, C_2, \dots$ die men bekomt door C_0 te laten draaien om O over $30^\circ, 60^\circ, \dots 330^\circ$. Hoe groot is het aantal ontmoetingspunten (d.w.z. snijpunten of raakpunten) van de kleine cirkels?



A 12 B 24 C 30 D 36 E 40

- 11 Drie punten in het vlak zijn gegeven nl.

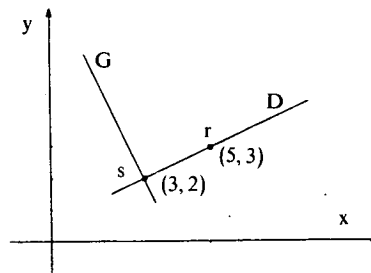
$a(2, 1)$ $b(6, 4)$ $c(2, 4)$

Welke zijn de coördinaten van het middelpunt van de cirkel die door a, b en c gaat?

A $(4, 2)$ B $(3, \frac{5}{2})$ C $(\frac{5}{2}, 4)$ D $(4, \frac{5}{2})$

E geen van de vorige

- 12 Ziehier de grafische voorstelling van twee orthogonale rechten D en G met snijpunt $s(3, 2)$. Verder is $r(5, 3) \in D$



De richtingscoëfficiënt van de rechte G is

A $-\frac{3}{5}$ B $-\frac{5}{3}$ C 2 D $-\frac{1}{2}$ E -2

- 13 Als een daling van 25 naar 5 uitgedrukt wordt als een verlies van 80%, wat is dan de winst wanneer men stijgt van 5 naar 25?

A 20% B 80% C 180% D 400%

E 500%

- 14 De oppervlakten van de verschillende zijvlakken van een balk zijn resp. V, W, U . De inhoud van

deze balk is dan

A VWU B $\frac{V\sqrt{W} + W\sqrt{U} + U\sqrt{V}}{3}$

C $\sqrt{VWU}$ D $\sqrt[3]{VWU}$

E geen van de vorige

- 15 Hoeveel punten kan men maximaal in het inwendige van een cirkel aanbrengen, zodat hun afstand twee aan twee minstens gelijk is aan de straal van de cirkel?

A 2 B 3 C 4 D 5 E 7

- 16 Zij $f(x) = x^2 + 3$. Als $-2 < x < 3$ dan is

A $3 \leq f(x) < 12$ B $3 < f(x) < 12$

C $-1 < f(x) < 12$

D $7 < f(x) < 12$ E $7 \leq f(x) < 12$

- 17 Op hoeveel nullen eindigt $100! =$

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 98 \cdot 99 \cdot 100?$

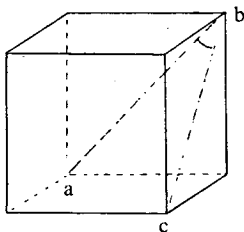
A 10 B 20 C 21 D 24 E 25

- 18 Als p een oneven priemgetal is, welk getal is dan ook priem?

A $2p + 1$ B $p^2 + 1$ C $3p + 2$ D $p^3 + 2$

E geen van de vorige

- 19 In de hier voorgestelde kubus is de grootte van de hoek $\widehat{abc}$:



A 30° B 45° C 60° D 75° E 90°

- 20 Als $x = 0,5$ dan is $x + x^{-1}$ gelijk aan

A 1 B $\frac{5}{2}$ C 0 D 5,5 E geen van de vorige

- 21 Een echte voetbal wordt gemaakt uit stukken zwart en wit leder die aan elkaar genaaid worden zodanig dat de zwarte stukjes regelmatige vijfhoeken en de witte stukjes regelmatige zeshoeken vormen.

Elke (zwarte) vijfhoek is omringd door 5 (witte) zeshoeken.

Elke (witte) zeshoek is omringd door evenveel vijfhoeken als zeshoeken.

Als je weet dat er op zo'n echte voetbal 12 vijfhoeken aanwezig zijn, hoeveel zeshoeken zijn er dan op te vinden?

A 12 B 20 C 24 D 30 E 36

- 22 Hoeveel reële nulpunten bezit

$$f(x) = \frac{x(x^2 + 1)(x^2 - x - 6)}{(x - 3)^2(5 - x)}?$$

A 1 B 2 C 3 D 4 E 5

- 23 Gegeven: $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 99 \cdot 100$

$$y = 100 \cdot 100 \cdot 100 \dots 100 \cdot 100$$

(40 factoren)

$$z = 100 \cdot 99 \cdot 98 \dots 62 \cdot 61$$

Gevraagd: welke (dubbele) ongelijkheid is correct?

A $x < z < y$ B $y < x < z$ C $y < z < x$

D $z < x < y$ E $z < y < x$

- 24 De ongelijkheid $\frac{-3x - 15}{2} < 0$ is gelijkwaardig

met

A $x > 5$ B $x < 5$ C $x > -5$ D $x < -5$

E $x > -\frac{17}{3}$

- 25 Men werpt 3 onvervalste geldstukken op.

Stel door $P(i)$ de kans voor om i keer kop te bekomen ($i = 0, 1, 2, 3$). Welke gelijkheid is juist?

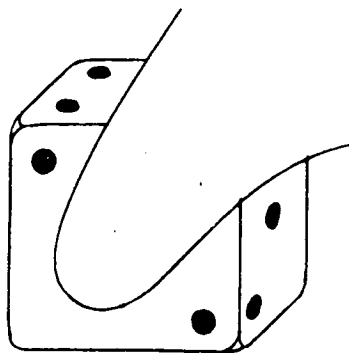
A $P(0) = P(1)$ B $P(1) = P(2)$

C $P(1) = 2P(0)$ D $P(2) = P(3)$

E $P(3) = \frac{1}{4}$

- 26 De afbeelding van deze dobbelsteen is gedeeltelijk verminkt. Wetende dat de som van het aantal ogen op twee tegenoverelkaar liggende vlakken steeds gelijk is aan 7, hoeveel ogen heeft het grondvlak van deze dobbelsteen?

A 1 B 2 C 3 D 4 E meer dan 4



27 De diagonaal van een vierkant is 2 m lang.

Hoe groot is de oppervlakte van dit vierkant?

- A 1 m^2 B $\sqrt{2}\text{ m}^2$ C 2 m^2 D $2\sqrt{2}\text{ m}^2$
E geen enkel van de vorige

28 Eén van de 5 volgende uitspraken is verkeerd. Welke?

- A $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (-1)^{2n} = 1$
B $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$
C $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (-1)^{n^2} = (-1)^n$
D $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (-1)^{3n} = -(-1)^{2n}$
E $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (-1)^{2n-1} = -(-1)^{n+1}$

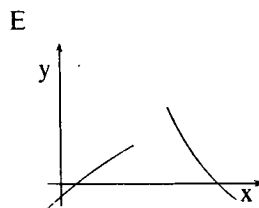
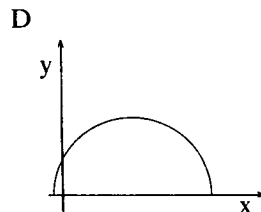
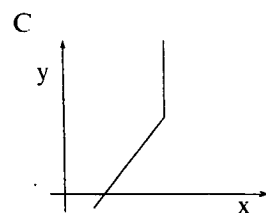
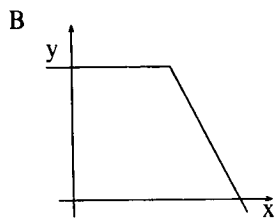
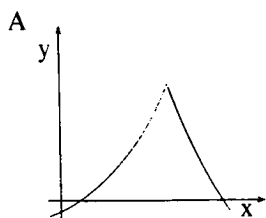
29 Een functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is oneven $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)$$

Welke van volgende functies is oneven?

- A $f(x) = 3$
B $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
C $f(x) = x \cdot \sin x$
D $f(x) = x \cdot \cos x$
E $f(x) = \sin x - \cos x$

30 Welke van de volgende grafieken stelt GEEN functie $y = f(x)$ voor?



Tweede ronde

1 $[x - (y - z)] - [(x - y) - z] =$

- A $2y$ B $2z$ C $-2y$ D $-2z$ E 0

2 Gegeven is een rechte L' in het XY vlak met vergelijking $y = \frac{2}{3}x + 4$.

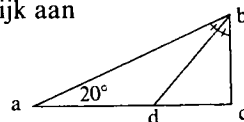
De rechte L heeft een richtingscoëfficiënt die de helft is van deze van L' en snijdt een stuk af op de Y-as dat het dubbel is van het stuk afgesneden op de Y-as door L' .

De vergelijking van L is

- A $y = \frac{1}{3}x + 8$ B $y = \frac{4}{3}x + 2$ C $y = \frac{1}{3}x + 4$
D $y = \frac{4}{3}x + 4$ E $y = \frac{1}{3}x + 2$

3 De $\triangle abc$ is een rechthoekige driehoek.

$\hat{c} = 90^\circ$; $\hat{a} = 20^\circ$. Als bd de bissectrice is van de $\hat{abc}$, dan is $\hat{bdc}$ gelijk aan



- A 40° B 45° C 50° D 55° E 60°

4 Stel volgende bewering voor door S.

'Als de som van de cijfers van een geheel getal n deelbaar is door 6, dan is n deelbaar door 6'.

Een waarde van n die aantoonst dat S een valse bewering is, is

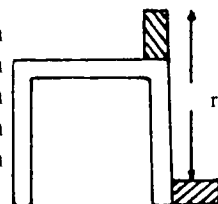
- A 30 B 33 C 40 D 42
E geen van de vorige

5 Vereenvoudig $(\sqrt[6]{27} - \sqrt[6]{6\frac{3}{4}})^2$.

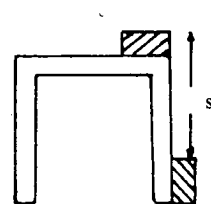
- A $\frac{3}{4}$ B $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D $\frac{3}{2}$ E $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

6 Door gebruik te maken van een tafeltje met zekere hoogte, worden twee identieke blokken hout geplaatst zoals afgebeeld in figuur 1. De lengte r meet 32 cm. Nadien worden de blokken geplaatst zoals in figuur 2, de lengte s meet 28 cm. Hoe hoog is het tafeltje?

- A 28 cm
B 29 cm
C 30 cm
D 31 cm
E 32 cm



Figuur 1



Figuur 2

7 De som van het grootste natuurlijk getal kleiner dan of gelijk aan x en het kleinste natuurlijk getal groter dan of gelijk aan x is gelijk aan 5. De oplossingenverzameling voor x is

- A $\{\frac{5}{2}\}$ B $\{x|2 \leq x \leq 3\}$ C $\{x|2 \leq x < 3\}$
 D $\{x|2 < x \leq 3\}$ E $\{x|2 < x < 3\}$

8 De U.S.A. telde in 1980 226.504.825 inwoners. De oppervlakte van de U.S.A. is 3.615.122 vierkante mijl. Er zijn $(5.280)^2$ vierkante voet in een vierkante mijl. Welke van de 5 onderstaande getallen benadert het best de gemiddelde vierkante voet per inwoner van de U.S.A.?

- A 5.000 B 10.000 C 50.000 D 100.000
 E 500.000

9 Het produkt van

$(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \dots (1 - \frac{1}{9^2})(1 - \frac{1}{10^2})$ is gelijk aan

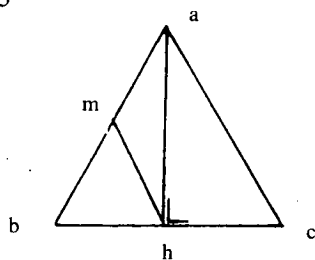
- A $\frac{5}{12}$ B $\frac{1}{2}$ C $\frac{11}{20}$ D $\frac{2}{3}$ E $\frac{7}{10}$

10 De 120 'woorden' die ontstaan door de 5 letters AHSME te permuteren worden alfabetisch gerangschikt, waarbij het geen belang heeft of het 'woord' een betekenis heeft of niet. De laatste letter van het 86^e woord uit de lijst is

- A A B H C S D M E E

11 In $\triangle abc$ is $|ab| = 13$, $|bc| = 14$ en $|ca| = 15$. Het punt m is het midden van de zijde $[ab]$ en h is het voetpunt van de loodlijn uit a op bc . De lengte van $[hm]$, nl. $|hm|$ is

- A 6 D 7,5
 B 6,5 E 8
 C 7



12 Jan scoorde 84 op de eerste ronde van de Vlaamse Wiskunde Olympiade. Met het quoteringsysteem van deze tweede ronde zou hij 93 behalen. Hoeveel vragen heeft Jan niet beantwoord? Ter herinnering. De regels voor de eerste ronde waren de volgende. Men vertrok met 30 punten, per goed

antwoord kreeg men 4 punten, per foutief antwoord werd 1 punt afgetrokken, en voor elke niet beantwoorde vraag werd geen enkel punt gegeven of afgetrokken. De regels voor de tweede ronde zijn de volgende. Men vertrekt van nul, per goed antwoord krijgt men 5 punten, voor elke niet beantwoorde vraag krijgt men 2 punten en voor elk foutief antwoord wordt geen enkel punt gegeven of afgetrokken.

- A 6 B 9 C 11 D 14
 E niet exakt te berekenen

13 Een parabool $y = ax^2 + bx + c$ heeft top $(4, 2)$. Als $(2, 0)$ op de parabool gelegen is, dan is abc gelijk aan

- A -12 B -6 C 0 D 6 E 12

14 Veronderstel dat pief, poef, paf specifieke lengtematen zijn. Veronderstel dat b piefs gelijk zijn aan c poefs, d pafs gelijk zijn aan e piefs, en f pafs gelijk zijn aan g meters.

Hoeveel poefs gaan er dan in een meter?

- A $\frac{bdg}{cef}$ B $\frac{cdf}{beg}$ C $\frac{cdg}{bef}$ D $\frac{cef}{bdg}$ E $\frac{ceg}{bdf}$

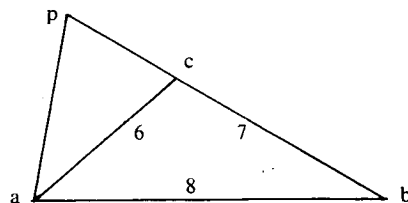
15 Een student moet het gemiddelde m van drie getallen x , y en z berekenen. Hij doet dit op de volgende manier. Eerst berekent hij het gemiddelde van x en y en nadien berekent hij het gemiddelde van dit resultaat met z . Als $x < y < z$, dan is het eindresultaat van de student

- A correct
 B altijd kleiner dan m
 C altijd groter dan m
 D soms kleiner dan m en soms gelijk aan m
 E soms groter dan m en soms gelijk aan m .

16 In $\triangle abc$ is $|ab| = 8$, $|bc| = 7$, $|ca| = 6$.

De zijde $[bc]$ wordt verlengd (zie figuur) en een punt p wordt - voorbij c - zó gekozen dat $\triangle pab$ gelijkvormig is met $\triangle pca$.

De lengte van $[pc]$, nl. $|pc|$ is



- A 7 B 8 C 9 D 10 E 11

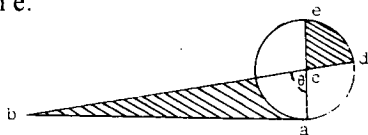
- 17 Een droogrek staat in een kamer en bevat 100 rode sokken, 80 groene sokken, 60 blauwe sokken en 40 zwarte sokken. Iemand neemt één voor één de sokken van de draad. Aangezien het echter donker is in de kamer, zijn de kleuren van de sokken onmogelijk te zien. Wat is het kleinste aantal sokken dat hij van de draad moet nemen om zeker te zijn dat hij ten minste 10 paar heeft gekozen? (Een paar sokken zijn elke twee sokken van dezelfde kleur. Uiteraard mag geen enkele sok in meer dan één paar geteld worden).
- A 21 B 23 C 24 D 30 E 50

- 18 Een vlak snijdt een rechte omwentelingscilinder met straal 1 volgens een ellips. Als de grote as van de ellips 50% langer is dan de kleine as, dan is de lengte van de grote as
- A 1 B $\frac{3}{2}$ C 2 D $\frac{9}{4}$ E 3

- 19 Een park heeft de vorm van een regelmatige zes-hoek waarvan de lengte van de zijden gelijk is aan 2 km. Annie maakt een wandeling van 5 km langs de omtrek, vertrekkend van een hoekpunt. Hoeveel kilometers (in rechte lijn) is ze dan van haar start-plaats verwijderd?
- A $\sqrt{13}$ B $\sqrt{14}$ C $\sqrt{15}$
D $\sqrt{16}$ E $\sqrt{17}$

- 20 Veronderstel dat x en y omgekeerd evenredig zijn en positief. Als x met $p\%$ toeneemt dan zal y afnemen met
- A $p\%$ B $\frac{p}{1+p}\%$ C $\frac{100}{p}\%$ D $\frac{p}{100+p}\%$
E $\frac{100p}{100+p}\%$

- 21 In de tekening hieronder wordt θ gemeten in radia-len. Het punt c is het middelpunt van de cirkel en ab is de raaklijn in a aan deze cirkel. De punten b, c en d liggen op één rechte evenals de punten a, c en e .



In de onderstelling dat $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ zijn de oppervlak-ten van de gearceerde gebieden gelijk als en slechts als

- A $\tan \theta = \theta$ B $\tan \theta = 2\theta$ C $\tan \theta = 4\theta$
D $\tan 2\theta = \theta$ E $\tan \frac{\theta}{2} = \theta$

- 22 Uit de verzameling $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ worden zes verschillende getallen genomen. De kans dat onder de gekozen getallen het tweede kleinste getal 3 is, wordt gegeven door
- A $\frac{1}{60}$ B $\frac{1}{6}$ C $\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{2}$ E geen van de vorige

- 23 Beschouw $N = 69^5 + 5 \cdot 69^4 + 10 \cdot 69^3 + 10 \cdot 69^2 + 5 \cdot 69 + 1$. Hoeveel natuurlijke getallen zijn deler van N ?
- A 3 B 5 C 69 D 125 E 216

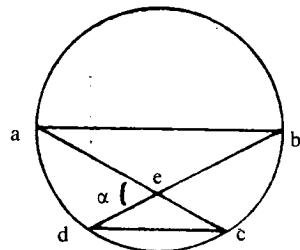
- 24 Veronderstel dat $p(x) = x^2 + bx + c$, met b en c gehele getallen. Als $p(x)$ een deler is van $x^4 + 6x^2 + 25$ en van $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$, dan is $p(1)$ gelijk aan
- A 0 B 1 C 2 D 4 E 8

- 25 Men noteert door $[x]$ het grootste geheel getal dat kleiner is dan of gelijk is aan x . Dan is $\sum_{N=1}^{1024} [\log_2 N] =$
- A 8192 B 8204 C 9218 D $[\log_2(1024!)]$
E geen van de vorige

- 26 Men wenst een rechthoekige driehoek abc te con-strueren (in het vlak) zo dat de rechthoekszijden $[ab]$ en $[ac]$ resp. evenwijdig zijn met de X -as en de Y -as van een georthonormeed assenstelsel. Bovendien wordt vereist dat de zwaartelijnen op die rechthoekszijden gelegen zijn op de rechten met vergelijking $y = 3x + 1$ en $y = mx + 2$. Hoeveel verschillende waarden kan de konstante m aannemen zodanig dat de driehoek bestaat?
- A 0 B 1 C 2 D 3 E meer dan 3

- 27 In bijgaande figuur is $[ab]$ de middellijn van een cirkel, $[cd]$ een koorde evenwijdig aan ab , e het

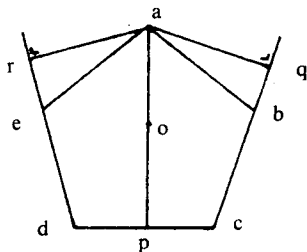
- A $\cos \alpha$
B $\sin \alpha$
C $\cos^2 \alpha$
D $\sin^2 \alpha$
E $1 - \sin \alpha$



snijpunt van de lijnstukken $[ac]$ en $[bd]$, $\alpha = \widehat{acd}$.
De verhouding van de oppervlakten van $\triangle cde$ en van $\triangle abe$ is

28 $abcde$ is een regelmatige vijfhoek.

ap , aq en ar zijn de loodlijnen uit a op resp $[cd]$ en de verlengden van $[cb]$ en $[de]$ (zie figuur). Als O het middelpunt is van de omschreven cirkel van $abcde$ en als $|op| = 1$ dan is $|ap| + |aq| + |ar|$ gelijk aan



A 3 B $1 + \sqrt{5}$ C 4 D $2 + \sqrt{5}$ E 5

29 Twee hoogtelijnen van een ongelijkzijdige driehoek abc hebben een lengte 4 en 12. Als de lengte van de derde hoogtelijn eveneens een natuurlijk getal is, wat is dan de grootste waarde die deze lengte kan aannemen?

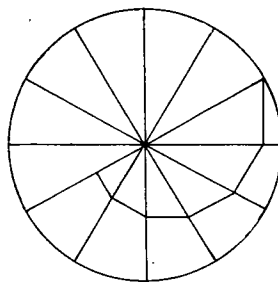
A 4 B 5 C 6 D 7 E geen van de vorige

30 Het aantal reële oplossingen (x, y, z, w) van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2y = x + \frac{17}{x} \\ 2z = y + \frac{17}{y} \\ 2w = z + \frac{17}{z} \\ 2x = w + \frac{17}{w} \end{cases} \text{ is}$$

A 1 B 2 C 4 D 8 E 16

deze loodlijnen in functie van R .



2 Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt

$$(1.2.3. \dots .n) n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n$$

3 Gegeven is een rij getallen (a_k) gedefinieerd door

$$a_0 = 0, a_{k+1} = 3a_k + 1 \text{ met } k \text{ in } \mathbb{N}$$

Toon aan dat a_{155} deelbaar is door 11.

4 Om een knikker met straal 1 cm in een kubus te stoppen, is het duidelijk dat deze kubus een ribbe van minstens 2 cm moet hebben. Hoe groot moet minimaal de ribbe van een kubus zijn om er 2 knikkers met straal 1 cm in te krijgen? (Met bewijs van minimaliteit.)

Drie deelnemers behaalden een eerste prijs met resp. 95%, 92,5% en 88,8%. De organisatoren hopen dat deze drie Vlaanderen zullen vertegenwoordigen bij de Internationale Olympiade. Drie behaalden een tweede prijs met 86,3, 86,3 en 85%.

Finale, woensdag 16 april

1 Men verdeelt een cirkel met straal R in 12 gelijke delen en men verbindt de deelpunten met het middelpunt. Uit één van de deelpunten laat men de loodlijn neer op de volgende straal; vanuit het voetpunt van die loodlijn laat men opnieuw de loodlijn neer op de daaropvolgende straal en men blijft dit proces oneindig verder doorzetten.

Bereken de limiet van de som van de lengten van

De waarheid omtrent Bourbaki

Hans Freudenthal

De waarheid omtrent Bourbaki wordt door Jean Dieudonné in een brief aan de Redactie van *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* 7 (1986), 221-222 onthuld.

Bourbaki ontsprong aan het brein van André Weil, die in Aligarh met de Indiase differentiaalmeetkundige Kosambi bevriend was geraakt. Deze Kosambi had ruzie met een wiskunde-collega, wiens naam Dieudonné niet heeft onthouden.

Weil stelde Kosambi voor zijn tegenstander te vernederen door in een artikel een zekere ontdekking toe te dichten aan een ad hoc verzonden wiskundige, die de ander over 't hoofd zou hebben gezien. Kosambis artikel is inderdaad verschenen: 'On a generalization of the second theorem of Bourbaki' in *Bull. Acad. Sci. Allahabad* 1 (1931/2), 145-147, dat trouwens door onze J. A. Schouten in het *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* is besproken.

Kosambi schrijft daar (ik vertaal):

Ik wist niet dat een weinig bekend Russisch auteur, D. Bourbaki [dus nog geen Nicolas], die tijdens de revolutie aan een acute loodvergiftiging stierf, een deel van deze resultaten eerder had verkregen en een weg had aangeduid om ze uit te breiden. Ik treed niet in bijzonderheden aangezien een uitstekende samenvatting en kritiek kortgeleden door L. Lusternik en L. Schnirelmann gepubliceerd is. Het zal wel aan iedere meetkundige die het laatstgenoemde artikel kent, duidelijk zijn dat ik niets anders heb gedaan dan van alle drie 'Vysokobiagodaren' axioma's af te zien.

Opmerking:

Het aangehaalde Russische woord betekent 'diep

erkentelijk'; het wordt wel in briefonderschriften gebruikt.

De voetnoot 2 van Kosambi luidt *Topologicheskije Metody v Variatsionnykh Zadachakh* [d.w.z. Topologische Methoden in Variatierekeningsproblemen, Math-mech. Forschungsinstitut, Moskau, 1930, pp. 69-73]. Ik ben Dr. A. Weil erkentelijk voor dit belangrijke citaat en voor het mogen beschikken over zijn overdrukje. Schnirelmanns onderzoek zou binnenkort in het Duits worden gepubliceerd, waarmee zonder twijfel een lacune in de beschikbare literatuur gevuld zou worden. Het is ook te wensen dat Bourbakis postuum oeuvre, dat op 't ogenblik bij de Leningradse Akademie berust, in 't geheel wordt gepubliceerd. Volgens inofficiële berichten zou hij na de Miakhii Znak affaire samen met alle andere leden van de 'Russko-Angliskii Slovar' zijn gefusilleerd.

Opmerking:

Miakhii Znak (zacht teken) is een der laatste letters van het Russisch alfabet; hij geeft aan dat de voorafgaande medeklinker gemouilleerd wordt. In transcripties wordt hij door een zwevend komma weergegeven. *Russko-Angliskii Slovar* betekent Russisch-Engels woordenboek. *Slovar* hoort op 't eind een zacht teken te hebben, dus *slovar*.

Voor mij is dit het zoveelste verhaal over de oorsprong van het pseudoniem Bourbaki. Een ander verhaal – trouwens niet noodzakelijk in strijd met dit – is dat André Weil in een seminar-lezing een aantal stellingen, in plaats van ze te nummeren, van de namen van militairen zoals Hannibal, Caesar, Napoleon en Bourbaki zou hebben voorzien.

Over de auteur:

Hans Freudenthal is oud-hoogleraar van de R.U. te Utrecht.

Grepen uit de geschiedenis van het negatieve getal

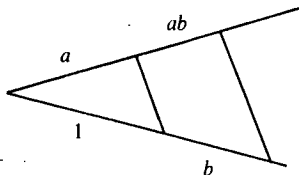
P. G. J. Vredenduin

Getallen hebben een dubbele functie. Ze dienen om hoeveelheden te tellen en om grootheden te meten. Sinds de Griekse oudheid worden meetgetallen voorgesteld door geometrische figuren of ook wel ermee vereenzelvigd. Een getal werd voorgesteld door een lijnstuk, het produkt van twee getallen was een oppervlakte (rechthoek), het produkt van drie getallen een inhoud. Men kan rustig zeggen dat deze geometrisering van de algebra zo'n 2000 jaar heeft standgehouden.

Het spreekt wel vanzelf dat in een dergelijke beschouwingswijze voor het negatieve getal eigenlijk geen plaats is. Toch steekt het telkens weer zijn kop op. Het wordt dan veelal voorzien van adjectieven die minder vliend klinken, zoals fictief of onwaar. Deze zijn van gelijke strekking als het adjectief imaginair in imaginaire getallen.

1 Descartes

Een wezenlijke stap vooruit is gedaan door Descartes (1637). Hij koos een lijnstuk dat hij de eenheid noemde. Daardoor kan hij bewerkstelligen dat het produkt van twee getallen niet een rechthoek, maar weer een lijnstuk is. Immers $1 : a = b : ab$



Figuur 1

en in de figuur ziet men nu hoe ab weer een lijnstuk is. Ook het quotiënt van twee getallen (lijnstukken) is weer een lijnstuk, want $b : a = 1 : \frac{a}{b}$.

Zo wordt de gehele algebra omgevormd tot een rekenen met lijnstukken. Dit heeft vele voordelen. Men kan een getal optellen bij een produkt ($a + bc$) en is niet verplicht met homogene vormen te werken. Ook kan men over vierde machten praten zonder met zijn handen in het geometrische haar te zitten.

Descartes houdt zich uitvoerig bezig met het oplossen van vergelijkingen. Zo geeft hij een methode voor het oplossen van

$$x^3 = px + q.$$

Voor zijn voorgangers zou dit een zinloze opgave geweest zijn. Immers p , q en x stellen lijnstukken voor, px volgens hen dus een oppervlakte en x^3 een inhoud. En een inhoud kan onmogelijk gelijk zijn aan een oppervlakte plus een lijnstuk. Zij waren verplicht de vergelijking bijv. zo te schrijven:

$$x^3 = p^2x + q^3.$$

Bij Descartes daarentegen stellen x^3 , px en q alle drie lijnstukken voor.

Toch heeft Descartes nog wel een handicap. De letters p en q stellen lijnstukken voor, dus positieve getallen. Hij kan dus niet $x^3 = 2x - 3$ oplossen door de algemene oplossing van $x^3 = px + q$ te gebruiken en hierin te substitueren $p = 2$ en $q = -3$. Wil hij alle mogelijkheden bestrijken, dan moet hij naast de algemene oplossing van $x^3 = px + q$ ook oplossingen geven voor $x^3 = px - q$, $x^3 = -px + q$ en $x^3 = -px - q$.

En voor elk van deze gevallen moet hij een nieuwe figuur ontwerpen.

Met de onbekende x ligt het moeilijker. De wortels van $(x - 2)(x - 3) = 0$, dus van $x^2 - 5x + 6 = 0$, zijn 2 en 3. Maar, zegt hij,

souvent il arrive, que quelques unes de ces racines sont fausses, ou moindre que rien, comme si on suppose que x désigne le défaut d'une quantité.

Zo heeft $x + 5 = 0$ een racine fausse 5 (een onware wortel 5) en heeft de vergelijking $x^3 - 19x + 30 = 0$ als wortels 2, 3 en een racine fausse 5.

Hoe komen deze racines fausses in de figuur te voorschijn? Om dit te demonstreren, kan ik het beste een concreet voorbeeld reproduceren.

(Het verband tussen het probleem van de trisectie en deze vergelijking is interessant, maar zou hier de gedachtengang te veel onderbreken. Belangstellenden vinden het in een toegift aan het eind van dit artikel.)

In deze figuur is

$$CD = \frac{3}{2}, DE \perp cd, DE = \frac{1}{2}q \text{ en } CA = \frac{1}{2}.$$

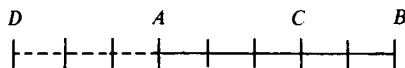
Deze drie lijnstukken zijn de wortels van $x^3 = 3x - q$. Van deze drie wortels zijn gk en GK ware wortels, maar FL is een racine fausse. De ware en de onware wortels vindt men dus rechts resp. links van de lijn AL .

Men ziet dat Descartes nog niet werkt met de getallenlijn, waarvan de punten corresponderen met getallen die ook negatief mogen zijn. Ook het zg. cartesiaanse assenstelsel is dan ook niet van hem afkomstig.

De eerste expliciete beschrijving van de getallenlijn vinden we bij John Wallis (1673).

But it is also Impossible, that any Quantity can be *Negative*. Since that it is not possible that any *Magnitude* can be *Less than Nothing*, or any *Number* Fewer than *None*.

As for instance: Supposing a man to have advanced or moved forward, (from A to B,) 5 Yards; and then to retreat (from B to C) 2 Yards: If it be asked, how much he had Advanced (upon the whole march) when at C? or how many Yards he is now Forwarder than when he was at A? I find (by Subtracting 2 from 5,) that he is Advanced 3 Yards. (Because $+5 - 2 = +3$.)



Which in propriety of Speech, cannot be, (since there cannot be less than nothing.) And therefore as to the Line AB *Forward*, the case is Impossible.

And thus to say, he is *Advanced* - 3 Yards; is but what we should say (in ordinary form of Speech), he is *Retreated* 3 Yards: or he wants 3 Yards of being so Forward as he was at A.

So that $+3$, signifies 3 Yards Forward; and -3 , signifies 3 Yards Backward: But still in the same Streight Line. And each designs one Single Point: And but one.

Negatieve grootheden, die minder dan niets zijn, zijn onmogelijk. Evenals negatieve getallen, die kleiner dan 0 zijn.

332 *Euclides 61, 10*

Een volgende stap, die nieuw is, is dat de getallen +3 en -3 toegevoegd worden aan punten van een lijn. De getallen worden dus niet meer voorgesteld door lijnstukken. Bij elk punt van de 'getallenlijn' staat een getal.

Toch is het Wallis nog niet geheel duidelijk. Geen getal kan kleiner dan 0 zijn. Zijn de negatieve getallen nu toch kleiner dan 0?

Neem twee positieve getallen, bijv. 3 en 4. Op de getallenlijn ligt 4 rechts van 3. Dan is $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$. Door extrapolatie van dit resultaat over willekeurige getallen vindt hij nu

$\dots \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \frac{1}{-3} < \frac{1}{-4} \dots$

Conclusie: de negatieve getallen zijn groter dan oneindig!

Te aardig om niet te vermelden, hoewel het buiten het onderwerp van dit artikel valt, is het vervolg op bovenstaand verhaal van Wallis. Met oppervlakten kun je hetzelfde doen. Onderstel dat je op de zee 900 acre land wint, maar dat de zee weer 2500 acre terugneemt, wat is dan het totale resultaat? Je hebt 1600 acre land verloren. Maar je kunt ook zeggen dat je -1600 acre gewonnen hebt. Denk je dit denkbeeldige stuk als een vierkant. De zijde van dit vierkant is dan $\sqrt{-1600}$. Net zoals de 'onmogelijke' negatieve getallen krijgen zo de even 'onmogelijke' 'imaginary numbers' een interpretatie.

3 Newton

Newton beheerste het werken met negatieve getallen volkomen. Hij werd niet meer gehinderd door de noodzaak met getallen een meetkundige voorstelling te verbinden. Bij Descartes liepen meetkunde en algebra in elkaar over; bij Newton waren het gescheiden disciplines.

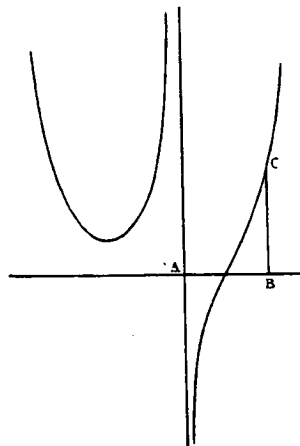
In zijn *Arithmetica universalis* (geschreven omstreeks 1675) ontwikkelt hij een theorie betreffende het verband tussen de coëfficiënten van een vergelijking en symmetrische functies van de wortels. Hij laat zien dat in een vergelijking als

$$x^7 + px^6 + qx^5 + \dots = 0$$

de 'known quantity' p 'if its sign be changed' gelijk is aan de som van de wortels, enz. De lettercoëfficiënten stellen dus getallen voor die ook negatief mogen zijn. Om over te gaan op een concreet voorbeeld substitueert hij voor deze letters dan ook

zowel positieve als negatieve getallen.

Een ander werk van Newton, de *Enumeratio linearum tertii ordinis* (geschreven omstreeks 1680), behandelt een stuk meetkunde, namelijk de classificatie van de krommen van de derde graad. Newton werkt hier met een echt cartesiaans assenstelsel, zoals men in onderstaande figuur kan zien.



Figuur 3

Hij zegt dat hier 'the equation expressing the relation of the ordinate BC and the abscissa AB always assumes the form

$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$ '. Kennelijk kunnen x en y hier zowel positief als negatief zijn.

Het werk van Newton is een spectaculaire stap voorwaarts in de ontwikkeling van de wiskunde.

4 De achttiende eeuw

Toch zijn we er nog lang niet. Omtrent de betekenis van negatieve getallen heersten nog lange tijd verwarde denkbeelden. En ook de fundering van de bewerkingen ermee baarde kopzorgen.

Wiskundige begrippen vonden hun oorsprong in deze tijd nog uitsluitend in de werkelijkheid. Ook het negatieve getal tracht men vanuit de werkelijkheid te begrijpen. Gevolg daarvan is dat men dan ook de regels betreffende het rekenen met negatieve getallen uit de werkelijkheid wil afleiden. Dat lukte vrij aardig, maar bij het vermenigvuldigen van twee negatieve getallen stuitte men op onoverkomelijke moeilijkheden. Ik hoor u al protesteren. Dat is toch

niet zo moeilijk! Als een lokomotief over een weg naar 'links' gaat met een snelheid van 60 km/h, waar was hij dan 3 uur geleden? Men kan de lokomotief door een trekschuit vervangen en de snelheid wat matigen, maar ook dan nog kwamen onze voorouders niet op het idee de vermenigvuldiging van twee negatieve getallen zo toe te lichten. Hoe dan wel? De enige mogelijkheid was voor hen wetmatigheden die voor positieve getallen gelden, te extrapoleren en ook voor negatieve geldig te verklaren. Enkele pogingen in deze richting laat ik de revue passeren.

Euler zegt:

Wir wollen erstlich $-a$ mit 3 oder $+3$ multipliciren; weil nun $-a$ als eine Schuld angesehen werden kann, so ist offenbar, dasz wann diese Schuld 3mal genommen wird, dieselbe auch 3mal grösser werden müsse, folglich wird das gesuchte Product $-3a$ sein.

En dan even verder;

Nun ist also noch dieser Fall zu bestimmen übrig: nämlich, wann $-$ mit $-$ multiplicirt wird, oder $-a$ mit $-b$. Hierbey ist zuerst klar, dasz das Product in Ansehung der Buchstaben heissen werde, ab ; ob aber das Zeichen $+$ oder $-$ dafür zu setzen sey, ist noch ungewisz, so viel aber ist gewis, dasz es entweder das eine, oder das andere seyn musz.

Nun aber, sage ich, kann es nicht das Zeichen $-$ seyn? Dann $-a$ mit $+b$ mult. giebt $-ab$, und also $-a$ mit $-b$ mult. kann nicht eben das geben, was $-a$ mit $+b$ giebt, sondern es musz das Gegentheil herauskommen, welches nämlich heiszt $+$.

De extrapolatie is duidelijk. Voor positieve getallen geldt $q \neq r$ impliceert $pq \neq pr$.

Omdat $-b \neq +b$, is dan ook

$$-a \cdot -b \neq -a \cdot +b.$$

Saunderson (1740) doet het weer anders. 3, 0 en -3 vormen een rekenkundige rij; $-4 \cdot 3$, $-4 \cdot 0$ en $-4 \cdot -3$ dus ook. Omdat $-4 \cdot 3 = -12$ en $-4 \cdot 0 = 0$, is dus $-4 \cdot -3 = 12$.

De extrapolatie is hier evident.

Da Cunha (1790) zegt: als de termen van het eerste lid van een evenredigheid hetzelfde (verschillend) teken hebben, dan hebben ook de termen van het tweede lid hetzelfde (verschillend) teken. Nu is

$$1 : -a = -b : (-a)(-b).$$

In het linker lid hebben 1 en $-a$ verschillend teken. Verder is $-b$ negatief. Dus is $(-a)(-b)$ positief. Waaruit we zien dat $(-a)(-b) = +ab$.

Clairaut (1740):

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd.$$

Stel $a = 0$ en $c = 0$ en men vindt: $-b \cdot -d = +bd$.

Laplace (1795):

$$-a(b - b) = 0, -a \cdot b = -ab,$$

dus $-a \cdot -b = ab$.

Eveneens een generalisatie van de distributieve eigenschap.

Niet iedereen was door deze redeneringen overtuigd. Dat minder dan niets vermenigvuldigd met minder dan niets, meer dan niets zou opleveren, ondervond men als paradoxaal.

Ludlam (1809) geeft de extrapol eerders hun streken thuis. Hij zegt:

$$-1 : 1 = 1 : -1.$$

Maar -1 is kleiner dan 0 en 1 groter dan 0, dus stellig -1 kleiner dan 1. We weten dat kleiner : groter = kleiner : groter.

Dus kan $-1 : 1 = 1 : -1$ niet juist zijn.

Geen wonder dat de negatieve getallen felle bestrijders hadden. Vooral in Engeland waren velen ertegen gekant. Maserer (1758) zegt dat het niet mogelijk is een groter getal van een kleiner af te trekken. Nog in 1796 zegt Friend dat het niet mogelijk is iets van niets af te trekken en dat de bovengenoemde argumentatie van Clairaut dus onjuist is.

Maserer verzucht in zijn dissertatie (1758), dat het hoog tijd wordt de negatieve getallen af te schaffen. Eerst dan wordt algebra weer 'a science no less simple, clear, and capable of demonstration, than geometry'.

Gauss schreef in 1831 (geciteerd uit Tobias Danzig, *Number*):

But just as in general arithmetic no one would hesitate to admit fractions, although there are so many countable things where a fraction has no meaning, so we ought not deny to negative numbers the rights accorded to positive, simply because innumerable things admit of no opposite. The reality of negative numbers is sufficiently justified since in innumerable other cases they find an adequate interpretation.

Gauss zet hier helder uiteen waar het kernpunt lag van de strijd om het al of niet gerechtvaardigd zijn van negatieve getallen. Verder ziet men dat volgens Gauss de strijd nu wel definitief uitgevochten is.

5 Doorbraak naar de moderne tijd

In het begin van de 19e eeuw rekende men met positieve getallen, met negatieve getallen en met complexe getallen. Dat waren totaal verschillende dingen, maar de rekenregels die men toepaste, waren voor al deze getalsoorten dezelfde.

Zo kwam men op het idee zich, in plaats van op de getalsoorten, op de rekenregels te concentreren. Dit leidde tot wat men noemde 'symbolic algebra'.

In deze wetenschap had men het over dingen waarvan de aard in het midden gelaten werd. Op deze dingen werkten twee operaties, $+$ en $\cdot$, die uit elk paar objecten weer een object deden ontstaan. Omdat de aard van de objecten in het midden gelaten werd, had het geen zin aan deze operaties een betekenis toe te kennen. Ook deze werd in het midden gelaten. Nu werden een aantal eigenschappen van de operaties $+$ en $\cdot$ als uitgangspunt aanvaard, zoals:

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

als $a + b = a + c$, dan is $b = c$.

Uitgaande van deze eigenschappen werden nieuwe eigenschappen afgeleid. De symbolische algebra was dus een deductieve wetenschap gebaseerd op axioma's.

Dit deductieve systeem krijgt eerst inhoud als men aan de objecten inhoud geeft. Dat deed men en deze inhoud bestond uit de verschillende soorten getallen.

Eigenlijk is men niet veel opgeschoten. Men heeft zijn gedachten iets beter geordend en het extrapolatieprincipe voor legaal verklaard.

De eerste die deze symbolische algebra ontwikkeld heeft, is de Engelsman John Peacock (omstreeks 1840).

Deze opzet is opnieuw uitgewerkt en aanmerkelijk verscherpt door Hermann Hankel (1867). Als sluitstuk op dit overzicht wil ik zijn betoog weergeven. Hij gaat uit van de volgende axioma's.

$$A1 \text{ Als } a + b = a + b', \text{ dan is } b = b'.$$

$$A2 \text{ Als } a + b = a' + b, \text{ dan is } a = a'.$$

$$A3 \text{ } a + (b + c) = (a + b) + c.$$

$$A4 \text{ } (a - b) + b = a.$$

Nu onderstelt hij dat de operatie $+$ een rechter neutraal element heeft. Hij bewijst dat dit element

uniek is (A1) en dat het tevens linker neutraal element is (A3, A1). Hij noteert dit neutrale element 0.

$$A5 \text{ } a(bc) = (ab)c.$$

$$A6 \text{ } \frac{a}{b} \cdot b = a.$$

$$A7 \text{ } (a + b)c = ac + bc.$$

$$A8 \text{ } a(b + c) = ab + ac.$$

$$A9 \text{ } a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Nu geldt:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd \quad (A7, A8)$$

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd \quad (A8, A7)$$

$$ac + ad + bc + bd = ac + bc + ad + bd$$

$$ad + bc = bc + ad \quad (A1, A2)$$

Hankel postuleert dat ook de operatie $\cdot$ een rechter neutraal element heeft, substitueert dit voor d en voor c , en vindt:

$$E1 \text{ } a + b = b + a.$$

Waarmee bewezen is dat voor $+$ de commutatieve eigenschap geldt.

Verder vinden we nu:

$$(0 - a) + a = 0 \quad (A4)$$

Voor $0 - a$ schrijft Hankel kort: $-a$. Dan is

$$E2 \text{ } (-a) + a = 0$$

$$E3 \text{ } a + (-a) = 0 \quad (E1)$$

$$(-a) + (-(-a)) = 0 \quad (\text{substitutie van } -a \text{ voor } a)$$

$$E4 \text{ } -(-a) = a \quad (E2, A1)$$

Nu kunnen we bewijzen dat $(-a)(-b) = ab$.

$$(a + (-a))b = ab + (-a)b \quad (A7)$$

$$(a + (-a))b = 0 \quad (A9)$$

$$ab + (-a)b = 0$$

$$E5 \text{ } (-a)b = -(ab) \quad (E3, A1)$$

$$(-a)(b + (-b)) = (-a)b + (-a)(-b) = 0 \quad (A8, A9)$$

$$(-a)(-b) = -((-a)b) \quad (E3, A1)$$

$$= -(-(ab)) \quad (E5)$$

$$= ab \quad (E4)$$

De zo ontwikkelde wetenschap noemt Hankel *arithmetica universalis*.

Hankel begaat nu niet de fout van de arithmetica universalis over te schakelen op de in de werkelijkheid gefundeerde getallen, zoals Peacock c.s. deden. Integendeel, hij scheidt zelf getallensystemen die aan de axioma's van de arithmetica universalis voldoen.

Hij gaat uit daartoe van het teken 1 en stelt $1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 1 = 4, \dots$

Hij geeft de volgende recursieve definities van optellen en vermenigvuldigen:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

$$a \cdot 1 = a \text{ en } a(b + 1) = ab + a.$$

Dan bewijst hij met behulp van volledige inductie dat aan de axioma's voldaan is.

Alleen A4 gooit wat roet in het eten. Niet voor elke a en b geldt dat er een getal is dat bij b opgeteld a als som levert.

Daarom breidt hij zijn getalsysteem uit met nieuwe getallen, die hij $a - b$ schrijft en die de eigenschap hebben aan A4 te voldoen.

Het neutrale element van de optelling wordt nu $a - a$. Schrijven we de nieuwe getallen $-(b - a)$ i.p.v. $a - b$, dan hebben we ons getalsysteem dus uitgebreid met de tekens $-1, -2, -3, \dots$

Met deze nieuwe getallen moeten we weer leren rekenen. Dat is niet moeilijk. We definiëren optelling en vermenigvuldiging zo dat dezelfde wetten die voor de oude getallen golden ook voor de nieuwe gelden. Dan zal ook voor deze nieuwe getallen gelden bijv. $-a \cdot b = -(ab)$, $a \cdot (-b) = -(ab)$ en $(-a)(-b) = ab$.

Hankel merkt op dat het een misvatting is, waartegen men niet scherp genoeg stelling kan nemen, dat deze gelijkheden bewezen kunnen worden. Ze berusten op conventies die als doel hebben in overeenstemming te blijven met het formalisme van de arithmetica universalis.

Hankel gaat op de ingeslagen weg voort met uitbreiden van het getalsysteem. We zullen hem daarbij niet volgen; ons doel is bereikt.

Ten slotte de getallen uit de werkelijkheid.

Alle totnogtoe ingevoerde getallen noemt Hankel formale Zahlen. Hij stelt daartegenover de getallen die we uit de praktijk kennen. Daarover zegt hij:

Die (actuelle) Zahl is der begriffliche Ausdruck der gegenseitigen Beziehung zweier Objecte, soweit dieselbe quantitativen Messungen zugänglich sind.

Wat is nu het verband tussen de formele en de actuele getallen? De formele getallen zijn scheppingen van de geest. Of er in de realiteit getallen mee corresponderen, is de vraag. Wat betreft de hierboven ingevoerde formele getallen, is het antwoord

bevestigend. Er zijn in de werkelijkheid getallen die eronder 'gesubsumeerd' kunnen worden, zoals Hankel het uitdrukt.

Omdat de formele getallen de functie hebben misschien geactualiseerd te kunnen worden, noemt Hankel ze ook wel potentiële getallen.

Nog twee kanttekeningen.

- 1 We hebben hierboven gezien dat het getalbegrip op zodanige wijze uitgebreid wordt, dat voor het nieuwe begrip dezelfde wetten gelden als voor het oude. Hankel noemt deze methode *Princip der Permanenz der formalen Gesetze*.

Hij merkt op dat dit een algemeen methodologisch beginsel is, dat in de wiskunde vaker toegepast wordt. Als voorbeelden geeft hij de definities van machten met negatieve en gebroken exponenten en de definitie van $n!$ voorgeval n geen natuurlijk getal is.

Peacock formuleerde een soortgelijk principe, maar maakte daar meteen misbruik van. Uit de gelijkheid

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots,$$

waarvan de geldigheid voor $0 < r < 1$ bekend is, leidde hij af, dat $\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$ en dat voor bijv. $r = 2$ geldt:

$$\frac{1}{-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots,$$

zodat een negatief getal gelijk blijkt aan een getal groter dan oneindig. Had Wallis dan toch gelijk?

- 2 Het zal de lezer zonder twijfel opgevallen zijn, dat in de rij axioma's van de arithmetica universalis de commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging ontbreekt. Deze wordt ook niet, zoals de commutatieve eigenschap van de optelling, later bewezen, maar hij ontbreekt echt. Daar moet natuurlijk iets achter schuilen.

In 1843 schiep Hamilton zijn quaternionen. Dat zijn ook dingen waarmee gerekend kon worden. En zelfs zo dat alle gangbare eigenschappen van de rekenkunde ervoor gelden, echter met één uitzondering: de vermenigvuldiging van quaternionen is niet commutatief.

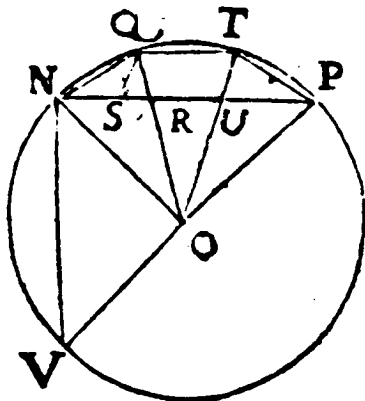
Het ligt voor de hand dat, als je wetenschappelijke horizon niet verder reikt dan negatieve, irrationale en complexe getallen en quaternionen, je de arithmetica universalis daarbij aanpast en de commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging er niet in opneemt.

We zijn er nog niet natuurlijk. Maar door het voortreffelijke werk van Hankel ligt de weg naar de moderne algebra nu voor ons open.

(Ik geef Hankel iets te veel eer. In één adem met hem behoor ik Grassmann te noemen. Maar het werk van Grassmann is veel moeilijker toegankelijk en ik ken het dan ook niet. Hankel zelf vermeldt dat de inductieve fundering van de natuurlijke getallen van Grassmann afkomstig is.)

6 Toegift

Gevraagd wordt de hoek NOP in drie gelijke delen te verdelen.



Figuur 1

Kies de straal van de cirkel als eenheid. Onderstel dat

$\angle NOQ = \angle QOT = \angle TOP$, $NP = q$ en $NQ = QT = TP = x$. Trek $QS \parallel TO$.

Nu is $\triangle ONQ \sim \triangle NQR \sim \triangle QRS$. Wegens $ON = 1$ en $NQ = x$, is dan $QR = x^2$ en $RS = x^3$. Verder is

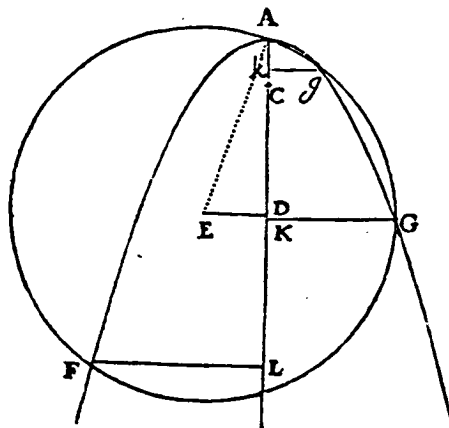
$NP = NR + SU + UP - SR$

dus

$$q = x + x + x - x^3,$$

$$x^3 = 3x - q.$$

Zoals we reeds zagen, staat de oplossing van deze vergelijking in onderstaande figuur.



Figuur 2

In deze figuur is $gk = x$, dus is gk het gezochte lijnstuk NQ .

We kunnen echter in figuur 1 ook de grote boog NP in drie gelijke delen verdelen. Een van deze delen is dan NV . NV is gelijk aan het lijnstuk GK uit figuur 2.

Ten slotte is $FL = gk + GK$.

Literatuur (geordend naar de hoofdstukken)

- 1 René Descartes, *La Geometrie*, The Open Court Publ. Co., La Salle, Illinois, 1952, p. 297-298, p. 372, p. 396.
 - 2 D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, Vol. One, Dover, New York, 1929, p. 46-54.
 - 3 D. J. Struik, *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1969, p. 93-99, p. 168-178.
 - 4 M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Band 4, Leipzig, 1908, p. 79-87.
 - 5 Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972, hoofdstuk 32.
- Dr. Hermann Hankel, *Theorie der Complexen Zahlensysteme*, Leopold Voss, Leipzig, 1867, p. 1-41.

Boekbesprekingen

Revis in ontwikkeling, lesgeven aan heterogene groepen, SLO, Enschede 1985, 83 blz., f9,75.

Op verzoek van de SLO (Stichting Leerplan Ontwikkeling in Enschede) heb ik een boekje gemaakt over van alles wat er zo komt kijken, wanneer je op een 'gewone' school wilt gaan werken in heterogene groepen. We hebben daarmee bij mij op school goede ervaringen, die we willen doorgeven aan collega's, die over dit onderwerp eens wat meer willen weten. Kan het wel? Hoe doe je het? Hoe zit het met het niveau? Hoe kaart je het aan op je school? En nog vele andere vragen komen, soms meer impliciet, soms meer expliciet, aan bod.

Het boekje beschrijft de ontwikkeling die we in de sectie hebben doorgemaakt in de periode 1982-1985, waarin gefaseerd gewerkt is aan een overgang van homogene groepen naar heterogene klassen in de eerste brugklas. Het geheel wordt geplaatst binnen de context van onze school, een brede scholengemeenschap met opleidingen van LBO tot en met Atheneum. Ook wordt de rol van de SLO, die een belangrijke stimulans is geweest, belicht.

Verder worden de veranderingen puntsgewijs nader onder de loep genomen:

- veranderingen in de klas
- een nieuwe werkvorm
- veranderende leerstof
- heterogene groepen
- toetsen en beoordelen
- effecten binnen en buiten school.

Tot slot worden de factoren die gunstig hebben gewerkt nog eens samengevat en geef ik een aantal aanbevelingen die uit onze ervaringen naar voren komen.

Zo geeft het boekje een beeld van een manier waarop je heteroog onderwijs zou kunnen invoeren, op welke dingen je daarbij moet letten en wat voor winst het voor je onderwijs betekent.

Het boekje is geïllustreerd door Peter Meijboom en is te bestellen bij de SLO, afd. Verkoop à f9,75, tel. nr. 053-84 02 27.

Gerrit van den Heuvel

R. A. de Jong, *Wiskobas in methoden*, proefschrift, uitgegeven door de vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijscomputercentrum, Rijksuniversiteit Utrecht.

De ondertitel luidt 'Vernieuwing van reken/wiskundemethoden voor het Nederlandse basisonderwijs (1965-1985). Titel en ondertitel geven heel precies weer waarover deze studie gaat.

Wiskobas; wiskunde op de basisschool, was een afdeling van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO). Vanuit dit instituut heeft Wiskobas een uitermate belangrijke plaats

ingenomen in de innovatie van het reken/wiskundeonderwijs op de basisschool. Gezien het feit dat het IOWO een in de tijd gezien helaas vrij kort leven heeft gehad heeft de schrijver getracht te onderzoeken welke invloed Wiskobas uiteindelijk heeft gehad.

- 'Wat is de invloed geweest van Wiskobas op de inhoudelijke vormgeving van de reken/wiskundemethoden, afzonderlijk beschouwd, die in de periode 1965 tot 1985 een marktfunctie vervulden?
- Wat is de invloed geweest van Wiskobas op de ontwikkeling van de reken/wiskundemarkt in zijn totaliteit in de jaren 1965-1985?'

Voordat de schrijver zijn eigenlijke onderzoek gaat beschrijven geeft hij een uitvoerig overzicht van de historische context waarin Wiskobas heeft gewerkt. Hij beperkt zich niet tot de eigenlijke IOWO-tijd maar hij geeft tevens een overzicht van de tijd daarvoor en enige notities over activiteiten van 1981 tot heden.

De tijd van 1961-1971 kan gekenschetst worden als de tijd van de CMLW (Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde). Het IOWO, opgericht als werkinstituut van de CMLW, heeft in de periode van 1971-1981 zijn belangrijk vernieuwingswerk kunnen verrichten.

Voor de coördinatie van vele werkzaamheden op het gebied van (wiskunde-)onderwijsontwikkeling begon er in 1981 met de opheffing van het IOWO weer een nieuwe periode.

Tegen deze historische achtergrond schetst de schrijver de situatie rond schoolboeken voor het reken/wiskundeonderwijs. Na deze voortreffelijke presentatie van de hierboven samengevatte 'oriënteringsbasis' beschrijft de schrijver het door hem verrichte onderzoek. Allereerst gaat hij in op de opzet van het onderzoek en de ontwikkeling van het onderzoeksinstrument, vervolgens geeft hij een beschrijving van een aantal in de tijd opvolgende stromingen in het reken/wiskundeonderwijs is uitermate boeiend. De gegeven onderscheiding lijkt mij uiterst zinvol: traditioneel mechanisme (1965-1970), traditioneel mechanisme en enige import (1970-1975), opkomend realisme (1975-1980), realisme naast mechanisme (1980-1985).

Een en ander is uiteraard toegesneden op het reken/wiskundeonderwijs op de basisschool. Echter, ook voor het wiskundeonderwijs van het voortgezet onderwijs zijn in deze beschrijving vele trekken te herkennen.

Ook de schrijver trekt deze lijn door waar hij, uiteraard kort, ingaat op ontwikkelingen in het vwo (Hewet) en op komende ontwikkelingen in het havo. Ook de problematiek van het wiskundeonderwijs voor 12-16 jarigen wordt even aangestipt. Zo is deze studie meer geworden dan alleen een vastleggen van invloeden van een voorbij periode op het heden. Beschrijving van de nog niet ver achter ons liggende tijd kan het begrip voor het heden verhelderen. Ik geloof dat de schrijver erin geslaagd is om naast een exacte presentatie van zijn onderzoek dit meerdere in zijn werk te leggen. Daardoor wordt zijn proefschrift voor een veel bredere lezerskring dan geïnteresseerden in het reken/wiskundeonderwijs op de basisschool van belang.

Ook wiskundeleraars van het voortgezet onderwijs kan ik kennisneming van dit werk dan ook aanbevelen.

W. Kleijne

Wiskunde op de computer

Henk Nieland

Nieuwe mogelijkheden ook interessant voor industrie

De computer is geboren uit de wiskunde. Diezelfde computer brengt nu, volwassen geworden, bij zijn geestelijke vader een omwenteling teweeg. Door wiskunde op de computer te gaan bedrijven heeft dit vak er een nieuwe dimensie bij gekregen en wordt het praktischer dan ooit. Een vooraanstaande toepassing is de bouw van computermodellen ter vervanging van allerlei dure en soms zelfs anders onuitvoerbare experimenten, zoals betrouwbaarheidstests van bepaalde auto-onderdelen.

In Nederland wordt veel onderzoek in deze richting gedaan op het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) te Amsterdam. Dit instituut belichaamt in zijn naam al de verbinding tussen de vroegere wereldvreemde denker die genoeg had aan papier, potlood en een gummetje, en de moderne computerfreak die geheel tevreden is met een terminal en een snelle verbinding met een supercomputer. De industrie heeft de mogelijkheden van deze nieuwe soort wiskundigen inmiddels ook ontdekt. Op initiatief van prof. dr. M. Hazewinkel van het CWI werd najaar '85 in Amsterdam een internationaal congres georganiseerd over 'Wiskunde in de industrie'. Er zijn overigens nu al aanwijzingen dat de commercie het karakter van de wiskunde als 'zuiverste' van alle wetenschappen zal aantasten.

Soliton

Wiskundigen zijn gek op allerlei puzzeltjes. Voor

hen is dat de proeftuin waaruit al heel wat belangrijke ontdekkingen zijn voortgekomen. Toen in 1946 de eerste computer ten tonele verscheen besefte men direct dat er een prachtig stuk 'speelgoed' was bijgekomen. Enkele geleerden, waaronder de beroemde natuurkundige Enrico Fermi, kwamen op het idee deze computer eens een probleem te laten uitrekenen dat eenvoudig was te formuleren, maar toch voor een mens met potlood en papier praktisch onoplosbaar was.

Stel je trekt een gespannen snaar uit zijn evenwicht en laat dan los. De snaar gaat dan trillen in de 'grondtoon'. Wat gebeurt er nu als we aan de gewone elastische kracht van de snaar nog een kleine 'niet-lineaire' storing toevoegen? Dat probleem is niet meer met de hand uit te rekenen. De geleerden verwachtten indertijd dat de trillingen zich gelijkmatig over alle delen van de snaar zouden verspreiden. Maar dat pakte heel anders uit. De computer toonde namelijk aan dat na verloop van tijd de snaar vrijwel naar haar oorspronkelijke trillingswijze (de grondtoon) terugkeert. Het leek wel alsof bepaalde delen van het trillingspatroon zich niet door zulke storingen van de wijs lieten brengen. Die delen noemde men 'solitonen'. Wat begon als een computerspelletje heeft nu zowel theoretisch als praktisch grote betekenis gekregen. Het is de opmerkelijke stabiliteit van solitonen die vooral goud waard is. Toepassing bij de voortplanting van optische signalen in glasvezels is nu al zeer nabij. Ook spelen solitonen een sleutelrol in het ontwerp van een 'biocomputer' (overigens nog een toekomstdroom), die zal zijn opgebouwd uit grote organische moleculen.

Handelsreiziger

Het gebruik van de computer als een experimenteerruimte, een extra stuk laboratorium, heeft inmiddels een grote vlucht genomen. Het heeft de wiskunde bevrijd van de beperkingen van een 'theoretische' wetenschap en geeft inzicht in voorheen onvermoede verschijnselen. Vooral op het gebied van de modellenbouw is er sprake van een stroomversnelling. Het CWI doet aan deze ontwikkeling mee. Zo wordt daar thans de laatste hand gelegd aan de oplossing van een transportvraagstuk, waarbij theorie en praktijk hand in hand

gaan. Het gaat om een 'handelsreizigersprobleem': de meest efficiënte aflevering van goederen op een groot aantal plaatsen vanuit een of meer depots. Hiervan is alleen de eenvoudigste variant, nl. het vinden van de kortste rijroute voor een niet te groot aantal plaatsen, op de huidige computers oplosbaar. Zodra er praktische randvoorwaarden bijkomen, zoals beperkingen in de tijd van aflevering, is de computercapaciteit ontoereikend. Onderzoekers van het CWI hebben hier een mouw aan weten te passen door de sterke punten van de computer (snel rekenen) en van de mens (goed patronen herkennen) te combineren. Er werd een programma ontworpen, waarbij de planner op verschillende cruciale momenten met behulp van een grafisch beeldscherm kan beslissen over de volgende stap. Door deze 'interactieve' manier van werken hoeft de oplossing van het wiskundig model niet geheel aan de computer te worden overgelaten. Daardoor komen praktische situaties nu binnen bereik. Over ongeveer een half jaar zal dit door de Stichting Technische Wetenschappen gefinancierde programma bij de firma Van Gend en Loos in gebruik komen.

Schokken

Een andere toepassing van 'wiskunde op de computer' kwam onlangs op een congres in Kaiserslautern aan de orde. Autofabrikanten zijn nog altijd uit op verhoging van comfort en veiligheid. Daartoe onderwerpt men proefauto's aan schokproeven die zo realistisch mogelijk moeten zijn. Maar hoe stel je deze samen? Pogingen om gewoon een stuk straatweg gedetailleerd op te meten en dat via de computer om te zetten in een schoksignaal liepen stuk op de hoge kosten. Niet lang geleden slaagde een Japanner erin een straatweg wiskundig te beschrijven in termen van 'hysterese-lussen'. Daardoor kan de informatie economisch worden opgeslagen in de computer in de vorm van een z.g. rainfall-diagram en, zoals bleek op het congres, naar believen daaruit worden teruggehaald voor de opbouw van een realistisch schokpatroon. Ook bij fundamenteel onderzoek zouden computer-experimenten wel eens voor doorbraken kunnen zorgen. Prof. Hazewinkel: 'Neem het geval van turbulentie. Zo op het oog een doodnormaal ver-

schijnsel. Iedereen die in zijn koffie roert ziet het onder zijn ogen gebeuren. Maar hoewel overbekend is er nog steeds geen goede verklaring voor. Turbulente stroming kost in het algemeen veel energie, een extra reden dus voor intensief onderzoek. Experimenten op de computer zouden je kunnen helpen een idee te krijgen in welke richting je moet zoeken.' Zowel in de VS als in Japan is turbulentie een belangrijk onderzoeksgebied. De Japanners hebben speciaal voor dit probleem onlangs een groep van meer dan 100 onderzoekers gevormd, bestaande uit wiskundigen, natuurkundigen en ingenieurs.

Zakelijk

De industrie ziet wel brood in deze nieuwe vorm van wiskunde bedrijven. Vooralsnog komt die belangstelling voornamelijk van de grote bedrijven zoals IBM, Shell, Bell, etc. Volgens prof. Hazewinkel is er bij de middelgrote bedrijven nog weinig kennis aanwezig over de mogelijkheden van deze nieuwe tak van de wiskunde: 'Wij zouden ze zoveel moeten bijbrengen, dat ze die mogelijkheden zelf kunnen herkennen. Mede hierom organiseerden we najaar '85 op het CWI een internationaal congres over wiskunde in de industrie. We hopen daar een vijftiental Europese onderzoeksgroepen hun ervaringen te laten uitwisselen over 'wiskunde in de industrie en op de computer'. Deze activiteit past ook goed in het BRITE-project (Basic Research in Industrial Technology for Europe) van de Europese Gemeenschap.'

De belangstelling van de industrie is natuurlijk in wezen zakelijk. Zou daardoor de vrije uitwisseling van ideeën niet in het gedrang komen? Prof. Hazewinkel: 'Dat gevaar is niet denkbeeldig. Onlangs kregen we daar heel direct mee te maken in verband met de ontdekking door de Amerikaanse wiskundige Karmarkar van een 'snelle' manier om bepaalde lineaire programmeringsproblemen op de computer op te lossen. Wegens de grote praktische mogelijkheden kreeg zijn werk al een half jaar geleden ruime aandacht in de media. Wij wilden de details van zijn methode leren kennen om te zien of die ook echt hout snijdt in praktische gevallen. Onlangs werd echter duidelijk dat Karmarkar, in dienst bij Bell Laboratories, hierover voorlopig geen nadere

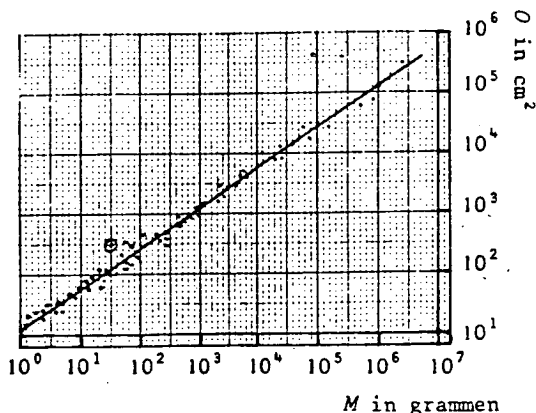
mededelingen zal doen. Deze ontwikkeling geeft ons een bittere smaak in de mond.'

Stormachtig

Voor wiskunde op de computer zijn zowel wiskundigen als informatici nodig. Het CWI heeft beiden in huis. Door de stormachtige ontwikkelingen in de informatica is de aandacht echter wat afgeleid van de voortgang in de wiskunde. Volgens prof. Hazewinkel is die eveneens stormachtig te noemen: 'De laatste jaren zijn allerlei problemen opgelost die men reeds lang trachtte te bewijzen. De computer heeft daaraan overigens zeker zijn steentje bijgedragen. Ook voltrekt zich nu een sterke mathematisering van allerlei wetenschappen zoals biologie, geologie, meteorologie, etc. Het is daarom jammer dat de overheid zo eenzijdig de informatica stimuleert. Ook de behoefte aan informatici met een streng wiskundige scholing wordt steeds groter. Dat is niet alleen het geval in de VS, ook hier merk ik dat zuivere wiskundigen al vaak informaticaposities in het bedrijfsleven krijgen.' (De Letter W)

Examen vwo Wiskunde A 1986, 1e periode

- 1 Er zijn veel resultaten bekend van onderzoek naar het verband tussen de lichaamsoppervlakte O en het lichaamsgewicht M van diverse diersoorten. Hiernaast zijn een aantal metingen verwerkt in een grafiek. De stippen stellen verschillende diersoorten voor. De rechte lijn geeft de richting van de stippenwolk aan.



- a Voor een bepaalde diersoort is de bijbehorende stip in de grafiek omcirkeld. Geef van deze diersoort het lichaamsgewicht in grammen en de lichaamsoppervlakte in cm^2 .
- b Leid uit bovenstaande grafiek een formule af die O als functie van M aangeeft.

Zoogdieren hebben allemaal ongeveer dezelfde lichaamstemperatuur. De formule die het verband aangeeft tussen M en de energie P per minuut, die nodig is om de lichaamstemperatuur constant te houden, is:

$$P = 0,017 M^{0.75}$$

Er geldt: 1 liter zuurstof per minuut komt overeen met 350 energie-eenheden.

- c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de zuurstofconsumptie in liters per minuut van een gorilla met een lichaamsgewicht van 70 000 gram.

De opgenomen zuurstof wordt door het bloed verspreid. De tijd waarin het bloed eenmaal wordt rondgepompt door het hart noemt men de circulatietijd T .

Bij een gorilla van 70 000 gram is de circulatietijd ongeveer 50 seconden. De gegevens van een aantal zoogdieren zijn in nevenstaande tabel vermeld.

zoogdier	M in grammen	T in seconden
olifant	4 000 000	140
paard	700 000	90
gorilla	70 000	50
rat	200	12
muis	30	7

- d Teken op dubbellogaritmisch papier de grafiek van T als functie van M .

- 2 Een groot warenhuis heeft vier filialen A, B, C en D in het land en beschikt over twee voorraadmagazijnen I en II.

Een bodedienst verzorgt het vervoer tussen de magazijnen en de filialen. In de magazijnen I en II zijn achtereenvolgens 50 en 70 videorecorders voorradig.

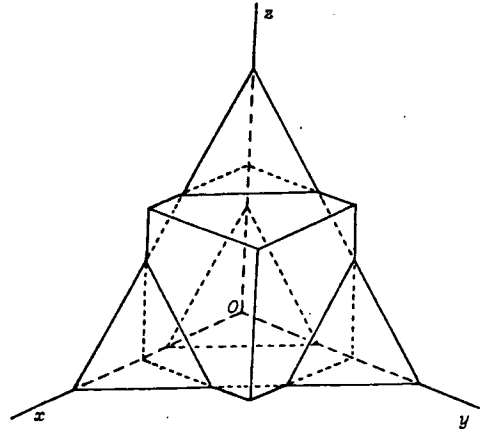
De bedrijfsleiding besluit om naar elk van de filialen 30 videorecorders te zenden. De vervoerskosten in guldens per videorecorder zijn af te lezen in onderstaande kostenmatrix.

		naar			
		A	B	C	D
van	I	12	15	15	9
	II	15	17	12	10

De bedrijfsleiding wil een zo goedkoop mogelijk vervoersschema. In onderstaande vervoersmatrix stellen de letters x , y en z aantallen videorecorders voor. Op de plaats van de stippen komen uitdrukkingen in x , y en z .

		naar			
		A	B	C	D
van	I	x	y	z	...
	II	...	...	...	...

- a Stel de complete matrix in x , y en z op.
b Druk de totale vervoerskosten in x , y en z uit.



- c Bereken met behulp van bovenstaande figuur de coördinaten van de 12 hoekpunten van het toegestane gebied.
d Bereken de minimale totale vervoerskosten.

- 3 In een fabriek worden pakken met cakemeel gevuld.

Op zo'n pak wordt vermeld: 'Inhoud 500 gram'. Veronderstel dat de inhoud per pak normaal verdeeld is met een gemiddelde van 500 gram en met een standaarddeviatie van 4 gram.

- a Bereken in één decimaal nauwkeurig het percentage van de pakken die minder dan 495 gram cakemeel bevatten.

Volgens de fabrikant betekent de vermelding 'Inhoud 500 gram' dat slechts 25% van de pakken minder dan 500 gram inhoud heeft.

Als een pak een inhoud van minder dan 500 gram heeft, spreekt men van ondergewicht.

Veronderstel bij de volgende drie vragen dat de fabrikant gelijk heeft en dat de standaarddeviatie van de normaal verdeelde inhoud 4 gram bedraagt.

- b Bereken in één decimaal nauwkeurig de gemiddelde inhoud per pak.

- c In een rek van een kruidenierswinkel staan 20 pakken cakemeel afkomstig van bovengenoemde fabriek. Daarvan hebben er 5 een ondergewicht. Een klant neemt aselekt 3 pakken uit het rek. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat geen van deze 3 pakken een ondergewicht heeft.
- d Een banketbakker koopt 16 pakken rechtstreeks van de fabriek. Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat hij minder dan 8000 gram cakemeel heeft gekocht.

4 Bij het onderzoek naar het verloop van epidemieën wordt vaak gebruik gemaakt van wiskundige modellen en computersimulaties.

In een bepaalde populatie is een besmettelijke ziekte uitgebroken. De populatie wordt in drie klassen verdeeld:

- de nog gezonde, maar wel voor de ziekte vatbare exemplaren V ;
- de besmettelijk zieke exemplaren Z ;
- de immune exemplaren I .

Over het verloop van deze epidemie is het volgende bekend:

- wekelijks steekt 20% van de zieken een vatbaar exemplaar aan, dat daardoor ook ziek wordt;
- van de zieken geneest wekelijks 30%, deze exemplaren worden immuun;
- immune exemplaren blijven immuun.

De totale omvang van de populatie bedraagt 10000 exemplaren. Gedurende het verloop van de epidemie verandert dit aantal niet. Op het tijdstip $t = 0$ (t in weken) zijn er 9500 vatbare, 500 zieke en 0 immune exemplaren.

Het verloop van de epidemie kan beschreven worden met de volgende matrix:

$$\begin{matrix} V & Z & I \\ \begin{pmatrix} 1 & -0,20 & 0 \\ 0 & 0,90 & 0 \\ 0 & 0,30 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

a Verklaar de betekenis van elk van de getallen in de tweede kolom van de matrix.

b Stel een formule op voor het aantal zieken als functie van t .

Bereken $t(t \in \mathbb{N})$ in het geval dat er voor het eerst minder dan 100 zieken zijn.

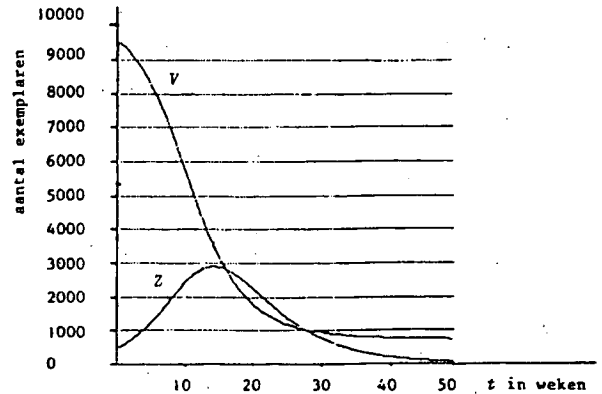
Tijdens het verloop van een epidemie kunnen in het

algemeen twee fasen onderscheiden worden. Gedurende de eerste fase neemt het aantal zieke exemplaren toe en gedurende de tweede fase neemt het aantal zieke exemplaren af.

Van het verloop van de genoemde epidemie wordt een ander model gemaakt, rekening houdend met deze twee fasen.

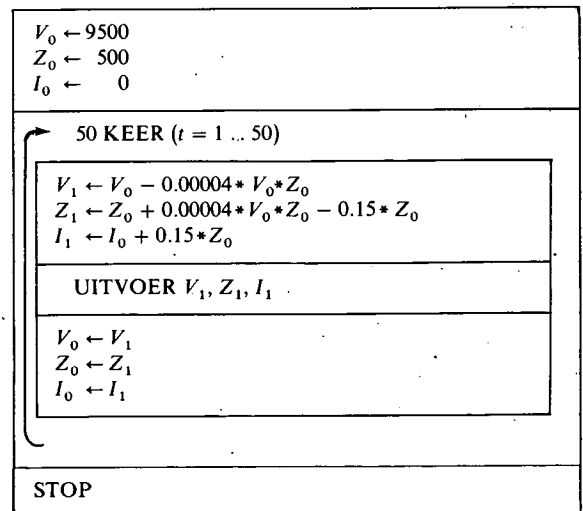
Met dit model wordt het verloop van deze epidemie op de computer gesimuleerd.

Met behulp van de computer zijn de volgende grafieken van V en Z als functie van t getekend:



c Druk I uit in V en Z en teken, uitgaande van bovenstaande figuur, de grafiek van I als functie van t .

Het model dat gebruikt is bij deze computersimulatie is samengevat in het volgende structuurdiagram:



- d Geef het percentage van de zieke exemplaren dat wekelijks volgens dit model geneest.
- e Bereken met behulp van dit structuurdiagram de aantallen vatbare, zieke en immune exemplaren voor $t = 1$ en $t = 2$.

Normen Wiskunde A 1e periode '86

1a 4 punten;	voor het lichaamsgewicht is 32 gram	2
	voor de lichaamsoppervlakte is 316 cm^2	2
b 7 punten;	voor de lijn heeft een helling $\frac{2}{3}$	2
	voor $O = cM^{\frac{2}{3}}$	3
	voor $c \approx 10^{1.1}$	1
	voor $O = 12,6 M^{\frac{2}{3}}$ (of $O = 10^{1.1} M^{\frac{2}{3}}$)	1
c 5 punten;	voor $P = 0,017 (70\,000)^{0.75}$	1
	voor de zuurstofconsumptie is $\frac{P}{350}$	2
	voor het antwoord 0,21	2
d 6 punten;	voor elk juist punt	1
	voor de grafiek	1
2a 5 punten;	voor de uitdrukking in de eerste rij: $50 - x - y - z$	1
	voor elk element van de tweede rij: $30 - x \quad 30 - y \quad 30 - z \quad -20 + x + y + z$	1
b 5 punten;	voor de vervoerskosten $12x + 15y + 15z + 9(50 - x - y - z)$ $+ 15(30 - x) + 17(30 - y) + 12(30 - z)$ $+ 10(-20 + x + y + z)$	3
	voor het antwoord $-2x - y + 4z + 1570$	2
c 7 punten;	voor de snijpunten van het vlak $x + y + z = 20$ met de ribben van de kubus: $(20, 0, 0), (0, 20, 0), (0, 0, 20)$	1
	voor de snijpunten van het vlak $x + y + z = 50$ met de ribben van de kubus: $(30, 20, 0), (20, 30, 0), (0, 30, 20), (0, 20, 30),$ $(20, 0, 30), (30, 0, 20)$	3
	indien een ander vlak dan $x + y + z = 50$ genomen is 1 punt aftrekken	
	voor de hoekpunten van de kubus $(30, 0, 0),$ $(0, 30, 0), (0, 0, 30)$	3
	indien een hoekpunt ontbreekt of toegevoegd is, voor elk ontbrekend of toegevoegd hoekpunt 1 punt aftrekken	
d 6 punten;	voor de vervoerskosten zijn minimaal in $(30, 20, 0)$	4
	voor de minimale vervoerskosten zijn 1490 gulden	2
3a 5 punten;	voor $\phi\left(\frac{495 - 500}{4}\right) = \phi(-1,25)$	2
	voor $\phi(-1,25) = 0,1056$	2
	voor het antwoord 10,6%	1
b 6 punten;	voor $\phi(z) = 1 - 0,75$	1
	voor $z = -0,675$	1
	voor $\frac{500 - \mu}{4} = -0,675$	2
	voor het antwoord 502,7	2

c 5 punten;	voor $P = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18}$	4
	voor het antwoord 0,40	1
d 6 punten;	voor de verwachting is 16 502,7	1
	voor de standaarddeviatie is 16	1
	voor $\phi\left(\frac{8000 - 8043,2}{16}\right) = \phi(-2,7)$	1
	voor $\phi(-2,7) = 0,0035$	2
	voor het antwoord 0,004	1
4a 5 punten;	voor de verklaring van $-0,20$	2
	voor de verklaring van 0,90	2
	voor de verklaring van 0,30	1
b 5 punten;	voor $Z = 500 (0,9)^t$	2
	voor $(0,9)^t < 0,2$	1
	voor het antwoord $t = 16$	2
c 5 punten;	voor $I = 10\,000 - V - Z$	2
	voor de tekening	3
d 2 punten;		
d 6 punten;	voor $V_1 = 9310$	1
	voor $Z_1 = 615$	1
	voor $I_1 = 75$	1
	voor $V_2 = 9081$	1
	voor $z_2 = 752$	1
	voor $I_2 = 167$	1

Hooggeleerde redacteur

Met het uitspreken van zijn inaugurele rede heeft dr. F. Goffree zijn benoeming tot bijzonder hoogleeraar aan de Universiteit van Amsterdam op 6 mei jongstleden aanvaard.

Hij zal zich in deze functie speciaal bezighouden met het volwassenenonderwijs. De redactie van *Euclides* feliciteert collega Fred van harte met deze benoeming.

Euclides en aktietaal

Martinus Riemersma

Op de SOL geven we in het tweede jaar een cursus 'Redeneren en bewijzen'. Daarin besteden we ook aandacht aan zgn. 'indirekte bewijzen'. Men beweert wel dat het eerste indirekte bewijs in de wiskunde vermoedelijk door Euclides is geleverd, namelijk toen hij bewees dat er oneindig veel priemgetallen zijn⁶. Alleen al op grond van historische overwegingen vonden we het daarom zinvol dit bewijs als voorbeeld in onze syllabus op te nemen, en wel in de volgende enigszins aangepaste vorm:

Bewijs A.

Veronderstel dat er slechts eindig veel priemgetallen zijn. Dan is er bij die getallen een grootste, zeg p . Het getal $p! + 1$ is dan of zelf een priemgetal of deelbaar door een priemgetal groter dan p . Tegenspraak.

In de klassieke versie van dit bewijs wordt niet met $p!$ gewerkt, maar met het produkt van alle priemgetallen tot en met p . De gedachtengang verandert hierdoor evenwel niet.

Nu viel het mij op dat deze manier van redeneren voor behoorlijk wat studenten best nog wel problemen blijkt op te leveren. Zo duikt regelmatig de misvatting op dat alle getallen van de vorm $p! + 1$, met p priem, weer priem zijn. Ik probeerde het daarom op een wat andere manier:

Bewijs B.

Ik ga een 'priemgetallenmachine' maken die alsmaar grotere priemgetallen levert: ik neem een priemgetal p (bijv. $p = 13$) en bereken $p! + 1$ (in het voorbeeld wordt dat 6227020801). Vervolgens bepaal ik alle priemdelers van $p! + 1$ (83 en 75024347). Maar dan heb ik zeker een priemgetal

groter dan 13 te pakken gekregen, immers alle gevonden priemdelers zijn groter dan 13. Dit proces levert niet alleen succes bij het voorbeeld $p = 13$, maar het lukt altijd! Probeer het getal $p! + 1$ maar eens te delen door een getal $\leq p$. Dat gaat niet, want steeds krijg je als rest 1. Dus is geen van de getallen 2, 3, ..., p een deler van $p! + 1$. De (priem)getallen die wel deler zijn van $p! + 1$ zijn daarom allemaal groter dan p .

Maar nu ik eenmaal een methode heb om steeds grotere priemgetallen te produceren, weet ik ook meteen dat de verzameling van alle priemgetallen oneindig groot is.

Dit verhaal blijkt veel beter te vallen. Dat kan natuurlijk komen doordat de indirekte manier van redeneren vermeden is. Voor mensen die voor het eerst een indirekt bewijs zien is dat inderdaad vaak wel even wennen. Maar belangrijker lijkt mij het verschil in taalgebruik tussen beide redeneringen. In bewijs A is de taal *feitvaststellend*, terwijl in bewijs B gebruik wordt gemaakt van *aktietaal*^{3,4}. Aktietaal wordt gekenmerkt door het gebruik van werkwoorden die een activiteit uitdrukken (nemen, vormen, bepalen, ...), de werkwoorden staan in de direkte rede (ik bepaal alle priemdelers van ..., i.p.v. alle priemdelers worden bepaald) en de handelingen worden in chronologische volgorde opgesomd (eerst p nemen, dan $p! + 1$ berekenen, vervolgens alle priemdelers bepalen, ...). Het gebruik van aktietaal is in de regel een goede ondersteuning van het leerproces. De leerling kan een rij handelingen uitvoeren, of in gedachten volgen, die stuk voor stuk aansluiten bij zijn eigen schema's.

Wel moet daarbij in de gaten worden gehouden dat aktietaal ook wel eens tot foutieve ideeën kan leiden. Zo kwam het voor dat een student dacht dat *alle* priemgetallen via deze machine geproduceerd worden (als je begint met $p = 2$).

Het gebruik van het *beeld* van een 'machine' is nog een ander aspect in bewijs B dat opvalt. Dit aspect staat echter niet los van het voorgaande. Aktietaal gaat namelijk heel vaak gepaard met het gebruik van beeldende elementen (voorbeelden uit schoolboeken: ik laat vanuit A een loodlijn neer ..., breng een vlak aan door de punten ..., laat x lopen van 1 tot 100, een funktie is een machine die bij elk getal ...).

Nog één opmerking wil ik kwijt. Ik heb altijd zonder meer aangenomen dat Euclides inderdaad een indirecte redenering, zoals in bewijs A, heeft gebruikt. Behalve de al eerder aangehaalde G. Kropp, bevestigden ook gerenommeerde schrijvers als C. B. Boyer¹ en M. Kline⁵ mij in die opvatting. Zij schrijven met nadruk dat Euclides een indirect bewijs geeft, omdat hij zou aantonen dat de aanname van een eindig aantal priemgetallen tot een tegenspraak leidt.

Maar toen ik onlangs 'Dijksterhuis'² er eens op nasloeg, ontdekte ik dat er bij Euclides geen sprake is van een indirect bewijs! Hij veronderstelt namelijk nergens dat er maar eindig veel priemgetallen zijn.

Het gaat om Propositie 20 in Boek IX: De priemgetallen zijn meer dan elke voorgeschreven hoeveelheid priemgetallen. Het bewijs komt dan hierop neer dat wordt aangetoond dat er bij elk drietal priemgetallen nog een vierde te vinden is. Het aantal van drie is in dit bewijs niet wezenlijk.

In essentie bewijs B dus, al valt de term 'machine' niet. Verder valt nog op dat het taalgebruik van Euclides de drie eerder genoemde kenmerken van aktietaal vertoont, althans in de geraadpleegde Nederlandse vertaling. Ook hier niets nieuws onder de zon dus!

Literatuur

- C. B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1968: p. 127.
- 2 E. J. Dijksterhuis, *De elementen van Euclides II*, Noordhoff, Groningen, 1930: p. 163.
- 3 J. van Dormolen, *Taal in het wiskunde-onderwijs*, Euclides 56 (1980/81): p. 416-420.
- 4 J. van Dormolen, *Aandachtspunten*, proefschrift, Utrecht, 1982: p. 148-160.
- 5 M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972: p. 80.
- 6 G. Kropp, *Geschichte der Mathematik*, Quelle & Meyer, Heidelberg, 1969: p. 35.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

542 Een boek van 200 bladzijden bestaat uit 20 novellen, die elk een geheel aantal bladzijden beslaan. *A* wedt dat er meer novellen meer dan 10 dan minder dan 10 bladzijden hebben, *B* dat er meer novellen minder dan 10 dan meer dan 10 bladzijden hebben. Wie heeft de grootste winstkans?

We nemen aan dat elke mogelijke verdeling $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ van de lengten even waarschijnlijk is.

543 Op hoeveel manieren kunnen we een verzameling van n elementen in deelverzamelingen verdelen? Nauwkeuriger geformuleerd: hoeveel rijen natuurlijke getallen $a_1, a_2, \dots, a_k$ zijn er waarvoor geldt $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k > 0$ en $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$?

Voldoende is een recursief procédé op te stellen om het antwoord te vinden en dit uit te rekenen voor $n = 16$.

544 Het vierkleurenprobleem heeft, sinds het opgelost is, veel van zijn charme verloren. Toch kan het de moeite lonen in speciale gevallen er nog eens naar te kijken.

- a Een vlakverdeling bestaat uit veelhoeken. In elk hoekpunt komen drie veelhoeken samen. We kleuren de veelhoeken zo dat twee aangrenzende verschillende kleuren krijgen. Wat is het kleinste aantal kleuren waarmee men in elk geval volstaan kan?
- b Zelfde vraag voor een vlakverdeling die uit alleen driehoeken bestaat.
- c Interessant zijn de reguliere triangulaties, d.z. de triangulaties waarbij in elk hoekpunt hetzelfde aantal zijden samenkomen. Is dit aantal n , dan noemt men de triangulatie een triangulatie van de orde n .

Toon nu aan dat voor $n = 3$ men in elk geval drie kleuren nodig heeft.

Voor $n = 4$ kan men volstaan met twee kleuren. Dit wekt geen verbazing want volgens een bekende stelling kan men, als in elk hoekpunt van een vlakverdeling een even aantal veelhoeken samenkomen, volstaan met twee kleuren.

Voor $n = 5$ kan men ook volstaan met twee kleuren. Dat is minder vanzelfsprekend en daarom vraag ik weer het te bewijzen.

Oplossingen

539 Vier vliegtuigen vliegen met een snelheid die constant is in richting en grootte. De projecties van hun banen op het (platte) aardoppervlak hebben zes verschillende snijpunten. In vijf van deze snijpunten zijn de projecties van de vliegtuigen gelijktijdig. En in het zesde?

De projecties van de banen op aarde noemen we l_1, l_2, l_3, l_4 . Het 'zesde' snijpunt is het snijpunt van l_3 en l_4 .

Breng een coördinatenstelsel $Oxyt$ aan met de x -as en de y -as in het aardoppervlak en de t -as loodrecht daarop. Op de t -as zetten we de tijd af. De banen van de vliegtuigen worden dan gerepresenteerd door vier rechte lijnen. Noem deze p_1, p_2, p_3, p_4 . We weten nu: p_1, p_2, p_3 snijden elkaar twee aan twee en gaan niet door één punt; ze liggen dus in één vlak;

p_1, p_2, p_4 eveneens.

Dus liggen p_3 en p_4 in één vlak. Ze zijn niet evenwijdig en snijden elkaar dus. Ook in het zesde snijpunt zijn de projecties van de vliegtuigen dus gelijktijdig.

540 Bij het tv-verslag van de Elfstedentocht verschenen de namen op het scherm van degenen die aan de uitzending meegewerkt hadden. Waarna de opmerking volgde: Zonder geen van hen zou het zijn gelukt. Wat wordt hier beweerd?

Noem de medewerkers: $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Als geen van hen er niet bij was geweest, zou het zijn gelukt.

Als ze er allemaal bij geweest waren, zou het gelukt zijn.

En, gezien het feit dat ze er allemaal bij waren, concluderen we hieruit: het is gelukt. Hetgeen we al lang wisten.

Ik probeer het nog eens.

Geen van hen – betekent – niet ten minste één van hen.

Zonder geen van hen – betekent – niet met niet ten minste één van hen.

Het zou dus gelukt zijn, als niet niet ten minste één van hen erbij geweest was.

Dus: het zou gelukt zijn, als er tenminste één van hen bij geweest was.

Het zou dus ook gelukt zijn, als alleen maar A_1 erbij geweest was. De rest was dus overbodig.

$A_2, A_3, \dots, A_n$ waren dus overbodig.

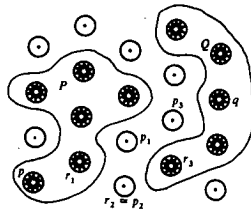
Net zo blijkt dat $A_1, A_3, A_4, \dots, A_n$ overbodig waren.

Dat hele stel had dus gerust thuis kunnen blijven.

541 Bij het televisiespel blokletters wordt door de spelleider een beginvak gekozen. Daarna stelt hij een vraag. Het spel wordt gespeeld door twee spelers, A en B . Geeft A als eerste het goede antwoord, dan wordt het vakje rood gekleurd, geeft B als eerste het goede antwoord, dan blauw. Degene die het goede antwoord gegeven heeft, kiest het volgende vak. De opdracht voor A is een aaneensluitende serie van vijf vakken rood gekleurd te krijgen die de linker en de rechter rand verbindt. Voor B is de opdracht een serie van vier blauwe vakken te verkrijgen die de (gekartelde) onder- en bovenrand verbindt. Vraag: kan het spel in remise eindigen?

We denken ons een spelmoment waarbij remise bereikt is.

Onderstel de vakjes p en q zijn rood gekleurd. P is de verzameling rode vakken die vanuit p samenhangend bereikbaar zijn en Q de verzameling die vanuit q samenhangend bereikbaar zijn.



Voor remise is noodzakelijk dat geen twee vakken van P en Q aanliggend zijn. Een dergelijke situatie is in de figuur weergegeven.

Ga van p samenhangend naar rechts totdat men aan een vak komt dat niet rood gekleurd is. Wegens de remisestand is dit vak er. Noem het p_1 . Ga van p_1 naar beneden naar een aanliggend vak. Dit kan zijn r_1, r_2 of r_3 . Deze kunnen niet alle drie tot $p \cup Q$ behoren, want dan zouden P en Q twee aanliggende vakken bevatten. Kies er één uit die niet tot $p \cup Q$ behoort en noem die p_2 . Net zo vinden we een vak p_3 aanliggend boven p_1 , dat niet tot $p \cup Q$ behoort. Enz. Zo vinden we een samenhangende rij vakken die onder- en bovenrand verbinden en niet rood zijn.

In de remisestand zijn alle vakken gekleurd. Deze vakken zijn dus blauw. Waaruit volgt dat remise uitgesloten is.

Opmerking. De afmeting van de kolommen en het aantal kolommen is irrelevant.

Mededeling

Nascholingscursussen voor leraren

In het cursusjaar 1986-1987 verzorgt de Rijksuniversiteit van Leiden een aantal nascholingscursussen voor onderwijsgeven- den in het voortgezet onderwijs (avo/vwo.mbo, hbo) waaronder RUL 9: HEWET-kort RUL 20: Nieuwe havo-wiskunde

Inlichtingen: Mw. I. C. Leenstra, Coördinator Nascholing, Rijksuniversiteit Leiden, Rijsburgerweg 146, 2333 AJ Leiden. Tel.: 071-14 83 33 tst 3097/3118.

U kunt zich tot uiterlijk **10 september 1986** inschrijven bij bovenstaand adres. Voor cursusmateriaal en niet-subsidiabele- kosten wordt een bijdrage gevraagd.

Reiskosten openbaar vervoer tweede klasse, boven de f110,- komen voor vergoeding in aanmerking.

Mededelingen

Jaarvergadering/studiedag 1986

Eerste oproep voor de jaarvergadering/studiedag op 25 oktober 1986 in het gebouw van de S.O.L., Archimedeslaan 16 te Utrecht.

Aanvang 10.00 h.

Agenda

9.30 h-10.00 h Aankomst, koffie

10.00 h-10.30 h *Huishoudelijk gedeelte*:

a. Opening door de voorzitter dr. Th. J. Korthagen.

b. Notulen van de jaarvergadering 1985 (Euclides jg. 61, nr. 7).

c. Jaarverslagen (zie Euclides).

d. Decharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie. Het bestuur stelt kandidaat: Mw. N. B. Sies en de heer L. A. G. M. Muskens.

e. Bestuursverkiezing in verband met aftreden van dr. J. van Dormolen, C. Th. J. Hoogsteder, M. Kindt, F. J. Mahieu en mw. drs. N. C. Verhoef.

Het bestuur stelt kandidaat:

mw. drs. A. F. S. Aukema-Schepel, C. Th. J. Hoogsteder, L. Jacobs, M. Kindt, F. J. Mahieu.

f. Vaststelling van de contributie 1987/1988. Het bestuur stelt voor de contributie vast te stellen op f55,- (f37,50 en f30,-).

g. Voorstel tot wijziging van de statuten en het huishoudelijk reglement.

Het bestuur stelt voor in artikel 8, lid 2 van de statuten de zin 'Tot veertien dagen voor de vergadering kunnen eveneens personen schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden' te wijzigen in 'Tot veertien dagen na het verschijnen van de eerste oproep voor de vergadering kunnen eveneens personen schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden'.

Het bestuur stelt voor artikel 5 van het huishoudelijk reglement 'oproeping' te vervangen door 'eerste oproeping'.

Toelichting:

Door deze wijziging wordt het mogelijk reeds voor de zomervakantie een eerste oproep voor de jaarvergadering in Euclides te plaatsen, waarna eventuele tegenkandidaten zo tijdig moeten zijn ingediend dat het mogelijk is deze via Euclides aan de leden bekend te maken. Binnen de nu nog geldende regeling is het zeer moeilijk om aan artikel 4 van het huishoudelijk reglement

(Indien, ingevolge artikel 8 van de statuten, tegenkandidaten zijn ingediend, geeft het bestuur daarvan ten minste een week voor de algemene ledenvergadering kennis aan de leden) te voldoen. Bovendien leidt een extra brief aan alle leden tot zeer grote kosten.

10.30 h-16.30 h *Themagedeelte*:

10.30 h-10.45 h Inleiding, organisatie

10.45 h-11.00 h Pauze, koffie

11.00 h-12.30 h Werkgroepen

12.30 h-13.30 h Lunch

13.30 h-14.45 h Plenaire zitting

14.45 h-15.00 h Pauze, thee

15.00 h-16.30 h Werkgroepen

16.30 h-17.00 h *Huishoudelijk gedeelte*:

h. Rondvraag.

i. Sluiting.

Het bestuur verzoekt de leden om reeds dit jaar eventuele tegenkandidaten voor de zomervakantie in te dienen.

Meer informatie en de wijze van aanmelding vindt u in het volgende nummer van Euclides.

Betaling kontributie

Ongeveer 90% van de leden betaalt de kontributie op tijd: aan het begin van het verenigingsjaar (zie statuten).

De bijna 10% leden, die te laat betalen, zijn voor de vereniging erg duur. Het opsporen en (herhaald) aanschrijven (met acceptgiro) kost veel geld. Daarom verzoekt het bestuur deze leden **vóór 1 oktober** hun kontributie te betalen.

Voor degenen die toch aangeschreven moeten worden zullen de **kosten** per aanschrijving **f2,50** bedragen. Als op **1 mei** de kontributie over het lopende verenigingsjaar nog niet voldaan is, zal **f10,-** aan kosten in rekening gebracht moeten worden. Deze regeling gaat in op 1 augustus 1986.

Namens het Bestuur, de Penningmeester.

Kalender

15 en 16 augustus 1986: Amsterdam, Vakantiecursus 1986, 'Matrices'

21 en 22 augustus 1986: Eindhoven, Idem

27-29 augustus 1986: Utrecht, Congres 'New Trends in the history of Science'

12 september 1986: Utrecht, Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Getal en Ruimte

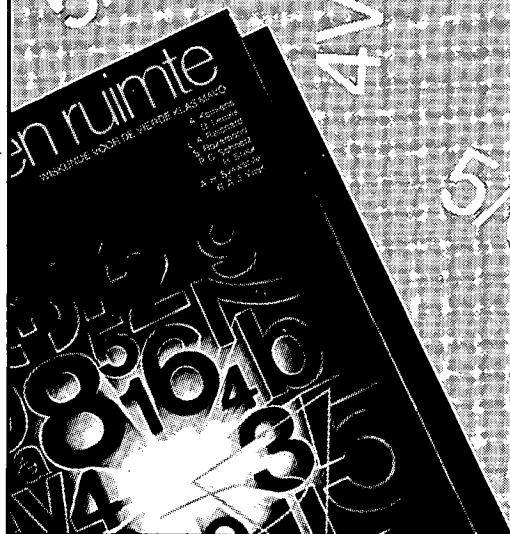
Wiskunde voor het voortgezet onderwijs

*de betrouwbare bondgenoot
in het wiskundeonderwijs*

Vraag de gratis documentatie aan...

Educaboek bv

Postbus 48
4100 AA Culemborg
Tel. (03450) 71 911



Inhoud

P. G. J. Vredenduin: Grensgevallen I	317
H. Zunneberg: Het punt van Fermat?	321
P. G. J. Vredenduin: De eerste Vlaamse Wiskunde Olympiade	323
Hans Freudenthal: De waarheid omtrent Bourbaki	330
P. G. J. Vredenduin: Grepen uit de geschiedenis van het negatieve getal	331
Henk Nieland: Wiskunde op de computer	339
Examen vwo Wiskunde A 1986 1e periode	341
Martinus Riemersma: Euclides en aktietaal	345
Recreatie	346
Boekbesprekingen	320, 338
Mededelingen	344, 347, 348
Kalender	348

Adressen van auteurs

Hans Freudenthal, p/a OW&OC, Tiberdreef 4, Utrecht
Henk Nieland, p/a Dienst Wetenschapsvoorlichting, N.Z. Voorburgwal 120, 1012 SH Amsterdam
Dr. M. Riemersma, Duinroos 12, 3831 CE Leusden
P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth
H. Zunneberg, p/a Geert Groote College, Herman Boerhavelaan 1, 7415 ES Deventer