

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

61e jaargang
1985 | 1986
april

Euclides 8

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Drs H. Bakker
Mw I. van Breugel
Drs F. H. Dolmans (hoofdredacteur)
W. M. J. M. van Gaans
Prof dr F. Goffree
L. A. G. M. Muskens
Drs C. G. J. Nagtegaal
Drs A. B. Oosten (eindredacteur)
P. E. de Roest (secretaris)
Mw H. S. Susijn-van Zaale
Dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12,
7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 50,- per verenigingsjaar;
studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de
V.V.W.L. f 35,-; contributie zonder Euclides f 30,-.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met
vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht
bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen,
tel. 08894-11730. Zij dienen met de machine geschreven
te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van

1 1/2, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De
redactiesecretaris P. E. de Roest, Blijhamsterweg 94,
9672 XA Winschoten, tel. 05970-22027 stuurt
desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De
auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5
exemplaren van het nummer waarin het artikel is
opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52^c,
8932 CD Leeuwarden, tel. 058-135976.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille
(buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5,
3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW
leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 44,75. Een collectief
abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 26,50.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567,
9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen
tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend
nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag
leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde
van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers f 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruit-
betaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 39731 (Samsy).

Vectoren, een historische beschouwing

P. G. J. Vredenduin

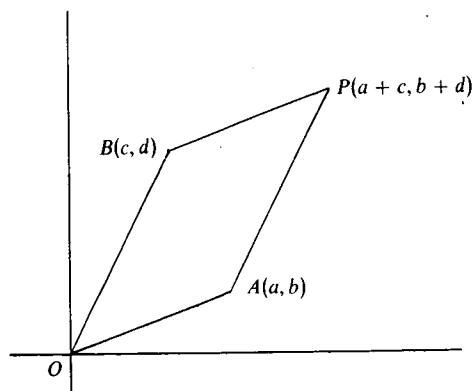
Het vectorbegrip is oeroud. De Oude Grieken kenden reeds het parallellogram van krachten, en dat kwam in wezen neer op de optelling van twee vectoren. Eeuwen lang bleef het vectorbegrip van natuurkundige aard; in de wiskunde speelde het geen rol.

Vectoren en complexe getallen

Daarin kwam verandering in de eerste helft van de vorige eeuw, toen men complexe getallen ging voorstellen door punten in het platte vlak. Het complexe getal $a + bi$ wordt daarbij gerepresenteerd door het punt (a, b) . De optelling van complexe getallen geschiedt volgens:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Met $a + bi$ en $c + di$ corresponderen de punten $A(a, b)$ en $B(c, d)$. Met hun som correspondeert het vierde hoekpunt P van het parallellogram met zijden OA en OB .

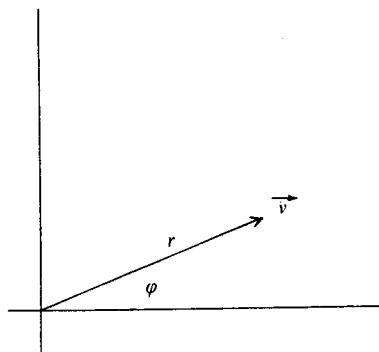


Figuur 1

Dat lijkt erg veel op vectoroptelling. Het lag dan ook voor de hand de lijnstukken OA en OB van pijltjes te voorzien en $\vec{OP}$ op te vatten als som van de vectoren $\vec{OA}$ en $\vec{OB}$. Zo deed het vectorbegrip geruisloos zijn intrede in de wiskunde.

Van een vermenigvuldiging van vectoren was in de fysica nog nimmer sprake geweest. Maar van vermenigvuldigen van complexe getallen in de wiskunde wel. Wat gebeurt er met de vectoren als we de bijbehorende complexe getallen vermenigvuldigen? Om dat na te gaan, schrijven we een complex getal in de vorm

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

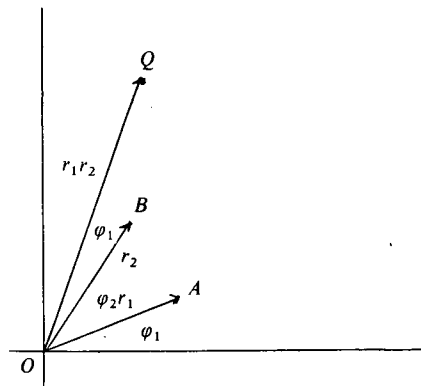


Figuur 2

Vermenigvuldigen van twee complexe getallen gaat nu zo:

$$\begin{aligned} r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) &= \\ &= (r_1 r_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - r_1 r_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &+ i(r_1 r_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + r_1 r_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

(De optelling van φ_1 en φ_2 geschiedt mod 2π .)

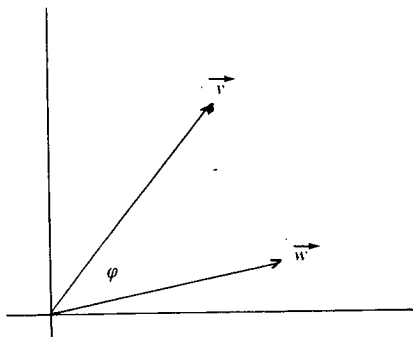


Figuur 3

Het ligt voor de hand de vector $\vec{OQ}$ het produkt te noemen van de vectoren $\vec{OA}$ en $\vec{OB}$.

In verband met het vervolg is het noodzakelijk dat we ook nog nagaan, hoe we het quotiënt van twee vectoren krijgen. In figuur 4 zijn twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ getekend. Het is duidelijk dat

$$\frac{\vec{v}}{\vec{w}} = \frac{r}{r_1} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

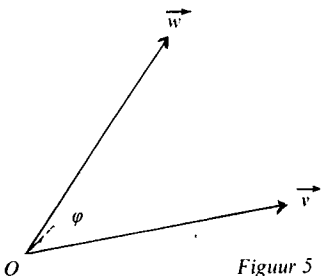


Figuur 4

Generalisatie van de vermenigvuldiging in de ruimte

De fysische vectoren bleken ook mathematisch bruikbaar. De wiskundige voerde er een nieuwe bewerking mee uit: vermenigvuldigen. Hij vermenigvuldigde echter alleen vectoren in het platte vlak, terwijl de fysicus ook werkt met vectoren in de ruimte. Dit bracht Hamilton ertoe te proberen een generalisatie te vinden in de ruimte van de vectorvermenigvuldiging.

Eigenlijk stelde hij het probleem iets anders. Hij onderzocht namelijk of een generalisatie van de deling mogelijk is. Hij zocht dus naar de mogelijkheid bij twee gegeven vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ in de ruimte een vector $\vec{u}$ te vinden die men kan beschouwen als het quotiënt van $\vec{v}$ en $\vec{w}$.



Figuur 5

In figuur 5 zijn in de ruimte twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ getekend. Hun quotiënt is bepaald door:
a het quotiënt van de lengten van $\vec{v}$ en $\vec{w}$
b de hoek φ .

Deze hoek φ wordt bepaald door:

c de richting van de vector door O loodrecht op het vlak door $\vec{v}$ en $\vec{w}$ (met inachtneming van de kurketrekkerregel)

d de grootte van φ .

Door hoeveel parameters is een quotiënt dus bepaald?

a Het quotiënt van de lengten van $\vec{v}$ en $\vec{w}$ is één parameter

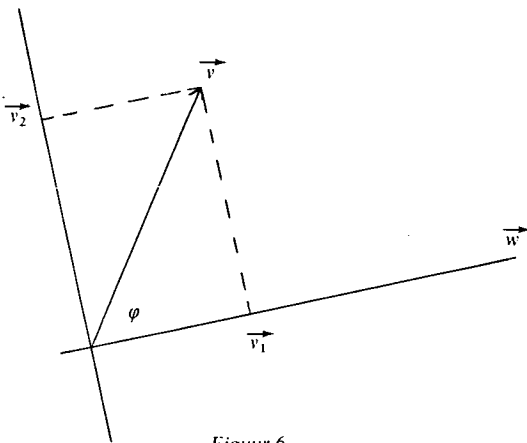
c de richting van een vector kan men bepalen door een punt op de eenheidsbol om O , dus door twee parameters

d de grootte van φ is weer één parameter.

In totaal dus vier parameters. Maar een vector in de ruimte met beginpunt O is bepaald door de drie coördinaten van zijn eindpunt, dus door drie parameters. Het quotiënt van twee vectoren kan dus niet weer een vector zijn.¹

Wat nu? Hamilton gaf de moed niet op en vond in 1843 een oplossing. Het voorgaande wijst daartoe min of meer de weg.

Ontbind $\vec{v}$ in twee componenten, $\vec{v}_1$ met dezelfde drager als $\vec{w}$ en $\vec{v}_2$ met een drager loodrecht daarop.



Figuur 6

Nu is

$$\frac{\vec{v}}{\vec{w}} = \frac{\vec{v}_1}{\vec{w}} + \frac{\vec{v}_2}{\vec{w}}$$

(Hamilton nam aan dat bij de generalisatie de 'normale' rekenwetten geldig blijven.)

Hierin is $\frac{\vec{v}_1}{\vec{w}}$ een reëel getal, namelijk de scalair

waarmee we w moeten vermenigvuldigen om $\vec{v}_1$ te krijgen. Noem dit getal a .

Om $\vec{v}_2$ te krijgen uitgaande van $\vec{w}$ moeten we eerst $\vec{w}$ draaien over een rechte hoek en daarna scalair vermenigvuldigen. De richting van de rotatie kunnen we bepalen door de as ervan te geven. Deze staat loodrecht op het vlak door $\vec{v}$ en $\vec{w}$ en wordt verder vastgelegd door de kurketrekkerregel.

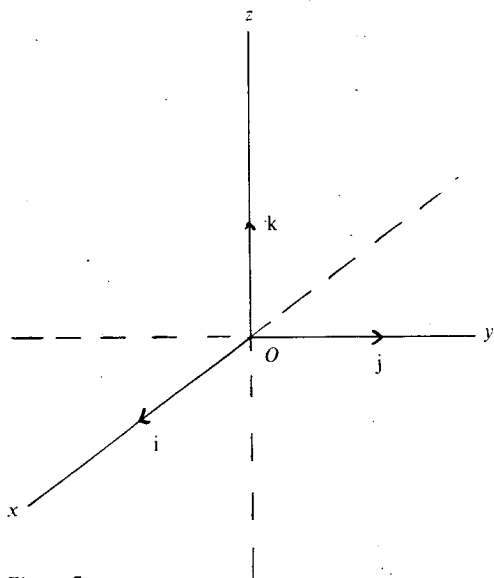
Hamilton begrijpt nu dat het er alleen nog maar om gaat op een geschikte manier rotaties over een rechte hoek te kunnen vastleggen. Daartoe gaat hij uit van drie basisrotaties:

een rotatie om de y^+ -as die de z^+ -as doet overgaan in de x^+ -as

een rotatie om de y -as die de z^+ -as doet overgaan in de x^+ -as

een rotatie om de z -as die de x^+ -as doet overgaan in de y^+ -as.

Hij noemt deze rotaties resp. i , j en k en stelt ze voor door pijlen met lengte 1 op de x^+ -, y^+ - en z^+ -as.



Figuur 7.

In het quotiënt speelt een rotatie over 90° om een as door O een rol.

Deze rotatie kunnen we voorstellen door een punt P op de eenheidsbol om O , dus ook door de pijl OP . Noem deze pijl p . Nu is.

$$p = p_1 i + p_2 j + p_3 k.$$

Hierin zijn p_1 , p_2 en p_3 reële getallen waarvoor

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1.$$

Om $\vec{w}$ in $\vec{v}_2$ te doen overgaan, is na deze rotatie nog een scalaire vermenigvuldiging nodig. Noem de factor daarvan q . Stel

$$p_1 q = b, p_2 q = c, p_3 q = d.$$

Dan is

$$\frac{\vec{v}_2}{\vec{w}} = bi + cj + dk.$$

Zodat we in totaal vinden:

$$\frac{\vec{v}}{\vec{w}} = a + bi + cj + dk. \quad (1)$$

Het voorgaande lijkt verdacht veel op gegoochel. Maar deze verdenking is ten onrechte. Het resultaat kan men als volgt interpreteren. Gegeven de vector $\vec{w}$. Dan is de vector $\vec{v}$ eenduidig bepaald door $\vec{w}$ en het geordende viertal (a, b, c, d) . We krijgen namelijk $\vec{v}$ als volgt:

- a vermenigvuldig $\vec{w}$ scalair met a en noem het resultaat $\vec{v}_1$
- b stel

$$p_1 = \frac{b}{\sqrt{(b^2 + c^2 + d^2)}}, p_2 = \frac{c}{\sqrt{(b^2 + c^2 + d^2)}},$$

$$p_3 = \frac{d}{\sqrt{(b^2 + c^2 + d^2)}}$$

en roteer $\vec{w}$ over een rechte hoek om de as

$$p_1 i + p_2 j + p_3 k$$

- c vermenigvuldig de sub b gevonden vector scalair met $\sqrt{(b^2 + c^2 + d^2)}$ en noem het resultaat $\vec{v}_2$

- d tel $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ op.

Dan is $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

$\vec{w}$ is dus eenduidig bepaald door $\vec{v}$ en het geordende viertal reële getallen (a, b, c, d) .

Dit geordende viertal schreef Hamilton: $a + bi + cj + dk$. Hij noemde het een quaternion.

Rekenen met quaternionen

Net zoals de geordende tweetallen reële getallen (a, b) , geschreven in de vorm $a + bi$, een nieuw soort getallen zijn, complexe getallen, waarmee men volgens bepaalde regels op de normale manier

kan rekenen, zijn ook deze quaternionen een nieuw soort getallen. De vraag is hoe we ermee kunnen rekenen.

Optellen gaat gewoon. Als

$a + bi + cj + dk$ de vector $\vec{w}$ doet overgaan in $\vec{v}$, en $a' + b'i + c'j + d'k$ de vector $\vec{w}$ doet overgaan in $\vec{v}$, dan doet

$(a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k$ de vector $\vec{w}$ overgaan in $\vec{v} + \vec{v}$.

Vermenigvuldigen levert meer moeilijkheden. De samenstelling van twee rotaties om de x -as over 90° levert een puntspiegeling in O , dus een scalaire vermenigvuldiging met -1 .

Samenstelling van een rotatie om de x -as over 90° met een om de y -as over 90° levert een rotatie om de z -as over 90° .

Zodat we vinden:

$$i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1$$

$$ij = k, jk = i, ki = j.$$

Samenstelling van een rotatie om de y -as over 90° met een om de x -as over 90° levert echter een rotatie om de z -as over -90° .

Dus is:

$$ji = -k, kj = -i, ik = -j.$$

Verder gaat alles weer normaal. Ik laat aan de lezer over zich hier desgewenst verder in te verdiepen.

De vermenigvuldiging van quaternionen is dus niet commutatief. In de tijd van Hamilton was dit een novum: het uitvoeren van operaties die men optellen en vermenigvuldigen noemde gezien hun grote overeenkomst met de normale optelling en vermenigvuldiging, maar die toch afwijkend gedrag vertoonden. Wij vinden dit een normaal verschijnsel.

Fysische betekenis van de quaternionen

Hamilton heeft de fysici aangeraden van zijn quaternionen gebruik te maken. Ik kom nu op een terrein waar ik niet zaakkundig ben. Ik refereer dus en verzoek de lezer die over de volgende alinea nadere informatie wenst, zich met een goed fysicus in verbinding te stellen.

Maxwell volgde de raad van Hamilton op bij het ontwerpen van zijn theorie van het elektromagnetisme. Het bleek hem daarbij dat de quaternionen als geheel onhanteerbare grootheden waren, maar dat de twee delen, a en $bi + cj + dk$, los van elkaar goed bruikbaar waren.

Reden voor ons na te gaan wat de betekenis van deze twee delen is. Daartoe kijken we opnieuw naar figuur 4. In deze figuur is $\varphi < 90^\circ$ en tot dit speciale geval beperken we ons voorlopig.

Eerst het bestanddeel a . We hebben gezien dat

$$a = |\vec{v}_1|/|\vec{w}|.$$

Hieruit volgt:

$$a = |\vec{v}| \cos \varphi / |\vec{w}|.$$

Voor het inwendig product geldt:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \varphi.$$

Zodat

$$a = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2}.$$

Nu $bi + cj + dk$. Dit deel wordt voorgesteld door een pijl loodrecht op het vlak door $\vec{v}$ en $\vec{w}$. De richting van de pijl wordt vastgelegd door de kurketrekkerregel. De lengte van de pijl is gelijk aan $|\vec{v}_2|/|\vec{w}|$, dus aan $|\vec{v}| \sin \varphi / |\vec{w}|$.

Het uitwendig product $\vec{v} \times \vec{w}$ wordt voorgesteld door een pijl met dezelfde richting en met grootte $|\vec{v}| |\vec{w}| \sin \varphi$.

Zodat

$$bi + cj + dk = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{w}|^2}.$$

Men overtuigt zich er gemakkelijk van dat deze resultaten juist blijven voor $90^\circ \leq \varphi < 360^\circ$.

Op deze wijze, dus via de langs wiskundige weg gevonden quaternionen, hebben in- en uitwendig product van twee vectoren hun intrede in de fysica gedaan.

Samenvatting

Het voorgaande is een zeldzaam mooi voorbeeld van de manier waarop wiskunde en natuurkunde stimulerend op elkaar kunnen werken.

1 Vectoren hebben aanvankelijk alleen fysische betekenis. Ze worden gebruikt om grootheden voor te stellen die een grootte en een richting hebben.

Samenstellen van krachten, van snelheden enz. leidt tot optellen van vectoren volgens de parallellogrammethode.

- 2 Vectoren blijken bruikbaar in de wiskunde bij het voorstellen van complexe getallen door punten in het platte vlak. Optelling van complexe getallen correspondeert met optelling volgens de parallellogrammethode van de bijbehorende vectoren.
 - 3 Vermenigvuldigen van complexe getallen leidt tot een nieuwe bewerking met vectoren, vermenigvuldiging van vectoren, die aanvankelijk alleen in het platte vlak gedefinieerd is.
 - 4 Hamilton probeert de vermenigvuldiging van vectoren te generaliseren tot een vermenigvuldiging van vectoren in de ruimte. Hij komt zo tot zijn quaternionen.
 - 5 Maxwell tracht de quaternionen in de fysica te gebruiken. Dit lukt maar moeizaam. Wel blijken goed bruikbaar te zijn de twee delen waaruit een quaternion bestaat, het 'scalaire deel' a en het 'vectoriële deel' $bi + cj + dk$. Deze geven aanleiding tot het definiëren van het inwendig en het uitwendig produkt van twee vectoren.
- De historie is hiermee nog niet ten einde. De vectoren met inproduct liggen ten grondslag aan de inproduct-ruimten, die in de huidige wiskunde een belangrijke rol spelen. De euclidische ruimte is er een voorbeeld van. En ook het uitwendig produkt blijkt in de wiskunde goed bruikbaar.

Noot

- 1 Ik kan mij voorstellen dat iemand deze conclusie niet overtuigend vindt. Het is immers best mogelijk een eendimensionaal ruimtedeel (bijv. een lijnstuk) af te beelden op een tweedimensionaal ruimtedeel (bijv. een vierkant). Men kan zelfs eisen dat deze afbeelding continu is en ook dat ze eenduidig is. Maar aan beide eisen tegelijk kan niet voldaan worden. Hetzelfde geldt voor een drie- en een vierdimensionaal ruimtedeel. Hierop berust de conclusie dat het quotiënt van twee vectoren niet weer een vector kan zijn.

Literatuur

Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972, hoofdstuk 32.
Banesh Hofman, *About Vectors*, Dover, New York, 1975, blz. 106-110.

Mededelingen

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Gewenste uren aantallen

Regelmatig worden aan het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren vragen gesteld over het aantal lessen dat nodig is om leerlingen op verantwoorde wijze voor te bereiden op de eindexamens wiskunde.

Dit doet zich ook de laatste tijd weer voor omdat diverse scholen zich in verband met besnoeiingen in de lerarenlessenformules en de invoering van het vak informatica bezinnen op de lessentabellen.

Het bestuur heeft zich over deze materie opnieuw beraden.

Bij zijn standpunt heeft het bestuur zich laten leiden door:

- adviezen in officiële rapporten, zoals het Hewet-rapport en het rapport van de Werkgroep ter voorbereiding van wijziging van het eindexamenprogramma wiskunde havo,
 - omvang van de eindexamenprogramma's,
 - ervaringen van collega's,
 - didactische overwegingen,
 - adviezen van inspectie, zoals voor het lbo-c gedaan,
 - minimumtabellen,
 - resultaten van de eindexamens.
- Op grond hiervan adviseert het bestuur
- voor lbo-c 13 à 14 wekelijkse lesuren,
 - voor mavo 15 à 16 wekelijkse lesuren,
 - voor havo 5 wekelijkse lesuren in de klassen 4 en 5,
 - voor vwo 4 wekelijkse lesuren in klas 4 en 4 wekelijkse lesuren in de klassen 5 en 6 zowel voor wiskunde A als voor wiskunde B.

Hoewel in nieuwe leerplannen ook gebruik gemaakt wordt van computers is het bestuur van mening dat dit niet betekent dat informatica een deel van de wiskunde is. De invoering van informatica mag niet gaan ten koste van de kwaliteit van het wiskundeonderwijs.

Namens het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, J. Maassen

Meetkunde aan 12-16 jarigen

De didactiekcommissie roept belangstellenden in de didactiek van de wiskunde op, om mee te werken in een werkgroep, die zich bezig wil houden met het onderwerp 'Meetkunde aan 12-16 jarigen'.

Een belangrijk punt van aandacht zal hierbij vooral zijn de voorbereiding op de (ruimte-)meetkunde in de bovenbouw havo en vwo. Centraal staan dus de vragen: 'Wat moeten we aan meetkunde doen' en 'Hoe doen we dat'.

- Verwacht wordt dat de werkgroep in de periode van september 1986 tot april 1987 vijf à zes keer bijeenkomt. Binnen de werkgroep worden afspraken gemaakt en taken verdeeld.
- Als plaats van bijeenkomst wordt een, voor alle deelnemers, zo centraal mogelijk gelegen plaats gekozen. De bijeenkomsten

Zie vervolg op p. 267.

Overlopers: op jacht naar macht?

Mike Staring en Jeroen Staring

Voorwoord

Wiskunde-gebruik in de politicologie

Dat wiskunde in de politicologie gebruikt zou kunnen worden, ligt voor velen niet onmiddellijk voor de hand.

Echter:

'... there are already many interesting and useful results; this subject is ripe for further substantial mathematical development.'¹

Het gebruik van wiskunde in de politicologie zou *niet* te rechtvaardigen zijn, wanneer daardoor slechts de 'schijn van wetenschappelijkheid' ietwat zou worden opgepoetst; veeleer zou er sprake moeten zijn van *resultaten* die op andere wijze nauwelijks te verkrijgen zijn en die bovendien, vanuit politicologisch oogpunt, belangwekkend zijn. Welnu, die zijn er! We noemen er enkele:

- 1 er bestaat geen perfecte verkiezingsprocedure (dit is de roemruchte stelling van *Arrow*);
- 2 vanuit het Wederzijds Verzekerd Vernietigings-evenwicht geredeneerd, zijn er méér kernwapens nodig naarmate ze technisch méér geperfectioneerd zijn. 'Moderniseren'² betekent dus de kernwapenwedloop aanjagen;
- 3 een partij in een (gemeente-)raad, of in het parlement, die $a\%$ van de zetels bezet, heeft in het algemeen *niet* $a\%$ van de beslissingsmacht in handen.

Combineren we deze drie uitspraken, dan verschijnt bijvoorbeeld het binnenkort te houden parlementaire debat over het 1-november-besluit van het Kabinet (wij schrijven dit op 3-11-'85) in een, wiskundig aantoonbaar, bijzonder merkwaar-

dig daglicht ...

Aan elk van de drie voorafgaande uitspraken afzonderlijk hebben wij op andere plaatsen³, uitvoerig aandacht besteed. In het navolgende willen wij – bij wijze van voorbeeld – een wiskundige bespreking van het verschijnsel *overlopen* geven. Net als bij eerdere publikaties in Euclides over wiskundige toepassingen in diverse wetenschapsgebieden⁴, zullen wij geen kant en klare wiskunde A schoolstof aanbieden. Ook hier gaat het erom een indruk te verschaffen van mogelijk gebruik van wiskunde. Daarnaast, doch dat hopen wij een andere maal uitgebreider te bespreken, moge blijken dat wiskunde-gebruik (en -onderwijs?) niet beperkt gehouden hoeft te worden tot *waardevrije* situaties als in, zeg maar, roofdier-prooi-modellen.

Inleiding

Macht is een kernbegrip in de politiek. In alledaagse gesprekken valt zelfs met enige regelmaat te beluisteren dat het de dames en heren politici om niets anders te doen is in de uitoefening van hun vak. Als dit laatste juist is, dan moeten acties van politici steeds begrepen kunnen worden vanuit hun veronderstelde streven naar macht. In het bijzonder zou dit dan ook moeten gelden voor het, vooral binnen gemeenteraden nogal eens voorkomende, overlopen van politici van het ene blok naar het andere.

Wij willen ons in dit artikel ietwat genuanceerder opstellen; gepoogd zal worden na te gaan *onder welke voorwaarden* het overlopen vanuit één blok binnen een raad naar een ander blok machtswinst kan betekenen voor de overloper. De methode van analyse die wij zullen hanteren is een variant op de wijze waarop *Striffin*¹ becijfert onder welke kondities het voor *ongebonden* de moeite waard wordt zich bij een al bestaand blok aan te sluiten. De analyse zal beperkt worden gehouden tot een raad waarbinnen zich, naast een aantal ongebonden, *twee* blokken bevinden, doch kan (met stug volgehouden rekenwerk) worden uitgebreid naar elke andere denkbare situatie.

De machtsverdeling in een graad

Laat ons uitgaan van een (gemeente)raad, waar-

binnen zich twee blokken hebben gevormd, zeg blok X en blok Y . Met blokvorming wordt in dit kader bedoeld dat alle leden van één blok bij elke raadsbeslissing waarvoor gestemd dient te worden, hetzelfde stemmen.

In een artikel over 'macht en tevredenheid in de Tweede Kamer' heeft één van ons onlangs aannemelijk gemaakt dat men met reden tot blokvorming kan komen, en met welke redenen men zoal tot blokvorming kan komen².

Veronderstellen wij verder dat blok X een fraktie x van de stemmen in handen heeft, blok Y een fraktie y , en, tenslotte, dat de 'ongebonden' U een fraktie u van de zetels bezetten.

Bijvoorbeeld, in de situatie

$$x = 4/10$$

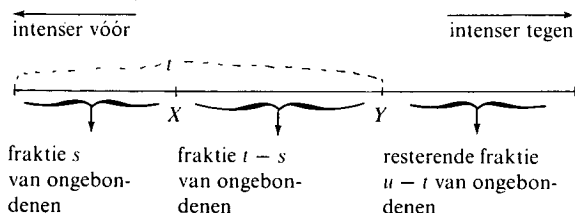
$$y = 3/10$$

$$u = 3/10$$

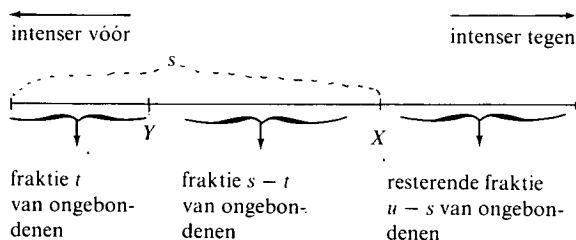
heeft blok X 40% van de stemmen en blok Y 30%, terwijl 30% van de raadsleden konform hun *eigen* geweten stemt. Het zal duidelijk zijn, dat, wanneer $x = 6/10$ in plaats van $x = 4/10$, blok X *alle* macht zou bezitten, daar de doorslaggevende stem in dat geval uitsluitend door een lid van X gegeven kan worden.

In het geval $x = 0,4$, $y = 0,3$ en $u = 0,3$ zal de macht wat meer gespreid zijn. Er zijn verschillende manieren ontwikkeld om te becijferen hoe de precieze machtsverdeling in dat geval is³. Wij zullen in dit artikel de methode van *Shapley* en *Shubik* volgen, naar een rekentechniek van *Shapley* en *Milnor*⁴.

Deze techniek houdt in dat alle raadsleden bij elke te nemen beslissing geordend worden naar de mate waarin zij vóór het voorstel zijn. In het bijzonder wordt daarbij gelet op de positie van blok X en blok Y temidden van de ongebonden, waarvoor twee wezenlijk verschillende situaties denkbaar zijn: X is méér voorstander dan Y (figuur 1), óf Y is méér voorstander dan X (figuur 2).



Figuur 1 $t > s$

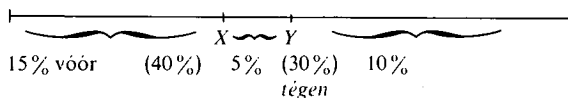


Figuur 2 $s > t$

In dergelijke situaties is een raadslid in een *machts*-positie, wanneer hij of zij de doorslaggevende stem moet geven; dat is het geval wanneer alle raadsleden links van zijn of haar positie vóór het voorstel zijn, alle leden rechts tégen, en het betreffende raadslid zich precies temidden van evenveel voor- als tegenstanders bevindt. Zulk een situatie kan zich bijvoorbeeld voordoen als

$$x = 0,4, y = 0,3, u = 0,3, \text{ en } s = 0,15, t = 0,20.$$

De zaak ziet er dan zó uit:



Figuur 3

In het geval zoals gesteld in figuur 3 kan (een lid van) blok X macht uitoefenen, immers van alle overige raadsleden is 15% vóór (een minderheid), en $5\% + 30\% + 10\% = 45\%$ tégen (ook een minderheid). Als blok X zich aansluit bij de 15% voorstanders, wordt het voorstel aangenomen, met 55 tegen 45 procenten, terwijl het voorstel verworpen wordt als blok X zich bij de tegenstanders aansluit. In dat geval verhouden de vóór- en tegenstanders zich als 15 : 85.

Meer algemeen kan op deze wijze nagegaan worden in welke situaties blok X macht uitoefent, wanneer Y en wanneer de ongebonden. In geval $t > s$ (figuur 1) wordt dat:

- 1 Als $s + x + (t - s) + y < \frac{1}{2}$ (dit kan alleen als $x + y < \frac{1}{2}$)*, dan bevindt zich de doorslaggevende stem in handen van de *ongebonden* rechts van blok Y in figuur 1: de voorwaarde kan worden

vereenvoudigd tot $x + y + t < \frac{1}{2}$, oftewel

$$t < \frac{1}{2} - x - y.$$

- 2 Als $s + x + (t - s) < \frac{1}{2}$ én $s + x + (t - s) + y > \frac{1}{2}$, dan bezit blok Y de doorslaggevende stem; enig herschikken van de termen in de voorwaarde levert dat dit het geval is als

$$x + t < \frac{1}{2} \text{ én } x + y + t > \frac{1}{2}, \text{ ofwel:}$$

$$\frac{1}{2} - x - y < t < \frac{1}{2} - x.$$

- 3 Als $s + x < \frac{1}{2}$ én $s + x + (t - s) > \frac{1}{2}$, dan bevindt zich een *ongebondene* (tussen X en Y in figuur 1) in een machtspositie. De voorwaarde komt overeen met:

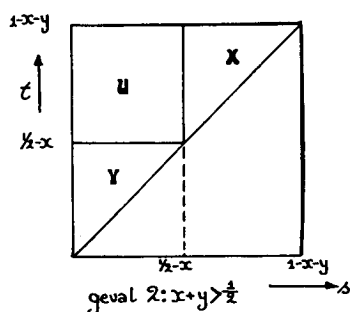
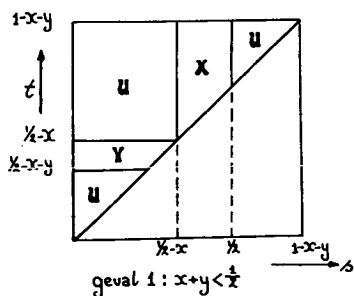
$$s < \frac{1}{2} - x \text{ én } t > \frac{1}{2} - x.$$

- 4 Blok X heeft de doorslaggevende stem als geldt dat

$$s < \frac{1}{2} \text{ én } s + x > \frac{1}{2}, \text{ dus als } \frac{1}{2} - x < s < \frac{1}{2}.$$

- 5 Tenslotte heeft een *ongebondene* (links van X in figuur 1) macht, wanneer

$$s > \frac{1}{2}. \text{ Dit kan alleen als } x + y < \frac{1}{2}^*.$$



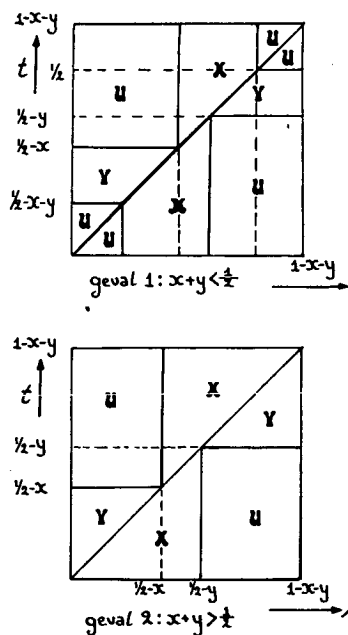
Figuur 4

Een overzichtelijke manier om al deze verschillende situaties in kaart te brengen, is de weergave in een $s - t$ -diagram.* Aan situatie 1 en aan situatie 5 is te zien dat er twee diagrammen getekend moeten worden: één voor het geval dat $x + y < \frac{1}{2}$, en één voor het geval dat $x + y > \frac{1}{2}$. De diagrammen blijken er als volgt uit te zien (figuur 4).

Figuur 4 laat zien in welke situaties blok X macht kan uitoefenen (weergegeven door die 'gebieden' waar een 'x' staat), enzovoort.

(Een ' ' in een 'gebied' betekent dat daar een ongebondene de doorslaggevende stem bezit).

De voorstaande analyse kan ook worden toegepast in het geval dat $s > t$ (figuur 2). Daarmee kunnen dan de volledige diagrammen van machtsuitoefening geschetst worden, als in figuur 5.



Figuur 5

Nemen wij, in navolging van Shapley en Shubik, aan dat alle combinaties van s - en t -waarden in het diagram eenzelfde waarschijnlijkheid van optreden hebben, en dus met eenzelfde relatieve frekwentie gerealiseerd worden, dan vormen de oppervlakten

van de diverse 'gebieden' een maat voor het (relatieve) aantal keren dat blok X , blok Y óf een ongebondene zich in een machtspositie bevindt, dus een *maat voor macht*. De fraktie van de totale macht die elk bezit, vindt men dan door de betreffende oppervlakte te delen door de oppervlakte van het gehele vierkant $(= (1 - x - y)^2)$.

Voor geval 1: $x + y < \frac{1}{2}$ verkrijgt men zo:

$$\begin{aligned} \Phi_X &= \text{fraktie van de macht in handen van blok } X \\ &= \frac{x \cdot (1 - x - 2y)}{(1 - x - y)^2} \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \Phi_Y &= \text{fraktie van de macht in bezit van blok } Y \\ &= \frac{y \cdot (1 - y - 2x)}{(1 - x - y)^2} \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} \text{en } \Phi_U &= \text{deel van de macht in handen van ongebondenen} \\ &= 1 - \Phi_X - \Phi_Y \end{aligned} \quad (1c)$$

Voor geval 2: $x + y > \frac{1}{2}$, worden de formules:

$$\Phi_X = \frac{(\frac{1}{2} - y)^2}{(1 - x - y)^2} \quad (2a)$$

$$\Phi_Y = \frac{(\frac{1}{2} - x)^2}{(1 - x - y)^2} \quad (2b)$$

$$\text{en } \Phi_U = 1 - \Phi_X - \Phi_Y \quad (2c)$$

Overlopen: twee voorbeelden

Met behulp van de formules voor machtsverdeling die in de vorige paragraaf zijn afgeleid, kan men voor elke raad waarbinnen *twee blokken* voorkomen, becijferen welk aandeel van de macht elke groepering bezit.

Kijken we nogmaals naar het voorbeeld

$$\begin{aligned} x &= 4/10 \\ y &= 3/10 \\ u &= 3/10. \end{aligned}$$

In die situatie heeft blok X 40% van de zetels, maar *niet*, zoals soms wel verondersteld wordt, ook 40% van de macht. Immers, omdat $x + y = 7/10 > \frac{1}{2}$, geldt volgens formule (2a):

$$\Phi_X = \frac{(\frac{1}{2} - \frac{3}{10})^2}{(1 - \frac{4}{10} - \frac{3}{10})^2} = \frac{(\frac{2}{10})^2}{(\frac{3}{10})^2} = \frac{0,04}{0,09} = \frac{4}{9}.$$

Dit komt overeen met ongeveer 44,4%.

Door blokvorming heeft X dus haar macht met 11% van hetgeen zij zou moeten bezitten, doen toenemen!

Voor blok Y geldt:

$$\Phi_Y = \frac{(\frac{1}{2} - \frac{4}{10})^2}{(1 - \frac{4}{10} - \frac{3}{10})^2} = \frac{(\frac{1}{10})^2}{(\frac{3}{10})^2} = \frac{0,01}{0,09} = \frac{1}{9}.$$

Dit komt overeen met ongeveer 11,1%, een beduidend lager aandeel in de macht dan in eerste instantie op grond van de zetelverdeling verwacht mocht worden⁵: met driekwart van het aantal zetels van Blok X , bezit Y slechts één kwart van de macht van X .

Wanneer blok Y er nu in zou slagen om een aantal leden van blok X te laten overlopen, dan zou ná die operatie de situatie wel eens omgekeerd kunnen zijn:

$$x = \frac{3}{10}, y = \frac{4}{10}, u = \frac{3}{10}, \text{ en dus:}$$

$$\Phi_X = 11,1\% \text{ en } \Phi_Y = 44,4\%.$$

De machtswinst van Y (33,3%) kan Y – bijvoorbeeld als lokmiddel of konsessie – ter beschikking stellen van de leden uit X die besluiten over te lopen naar Y . Die overlopers (in ons voorbeeld: 25% van de leden van X) zouden daarmee hun macht zien stijgen van 25% van 44,4 = 11,1% naar 33,3% (de premie voor overlopen): een *ver-drievoudiging*!!

Een ander voorbeeld: stel $x = 0,25$, $y = 0,15$ en (dus) $u = 0,6$.

In dit geval geldt: $x + y = 0,4 < \frac{1}{2}$, dus ter becijfering van de machtsverdeling moeten de formules (1a), (1b) en (1c) gebruikt worden:

$$\begin{aligned} \Phi_X &= \frac{0,25(1 - 0,25 - 0,30)}{(1 - 0,25 - 0,15)^2} = \\ &= \frac{0,25 \cdot 0,45}{(0,6)^2} = 28,5\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_Y &= \frac{0,15(1 - 0,15 - 0,5)}{(1 - 0,25 - 0,15)^2} = \\ &= \frac{0,15 \cdot 0,35}{(0,6)^2} = 14,6\%. \end{aligned}$$

Veronderstel eens dat één derde deel van blok Y overweegt over te lopen naar blok X . Vóór het overlopen hebben zij ongeveer $\frac{1}{3} \cdot 14,6 \approx 4,9\%$ van

alle macht. Ná het overlopen zou de situatie zijn:

$x = 0,30$, $y = 0,10$ en $u = 0,6$, met

$$\Phi_X = \frac{0,3(1 - 0,3 - 0,2)}{(1 - 0,3 - 0,1)^2} = \frac{0,3 \cdot 0,5}{(0,6)^2} = 41,7\%$$

Blok X kan derhalve aan de kandidaat-overlopers als lokkertje $41,7\% - 28,5\% = 13,2\%$ van de macht in het vooruitzicht stellen: beduidend méér dan de $4,9\%$ die zij nu hebben. Ook in dit geval lijkt het dus, vanuit een verondersteld streven naar macht, de moeite waard om de principes maar eens te gaan overdenken ...

De overlopers-curve

In deze paragraaf zal het voorafgaande tweetal voorbeelden worden gegeneraliseerd. Allereerst de becijfering voor geval 1: $x + y < \frac{1}{2}$.

In deze situatie geven de formules (1a), (1b) en (1c) de machtsverhoudingen binnen de raad weer; in het bijzonder

$$\Phi_X = \frac{x(1 - x - 2y)}{(1 - x - y)^2} \text{ en } \Phi_Y = \frac{y(1 - y - 2x)}{(1 - x - y)^2} \quad (1a \text{ en } 1b).$$

Veronderstel dat een deel van Y overweegt naar blok X over te lopen. Stel dat die kandidaat-overlopers een proportie ter grootte h van de totale raad uitmaken, dan is hun gezamenlijke aandeel in de macht van Y gelijk aan (h is klein):

$$\Phi_{\text{overlopers, vóór het overlopen}} = \frac{h}{y} \cdot \Phi_Y = \frac{h(1 - y - 2x)}{(1 - x - y)^2} \quad (3)$$

Ná het overlopen zou de volgende situatie zijn ontstaan:

blok X , met fraktie $x + h$ van de stemmen
 blok Y , met fraktie $y - h$ van de stemmen
 en de ongebondenen, nog steeds met aandeel u van de zetels.

De macht van het (versterkte) blok X wordt dan gegeven door:

$$\begin{aligned} \Phi_{X, \text{ ná}} &= \frac{(x + h)(1 - (x + h) - 2(y - h))}{(1 - (x + h) - (y - h))^2} \\ &= \frac{(x + h)(1 - x - 2y + h)}{(1 - x - y)^2} \\ &= \underbrace{\frac{x(1 - x - 2y)}{(1 - x - y)^2}}_{\Phi_{X, \text{ vóór}}} + \underbrace{\frac{h(1 - 2y)}{(1 - x - y)^2} - \frac{h^2}{(1 - x - y)^2}}_{\text{ongeveer gelijk aan 0, omdat } h \text{ klein is t.o.v. } x \text{ en } y} \end{aligned}$$

De machtswinst van blok X , door het toelaten van de overlopers, wordt derhalve gegeven door:

$$\text{machtswinst } X = \frac{h(1 - 2y)}{(1 - x - y)^2} \quad (4)$$

In geval de (kandidaat-)overlopers door machtsstreven bewogen worden, en in geval blok X als lokmiddel of premie voor de (kandidaat-)overlopers haar machtswinst ter beschikking zal stellen van die overlopers, mag een 'ideologische omme-zwaai' verwacht worden als

$$\text{machtswinst } X > \Phi_{\text{overlopers vóór het overlopen}} \quad (5)$$

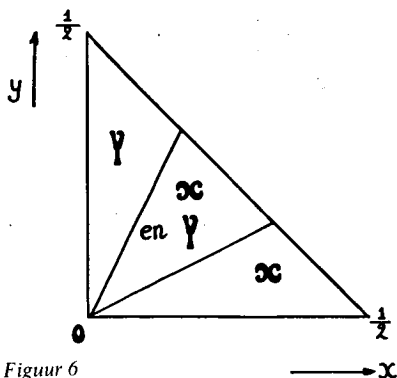
Vullen wij in formule (5) de resultaten (4) en (3) in, dan valt in te zien, dat – onder de gestelde voorwaarden! – overlopen van Y naar X zal kunnen plaatsvinden als

$$\begin{aligned} \frac{h(1 - 2y)}{(1 - x - y)^2} &> \frac{h(1 - y - 2x)}{(1 - x - y)^2}, \text{ ofwel als} \\ 1 - 2y &> 1 - y - 2x, \text{ dus wanneer} \\ x &> \frac{1}{2}y \end{aligned} \quad (6)$$

Volstrekt analoog aan het voorafgaande valt aan te tonen dat overlopen van blok X naar blok Y kan optreden zodra

$$y > \frac{1}{2}x \quad (7)$$

In een eenvoudig diagram valt deze analyse als volgt samen te vatten (figuur 6).



Figuur 6

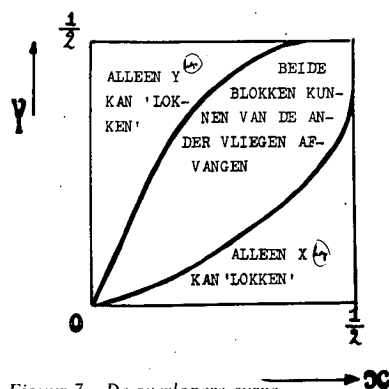
In figuur 6 betekent een X in een 'gebied', dat in dat 'gebied' blok X leden van blok Y kan 'lokken'; een Y betekent dat blok Y aantrekkelijk kan zijn voor kandidaat-overlopers uit X . Te zien is, dat er een soort 'tussengebied' bestaat waar *beide* blokken van de ander vliegen kunnen afvangen.

De becijfering voor geval 2: $x + y > \frac{1}{2}$:

de berekening voor deze situatie verloopt ongeveer hetzelfde als die van geval 1; de benodigde algebra is echter ietwat gekompliceerder. De lezer wordt uitgenodigd te verifiëren dat

blok X kan 'lokken' als $x > \frac{1}{2} - \sqrt{y - 2y^2}$ (8),
en blok Y kan 'lokken' als $y > \frac{1}{2} - \sqrt{x - 2x^2}$ (9).

Mét deze gegevens valt nu de volledige overlopers-curve te tekenen (figuur 7).



Figuur 7 De overlopers-curve

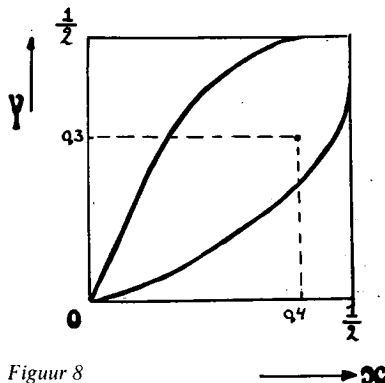
Gebruik van de overlopers-curve

De algemene benadering van de voorgaande paragraaf, met als resultaat de overlopers-curve, maakt

het nu eenvoudig om in alle konkrete gevallen waarin $x < \frac{1}{2}$ en $y < \frac{1}{2}$ te bepalen wat er zoal kan gebeuren.

Bekijken wij nog eens de twee voorbeelden uit een eerdere paragraaf.

Voorbeeld 1: $x = \frac{4}{10}$, $y = \frac{3}{10}$ (en $u = \frac{3}{10}$). Ten opzichte van de curve kan deze situatie als volgt worden weergegeven (figuur 8).

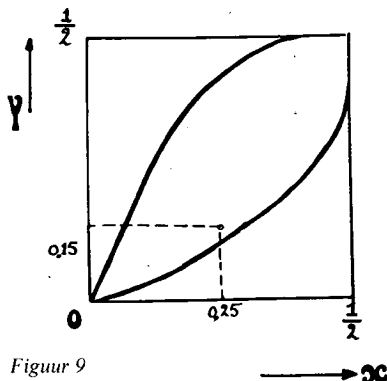


Figuur 8

Aan de ligging van de stip kan worden gezien dat *beide* blokken aantrekkelijk zijn voor kandidaat-overlopers uit het andere blok.

Voorbeeld 2: $x = 0,25$, $y = 0,15$ (en $u = 0,6$).

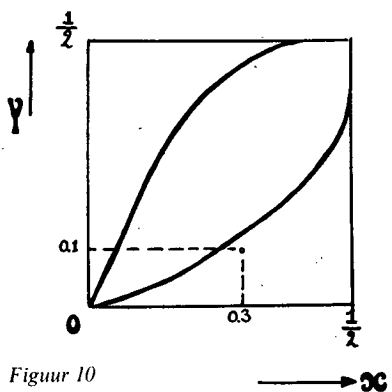
Ook dit punt ligt in het tweezijdige afvang'gebied' (zoals in figuur 9 te zien is), zij het nog maar *nét*.



Figuur 9

Na het overlopen van een deel van Y (5% van het totaal aantal leden van de raad), ontstond de situatie (figuur 10) $x = 0,3$, $y = 0,10$ (en $u = 0,6$).

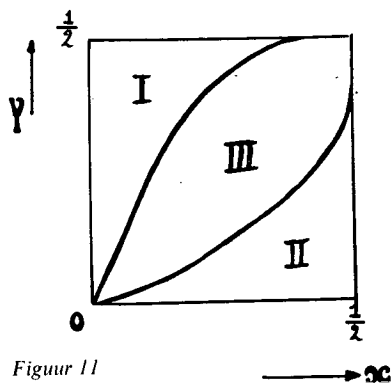
Door het aantrekken van wat overlopers uit Y heeft blok X zich in een positie weten te manoeuvreren waarin het voor blok Y onmogelijk is geworden om leden uit blok X te werven: zo wast de ene hand de andere...



Figuur 10

Gevolgtrekkingen

Wanneer het hier ontwikkelde model de werkelijkheid enigermate adequaat zou beschrijven, dus wanneer overlopen van een groot blok naar een beduidend kleiner blok (de 'gebieden' I en II in figuur 11) praktisch nooit voorkomt, terwijl het omgekeerde wel frekwent optreedt, dan mag op



Figuur 11

grond van het 'scheermes van Ockham' veilig aangenomen worden dat de veronderstellingen van het model (met name over het streven naar macht) gewettigd zijn.

Dit betekent dat het zoeken naar ideologische motieven om het overlopen van raadsleden te verklaren in het algemeen niet nodig zal zijn: op grond van pure machtspolitiek is een dergelijk verschijnsel prima te duiden, ook al zal de overloper-in-kwestie dat misschien niet zo gaarne in het lokale dagblad vermeld zien staan. Pas wanneer iemand naar een beduidend kleiner blok overloopt (in 'gebied' II van X naar Y, bijvoorbeeld) schiet de verklaring op grond van machtsstreven tekort.

Noten bij het voorwoord

- 1 Brams, Lucas, Straffin, (eds): *Political and Related Models*, Springer, New York, 1983, p. viii.
- 2 Zo noemt E. H. van der Beugel de plaatsing van kruisraketten, in 'Te beginnen bij Nederland' (van Oorschot, Amsterdam, 1983, p. 42), de bundel waarin we kunnen lezen hoe het allemaal echt in elkaar steekt.
- 3 1 in: *Filosofie en Praktijk*, te verschijnen (maart 1986).
2 in: *Wetenschap en Samenleving*, 1985, no. 2, p. 32-37.
3 in: *Nieuwe Wiskrant*, 4e jaargang, nr. 2, febr. 1985, p. 19-23.
- 4 L. R. J. Westermann: 'Wiskunde toepassingen in de economie', *Euclides*, 60, 10, p. 352-356.
J. Chr. Perrenet: 'Wiskunde in de psychologiestudie', *Euclides*, 61, 3, p. 112-116.

Noten

- 1 P. D. Straffin Jr.: 'The Bandwagon Curve'; *Am. J. Pol. Sci.*, XXI, 4, November 1977, pp. 695-709.
- 2 M. Staring: 'Macht en tevredenheid in de Tweede Kamer. De politiek de wiskundes in.'; *Nieuwe Wiskrant*, 4e jg., nr. 2, februari 1985, pp. 19-23.
- 3 S. J. Brams, W. F. Lucas, P. D. Straffin Jr. (eds): 'Political and Related Models'; Springer, New York, 1983, de hoofdstukken 9, 10 en 11.
Zie ook:
P. D. Straffin Jr.: 'Homogeneity, Independence and Power Indices'; *Public Choice*, XXX, Summer 1977, pp. 107-118.
R. J. Johnston: 'On the Measurement of Power: Some Reactions to Laver'; *Environment and Planning A*, 1978, Vol. 10, pp. 907-914.
- 4 P. D. Straffin Jr.: 'The Bandwagon Curve', p. 697.
Voor een uitgebreider behandeling zie 'Political and Related Models', hoofdstuk 11.
- 5 Meer hierover in 'Political and Related Models', pp. 274-278.
- 6 Het geval $x > \frac{1}{2}$ (of $y > \frac{1}{2}$) kan op dezelfde wijze als hier is geschied voor de andere gevallen onderzocht worden: wij wensten echter de bespreking niet nóg saaier/taaiër te maken dat deze sowieso al is.

Over de auteurs:

Mike Staring is werkzaam aan de vakgroep wiskunde en actief in de werkgroep vredesonderwijs van de KLS, lerarenopleiding te Sittard.

Jeroen Staring is politiek antropoloog en free-lance publicist.

De Nederlandse Wiskunde Olympiade 1985

H. N. Schuring

Eerste ronde

Op vrijdag 22 maart 1985 is de eerste ronde gespeeld. Aan alle scholen voor havo en vwo is verzocht leerlingen van niet-eindexamenklassen in de gelegenheid te stellen hieraan mee te doen. Gedurende 3 uur konden de deelnemers proberen 13 opgaven op te lossen. Alleen goede antwoorden telden mee. Het maximaal te behalen puntenaantal was 36.

De wedstrijdleiders van 181 scholen hebben het uitslagenformulier tijdig opgestuurd, zodat het resultaat van 1816 deelnemers in onderstaand overzicht verwerkt kon worden.

De cesuur is gelegd bij score 16, wat zeggen wil dat de deelnemers van niet-eindexamenklassen die 16 of meer punten behaalden, werden uitgenodigd voor de tweede ronde. Van de 101 deelnemers waren er 86 leerling van 5 vwo en 9 leerling van 4 vwo, terwijl 6 leerlingen buiten mededinging deelnamen. Doordat 5 deelnemers aan de Pythagoras Olympiade in aanmerking kwamen voor deelname, zijn 100 leerlingen uitgenodigd om deel te nemen aan de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

De wisselprijs voor de school met het hoogste puntentotaal van de beste vijf deelnemers van die school is op vrijdag 7 juni 1985 uitgereikt aan de CSG 'Blaise Pascal' te Spijkenisse; de vijf deelnemers behaalden samen 85 punten.

Tweede ronde

Op 13 september 1985 is in Utrecht de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1985 gehouden. Van de 100 uitgenodigde leerlingen hebben er 99 deelgenomen. Zij hadden 3 uur de tijd om vier opgaven op te lossen. De maximale score per opgave was 10 punten.

Door bij gelijke eindscore rekening te houden met het behaalde puntenaantal in de eerste ronde, zijn

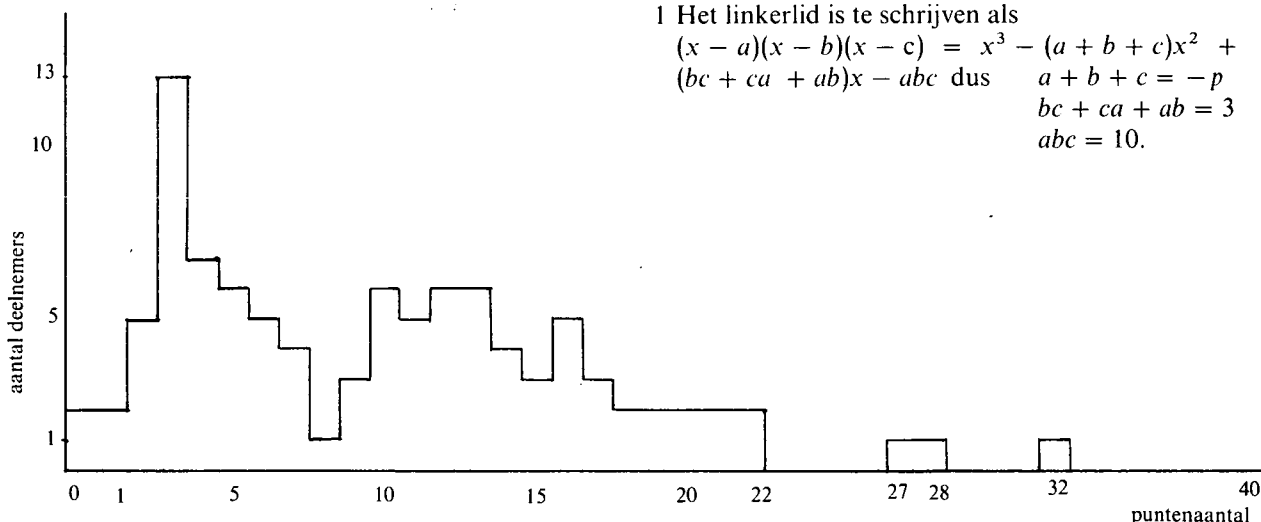
score	frequentie	cumulatieve frequentie
32	1	1
31	0	1
30	1	2
29	4	6
28	0	6
27	0	6
26	1	7
25	2	9
24	2	11
23	6	17
22	10	27
21	9	36
20	9	45
19	11	56
18	15	71
17	10	81
16	20	101

score	frequentie	cumulatieve frequentie
15	24	125
14	39	164
13	37	201
12	30	231
11	70	301
10	48	349
9	113	462
8	128	590
7	118	708
6	197	905
5	64	969
4	265	1234
3	33	1267
2	307	1574
1	16	1590
0	226	1816

de volgende 10 deelnemers prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1985:

	punteenaantal	
	tweede ronde	eerste ronde
1. Jeroen Nijhof, Borne	32	30
2. Alain Verberkmoes, Waalre	28	32
3. Alec Maassen v.d. Brink, Delft	27	29
4. Lex Warners, Utrecht	22	20
5. Dirk Jan v.d. Heuvel, Haren	22	18
6. Floris Merison, Bodegraven	21	22
7. Michel van Eyck, Spijkenisse	21	18
8. Lammert Bies, Donkerbroek	20	23
9. Peter v.d. Heuvel, Bladel	20	22
10. Hugo Laurman, Spijkenisse	19	20

Het onderstaande staafdiagram geeft een overzicht van de scores van alle deelnemers aan de tweede ronde:



Opgaven tweede ronde:

- 1 Voor zeker reëel getal p bestaat de oplossingsverzameling van de vergelijking

$$x^3 + px^2 + 3x - 10 = 0$$

uit drie verschillende reële getallen a, b en c , waarbij $c - b = b - a > 0$.

Bereken p, a, b en c .

- 2 Hoeveel kwadraten zijn er onder de 10^{10} getallen

$$x_n = 11n + 10^{11} \quad (n = 1, 2, \dots, 10^{10})?$$

- 3 In een fabriek moeten vierkante tafeltjes van $40 \times 40 \text{ cm}^2$ betegeld worden met telkens vier tegels van $20 \times 20 \text{ cm}^2$. De tegels zijn voorzien van een asymmetrisch patroon (bijvoorbeeld de letter J), en allemaal hetzelfde.

Hoeveel verschillende tafeltjes kan de fabriek produceren?

- 4 Gegeven is een zeshoek $ABCDEF$ zonder inspringende hoeken met de eigenschap dat de diagonalen AD, BE en CF de zeshoek telkens in twee stukken van gelijke oppervlakte verdelen.

Bewijs dat AD, BE en CF door één punt gaan.

Oplossingen:

- 1 Het linkerlid is te schrijven als

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (bc + ca + ab)x - abc \text{ dus } \begin{aligned} a + b + c &= -p \\ bc + ca + ab &= 3 \\ abc &= 10. \end{aligned}$$

Noem $c - b = b - a = v$, dan geeft dit

$$\begin{aligned} 3b &= -p \\ 3b^2 - v^2 &= 3 \\ b(b^2 - v^2) &= 10. \end{aligned}$$

Elimineren van v leidt tot $2b^3 - 3b + 10 = 0$ met $b = -2$ als enige reële oplossing. Hieruit volgt $v = 3$, dus $p = 6$, $a = -5$, $b = -2$, $c = 1$.

2 *Geén!* Elk kwadraat is een 11-voud plus 0, 1, 4, 9, 5 of 3, maar $10^{11} = (11 - 1)^{11}$ is een 11-voud plus $(-1)^{11} = -1$, dus een 11-voud plus 10.

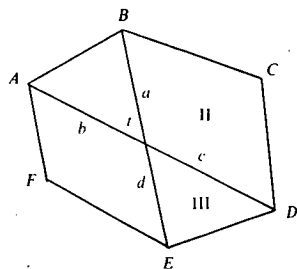
3 Elke tegel kan op 4 manieren gelegd worden. Er zijn 4 plaatsen, dus in totaal 4^4 mogelijkheden. Maar sommige geven hetzelfde tafeltje:

a Patronen met 4-voudige rotatiesymmetrie. Die liggen vast door de keuze van één tegel. Er zijn vier van die patronen, en elk komt maar één maal voor.

b Patronen met tweevoudige (maar geen viervoudige) rotatiesymmetrie. Die liggen vast door de keuze van twee tegels naast elkaar. Ze komen dus $(4^2 - 4) = 12$ maal voor, en telkens zijn er twee gelijk. Er ontstaan dus 6 verschillende tafeltjes.

c Patronen zonder rotatiesymmetrie. Dat zijn de overblijvende $(4^4 - 12 - 4) = 240$ mogelijkheden. Telkens zijn er dan vier gelijk, dus er ontstaan 60 verschillende tafeltjes.

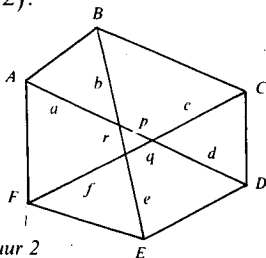
In totaal kan de fabriek dus $4 + 6 + 60 = 70$ verschillende tafeltjes produceren.



Figuur 1

4 Hulpstelling (zie fig. 1): $ab = cd$.

bewijs: $I + II = II + III$ (= halve oppervlakte) dus $I = III$; $I = \frac{1}{2}ab \sin t$, $III = \frac{1}{2}cd \sin t$, dus $ab = cd$. Nu het in de opgave gevraagde bewijs (zie fig. 2):



Figuur 2

$$ab = (p + d)(r + e) \geq de$$

$$cd = (a + p)(f + q) \geq af$$

$$ef = (b + r)(c + q) \geq bc$$

Vermenigvuldig deze ongelijkheden, dan volgt $p = q = r = 0$.

Olympiade 1986

Op grond van de resultaten in de eerste ronde van 1905 leerlingen van 210 scholen is de cesuur gelegd bij score 28.

Dit wil zeggen dat de deelnemers van niet-eindexamenklassen die 28 of meer punten behaald hebben in de eerste ronde in aanmerking kunnen komen voor deelname aan de tweede ronde in september 1986. De school met het hoogste puntentotaal van de beste vijf deelnemers van die school is de C.S.G. 'Blaise Pascal' te Spijkenisse, die evenals vorig jaar de wisselprijs gewonnen heeft.

Gezien de vele vragen over opgave B4 volgt hier een oplossing:

$$\begin{aligned} (5^2 + 9^2)(12^2 + 17^2) &= (5 \cdot 12)^2 + (5 \cdot 17)^2 + \\ &+ (9 \cdot 12)^2 + (9 \cdot 17)^2 = (5 \cdot 12)^2 + \\ &+ 2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 17 + (9 \cdot 17)^2 + (5 \cdot 17)^2 + \\ &+ 2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 9 \cdot 12 + (9 \cdot 12)^2 = (5 \cdot 12 \pm 9 \cdot 17)^2 \\ &+ (5 \cdot 17 \mp 9 \cdot 12)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } (5^2 + 9^2)(12^2 + 17^2) = 213^2 + 23^2 \text{ of } (5^2 + 9^2)(12^2 + 17^2) = 93^2 + 193^2.$$

H. N. Schuring, secretaris

Vervolg van p. 257.

worden gehouden in scholen. Gedacht wordt aan een tijd van 16.30 tot 20.00 uur (inclusief een eenvoudige maaltijd). Het ligt in de bedoeling dat de vereniging van de maaltijd f 5,- en de reiskosten, op basis van openbaar vervoer 2de klas, boven f 10,- vergoedt.

- Er is een lid van de didactiekcommissie beschikbaar als kwartiermaker. Deze zorgt voor een goed functioneren van de werkgroep, maar is niet noodzakelijk deskundig in het studieonderwerp.
- Degenen die belangstelling hebben voor het onderwerp wordt verzocht zich zo spoedig mogelijk aan te melden bij: Didactiekcommissie, p/a T. Vandeberg, Meester Absilstraat 11, 6461 EX Kerkrade
- Vermeld u uw telefoonnummer i.v.m. het vaststellen van de data van de bijeenkomsten.

Namens de didactiekcommissie: T. Vandeberg

HEWET in de onderbouw?

1 Inleiding

Het programma voor de bovenbouw van het vwo is ingrijpend veranderd. In 1987 zullen voor het eerst voor het hele vwo nieuwe Hewet-eindexamenprogramma's wiskunde gelden. Voor het havo staat ook een wijziging op stapel.

De werkgroep Hewet-in-de-onderbouw, ingesteld door de didaktiekcommissie, denkt na over de invloed van deze ontwikkelingen voor het onderwijs in de onderbouw. In dit artikel van de werkgroep wordt een eerste schets van het 'probleemveld' gegeven.

2 Verschillen

Een kenmerk van het nieuwe A-programma voor het vwo is dat er gebruik gemaakt wordt van allerlei realistische situaties: de wiskunde wordt ontwikkeld in samenhang met haar toepassingen in niet-wiskundige probleemsituaties. Immers in veel vakken en beroepen wordt gebruik gemaakt van wiskundige modellen. Voor leerlingen die dit later nodig hebben is het van groot belang dat ze leren werken met wiskunde die tastbare betekenis heeft. Om de verschillen tussen het oude en het nieuwe programma te illustreren staan hieronder twee voorbeelden. Het eerste komt uit Moderne wiskunde derde editie, deel 7v, het tweede komt uit Moderne wiskunde vierde editie, deel vwo 4.

Wat opvalt is dat in voorbeeld 1 sprake is van één kontekst terwijl in voorbeeld 2 in elke opdracht een andere kontekst voorkomt. In voorbeeld 1 volgen de opdrachten op drie bladzijden theorie, in voor-

6.7 Het inwendig produkt

Inwendig
produkt

In de vectorrekening is het *inwendig produkt* (ook wel genoemd *inproduct*) een zeer belangrijk begrip.

Het speelt een rol bij allerlei toepassingen van de vectorrekening buiten de wiskunde.

VOORBEELD

In de mechanica wordt gesproken over de arbeid die door een kracht wordt verricht, wanneer deze kracht zijn aangrijpingspunt over een zekere weg s verplaatst. Zie figuur 6.4.

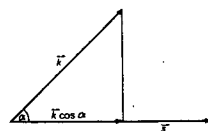


FIG. 6.4

De verplaatsing van het aangrijpingspunt wordt gegeven door de vector s . De kracht wordt voorgesteld door de vector k . In dit voorbeeld is de richting van de kracht niet dezelfde als die van de verplaatsing s .

k en s maken de hoek α met elkaar.

Men definieert nu de arbeid W die door de kracht wordt verricht met de formule:

$$W = |k| \cdot |s| \cdot \cos \alpha$$

(...)

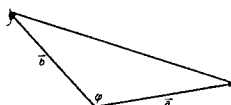


FIG. 6.6

In figuur 6.6 is $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$

Is $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ dan is $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ en $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

De zijde tegenover de hoek φ heeft als lengte

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

We passen de cosinusregel toe:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$$

Hieruit volgt:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}(2a_1b_1 + 2a_2b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

Als $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ dan is $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$

OPDRACHTEN

1 Toon aan dat de volgende beweringen waar zijn: voor alle $\vec{a}, \vec{b}$ en $\vec{c} \in V$

a. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$

b. $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$

c. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$

(...)

2 a. Bereken het inproduct van de vectoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. Bereken ook de cosinus van de ingesloten hoek.

3 Bereken p als de vectoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ p \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar staan.

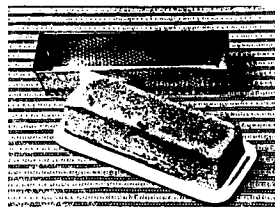
Voorbeeld 1

beeld 2 wordt de theorie ontwikkeld in de opdrachten en pas later geëxpliciteerd.

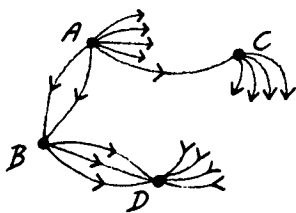
8-4 Inproduct

- 17 Voor het bakken van een eenvoudige cake in een cakevorm met een inhoud van 2 liter zijn de volgende ingrediënten nodig: $2\frac{1}{2}$ ons bloem, $1\frac{1}{2}$ ons suiker, 1 ons boter, 1 ons krenten en 3 eieren.
De hoeveelheidsvector van zo'n cake is $\vec{q} = (2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 1, 1, 3)$.
De prijzenvector (in centen) voor bloem, suiker, boter, krenten (per ons) en eieren (per stuk) was:
in 1979: $\vec{p}_{79} = (12, 19, 36, 40, 18)$
in 1982: $\vec{p}_{82} = (14, 24, 40, 44, 21)$.
- a Hoeveel is de kostprijs voor het bakken van cake tussen 1979 en 1982 gestegen?
- b Voor de bepaling van het kostprijsverschil is het niet nodig om de kostprijzen in 1979 en 1982 beide afzonderlijk te berekenen. Als je de *relatieve kostprijsverandering* moet bepalen, heb je de kostprijs in 1979 ook nog nodig. Met hoeveel procent is de kostprijs tussen 1979 en 1982 gestegen?

(...)



- 20 Wie van A naar D wil moet over B of C. Er zijn:
2 wegen van A naar B
5 wegen van A naar C
3 wegen van B naar D
4 wegen van C naar D
De 'uitvector' van A' is $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; de 'invector' van D' is $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Uit hoeveel routes kun je kiezen als je van A naar D wilt gaan?



De vraagstukken 18, 19 en 20 worden op dezelfde wijze opgelost. In elk van de gevallen wordt het antwoord gevonden door vermenigvuldigen van de overeenkomstige kentallen van twee vectoren en optellen van deze produkten. Het zo verkregen getal heet **inproduct**.

Als $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, dan is het **inproduct** van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ het getal $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

De notatie voor het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
Dus: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

- 21a Bereken het inproduct van de vectoren $(3, 2, 5)$ en $(-1, 3, 3)$.
b $\vec{a} = (3, 2, 4)$, $\vec{b} = (381, 151, 128)$ en $\vec{c} = (390, 157, 118)$.
Welk inproduct is het grootst: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ of $\vec{a} \cdot \vec{c}$?

- 22 Muzikanten uit A, B en C gaan een solfègecursus volgen. Uit A komen 12 deelnemers, uit B 6 en uit C 36. Er zijn twee cursusplaatsen beschikbaar: P en Q. Bij de cursusplaats P moeten de muzikanten uit A, B en C achtereenvolgens 9, 7 en 13 km reizen; bij de cursusplaats Q zijn deze afstanden 11, 6 en 15 km. De bond van muzikanten stelt de cursusplaats vast en betaalt de reiskosten. Welke cursusplaats zal men kiezen?

23 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Toon aan:

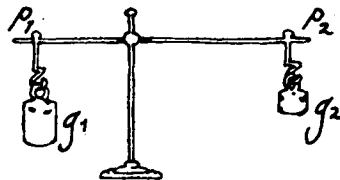
- a $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
b $k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b})$
c $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Eigenschappen van het inproduct:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\ k(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= k\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot k\vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

- 24a Toon aan, dat $\vec{a} \cdot (2\vec{b} - \vec{c}) = 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$.
b $\vec{p} = (1, 3, -1, 4)$, $\vec{q} = (2, 1, 1, x)$ en $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$. Bereken x.
c $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ en $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$. Bereken u_1, u_2, u_3 en u_4 .

- 25 Aan de balans hangen twee gewichten g_1 en g_2 , respectievelijk op de plaatsen -3 en 5.
a Onder welke voorwaarde voor g_1 en g_2 is de balans in evenwicht.
b $\vec{g}$ is de gewichtenvector (g_1, g_2) ; $\vec{p}$ is de plaatsenvector (p_1, p_2) . Onder welke voorwaarde voor het inproduct $\vec{g} \cdot \vec{p}$ is de balans in evenwicht?



Voorbeeld 2

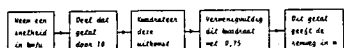
In deze voorbeelden uit Moderne wiskunde is o.a. te zien dat de plaats van de algemene regel veranderd is. In voorbeeld 2 spelen met name de opdrachten 18, 19 en 20 een grote rol bij de theorievorming: de overeenkomst in aanpak wordt uitgangspunt voor de beschrijving van het begrip inproduct. Hiermee verandert de rol van de leraar: de docerles gevolgd door oefening wordt vervangen door zelfwerkzaamheid en samenvattende klasgesprekken.

3 Meer voorbeelden

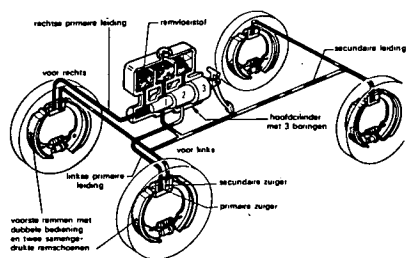
Het werken met situaties uit de realiteit heeft veel voordelen als het gaat om motiveren, rekening houden met individuele verschillen, bruikbaar zijn van het geleerde, enzovoorts. Hierover is al veel gepubliceerd door onder andere het IOWO/OW & OC en de SLO. Leerlingen die in de onderbouw al hebben leren werken met realistisch getinte opdrachten zijn ons inziens in de bovenbouw in het voordeel: anderen missen een aantal houdingen en vaardigheden die nodig zijn bij het oplossen van dergelijke problemen.

Het gebruik van realistische problemen brengt wel diverse problemen en probleempjes met zich mee. Hierna volgen enkele voorbeelden voorzien van commentaar.

- 11. De lengte van de remweg van een auto is afhankelijk van de snelheid. Als vuistregel om de lengte van de remweg bij een gegeven snelheid te schatten wordt vaak het volgende gebruikt:



- Bereken bij verschillende snelheden de remweg en teken de grafiek van de remweg als functie van de snelheid.
- Noem de remweg (in m): R en de snelheid (in km/u): V . Beschrijf R als functie van V met een formule.
- De vuistregel is geldig voor normale droge wegen. Bij nat wegdek wordt de remweg zo'n 10% langer. Teken (in hetzelfde plaatje) de grafiek in R als functie van V voor deze situatie. Beschrijf ook deze functie met een formule.



Remsysteem van een auto.

In voorbeeld 3 wordt van de leerlingen een behoorlijke mate van inleven in de situatie verwacht. Begrippen als remvertraging en reactietijd zijn weliswaar realistisch maar niet voor iedereen vertrouwd. Ook de leraar zal zich in het onderwerp moeten verdiepen. De vraag is nu:

Hoever moet de docent zich in de kontekst verdiepen om goed wiskundeonderwijs te kunnen geven?

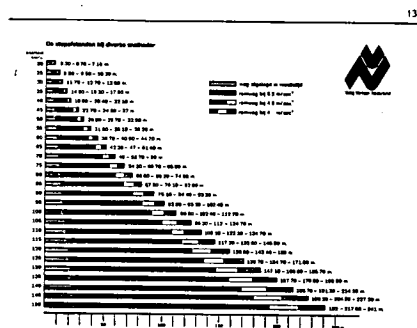
Degene die zich laat 'afleiden' door de schematische weergave van het remsysteem van een auto, zal de opdrachten misschien niet op tijd afhebben.

Wat te doen als voor ons irrelevante informatie voor de leerlingen een obstakel vormt?

Voor het uitvoeren van de deelvragen d en e van voorbeeld 3 is heel wat denkwerk nodig. Voor de controle van de formule $s = \frac{6}{10}v + \frac{3}{400}v^2$ is een rekenmachine onontbeerlijk evenals bij veel andere opdrachten.

Het gebruik van een rekenmachine is onontbeerlijk. Hoe leer je de leerlingen dit hulpmiddel goed en efficiënt te gebruiken?

Voorbeeld 3 (Functies en grafieken OW & OC)



De grafiek van Veilig Verkeer Nederland laat de remweg zien bij verschillende remvertragingen. De vuistregel in opgave ► 10 komt overeen met een remvertraging van 5,14 m/sec' (d.w.z. bij het intrappen van de rempedaal neemt de snelheid elke seconde met 5,14 m per sec af).

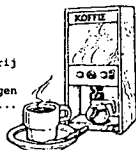
In de grafiek is ook rekening gehouden met de reactietijd van de automobilist. Gemiddeld bedraagt die zo'n 0,6 sec; dit betekent dat de automobilist gemiddeld 0,6 sec na het remmen van z'n voorganger zelf de rempedaal intrapt.

De 'stopafstand' S is dus de 'weg afgelegd in reactietijd' plus de 'remweg van de auto'.

- d. Beschrijf S als functie van V , uitgaande van de vuistregel bovenaan pag. 12.

- e. Controleer je formule voor een drietal verschillende waarden van V met behulp van de grafiek van Veilig Verkeer Nederland.

Voorjaar 1977.
Sombere tijden voor koffiedrinkend Nederland.
Het dagelijkse kopje troost lijkt een dure liefhebberij te worden.
Veel landgenoten zijn aan het koffie-hamsteren gelagen
en de supermarkten bieden een troost-elze aanblik



Het NRC Handelsblad schrijft (april 1977):

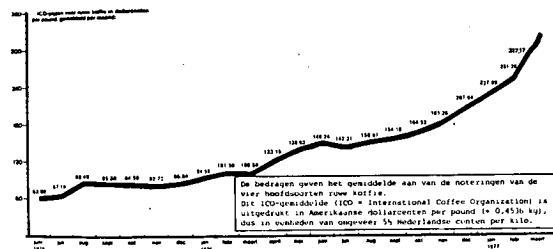
Koffieprijs als komeet de lucht in

Door onze redacteur
W.J. van Campen

Maatregelen van de belangrijke koffieleiden Brazilië en Colombia die tijdens het heel nog duurder maken van de koffie-uitvoer, hebben begin deze week een nieuwe sprong van de internationale koffie-noteringen uitgelokt. De wereldmarktprijs van het populaire genotmiddel komt daardoor welken naar steeds nieuwe hoogten. Sinds de zomer van 1975, toen de zwart-zilver schande aanrichtte aan

een flink deel van de Braziliaanse koffie-planten. Zijn de wereldmarktprijsen vrijwel voortdurend gestegen. Het huidige prijspeil is al meer dan het vijfvoudige van dat van ruim anderhalf jaar geleden. De Nederlandse exportprijs, die de sligging op de wereldmarkt met een tussenpoos van ongeveer drie maanden volgen, zullen dan ook de komende maanden weer fors moeten worden bijgesteld.

Het artikel was verlicht met een grafiek:



Gebruik de grafiek bij de beantwoording van de volgende vragen:

1. Zijn de wereldmarktprijsen steeds gestegen in de periode van juli 1975 tot en met maart 1977?
2. In de kop van het krantenartikel wordt de koffieprijs met een komeet vergeleken. Vind je dat een goede vergelijking?
3. In welk kwartaal steeg de koffieprijs het snelst? Hoe zie je dat in de grafiek?

Voorbeeld 4 (Differentiëren 1 IOWO)

Tijdens een klasgesprek over opdracht 2 van voorbeeld 4 ontstaat een discussie over de vraag of een komeet kan stijgen of niet. Veel leerlingen vinden dat een komeet altijd naar beneden valt. Deze inleidende vraag maakt de leerlingen zichtbaar onzeker. De vraag wordt gesteld: 'Komt zoiets ook in de toets?' En ook deze vraag: 'Wat is nu goed? Wat moet ik nu opschrijven?' In de ogen van leerlingen, zeker bij een toets, is er altijd slechts één antwoord.

Als je met 'alledaagse' problemen werkt moet je die dan ook in de toets opnemen?

Een leerling waarvan je weet dat die al formeler kan redeneren gebruikt een tijdrovende doortelling (voorbeeld 5) of een onnauwkeurige tekening (voorbeeld 6).

4. Wat is de gemiddelde verandering van de koffieprijs per maand in het jaar 1976?

En in het eerste kwartaal van 1977?

Die gemiddelde verandering per maand kun je opvatten als een maatstaf voor de snelheid waarmee de koffieprijs stijgt:

$$\text{gemiddelde verandering (van de koffieprijs per maand)} = \frac{\text{verandering van de koffieprijs}}{\text{verandering van de tijd}}$$

In de wiskunde schrijven we de dingen liefst zo kort mogelijk op.

$$k = \text{koffieprijs (in dollarcent per pound)}$$

$$t = \text{tijd (in maanden)}$$

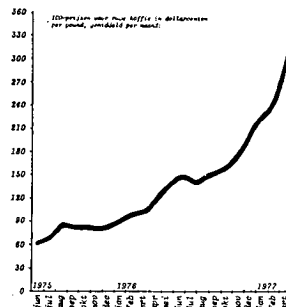
$$\text{gemiddelde verandering (van de koffieprijs per maand)} = \frac{\Delta k}{\Delta t}$$

Het symbool Δ (de griekse hoofdletter "delta") staat voor "verandering van".

5. $\frac{\Delta k}{\Delta t}$ kan ook negatief zijn! Noem een periode waarin dat het geval is.

In een andere krant zou dit plaatje hebben kunnen staan:

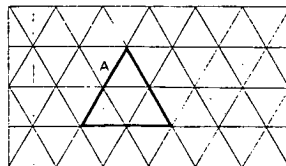
6. Deze grafiek suggereert een sterkere stijging van de koffieprijs dan de eerste grafiek. Hoe komt dat?
7. Hoe zou je, zonder aan de gegevens te knoeien, nog een sterkere stijging kunnen suggereren?



5*

Hiernaast is een ander soort roosterpapier getekend. De tegels zijn nu gelijkzijdige driehoeken. De drie zijden van zo'n driehoek zijn even lang.

- a. Hoeveel tegels heb je nodig voor driehoek A met zijde 2?
- b. Teken op dit roosterpapier een gelijkzijdige driehoek met zijde 3. Hoeveel tegels heb je daarvoor nodig?
- c. Teken ook een gelijkzijdige driehoek waarvoor je 16 tegels nodig hebt. Hoe lang is de zijde van die driehoek?
- d. Vul de volgende tabel in:



lengte van de zijde	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aantal tegels										

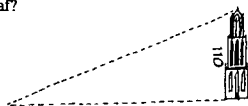
Vergelijk deze tabel met die van opdracht 3. Wat merk je op?

- e. Je kunt een gelijkzijdige driehoek maken van 144 tegels. Hoe lang is de zijde van die driehoek?

Voorbeeld 5 (M.W. 4e ed. deel 1)

tangens

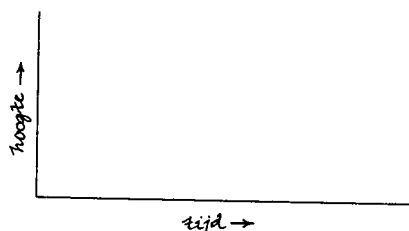
- 16 Je staat in Utrecht en ziet de Domtoren (110 m) onder een hoek van 20° . Hoever sta je dan ongeveer van de toren af?



Voorbeeld 6 (M.W. 4e ed. deel 4)

De leerling vindt dat het probleem is opgelost ('Het antwoord komt overeen met het antwoordenboekje!'), jij vindt het tijd voor een formelere redenering. Wat doe je?

Het volgende probleem is in een groepje opgelost.



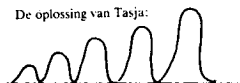
Conchita heeft dit antwoord:



Esther heeft de volgende grafiek.



De oplossing van Tasja:



Voorbeeld 7 (Grafiekentaal SLO)

Teken een grafiekje waarin je kunt (laten) zien hoe jouw afstand tot de grond verandert als je aan het schommelen bent.

Hebben jullie in de groep allemaal precies dezelfde grafiek? Of zou dat niet zo hoeven te zijn?

Praten jullie dáár 's over.

De leerlingen zijn het zeer oneens over elkaars oplossingsmethoden. Elkaar overtuigen lukt niet. Wat doe je?

Toren van Pisa weer schever

De scheve toren van Pisa is in het afgelopen jaar weer iets verder uit het lood gaan staan - met 1,19 millimeter om precies te zijn.

Ondanks de 28,5 miljoen gulden die de Italiaanse regering heeft uitgetrokken om dit te verhelpen, is het de deskundigen nog steeds niet duidelijk wat de oorzaak is van het verzakken van de toren.

„Als wij geen manier kunnen vinden om het verzakken tegen te gaan moet hij een keer vallen, maar wanneer dat zal zijn kan niemand zeggen”, aldus professor Giuseppe Toniolo, voorzitter van de commissie die de toren in beheer heeft. „Het kan honderd jaar duren, maar het kan ook veel eerder gebeuren”.

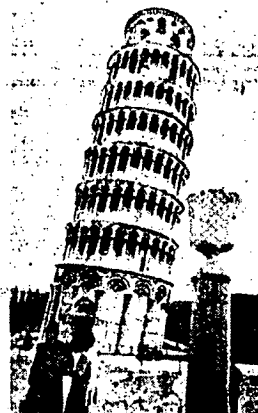
Volgens Toniolo kan er verband bestaan tussen de scheve stand en een laag grondwater op 50 meter diepte onder de toren. geleerden hebben ontdekt, dat de toren verder uit het lood gaat staan als de druk ondergronds gering is en in ongeveer dezelfde stand blijft wanneer de druk hoog is. In 1981 was de afwijking 0,73 millimeter, de kleinste toename in 15 jaar.

„Vorig jaar heeft het minder geregend dan het jaar daarvoor en dat kan een verklaring zijn”, aldus Toniolo. Zekerheid daarover bestaat echter niet, en de verzakking van de 54 meter hoge marmeren toren is „gewoon een mysterie”.

In februari riep de Italiaanse parlement in met een project ten bedrage van 15 miljard lire (28,5 miljoen gulden) om de toren te stabiliseren. Het geld zal voor een deel worden besteed aan een pompinstallatie, waarmee de druk van het grondwater onder het 810 jaar oude bouwwerk kan worden geregeld.

De toren zal in verband met werkzaamheden de komende vier jaar enkele malen voor het publiek gesloten zijn. De entreegelden die het stadsbestuur als gevolg daarvan, derft, zullen door de regering worden vergoed.

Overigens houdt Toniolo zijn twijfels over het project. „De vorige grote ingreep in 1934 had tot gevolg, dat de scheefstand sterk toegenam. Niemand kan zeggen wat er deze keer zal gebeuren”, zegt hij. In dat jaar werd onder het laagste deel van de toren 900 ton beton gepompt om als fundering te dienen.



De toren staat 5,10 meter uit het lood. De bouw begon in 1173 en de toren begon te verzakken toen een hoogte van 10,50 meter was bereikt. De toenmalige bouwmeesters probeerden de afwijking te verhelpen door de hogere verdiepingen recht te trekken, waardoor de toren ook nog een buiging vertoonde. In 1350, toen de toren al 3 meter uit het lood stond, werden de laatste drie verdiepingen en een klokketoren aan het bouwwerk toegevoegd.

Lees dit artikel althans een keer door.

Hoeveel procent helt de toren van Pisa over?

Schrijf ook de berekening op.

Voorbeeld 8 (SLO)

Problemen uit de realiteit zijn meestal complex. Hoe leer je leerlingen daarmee omgaan?

4 Besluit

Het is te verwachten dat docenten die werken in de onderbouw (daarbij inbegrepen het mavo en het lbo) binnen enkele jaren gekonfronteerd zullen worden met eerder geschetste punten in het kader van een nieuw programma. Als dit artikel heeft kunnen dienen als eye-opener dan is een groot deel van de taak van de werkgroep volbracht.

Werkgroep: 'Hewet in de onderbouw'

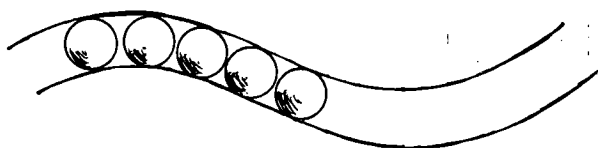
Deze werkgroep is ingesteld door de didactiekkommissie. Zij probeert consequenties van het nieuwe wiskundeprogramma in het vwo voor de onderbouw op een rij te krijgen.

De werkgroep wil doorgaan en zoekt nog versterking. Zie daarvoor een oproep elders in dit nummer.

De knikkeroot, het probleem van de evenwijdige krommen

Ir. Henk Mulder

Tijdens mijn vakantie in Zuid-Engeland zag ik in een speelgoedatelier een knikkeroot (fig. 1). Ik vond het ding dermate leuk dat ik bij thuiskomst besloot zo iets voor mijn kleinzoon Joris te maken. In het betreffende atelier wordt de golvende goot met een freesboor gemaakt; een rondtollende boor wordt langs een kromme gevoerd en zo ontstaat een overal even wijde goot: Maar zo'n boor heb ik niet. Toen ik in mijn werkplaats begon, meende ik aanvankelijk de zaak te kunnen klaren door met een decoupeerzaag een sinusvormige kromme in een plank te zagen en dan de beide delen over een geschikte afstand uit elkaar te schuiven. Maar dat viel even tegen! Op sommige plaatsen was de gleuf voldoende breed maar elders liepen de knikkers vast. Het werd tijd de werkplaats te verruilen voor het studeervertrek!

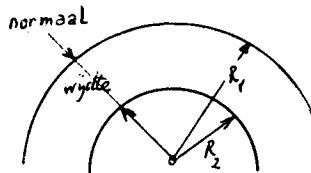


Figuur 1 De knikkeroot

Evenwijdige krommen

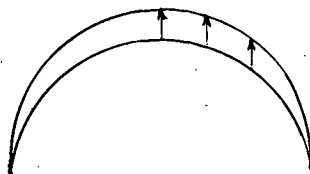
De begrenzing van de goot zou een tweetal evenwijdige krommen moeten zijn. Wat is de definitie daarvan? Laten we beginnen met het oernederlandse woord 'evenwijdig' weer eens in ere te herstellen.

Evenwijdig betekent niet 'snijpunt op oneindig...', maar overal 'even wijd'. Voor rechte lijnen is dat een eenvoudige zaak, maar hoe zit dat bij krommen?



Figuur 2 Concentrische cirkels als evenwijdige krommen

Concentrische cirkels (fig. 2) zijn een duidelijk voorbeeld van evenwijdige krommen. Immers de gootwijdte is overal $R_1 - R_2$. De wijdte is het deel van de normaal dat zich tussen beide cirkels bevindt. En hiermee is al duidelijk dat translatie van een cirkelboog (fig. 3) geen evenwijdige krommen oplevert. En dat is dan wel een heel andere situatie dan bij rechten, waar translatie een evenwijdige geeft. We proberen nu om evenwijdige krommen te realiseren. We starten met een voorbeeld.

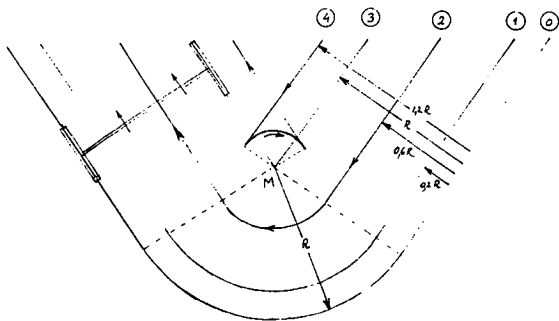


Figuur 3 Translatie geeft geen evenwijdige krommen

Parabool als geleidingskromme

In fig. 4 is de parabool $y = x^2$ getekend. We gaan deze gebruiken als geleidingsweg voor een freesboor met middellijn 0,5. Er zijn dan twee knikkerooten mogelijk begrensd door de parabool en een andere paraboolachtige kromme. Hoe kunnen we punten van die krommen vinden?

Wel: bereken in een punt M de waarde van de afgeleide en geef dan de raaklijnrichting aan. Trek vervolgens loodrecht daarop de normaal in M en pas aan weerskanten van M een stuk 0,5 af. Zo vinden we A en B van de bedoelde krommen.



Figuur 5 Parabool vervangen door cirkelboog en twee halfrechten

Vervolgens trekken we kromme (1) op afstand $0,2 R$ en kromme (2) op afstand $0,6 R$. Bij voorbeeld (3) is de afstand R en de evenwijdige bestaat nu nog maar uit twee halfrechten. Het zou het karrespoor kunnen zijn van een tweewielige koets met wielafstand R . In de bocht staat het binnenwiel dan enige tijd stil en draait om M . De knikergoot heeft nu wel een vreemde vorm gekregen. Maar wat gaat er gebeuren als de wielafstand groter dan R wordt? Het binnenwiel gaat nu krommen beschrijven van het type (4).

Merk op dat het binnenwiel bij het passeren van de bocht tweemaal stilstaat en daarna van richting omkeert. Als knikergoten zijn deze situaties volkomen onbruikbaar geworden.

Deze omkeerpunten komen dus tevoorschijn zodra de wielafstand groter is dan de straal van de bocht. Merk op dat de evenwijdige van een cirkelboog weer een cirkelstuk wordt dat bij een afstand $d < R$ met de boog meedraait en bij een afstand $d > R$ tegengesteld.

De lusvormige evenwijdige ontstaat als de afstand d groter wordt dan de kromtestraal van de boog.

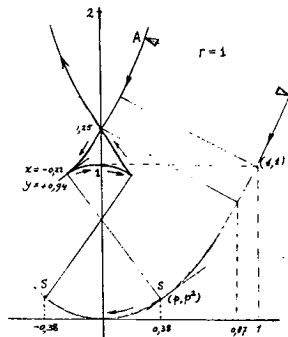
Nu bij de parabool

De parabool $y = x^2$ heeft haar kleinste kromtestraal in de top en wel $R = 0,5$. Dat betekent dat we in fig. 4 juist het grensgeval geschetst hebben door $r = 0,5$ te kiezen. De evenwijdige binnenkromme heeft bij haar top een kromtestraal nul!

Kiezen we $r > 0,5$ dan krijgen we evenals in fig. 5 een lusvormige evenwijdige.

In fig. 6 hebben we $r = 1$ gekozen en een evenwijdige punt voor punt geschetst. De kromme heeft twee symmetrisch gelegen snavelpunten waar de bewegingsrichting omkeert en dus geldt: $\frac{dx}{dp} = 0$ en

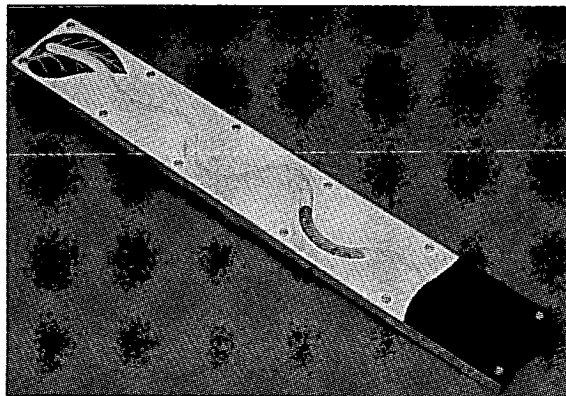
$\frac{dy}{dp} = 0$. Beide differentiaalquotienten worden tegelijkertijd nul. U kunt gemakkelijk zelf narekenen dat dit gebeurt bij $(1 + 4p^2)^3 = 4$ waaruit volgt $p = \pm 0,38$ en $x = \mp 0,22$ en $y = +0,94$. De punten S kenmerken zich hierdoor dat daar juist de kromtestraal 1 is.



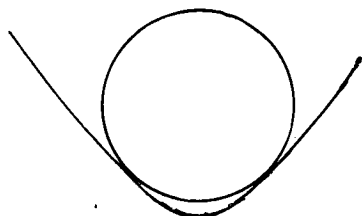
Figuur 6 Gecomplificeerde evenwijdige binnenkromme bij een parabool met continu veranderende kromming

Samenvattend

Als knikers door een goot moeten rollen, lukt dat alleen maar als hun straal kleiner is dan de kleinste kromtestraal langs het traject van de geleidingskromme (raadpleeg fig. 4). Aan de bolle zijde geeft de evenwijdige geen complicaties. Als een tweewielige koets met wielafstand r een bocht moet maken



waarbij het buitenwiel een baan beschrijft waarbij de kromtestraal ergens kleiner is dan r , zal de baan van het binnenwiel twee omkeerpunten hebben. Het deel tussen de omkeerpunten wordt dan in tegenstelde richting doorlopen als de bewegingsrichting van het buitenwiel. De omkeerpunten zijn snelpunten waarbij de beide takken elkaar raken. De raaklijnrichting is daar evenwijdig met de betreffende raaklijn aan de geleidingskromme in S . Wat er gebeurt als we knikers langs een kromme willen laten rollen waarbij de straal groter is dan de minimale kromtestraal is nog te zien in fig. 7.



Figuur 7 De knikker is te groot voor de goot

Over de auteur:

Voor sommigen van ons is wiskunde louter een spel met getallen letters en figuren. Voor technici is wiskunde 'een meisje voor halve dagen' voor orde en praktische realisatie.

Voor weer anderen is wiskunde iets 'wat hen overkomt', zoals een regenbuitje of een zonnesteek. Tot die groep hoort Henk Mulder. Wiskunde is voor hem het randgebied van spel en werkelijkheid. Hoe zoiet werkt illustreert zijn verhaal over de knikkergoot. Zijn stelling luidt: wiskunde is overal en tegen leerlingen zegt hij: kijk eerst om je heen en dan in je boek.

Ons onderwijs zou ermee gediend zijn als wij in de klas meer zouden vertrekken vanuit de realiteit, want ... de werkelijkheid is boeiender dan science fiction!

Boekbespreking

R. Wagner, *Grundzüge der linearen Algebra*; B. G. Teubner, Stuttgart; 260 bladz., DM 28,80.

Dit boek is verschenen in de serie *Mathematik für das Lehramt an Gymnasien*, waarin gebieden van de wiskunde behandeld worden die voor het onderwijs in de 'Sekundarstufe II' van belang zijn. De auteur, hoogleraar in Würzburg, heeft bij het schrijven van het boek aan wiskunde-studenten en aan docenten aan gymnasia gedacht. Hij heeft zich veel moeite gegeven om de stof op een levendige wijze te presenteren. Daarbij wordt ieder nieuw onderwerp zorgvuldig met concrete voorbeelden voorbereid. Deze voorbeelden zijn dikwijls origineel en aan belangrijke gebieden van de wiskunde ontleend. Toepassingen komen eveneens aan de orde, bijv. bij de lineaire afbeeldingen: trigonometrische functies, algoritme van Euklides, kettingbreuken, interpolatiemethoden; bij de oplossingsverzameling van stelsels lineaire vergelijkingen: de wetten van Ohm en Kirchhoff bij elektrische netwerken. Geestig is de mathematische behandeling van een voorval in het rijk van sneeuwuitjes en de zeven dwergen, waar de eigenwaardentheorie inzicht in de handelwijze van sneeuwuitjes verschaft (bladz. 164-167).

De auteur stelt het begrip 'lineaire afbeelding' centraal. Hij beperkt zich daarbij in hoofdzaak tot lineaire afbeeldingen van reële vectorruimten, waarbij vectorruimten van oneindige dimensie in de beschouwingen worden toegelaten. De volgende opsomming van de hoofdstukken geeft een indruk van de vaak originele aanpak: vectorruimten (met als inleiding een beschouwing over getallenrijen); lineaire afbeeldingen; stelsels lineaire vergelijkingen; eigenwaardentheorie (met de normaalvorm van Jordan en minimaalpolynomen); euclidische vectorruimten (met orthogonale functiestelsels, zelfgeadjungeerde afbeeldingen en meetkundige toepassingen, waarbij o.a. de oriëntering van een euclidische vectorruimte ter sprake komt); determinanten (die als volumefuncties worden ingevoerd, zonder dat dit woord genoemd wordt). In het laatste hoofdstuk wordt iets over de recursiestelling van Dedekind, het definiëren van sommen en het lemma van Zorn (in verband met bewijzen in vectorruimten van oneindige dimensie) meegedeeld. In de tekst zijn paragrafen met opgaven opgenomen, meestal ter ondersteuning van de theoretische uiteenzetting. Een enkele maal veroorlooft de auteur zich een definitie die afwijkt van wat gangbaar is; zo verstaat hij onder nulruimte een lineaire deelruimte die uitsluitend de nulvector bevat (bladz. 25).

Het boek bevat een grote hoeveelheid stof voor hen die zich in de lineaire algebra willen verdiepen. De bestudering ervan vereist concentratie (iemand die niet in de lineaire algebra thuis is kan beter eerst een eenvoudiger inleidend boek ter hand nemen), de beloning is een verrijkt inzicht. Docenten bij het vwo zullen er, als zij de tijd voor de bestudering van de stof nemen, veel genoegen aan beleven.

Een 6, maar toch . . .

Gerrit van den Heuvel

1 Een andere kijk op het rapport

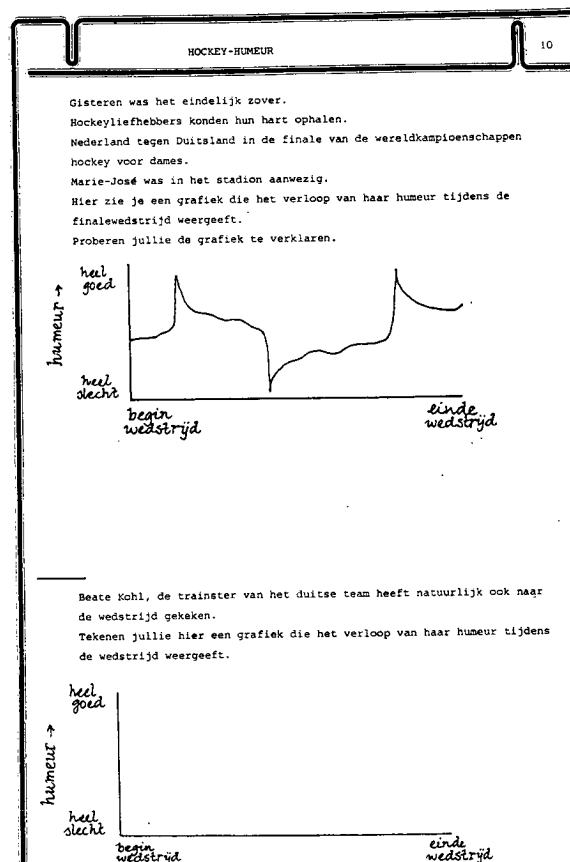
Een schoolrapport doet vaak weinig recht aan de leerling. Meestal is het erg summier, bv. één cijfer per vak. Het laat niet zien wat de leerling wel en niet kan, hoe dat komt, wat er aan te doen valt en wat niet. Toch zijn dit eigenlijk de belangrijker vragen, die bv. regelmatig door ouders aan je gesteld worden, of waarover je met je collega's praat. En met de leerling! Dit artikel beschrijft een poging om wel wat uitvoeriger informatie over de leerling te rapporteren. Daarvoor hebben we een model ontwikkeld, toegespitst op wiskunde in de brugperiode¹. Dit model is in eerste instantie geschreven voor een rapportage bij het pakket 'Grafiekentaal', dat door de Stichting voor Leerplanontwikkeling (SLO) is ontwikkeld². Dit is één van de pakketten die bedoeld zijn voor lessen in heterogeen samengestelde brugklassen. Het behandelt globale eigenschappen van grafieken, die gaan over reële (of reëel voor te stellen) situaties. Er wordt daarbij gewerkt via klassikale momenten en via groeps- werk, in afwisseling met elkaar. Enkele SLO- publikaties over dit onderwerp lichten diverse factoren, die hierbij spelen, nader toe³. Hoewel we het volgende verhaal toespitsen op 'Grafiekentaal', om concrete voorbeelden te kunnen geven, is de toepassingsmogelijkheid van het model groter. Ik hoop dan ook dat de lezer aanknopingspunten met de eigen praktijksituatie zal vinden.

De opbouw van het artikel is als volgt. Ik analyseer eerst een praktijksituatie uit één van mijn klassen. Daaruit blijkt dat een 'gewone' classesituatie veel stof tot nadenken geeft. Vervolgens ga ik in op de

vraag, waarom zo'n uitgebreide analyse zinvol is en ik beschrijf het model in hoofdlijnen. Tot slot volgen nog enkele opmerkingen over het in de praktijk brengen van het model en over dingen die niet in het model zijn meegenomen. Maar nu eerst maar eens de klas in!

2 Leerling A

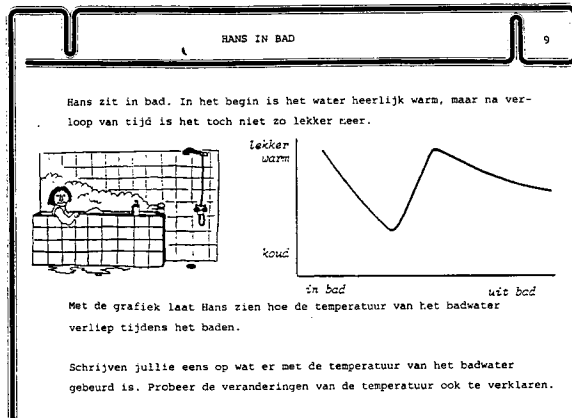
Het gebeurde in een eerste brugklas, toen we aan het werk waren met 'Grafiekentaal'. De leerlingen waren in groepjes van vier aan de slag. Een opgave was:



Figuur 1

A wist het kennelijk niet precies en wilde mijn opinie over het probleem weten. Dus ik erop af. In tegenstelling tot mijn gewoonte, verwees ik haar vraag niet naar de rest van het groepje (wat je

eigenlijk wel moet doen bij groepswork, vind ik). Dit keer vroeg ik: 'Wat dacht je zelf dat het moest zijn?'. Waarop ze zei: 'Eerst wordt het humeur warmer, dan kouder en dan weer warmer, en op het eind is het weer gewoon'. Dit, althans voor mij, verbluffende antwoord, kon ik in eerste instantie niet goed plaatsen. Totdat ik dacht aan de vorige bladzijde:



Figuur 2

Nu was het me ineens duidelijk wat er was gebeurd. A vond mijn vak waarschijnlijk echt moeilijk. Maar, nadat ik de zaak wat had laten bezinken, werd mijn indruk over A's antwoord toch wat minder negatief. Het was niet alleen maar een domme fout, dat blind varen op de vorige bladzijde, vond ik.

Laten we eens op een rij zetten, wat er, vanuit de leerstof bekeken, zoal goed en fout ging:

- A heeft de vraag gericht gelezen, +
- maar heeft de beschreven situatie niet kunnen verbinden aan de eigen ervaringen. -
- Ze kon zich de situatie ook niet goed voorstellen, -
- maar begreep wel dat het ging om het verloop van een proces. +
- Ook had ze enige notie van het idee achter een globale grafiek, +
- want ze kan juist aangeven wanneer er sprake is van stijgen en dalen, +
- maar ze kon dit niet toepassen op deze situatie. -
- Natuurlijk miste ze volledig de mogelijkheid om de wiskundige interpretatie van de grafiek naar het oorspronkelijke verhaal terug te vertalen. -

- Op het moment dat ze de interpretatie vertelde, was ze het verhaal vermoedelijk geheel kwijt. -
- Ze heeft nauwelijks gereflecteerd op haar denkwerk. -

Ik concludeerde dan ook dat:

- A wel goed dingen na kon doen, +
- maar dit volstrekt klakkeloos deed. -
- Ze haar kennis op dit moment vast en zeker niet zou kunnen toepassen op nieuwe problemen. -
- Ze ook weinig bagage had: ze kende wel de begrippen hoog/laag, +
- maar had geen notie van variabelen en assen. -
- ook miste ze vermoedelijk kennis van de situatie, -
- en had ze een beperkt visualiseringsvermogen. -
- Ze aan abstractie niet toekwam, haar mogelijkheden leken op dit punt momenteel beperkt. -
- Al met al een leerzame ervaring, vooral voor mij. En met A liep het achteraf trouwens best goed af: een 6 op de toets, 2 keer!

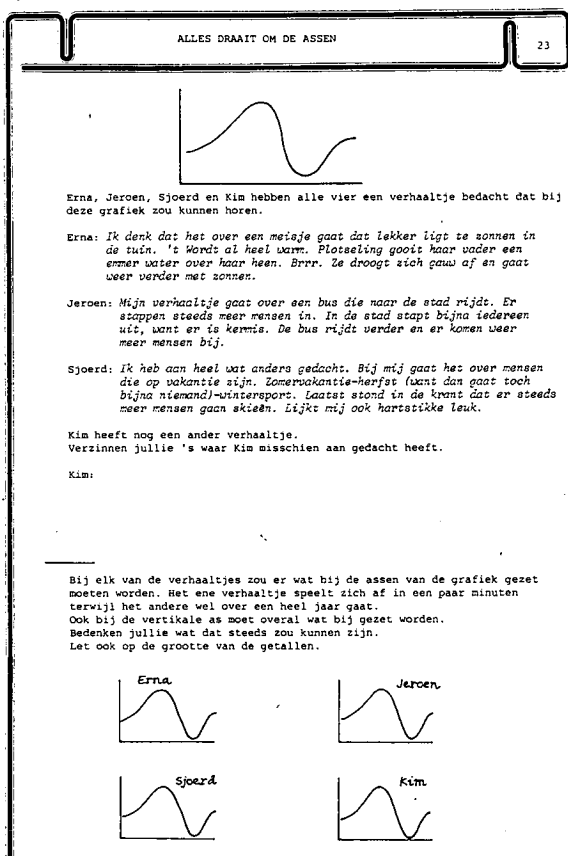
3 Waarom dit alles?

Waarom was deze reflectie zo leerzaam en wat kun je zoal met gegevens, zoals ze hierboven beschreven staan, doen? Leerzaam was vooral, dat het mogelijk bleek tot genuanceerder inzicht te komen, over wat A wel en niet kan en wat daarvan mogelijkerwijs de oorzaak is. We kregen hierboven veel meer informatie dan in het cijfer op een toets gewoonlijk tot uitdrukking komt.

Vooral in de eerste fase van het voortgezet onderwijs speelt determinatie van de leerling een grote rol. Dit nog eens temeer in heterogeen klasverband, waarvan bij ons sprake is. Zeker in het eerste leerjaar speelt selectie nog een ondergeschikte rol, en is het zaak een beeld te vormen van de mogelijkheden van een leerling. Bovenstaande analyse was een serieuze poging daartoe.

Ook biedt een dergelijke analyse aanknopingspunten om tot beter leren voor A te komen. Voor wat betreft de problematiek van de interpretatie van grafieken in een context, zou het, gegeven het feit dat A wel opgaven leest en vergelijkt, misschien een goed idee zijn om een rijkere verscheidenheid van problemen (tijd-temperatuurgrafiek, tijd-humeur, tijd-hoogte, tijd-afstand, tijd-snelheid, noem maar op) voor te leggen, en erop te wijzen waar de

verschillen zitten. Ook zouden A's woordenschat en begrippenapparaat in de beschouwingen kunnen worden betrokken: weet ze bv. wat hockey is en humeur? Men zou kunnen oefenen met het voorstellen van situaties: lees een verhaaltje, verzin er iets bij en ga dan pas de som maken. Misschien bevatten de lessen in het algemeen wel wat te weinig voorbeelden voor A.



Figuur 3 Een voorbeeld van verschillende interpretatiemogelijkheden van één grafiek.

De leraar komt er zo toe om eens nader over zijn lessen na te denken. Bereidt zijn werkwijze de leerlingen voor op de gestelde vragen? Is er meer/minder uitleg en structurering nodig? Besteedt hij genoeg inhoudelijke aandacht aan de contexten? Etc...

Je hebt verder de mogelijkheid om wat uitgebreider te rapporteren over A. Zowel haarzelf, alsook haar ouders, kun je meer vertellen dan het ongenueanceerde: 'A heeft een 6'. Je kunt aangeven waarom het zo is gelopen, wat je er aan wilt doen, waar eventuele perspectieven zijn, enz. Dit is informatie waarop ouders m.i. recht hebben. Ook is de informatie bruikbaar naar collega's en bv. de mentor. En naar A zelf natuurlijk.

Vele redenen dus om eens wat beter naar zulke buitenkansjes uit te kijken. Via het samenstellen van 'Een rapport bij Grafiekentaal' is geprobeerd om een model te ontwikkelen om als leraar wat systematischer en genuanceerder te kijken naar wat de leerling wel/niet kan, hoe hij/zij werkt, wat voor kennis hij/zij heeft/mist, etc. De gegevens hierboven waren niet toevallig, ze werden ingegeven door enkele categorieën van 'Het Rapport'. Hieronder beschrijf ik dit en doe ik enkele achtergrondgedachten uit de doeken.

4 Het Rapport

Met 'Een rapport bij Grafiekentaal' bedoel ik een lijst van vragen en aandachtspunten voor de leraar over de leerling. De antwoorden op deze vragen geven een beeld van de leerling. Een aantal van deze beeldschetsen kunnen uitmonden in een rapport over de mogelijkheden en vorderingen van de leerling. Op één A4-tje verschijnt zo het beeld van de leerling in details.

De vragen zijn ontleend aan twee bronnen: onze eigen ervaring en een selectie uit de vakdidactische en psychologische literatuur. Het geheel bestaat uit drie hoofdvragen, die ontleed worden in een aantal deelvragen. Deze hoofdvragen die de kern van 'Het Rapport' vormen zijn:

- Welke onderdelen van het oplosproces beheerst de leerling, al dan niet met hulp?
 - Beheerst de leerling een volledige oplossingsstrategie, hoe gaat dat in zijn werk, bij welke opgaven lukt dit?
 - Welke kennis en vaardigheden, die een rol spelen in het geheel heeft de leerling tot zijn beschikking?
- Ik licht de hoofdvragen toe aan de hand van de belangrijkste punten die in de deelvragen aan de orde komen:

ad A. We hebben bij 'Het Rapport' wiskunde problemen op het oog, die spelen in bepaalde praktische context: ze hebben wat met de werkelijkheid te maken of zijn daaraan te verbinden. Het oplossen van zo'n vraagstukje ziet er, als het over grafieken gaat, ongeveer zo uit:

- De leerling leest de vraag en koppelt hem aan de eigen ervaring (waarnemen),
- selecteert de relevante informatie m.b.t. de vraag (mathematiseren),
- geeft de situatie grafisch weer (beeldmodel),
- en vertaalt deze grafiek terug naar de praktijk.

Als het goed is moet de leerling na het oplossen in staat zijn om:

- uit te leggen wat hij gedaan heeft en waarom (reflectie).

Niet bij elk vraagstuk zal dit allemaal aan bod komen, maar het zijn facetten die aan bod kunnen komen, en waarvan nagegaan kan worden of de leerling dit geheel zelfstandig of met een beetje hulp kan.

ad B. Tweede punt dat aan de orde komt is niet de vraag of de leerling al de stukjes van het oplosproces afzonderlijk beheerst, maar of hij het proces integraal kan toepassen. Ook stellen we de vraag hoe de leerling dat doet: is het nadoen, net als bij leerling A, of wordt er planmatig gewerkt? Wordt er misschien via trial-and-error naar een oplossing gezocht? Werkt de leerling flexibel?

Verder komt aan de orde op welke typen opgaven de leerling zijn kennis toe kan passen: alleen op die opgaven die sterk lijken op de voorgaande, of ook nog andere? Alleen in de wiskunde? We herkennen hier het transferbegrip.

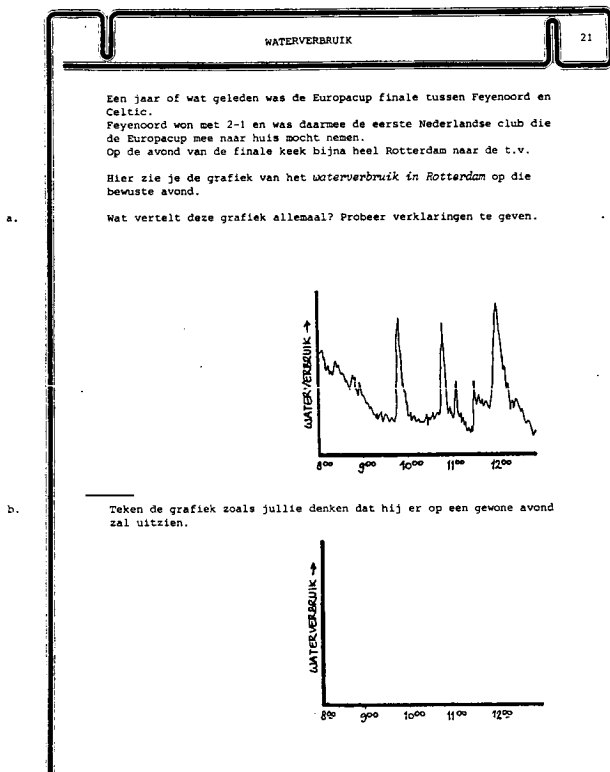
ad C. Als derde hoofdvraag gaan we na welke bagage de leerling in huis heeft. Toegespitst op ons stukje leerstof onderscheiden we:

- Kennis van gehanteerde begrippen, bv. stijgen en dalen.
 - Voorkennis over de contexten die ter sprake komen, bv. wat is humeur.
 - Mogelijkheden om zich iets bij een situatie voor te stellen en daarvan gebruik te maken bij het oplossen.
 - Abstractievermogen: kan de leerling praten over eigenschappen van grafieken, zonder direct naar de praktijk te verwijzen?
- Al de genoemde deelaspecten zijn verwerkt in vragen. Vanuit deze concrete vragen gaat de docent op zoek naar informatie over de leerling, die vervolgens samengevat wordt in één verhaal over de leerling.

5 Hoe pak je het aan?

Hoe kom je nu aan gegevens om vragen, zoals hierboven aangerood, te beantwoorden? Dat je niet meer kunt volstaan met gegevens uit toetsen, zal inmiddels duidelijk zijn geworden. Deze aanpak vereist meer werk:

- Observaties van leerlingen tijdens het werken in de klas. Kijk hoe wordt gewerkt, welke vragen er gesteld worden en hoe de oplossing wordt gevonden.
- Nakijken en analyseren van werk in schriften en werkboekjes.
- Interviewen van een leerling, om meer informatie te krijgen.
- Leerlingen zelf laten rapporteren, wat vaak eerlij-



Figuur 4 Vraag a. bevat het hele proces, behalve de grafische weergave.

Vraag b. mist de terugvertaling naar de praktijk.

Tijdens de vakantie heeft Annemarie een weerdagboek bijgehouden.
Lees maar eens.
Op losse blaadjes maakte ze ook temperatuurgrafiekjes.
Welk grafiekje hoort bij welke dag?

26 sept. zaterdag
Wat een dag! 's Morgens scheen de zon en werd het warm. Later 's gingen we met de fiets naar het zwembad. Ploteling ook de wind op en werd het koud. Het begon zelfs een tijdje te regenen. Gelukkig kwam de zon nog even terug.

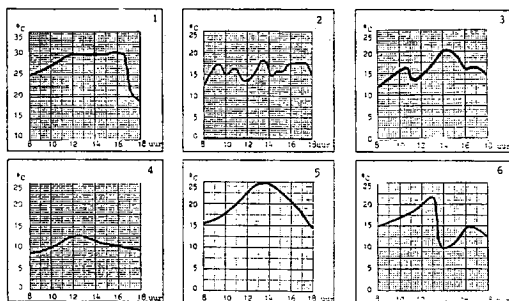
27 sept. zondag
Zonnig weer, niet zo wisselvallig als gisteren. Volgens het weerbericht wordt het morgen nog warmer.

28 sept. maandag
Heel warm en benauwd weer. Aan het eind van de middag werd het koeler. Ouwe!

29 sept. dinsdag
De omwaaier van gister heeft het hele weer in de war gesloopt. De hele dag regen en steeds minder dan 15°C.

30 sept. woensdag
Wisselend bewolkt. Koud en warm wisselen elkaar af. Aan het eind van de middag iets langer nog zon.

1 okt. donderdag
Op een beetje na (ongeveer 11 uur 's morgens) was het lekker. 's Middags nog wel wat bewolking. Maar echt koud werd het niet.



Figuur 5 Flexibel werken kan bijvoorbeeld naar voren komen als de leerling plaatjes bij de tekst zoekt en omgekeerd, om zo sneller en gemakkelijker het juiste antwoord te vinden.

ker uitvalt dan soms wordt gesuggereerd.

Vanzelfsprekend kan dit alles niet allemaal tegelijk worden aangepakt in de praktijk, maar het zijn stuk voor stuk wegen om iets verder te komen. Probeer vooral om, binnen het kader dat 'Het Rapport' aangeeft, de opmerkelijke zaken aan te tekenen. Nog één opmerking op dit punt. Deze manier van werken vraagt een wat ontspannen manier van werken van de docent. Om voor alle leerlingen op alle punten volledig inzicht te krijgen in de stand van zaken is onmogelijk. Ook zal deze werkwijze interpretatie van gegevens en gebeurtenissen vragen, die niet 100% eenduidig bepaald zijn. Er komt een zekere subjectiviteit in naar voren (De kritische lezer heeft dit natuurlijk al opgemerkt bij mijn analyse van A: er zijn ook andere interpretaties mogelijk). Ik zie dit niet als een bezwaar, mits helder blijft hoe het oordeel van de leraar tot stand komt. En ook al is een volledig inzicht voor alle

leerlingen onmogelijk, door een stuk op deze weg te gaan komt een schat aan informatie naar boven, waar veel mee te doen valt. Dus de moeite van het proberen zeker waard!

6 Er is meer

'Het Rapport' concentreert zich op wiskundige aspecten van leerlinggedrag. Dat betekent niet dat dit het enige is waarop gelet zou moeten worden. Affectieve, emotionele en sociaal-cognitieve aspecten zijn evenzeer van belang. Het is goed je te realiseren dat ook op dit punt informatie verzameld kan (en moet) worden, ook al geeft 'Het Rapport' hierover slechts een summier handreiking. Voor nadere suggesties op dit punt houd ik me beleefd aanbevolen.

Noten

- 1 Dit model staat beschreven in 'Een rapport bij Grafiekentaal' en is ontwikkeld door Gerrit van den Heuvel en Leo Prinsen, m.m.v. Fred Goffree. U kunt het bestellen door f 2,50 over te maken op giro 3345870 t.n.v. G. v.d. Heuvel o.v.v. 'Rapport'.
- 2 Grafiekentaal, SLO, Enschede, versie 1984/1985.
- 3 Tot nu toe zijn bij SLO o.a. verschenen:
In verband met ..., een introductie op functie via verbanden, 1983.
'Naar aanleiding van ...' (het werken in (kleine) heterogene groepen), 1983.
Rekening houdend met ..., 1984.
Situatiebeschrijvingen in wiskundeteksten, 1984.
Revis in ontwikkeling, lesgeven aan heterogene klassen, 1985.
Alle publikaties verschenen en verkrijgbaar bij SLO Enschede.

Over de auteur:

Gerrit van den Heuvel (1951) studeerde wis- en natuurkunde in Utrecht (1975) en deed de eerste onderwijservaring op bij Frans Bouman in Gorinchem. Nu geeft hij al ruim 10 jaar les aan de Chr. Scholengemeenschap Revis te Deventer. Over (aspecten van) zijn werk daar schreef hij 't boekje 'Revis in ontwikkeling' (SLO, 1985).

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

539 Vier vliegtuigen vliegen elk met een snelheid die constant van richting en grootte is. De projecties van hun banen op het, plat gedachte, aardoppervlak hebben zes verschillende snijpunten. In vijf van deze snijpunten zijn de projecties van de vliegtuigen gelijktijdig. Hoe zit het met het zesde snijpunt? (auteur onbekend)

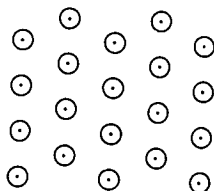
540 Het is vaak moeilijk om niet te zeggen wat men niet bedoelt.

Zo las ik onlangs in mijn plaatselijke krantje: Op een kruispunt in Doorwerth botsten twee auto's tegen elkaar. Oorzaak: één van hen gaf geen voorrang.

Moeilijker is de volgende passage uit het tv-verslag over de Elfstedentocht, dat ik zo juist hoorde. Na de finish van het eerste viertal verschenen de namen op het scherm van degenen die aan de uitzending meegewerkt hadden. Waarna de verslaggever zei: 'Zonder geen van hen zou het zijn gelukt'.

Dat is de moeite van het overdenken waard.

541 *A* en *B* spelen een spel. Een beginvak wordt gekozen. Als *A* resp. *B* een vraag het eerst goed beantwoordt, wordt dit vak rood resp. blauw gekleurd. Daarna kiest *A* resp. *B* een nieuw vak. Doel is voor *A* een serie rode vakken te formeren die linker en rechter rand verbindt, voor *B* een serie blauwe vakken te verkrijgen die onder- en bovenrand verbindt. Is remise mogelijk?



536 Een letterslot van een brandkast kan geopend worden door het draaien van een bepaalde combinatie van tien hoofdletters. De code is verloren gegaan en moet terug gevonden worden.

Tussen lettercombinaties is een relatie $\rightarrow$ gedefinieerd door volgende vier eigenschappen (axioma's).

Eigenschap Q. $QxQ \rightarrow x$

Eigenschap L. Als $x \rightarrow y$, dan $Lx \rightarrow Qy$

Eigenschap V. Als $x \rightarrow y$, dan $Vx \rightarrow \overline{y}$ ($\overline{y}$ ontstaat uit y door de volgorde van de letters om te keren)

Eigenschap R. Als $x \rightarrow y$, dan $Rx \rightarrow yy$

Bovendien geldt:

Eigenschap DN. Als $x \rightarrow y$, dan geldt:

als x desastreus is, dan is y neutraal en als x neutraal is, dan is y desastreus.

Gevraagd een lettercombinatie van tien hoofdletters te vinden die niet desastreus en niet neutraal is. Hierdoor kan het slot geopend worden.

Uit DN volgt:

als $p_1 \rightarrow p_2$

$p_2 \rightarrow p_3$

...

$p_{2n-1} \rightarrow p_1$

dan is p_1 niet desastreus en niet neutraal.

Dit ziet er gecompliceerd uit. We proberen eerst het eenvoudigste geval, nl. $n = 1$. Dus: vind p waarvoor $p \rightarrow p$.

Uitgangspunt moet eigenschap Q zijn. Daarna kunnen de operatoren L, V, R gebruikt worden. Dus zal p als structuur hebben $zQxQ$ waarin z een suite van letters L, R, V is. Voor deze p moet gelden

$zQxQ \rightarrow zQxQ$

We beginnen met $QxQ \rightarrow x$. In het rechter lid moet aan het eind een Q komen. Dat kunnen we bewerkstelligen door eerst L en dan V toe te passen. Er komt dan

$VLQxQ \rightarrow \overline{x}Q$

Naar is dat nu rechts $\overline{x}$ en links x staat. We willen rechts ook x krijgen. Daartoe moeten we, voordat we L toepassen, eerst al een keer V toepassen. We krijgen dan

$VLVQxQ \rightarrow xQ$

Nu staan er rechts minder letters dan links. Om de aantallen letters gelijk te krijgen, is het noodzakelijk R toe te passen.

Er komt dan

$RVLVQxQ \rightarrow xQxQ$

Om linker en rechter lid gelijk te krijgen kiezen we nu $x = RVLV$. Er komt dan $RVLVQRVLVQ$ en hiermee kunnen we het slot open krijgen.

Is dit de enige oplossing? We onderscheiden twee gevallen.

a x is niet symmetrisch.

Met enig geduld zien we dan dat er nog één nevenoplossing is, nl. $RVLVQRVLVQ$ (welke niet door Smullyan gegeven wordt).

b x is symmetrisch. We moeten dan bedenken dat het tweemaal toepassen van V overbodig is. We vinden echter zo geen oplossing.

Ten slotte is het denkbaar dat we nog meer oplossingen vinden als we het in de aanvang genoemde schema toepassen met $n > 1$. Het is mij te machtig om dit na te gaan. Als iemand erin slaagt, houd ik mij aanbevolen.

537 De lengten van de zijden van een rechthoekige driehoek zijn gehele getallen. Een van hen is 1986. Gevraagd de andere twee.

Noem de lengten van de rechthoekszijden a en b , die van de hypotenusa c .

We beschouwen eerst alleen driehoeken waarvan de lengten van de zijden geen gemeenschappelijke factor hebben. Omdat $1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331$, heeft de driehoek, na wegdeling van eventuele gemeenschappelijke factoren, een zijde 1986, 993, 662, 331, 6 of 3.

Hebben de lengten van de zijden geen factor gemeen dan is

$$a = pq, b = \frac{1}{2}(p^2 - q^2), c = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

waarin p en q oneven en onderling ondeelbaar zijn. Dan is a oneven, b even en c oneven. Zodat we de volgende gevallen moeten onderzoeken:

a	b	c
993	?	?
331	?	?
3	?	?
?	1986	?
?	662	?
?	6	?

$$a = 993 \Rightarrow p = 331 \wedge q = 3 \Rightarrow b = 54776 \wedge c = 54785$$

$$\text{of } p = 993 \wedge q = 1 \Rightarrow b = 493024 \wedge c = 493025$$

$$a = 331 \Rightarrow p = 331 \wedge q = 1 \Rightarrow b = 54780 \wedge c = 54781$$

$$a = 3 \Rightarrow p = 3 \wedge q = 1 \Rightarrow b = 4 \wedge c = 5$$

Omdat a en c oneven zijn, zijn hun kwadraten een 8-voud + 1 en is het verschil van hun kwadraten een 8-voud. Zodat $b = 1986$, $b = 662$ en $b = 6$ geen oplossing geven.

Nu moeten we nog vermenigvuldigen met de factoren die we weggedeeld hebben. We vinden dan ten slotte de volgende mogelijkheden:

b	c	
109552	109570	(vermenigvuldigd met 2)
986048	986050	(vermenigvuldigd met 2)
328680	328686	(vermenigvuldigd met 6)
2648	3310	(vermenigvuldigd met 662)

Nu nog het geval $c = 1986$.

Een kwadraat is gelijk aan een 4-voud of een 4-voud + 1.

$$1986^2 = a^2 + b^2$$

1986^2 is een 4-voud; a^2 en b^2 dus ook. Deel door 4:

$$993^2 = t^2 + u^2 \quad (t = \frac{1}{2}a, u = \frac{1}{2}b)$$

Een kwadraat is gelijk aan een 9-voud of aan een 9-voud + 1, 4

of 7. 993^2 is een 9-voud; t^2 en u^2 dus ook. Deel door 9:

$$331^2 = r^2 + s^2 \quad (r = \frac{1}{3}t, s = \frac{1}{3}u)$$

331 is priem. We moeten dus weer p en q zoeken zo dat

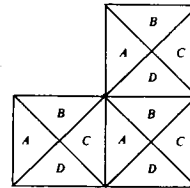
$$t = pq, u = \frac{1}{2}(p^2 - q^2), 331 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

$$\text{Dus } p^2 + q^2 = 662.$$

Probeer resp. $p = 1, p = 3, p = 5, \dots, p = 25$. Het blijkt dan, dat men voor q geen oplossing vindt.

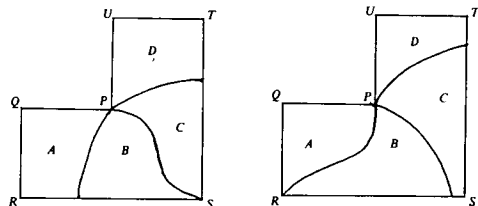
De hypotenusa kan dus niet 1986 zijn.

538 Onderstaand stuk land moest in vier congruente delen verdeeld worden zo, dat de vier zoons elk over hun eigen land de put P kunnen bereiken. In de figuur ziet u, hoe de wiskundige dit probleem opgelost heeft.



Inderdaad zijn de bezittingen van A, B, C en D congruent. De zoons waren echter niet enthousiast. Ze wilden graag dat de bezittingen van elk van hen een samenhangend geheel zouden vormen. Kan dat?

Er zijn drie punten met maximale afstand tot P , nl. R, S en T . Elk van de zoons zal één van deze punten als grenspunt van zijn terrein moeten hebben. Er zal dus één grens van P naar een van de punten R, S en T moeten lopen. Er zijn twee mogelijkheden: deze grens loopt van P naar R (of T) en deze grens loopt van P naar S . Hieronder zijn de twee mogelijkheden getekend.



Door een congruente afbeelding kan het land van A overgaan in dat van C . Daarbij zal in de linkerfiguur de grenslijn die van P naar R loopt, overgaan in een grenslijn van P naar een punt dat evenver verwijderd is van P als punt R . Dus in een lijn van P naar S . Contradictie. In de rechter figuur ontstaat op analoge wijze een contradictie.

De wiskundige had dus gelijk toen hij zei dat een schaap geen vijf poten heeft.

Mededeling

Regionaal Samenwerkingsverband Wiskunde-onderwijs

Op allerlei bijeenkomsten van wiskundeleraars, zoals examenbesprekingen, komt vaak naar voren dat men behoefte heeft aan meer contact met collega's in de buurt, voornamelijk contact dat de functie heeft van gegevens uitwisselen, acute problematiek met elkaar kunnen bespreken, informatie krijgen over wiskundeprogramma's van andere schoolsoorten en dergelijke. In een bepaalde regio zouden wiskundeleraars een werkverband kunnen oprichten dat als doelstelling heeft in bovenstaande behoefte te voorzien. Deze regionale organisatie zal open staan voor alle wiskundeleraars; ieder kan er zijn eigen inbreng hebben, zelfs al zou die inbreng uit problemen bestaan. Vanuit die organisatie kan gelegenheid geboden worden deel te nemen aan geschikte excursies, kunnen er lezingen gehouden worden en discussiebijeenkomsten worden georganiseerd. Hierbij valt te denken aan Hewet en de komende ontwikkelingen op het havo, maar ook aan de invloed daarvan op het mavo-programma; meisjes en wiskunde; de aansluiting op het vervolgonderwijs; eindexamenbesprekingen; korte nascholingsbijeenkomsten enz. Uitgangspunt is dat de docenten in zo'n regio – en daarbij denken we aan docenten van alle schooltypen, zowel vwo/avo als beroepsonderwijs, inclusief nlo en overig hbo – zelf de verantwoordelijkheid dragen voor inhoud en organisatie van de activiteiten.

Zowel het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars als het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde willen plaatselijke initiatieven voor het opzetten en in stand houden van dergelijke groepen ondersteunen. Daartoe zal zo'n groep

- a formeel onder de vlag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars kunnen varen, gebruik makend van de faciliteiten van de vereniging (adressen, contacten en dergelijke)
- b een beroep kunnen doen op het onderwijscentrum van de lerarenopleiding in die regio, van waaruit faciliteiten beschikbaar gesteld kunnen worden (lokaliteiten, apparatuur, reproductie, mailing, leermiddelen, bibliotheek, mediatheek en dergelijke).

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars zoekt om deze plannen te kunnen verwezenlijken per regio leraarsen/le-

raren die als initiatiefnemers voor zo'n regionaal werkverband willen optreden. De vereniging kan dan initiatiefnemers en docenten van de betreffende opleiding met elkaar in contact brengen.

Iedere wiskundeleraar, die zich hierdoor aangesproken voelt, wordt verzocht contact op te nemen met:

L. Bozuwa, Abeelstraat 7, 3329 AA Dordrecht, tel.: 078-16 39 46, J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag, tel.: 070-68 79 98 of L. A. G. M. Muskens, De Steenen Kamer 14, 5481 GD Schijndel, tel.: 04104-9 28 46.

De Werkgroep Regionaal Samenwerkingsverband Wiskunde-onderwijs.

Boekbespreking

Dolf

Verschenen is het eerste nummer van 'Dolf', '... een blad van de avondstudie wiskunde M.O.-A aan het Nuts'. (= Nuts-seminarium te Amsterdam)

Het zal vier keer per jaar uitkomen en het zal gewijd zijn aan wiskunde, onderwijs en wiskunde-onderwijs.

Een erg aardig initiatief van studenten en medewerkers van deze deeltijdopleiding. Voor de lezer: boeiend om kennis van te nemen. Voor de schrijver/student: boeiend en leerzaam om gedachten over de studie te objectiveren door deze op schrift te zetten.

Kalender

27-29 augustus 1986: Utrecht, Congres 'New Trends in the history of Science'.

Getal en Ruimte

Wiskunde voor het voortgezet onderwijs

*de betrouwbare bondgenoot
in het wiskundeonderwijs*

Vraag de gratis documentatie aan...

Educaboek bv

Postbus 48
4100 AA Culemborg
Tel. (03450) 71 911



Inhoud

P. G. J. Vredenduin: Vectoren, een historische beschouwing 253

Mike Staring en Jeroen Staring: Overlopers: op jacht naar macht? 258

H. N. Schuring: De Nederlandse Wiskunde Olympiade 1985 265

HEWET in de onderbouw? 268

Ir. Henk Mulder: De knikkeroot, het probleem van de evenwijdige krommen 273

Gerrit van den Heuvel: Een 6, maar toch 277

Mededelingen 257, 284

Recreatie 282

Boekbesprekingen 276, 284

Kalender 284

Adressen van auteurs

P. G. J. Vredenduin,
Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth

Mike Staring, Molièrelaan 166,
5924 AN Venlo-Blerick

H. N. Schuring, p.a. CITO, Postbus 1034,
6801 MG Arnhem

Ir. H. M. Mulder, Geersbroekseweg 27,
4851 RD Ulvenhout

G. van den Heuvel, St. Jurriënstr. 40
7412 XJ Deventer