

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

61e jaargang
1985 | 1986
februari

Euclides 6

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Drs H. Bakker
Mw I. van Breugel
Drs F. H. Dolmans (hoofredacteur)
W. M. J. M. van Gaans
Prof dr F. Goffree
L. A. G. M. Muskens
Drs C. G. J. Nagtegaal
Drs A. B. Oosten (eindredacteur)
P. E. de Roest (secretaris)
Mw H. S. Susijn-van Zaale
Dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12,
7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 50,- per verenigingsjaar; student-leden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 35,-; contributie zonder Euclides f 30,-.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894-11730. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1\frac{1}{2}$. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52°, 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-135976.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 44,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 26,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949. Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers f 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan: Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 39731 (Samsy).

Uitdagen

Bram Lagerwerf

Je helpt een leerling met een wiskundeprobleem en je moet elk antwoord er als het ware uittrekken. Of je bent met een leerlinge bezig en je krijgt het idee dat zij alleen maar zit te raden wat jij wilt dat zij zal zeggen.

Elke leerkracht kent dit soort situaties.

Veel leraren zijn geneigd in zulke gevallen vragen te stellen aan de leerling. Om uit te zoeken wat hij nog wel kan, of om hem aan het denken te zetten.

Ik denk dat dat vaak niet de beste weg is. Daar wil ik in dit artikel uitgebreid op ingaan.

Paragraaf 1 gaat over de uitbalancerings van uitdaging enerzijds en houvast en veiligheid anderzijds, en over hoe te helpen met uitdaging en veiligheid. Paragraaf 2 brengt houvast in verband met nivo's van zekerheid.

Paragraaf 3 gaat over houvast geven.

1 Uitdaging gedijt pas bij voldoende houvast en veiligheid

Eerst een voorbeeld. Een beginnend leraar ziet in het schrift van een leerling staan: $\sqrt{a^2} = a$. Hij besluit zich ermee te bemoeien en zegt:

L: Dat is niet goed wat daar staat, $\sqrt{a^2} = a$.

Ll: Ik dacht dat het wel goed was, wortel 4 is toch 2?

L: Vul nog eens een getal in.

Ll: Wortel 9 is 3.

De leraar denkt: 'Zo kan het nog een tijdje doorgaan; ik moet iets slims bedenken'. Hij zegt:

L: $\sqrt{\dots \times \dots} = 3$; kun je hier iets goeds invullen, maar geen 3?

De leerling is verrast, hij begrijpt er niets van. Hij weet niet beter te doen dan vragend op te kijken en te wachten op de dingen die komen gaan.

Dit is typisch een situatie met een leerling die niet genoeg houvast heeft. Hij is welwillend genoeg om de leraar te woord te staan wanneer die dat wenst, maar als het moeilijk wordt geeft hij niet thuis.

De leraar doet niet de minste moeite de leerling de nodige houvast te verschaffen. Hij ontwerpt een opgave die geënt is op zijn eigen gedachtengang.

In dit soort situaties werken vragen niet. Het is dan beter informatie te verstrekken die aansluit bij wat voor de leerling vanzelfsprekend is, bijvoorbeeld:

L: Deze voorbeelden kloppen omdat je steeds een positief getal nam; neem nu eens -3 .

Hij zet de leerling hiermee weer op het goede spoor en bouwt een nieuwe uitdaging in. De leerling kan denken: 'O jé, ik had alleen maar aan positieve getallen gedacht; eens even kijken hoe het zit als je iets negatiefs neemt'. Maar het kan natuurlijk ook zijn dat hij braaf invult $\sqrt{-3 \times -3} = 3$, en dan weer afwacht. Of allerlei andere voortzettingen. Waar het om gaat is dat de leraar een leerling die geen houvast genoeg heeft, die houvast biedt en daar tegelijkertijd een nieuwe uitdaging aan verbindt.

Nu kan de ene leerling uitgedaagd worden door een rijtje eenvoudige sommetjes; hij wil nu wel eens alle antwoorden goed hebben. Voor de andere leerling is dat te flauw, die wil een probleem waar hij zijn tanden in kan zetten. En geef je dat probleem aan de eerste leerling dan zakt die ontmoedigd achteruit: 'Dat is veel te moeilijk voor mij!'.

Een uitdaging kan dus activerend werken, maar ook verlamdend. De leerling kan de handschoen opnemen of niet.

Reden om de uitdaging aan te nemen kan bijvoorbeeld zijn, dat hij het resultaat dat de uitdaging biedt ontzettend graag wil bereiken, dat hij alles op alles wil zetten om dat te halen. Zo gaat het in het onderwijs meestal niet.

Leerlingen hoeven niet zo nodig, in het algemeen. Dat maakt dat ze impliciet nauwkeuriger gaan afwegen: Wat is de kans dat dit zal lukken? Hoeveel werk kost dat? Wat heb ik aan het resultaat? Hoe erg vind ik mislukken? De leerling onderzoekt

wat hem houvast geeft in deze situatie en hoe veilig hij zich voelt. Dat bepaalt of hij zich door de uitdaging aangesproken voelt of niet.

Hoe zorg je voor *uitdaging* die de leerling aanspreekt?

- Vragen stellen en opdrachten geven die moeilijk genoeg zijn.
- De leerling voor een probleem zetten.
- Eisen stellen.
- Met een verrassende wending komen.
- Verwarring of twijfel zaaien.
- Verantwoording vragen (Kun je dat uitleggen?).
- Letterlijk uitdagen.
- Conceptueel conflict (twee antwoorden of redeneringen die niet met elkaar kloppen; of een antwoord dat wel goed lijkt maar niet klopt met de werkelijkheid).

Er zijn allerlei mogelijkheden, geen enkele geeft garantie. Of het lukt blijft afhankelijk van de leerling. Van wat hem aanspreekt op dit moment, van de houvast die hij nu heeft, en van hoe veilig hij zich nu voelt.

Bij zorgen voor veiligheid is het overigens niet de bedoeling dat de leerling voortdurend in de watten wordt gelegd. Dat haalt juist de spanning en de uitdaging er weer uit. Het is de kunst om net iets meer te vragen dan de leerling gemakkelijk vindt. De ene leerling durft meer risico aan dan de andere.

Helpen met *veiligheid* betekent in het algemeen:

- Zorgen voor een goede relatie met de klas.
- De leerling laten merken dat jij er vertrouwen in hebt dat hij het wel kan.
- De leerling duidelijk maken welke hulp hij van je kan verwachten in geval van nood.
- De leerling een eindje op weg helpen.
- Zo nu en dan even bij de leerling kijken hoe het gaat. (Dan moet die leerling zich ook weer niet op de vingers gekeken voelen.)
- Zorgen voor voldoende opdrachten die de leerling niet te moeilijk vindt.
- Fouten van leerlingen accepteren. (Niet goedpraten, maar als uitgangspunt om te leren het beter te doen.)
- Geen sarcasmen en geen cynismen.
- Wegen aanwijzen waarlangs de leerling zelf kan zorgen dat hij zich wat veiliger voelt. (B.v. manie-

ren om zelf te controleren of het antwoord goed is. Helpen bij het voorbereiden van een proefwerk.)

Naast onveiligheid kan ook gebrek aan houvast verlamrend werken. Teveel houvast daarentegen maakt de les kinderachtig. De centrale vraag is in hoeverre de leerling een denkkader heeft waarbij je kunt aansluiten. Om daar op in te kunnen gaan is de zijweg van paragraaf 2 nodig.

2 Van jezelf zeker voelen naar zeker weten

Wiskunde is de kunde van het zeker zijn. Dat zeker zijn kan zijn basis hebben in een gevoel van zekerheid, of in een verstandelijke redenering. Op zuivere intuïtie enerzijds, of op kunnen bewijzen anderzijds. De weg van intuïtie naar bewijs gaat vaak via een gebied waarin door proberen, door voorbeelden, door een plaatje de overtuiging ontstaat van de juistheid van de intuïtie. Ik onderscheid hier zodoende drie nivo's:

Het vanzelfsprekendheidsnivo

Vanzelfsprekend is alles wat je voor waar aanneemt, of wat je doet, zonder er bij na te denken. 'Dat is logisch', heet dat in het dagelijks leven. Wat vanzelfsprekend is behoeft geen betoog.

Een goed voorbeeld is het gebruik van de *abc*-formule voor de wortels van een vierkantsvergelijking. De derdeklasser gebruikt die op gezag van het boek, of van de leraar die zegt: 'Doe het maar zo, dan is het goed'. Na een tijdje weet die leerling dat de *abc*-formule hem altijd uit de brand helpt als hij een moeilijke vierkantsvergelijking heeft. De leraar ziet dat de *abc*-formule het algemene geval is van de methode van kwadraat afsplitsen; dat denkt hij er niet telkens bij wanneer hij hem gebruikt, maar als iemand er naar vraagt kan hij die verantwoording geven. Drie soorten vanzelfsprekendheid zie je hier:

- Op basis van het gezag van een autoriteit
- Op basis van ervaring, gewenning
- Op basis van een verantwoording die men achter de hand heeft.

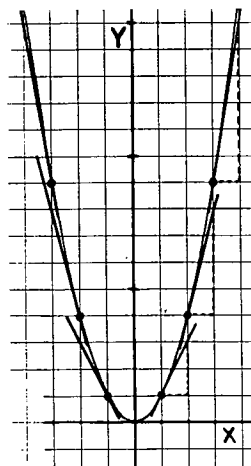
Soms ga je dieper nadenken over wat je vanzelfsprekend vindt. Omdat je erover begint te twijfelen, of omdat je weleens wilt weten wat erachter zit. Of omdat een docent ernaar vraagt. Een echt bewijs is in de meeste gevallen dan teveel gevraagd; er zijn middelen beschikbaar die meer voor de hand liggen:

- Een plaatje met een praatje
- Goed gebruik van voorbeelden door leraar en leerling
- Aansluiten bij oude ervaringen en nieuwe ondersteunende ervaringen opdoen
- Controlemogelijkheden waarmee de leerling zelf de kwaliteit van zijn werk kan beoordelen.

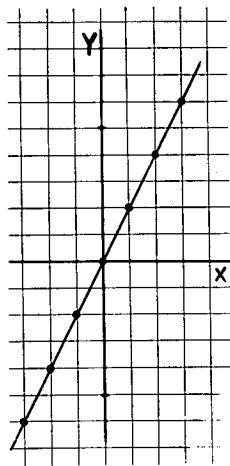
Een voorbeeld (Zie voor meer voorbeelden ^{1.)})

De afgeleide van $f(x) = x^n$ is $f'(x) = nx^{n-1}$.

Veel leerlingen komen niet verder dan: exponent naar voren en voor de nieuwe exponent 1 aftrekken. Dat is de vanzelfsprekendheid op basis van het gezag van de leraar, die op den duur wordt ondersteund door de ervaring dat je het goede antwoord vindt als je het zo doet.



$$f(x) = x^2$$



$$f'(x) = 2x$$

Mogelijkheden van het tussennivo:

Plaatje-praatje

Teken zo precies mogelijk de grafiek van $f(x) = x^2$.

Teken dan heel nauwkeurig de raaklijnen voor $x = -3$ t/m $x = 3$ en meet de richtingscoëfficiënten van die raaklijnen. Bij elke x hoort een richtingscoëfficiënt. Zo hebben we van f een nieuwe functie afgeleid; schets de grafiek van die functie.

Voorbeelden

Controleer op dezelfde manier dat $3x^2$ de afgeleide is van x^3 , $\cos x$ van $\sin x$, e^x van e^x , en andere functies die je kent.

Aansluiten bij oude ervaringen

Bij natuurkunde heb je gehad dat bij de formule voor de afgelegde weg $s = \frac{1}{2}at^2$, de formule voor de snelheid $v = at$; dat is de afgeleide van de afgelegde weg. Net zo kun je ook bij $s = vt$ zien dat de snelheid de afgeleide is van de afgelegde weg.

Ondersteunende nieuwe ervaringen

Via de afgeleide functie is het veel gemakkelijker extremen van functies te vinden dan dat gedoe vroeger met het vinden van de top van een parabool.

Zelfcontrole

De leerling die niet goed meer weet of de afgeleide van $\sin x$ nu $-\cos x$ of $+\cos x$ is, kan zelf uit de hellingshoek bij $x = 0$ afleiden dat het $+\cos x$ moet zijn.

Door dit soort activiteiten krijgt de leerstof betekenis voor de leerling; die leerstof komt in verband te staan met allerlei eerder geleerde zaken die inmiddels vanzelfsprekend geworden zijn. Op den duur kan deze nieuwe leerstof zodoende ook vanzelfsprekend worden, niet alleen op basis van het gezag van de autoriteit, maar doordat de leerling het voor zijn eigen rekening gaat nemen. Er groeit een denkkader, een schema, waardoor hij hoofd- en bijzaken kan onderscheiden en doorziet hoe de samenhang is, hoe het werkt.

Op het tussennivo wordt de zaak niet strikt logisch aangepakt, het denken ontwikkelt zich inductief, met een tikkeltje logica hier en daar. Dat strijkt wiskundig geschoolde leraren wel eens tegen de haren in; ze zouden veel meer 'als ... dan ...' en 'dus ...' willen gebruiken. Het gaat echter in dit stadium niet om bewijzen, maar om overtuigen. Concrete voorbeelden, een overzichtelijk plaatje, zien dat het klopt wat je doet, hebben grote overtuigingskracht.

Overtuigen gaat aan bewijzen vooraf, bewijzen kunnen daarom geen middel zijn om tot overtuiging te komen in het algemeen.

De kracht van het tussennivo is de beschrijving: 'Zo zit het in elkaar'; dat het logisch is dat het zo in elkaar zit, dat is nog geen punt.

Het bewijsnivo

Het kan zijn dat je begint te twijfelen aan de overtuiging van het tussennivo; of iemand vraagt je nu eens *precies* te verantwoorden hoe de vork in de steel zit. Je neemt geen genoegen meer met voorbeelden, maar je wilt een redenering waar alle voorbeelden inpassen. Dan moet de zaak logisch aangepakt worden. Dan ben je op bewijsnivo aangeland.

Op het bewijsnivo gaat het werk strikt logisch en methodisch, zodat er geen speld tussen te krijgen is. Vanuit axioma's en definities worden stellingen afgeleid en nog meer stellingen. Je kunt *bewijzen* dat nx^{n-1} de afgeleide is van x^n .

Iedere leraar weet uit ervaring dat leren bewijzen erg moeilijk is. Dat is ook te begrijpen als je je realiseert dat de werkwijze van het bewijsnivo essentieel verschilt van die van het tussennivo. Strikt deductief op bewijsnivo, tegenover inductief op het tussennivo. Je kunt ook niet alles bewijzen, axioma's en definities lenen zich daar niet voor.

Verder is het vaak nodig definities en stellingen opnieuw te formuleren: Voor het bewijs dat nx^{n-1} de afgeleide is van x^n kun je met de raaklijndefinitie niet uit de voeten. Dan moet je gaan praten over de limiet van het differentiequotient, en daar horen dan weer theorieën en vaardigheden met betrekking tot limieten bij. En soms merk je pas bij het bewijzen van een stelling hoe je hem het beste kunt formuleren.

Twee belangrijke conclusies

- 1 Werken op het tussennivo maakt het mogelijk dat de leerling de nieuwe leerstof voor zijn eigen rekening gaat nemen. Bewijzen en afleidingen zijn in het algemeen geen middelen die de leerling echt verder helpen daarbij; ze overtuigen niet goed. Struktuur in het denken ontstaat door de middelen van het tussennivo: plaatje-praatje, een goed gebruik van

voorbeelden en ervaringen, en zelfcontrole.

- 2 De leraar kan het gezag dat hij heeft, positief gebruiken om moeilijke dingen voor de leerling als vanzelfsprekend voor te stellen. Leerlingen kunnen en hoeven niet alles meteen te begrijpen, ze zijn vaak al een eind op weg als ze weten hoe ze het moeten doen. Het kan voor de leerling een fijne manier van leren zijn als de leraar zegt: 'Doe het maar zo, dan gaat het goed'. Dat kan die leerling de veiligheid geven die hij nodig heeft.

Ik moet daar wel meteen een maar op laten volgen: Als de leraar het daarbij laat, wordt de leerling nooit zelfstandig. Er moet dus een vervolg op komen: Na een tijdje met de middelen van het tussennivo proberen verder te komen; niet meer de leerling overreden, maar zorgen dat hij overtuigd raakt. Dat zal vaak nog in dezelfde les zijn, en soms kan het veel langer duren.

3 Helpen met houvast

De leraar ziet dat een leerlinge houvast mist, wanneer zij niet in actie komt als hij haar helpt. Hij merkt het wanneer hem het gevoel bekruipt dat de leerlinge zit te raden wat hij wil dat zij zal zeggen. Hij weet het wanneer hij elk antwoord van de leerlinge er als het ware uit moet trekken. Vragende gezichten, geen concentratie, leerlingen die om zich heen kijken.

In die situaties zal de leraar dus op moeten passen met steeds meer vragen te stellen. Hoe goed bedoeld ook, kan dat maken dat de leerlingen hun houvast steeds meer missen en zich onveilig gaan voelen bij al dat gevraagd.

De leerling is het spoor bijster, en in schoolse situaties ligt het voor de hand dat de leraar even het stuur overneemt, om de leerling weer op het spoor te helpen. Dat betekent in het algemeen een klein stukje sturend onderwijs, even het heft helemaal in handen nemen als leraar. Informatie geven, of gesloten vragen of opdrachten die de leerling zeker aankan. Geen vragen die de leraar informatie moeten verstrekken; de leerling heeft houvast nodig, die is eerst aan de beurt. In elk geval zal de leraar moeten aansluiten bij wat voor de leerling al wel vanzelfsprekend is.

Kijk nog eens naar het voorbeeld van $\sqrt{a^2} = a$ in paragraaf 1. In de voortzetting is de leraar de autoriteit die door zijn deskundigheid doorziet waar de moeilijkheid zit. Hij deelt dat de leerling mede, en die kan dat verbinden met wat voor hem vanzelf spreekt ('Stom dat ik niet aan negatieve getallen heb gedacht'); hij heeft weer houvast. De opdracht 'Neem nu eens -3 ' kan hem weer aan het denken zetten over hoe het nu echt zit met $\sqrt{a^2} = a$. Als hij die uitdaging aanneemt heeft de leraar hem zodoende weer naar het tussennivo geholpen.

Nu wil ik hiermee niet zeggen dat bij moeilijkheden de leraar altijd de leerling even helemaal bij de hand moet nemen. Het kan zijn dat de leerling al zo gewend is aan vragen en opdrachten op het tussennivo, dat de leraar besluit minder sturend te werk te gaan en bijvoorbeeld zegt: 'Ik vind dat je je voorbeelden wel wat te eenzijdig kiest'. Ook dat is dan informatie die aansluit bij wat voor de leerling vanzelfsprekend is, en die hem uitdaagt in actie te komen: Hij moet eerst maar eens zijn manier van werken onder de loupe nemen.

Helpen met houvast betekent dus dat er weer een koppeling komt tussen de probleemsituatie en de relevante vanzelfsprekendheden van de leerling:

- Aangeven wat de verwarring veroorzaakt.
- Kort en duidelijk zeggen hoe het zit, in de woorden van de leerling, aansluitend bij zijn vanzelfsprekendheden, met middelen van het tussennivo.
- Vragen en opdrachten die de leerling zeker aankan.
- Een weg aangeven om uit de moeilijkheden te komen.
- Wegen aanwijzen waarlangs de leerling zelf kan vinden wat de verwarring veroorzaakt, zelf kan uitvinden hoe het zit, zelf manieren kan vinden om uit de moeilijkheden te komen.

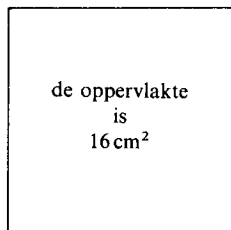
In het lbo en het mavo, en in de onderbouw havo/vwo komen leerlingen nauwelijks of niet aan het bewijsnivo toe; daar geeft de leraar zijn leerlingen dus geen houvast met redeneringen waar veel 'als ... dan ...' en 'dus ...' in zit. Je kunt die leerlingen wel helpen zien *hoe* het in elkaar zit (tussennivo), maar niet dat het allemaal strikt logisch is (bewijsnivo).

Een laatste voorbeeld.

Hoe zit het ook al weer met $\sqrt{7} \times \sqrt{7}$?

Niet: $\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$, want $\sqrt{7}$ is het positieve getal dat in het kwadraat 7 oplevert.

Wel b.v.: Een vierkant met oppervlakte 16 heeft zijden van $\sqrt{16} = 4$.



De zijde is $\sqrt{16} = 4$ cm

Wanneer je met die zijden weer de oppervlakte wilt uitrekenen, dan is dat $4 \times 4 = \sqrt{16} \times \sqrt{16} = 16$. Of net zo bij een vierkant met oppervlakte 64: De zijde is $\sqrt{64}$ en dus is $\sqrt{64} \times \sqrt{64} = 64$ (acht keer acht). En $\sqrt{100} \times \sqrt{100} = 100$. Zo gaat dat met alle wortels, ook met $\sqrt{7}$. Kun je daar nu zelf een plaatje bij maken?

Kun je er nu nog een zelf bedenken?

Groeiende schema's

Helpen met houvast is niet compleet zonder iets wat de leerling uitdaagt nu weer *zelf* in actie te komen. De leraar geeft de leerling als het ware aan om welke denkschema's het gaat, en hoe hij de grensgebieden in kaart kan brengen. Aan die grensgebieden valt voor hem iets te leren, niet aan iets wat kilometers verderop ligt.

Literatuur

- 1 Bram Lagerwerf: *Nivo's van zekerheid*. Nieuwe Wiskrant dec. 83.
- 2 Bram Lagerwerf: *Wiskundeonderwijs nu*, H 10 en H 19, Groningen 1982.

Over de auteur:

Bram Lagerwerf is docent bij de vakgroep wiskunde van de Stichting Opleiding Leraren te Utrecht.

Boekbesprekingen

J. T. Willmore, *Total curvature in Riemannian geometry*.

The book is divided into 6 chapters. First chapter gives short, reasonably self-contained review of Riemannian geometry (differential forms, Stoke's theorem, affine connection, Cartan's structural equations, curvatures, etc.). Chapter 2 contains the proof of the Gauss-Bonnet-Chern formula, expressing the Euler characteristic of the Riemannian manifold in terms of an integral involving the curvature of the Riemannian structure. The remaining four chapters deal with extrinsic curvatures, that is, invariants which depend on the way in which a manifold is immersed in another manifold. The attention is confined mainly to the total (absolute or mean) curvature. The total curvature $\tau(M, f)$ of a compact immersed m -submanifold $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+N}$ is defined as the measure of the image of the unit normal bundle B on the unit sphere of $\mathbb{R}^{m+N}$ under the Gauss map $v: B \rightarrow S^{m+N-1}$. More precisely

$$\tau(M, f) = \frac{1}{C_{m+N-1}} \int_M K^*(p) dv$$

where $K^*(p)$ is the integral $\int |G(p, v)| d\sigma_{N-1}$ over the sphere of unit normal vectors at $f(p)$, C_{m+N-1} is the volume of the unit $(m+N-1)$ -sphere in $\mathbb{R}^{m+N-1}$ and $G(p, v)$ is the Lipschitz-Killing curvature at $v(p)$. The function $G(p, v)$, which generalize the Gauss curvature, admits well known geometric interpretation in terms of the Gauss curvature. Therefore $\tau(M, f)$ has a strong geometric meaning and estimates on the value of $\tau(M, f)$ yield informations on the topology and geometry of M . Typical results (due to Chern-Lashof): If $\tau(M, f) < 3$, then M is homeomorphic to a sphere. If $\tau(M, f) = 2$, then $f(M)$ lies in an affine linear subspace E^{m+1} of dim $m+1$, and is embedden as a convex hypersurface in E^{m+1} .

Total curvature and the related notion of tight immersion (the immersion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+N}$ is said to be tight, if the image is not contained in a proper linear subspace of $\mathbb{R}^{m+N}$ and if f has minimal total curvature), have received many interesting developments in recent years (Kuiper, Banchoff, Pohl, Chen, Willmore). Typical questions concerning tight immersions are: for which manifolds M , which immersion f , and which integers N is the immersion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+N}$ tight? when such tight immersions

exist what are the special properties of $f(M)$? Some of these developments and problems are described in Chapters 3 and 4. Finally chapter 5 and 6 deal with the total mean curvature and minimal submanifolds.

Willmore's book has some weaknesses, it sometime repeats results from papers with little change. Several results are quoted without proof and references are not always clearly indicated (although the bibliography is very complete). Nevertheless the book is very readable and certainly useful for experts from other fields who wish to be introduced to the world of total curvature.

Prof. dr. J. Bochnak

F. Chorlton, *Textbook of Dynamics*, 2nd Edition, Ellis Horwood Limited, Chichester (1983), 271 pp. £ 18.50.

Dit is een leerboek der theoretische (of 'klassieke') mechanica; het onderwerp wordt wel gedefinieerd als de leer der bewegingen van massastelsels met een eindig aantal vrijheidsgraden, zoals massapunten en starre lichamen. Dit in tegenstelling tot de technische (of 'toegepaste') mechanica waarbij vormveranderingen en de daardoor opgewekte krachten op de voorgrond staan.

Het werk van Chorlton is bestemd voor het universitaire onderwijs; de inhoud is daardoor vrijwel vastgelegd. De waarde als leerboek wordt dan bepaald door de presentatie, de vraag of het betoog didactisch verantwoord is, gelukkig gekozen voorbeelden en opgaven, alsmede door de behandeling van onderwerpen van marginaal karakter. Gemeten aan deze criteria kan naar mijn mening het boek uitstekend en dus aanbevelenswaardig worden genoemd en het verwondert niet dat een tweede druk nodig bleek. In het voorbericht zijn de aanvullingen op de eerste editie opgesomd. Dat zij het boek hebben verrijkt kan ik niet onderschrijven; de bespreking van een geofysisch probleem (p. 47-48) is door zijn beknoptheid niet te volgen en de behandeling van een worpprobleem (p. 85-87) lijkt mij daarentegen al te uitvoerig. Dit negatieve oordeel geldt zeker niet voor de duidelijke beschouwingen betreffende actuele vragen als satellietbewegingen en de gang van zaken bij (meertraps)raketten (p. 70-80).

Zoals te verwachten was leidt de schrijver als hoogtepunt van zijn betoog de vergelijkingen van Lagrange af, op een gebruikelijke manier. Daarna worden in een slothoofdstuk de beginselen van de variatierekening, het principe van Hamilton en dat van 'de kleinste werking' op een beknopte doch aanvaardbare manier besproken.

Het boek van Chorlton is te meer waardevol door zijn voortreffelijke keuze van uitgewerkte vraagstukken (wij noemen als een enkel voorbeeld de beweging van een massapunt langs een cardioïde op p. 95-96). Zij zijn merendeels ontleend aan universitaire examenopgaven en een bewijs voor het hoge niveau waarop de theoretische mechanica in het Verenigd Koninkrijk wordt onderwezen.

O. Bottema

Bouwen met zwarte dozen

Theo Kristel

Inleiding

Dit artikel is tegelijkertijd een vervolg op en een zijweg van mijn artikel 'Gedachten over de didactiek van machine-architectuur' dat in Euclides 60, 8/9, 1985 gepubliceerd is. Om de inhoud en stijl van dit artikel te kunnen plaatsen is (her)lezing van het zojuist genoemde artikel sterk aan te raden.

Het onderhavige artikel beoogt een aantal zaken te laten zien. De methodologische boodschap staat natuurlijk centraal. Daarnaast echter toont het gebruikte voorbeeld aan dat denken over modellen voor apparatuur vrijwel zonder enige elektr(on)-ische kennis kan geschieden, terwijl de wiskundige komponent sterker op de voorgrond treedt. Tenslotte suggereert het gebruikte voorbeeld dat er andere aardige voorbeelden voor het oprapen liggen. Dat is ook zo. Op de NLO Interstudie te Nijmegen zijn een aantal voorbeelden in deze stijl ontwikkeld. Op het moment dat dit geschreven wordt is er ook een prototype van een verzameling bijbehorende practicum materialen ontwikkeld.

Probleemverkenning

Het uiteenrafelen (analyseren) van zwarte dozen is een manier om selectief de structuur van een voorgegeven systeem te verkennen. Deze *methode van de stapsgewijze analyse*, oftewel de *top-down methode*, wordt zeker niet alleen binnen de machine-architectuur gebruikt. Feitelijk is het een probleemoplossingsmethodiek die op velerlei gebied toepasbaar is. Speciaal dient echter de toepassing binnen het programmeeronderwijs genoemd te

worden: het is één van de belangrijkste methodieken die behulpzaam zijn bij het ontwerpen van correcte programma's van middelmatige grootte. Binnen de didactiek van het programmeren wordt deze methodiek vaak aangeduid als 'de methode van de stapsgewijze verfijning' of als 'top-down programmeren'.

Het bouwen (synthetiseren) met zwarte dozen is een methode die eigenlijk pas zinvol wordt bij de constructie van ingewikkelde systemen m.b.v. eenvoudige basiscomponenten. Hierbij kun je zowel denken aan de constructie van apparatuur (bijvoorbeeld het bouwen van een microprocessor met transistors als basiscomponenten) als aan de constructie van programmatuur (bijvoorbeeld het bouwen van een vertaler met de hulpmiddelen van een hogere programmeertaal). Omdat het criterium voor zinvolle toepassing feitelijk is: het eindprodukt moet relatief ingewikkeld zijn t.o.v. de bouwstenen, is het lastig om een natuurlijk voorbeeld te vinden dat in een klein bestek past. En dat is in dit artikel ook niet echt gelukt. Wel laat het voorbeeld een aantal essentiële karakteristieken van deze *methode van de stapsgewijze synthese*, oftewel de *bottom-up methode*, zien.

In het artikel 'Programmeren in de bovenbouw van het VO' door C. H. A. Koster en mijzelf (Euclides, 59, 9, 1984) zijn de top-down methode en bottom-up methode in relatie tot programmatuurontwikkeling besproken. In dit artikel wordt de bottom-up methode in relatie tot apparatuurontwikkeling besproken.

De elementaire basiscomponenten van een elektronische schakeling (chip) zijn de elektronische schakelaars (transistors). Als je een schakeling van enige omvang wilt bouwen wordt het allemaal verschrikkelijk ingewikkeld als dat alleen met die elektronische schakelaars als bouwstenen moet gebeuren. Daarom is het in de wereld van de elektronische architecten gebruikelijk om een aantal nivo's van steeds ingewikkelder bouwstenen te maken. De *methode van de stapsgewijze synthese* is feitelijk het gezichtspunt om bij een gegeven probleemstelling een aantal nivo's van bouwstenen te maken zodat de probleemstelling daarna via de *methode van de stapsgewijze analyse* oplosbaar wordt.

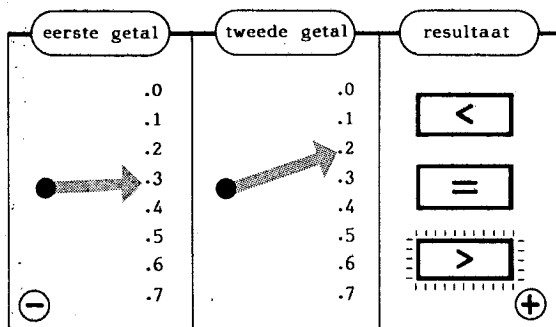
In de wereld van de digitale techniek gaat dat ongeveer als volgt:

- Met elektronische schakelaars als bouwstenen wordt het nivo van de logische poorten (bijv. de EN-poort en de OF-poort) gemaakt.
- Met logische poorten als voornaamste bouwstenen worden basiscomponenten voor rekenkundige bewerkingen (bijv. halve en volle optellers) en gegevens opslag (bijv. de D-flipflop en de JK-flipflop) gemaakt.
- Met basiscomponenten voor rekenkundige bewerkingen en gegevensopslag als voornaamste bouwstenen worden rekenkundige schakelingen (bijv. een opteller) en geheugenschakelingen (bijv. een geheugenplaats) gemaakt.
- Met rekenkundige schakelingen, geheugenschakelingen, en nog wat andere schakelingen als voornaamste bouwstenen worden microprocessors gemaakt.

Het voorbeeld dat nu besproken gaat worden is aan deze elektronische kontekst verwant. Toch hoeft men niets van elektronika te weten om het voorbeeld te kunnen volgen: zeer elementaire kennis van huis-, tuin-, en keuken-elektriciteitsleer is voldoende.

De probleemstelling is als volgt: maak een zwarte doos die twee kleine getallen met elkaar kan vergelijken.

Konkreet zou die zwarte doos er aan de buitenkant als volgt uit kunnen zien.



Aan de buitenkant van de doos zitten twee schakelaars, waarmee twee getallen van 0 t/m 7 ingesteld

kunnen worden. Altijd gaat er een lampje branden, dat aangeeft of het eerste getal kleiner is dan ($<$), gelijk is aan ($=$), of groter is dan ($>$) het tweede getal. Om die lampjes te kunnen laten branden moet er stroom toegevoerd worden. Ook voor het beslissingsproces zelf is stroom nodig. De doos als geheel is dus aangesloten op een batterij. Om het aantal draden tot een minimum te beperken (in verband met de overzichtelijkheid) tekenen we alleen de aansluitpunten $\ominus$ en $\oplus$: we doen dus net of de voedingsdraden vanaf en naar de batterij onder het papier lopen (net als bij een chip op een printbord).

Het zal blijken dat elke zwarte doos (in de kontekst van dit voorbeeld) altijd met minstens één van de polen van een batterij verbonden moet zijn. Daarom tekenen we vanaf nu die aansluitpunten $\oplus$ en $\ominus$ niet meer op de buitenkant van de zwarte dozen. Die aansluitpunten zijn er altijd, en we kunnen ons voorstellen dat die aansluitpunten op de niet-getekende achterkant van de zwarte dozen zitten (zodat de voedingsdraden van en naar de batterij meteen onder het papier kunnen verdwijnen).

Een stukje top-down analyse

De beperking tot kleine getallen is essentieel om de noodzakelijke omzetting van het tientallig stelsel naar het interne geheimschrift van computers, het tweetallige stelsel, eenvoudig te laten verlopen. En hiermee is eigenlijk meteen al een eerste top-down analyse van de probleemstelling gemaakt:

- 1 Zet de tientallige invoer om naar het tweetallig stelsel.
- 2 Vergelijk de zo ontstane tweetallige getallen. Dit betekent dat de voorgaande zwarte doos als volgt uiteengerafeld wordt in nieuwe zwarte dozen (en zwarte draden!):

De beide linkerdozen zetten een tientallig getal van 0 t/m 7 om in een elektrische voorstelling van het bijbehorende tweetallige getal. Dergelijke dozen heten codeerdozen (Eng. encoder). De rechterdoos vergelijkt de elektrische voorstelling van twee tweetallige getallen met elkaar, en heet dan ook een vergelijkingsdoos.

Nu de probleemstelling bekend is, wordt het tijd om over de beschikbare bouwstenen te gaan praten. De voor deze probleemstelling relevante bouwstenen kun je in 2 soorten verdelen.

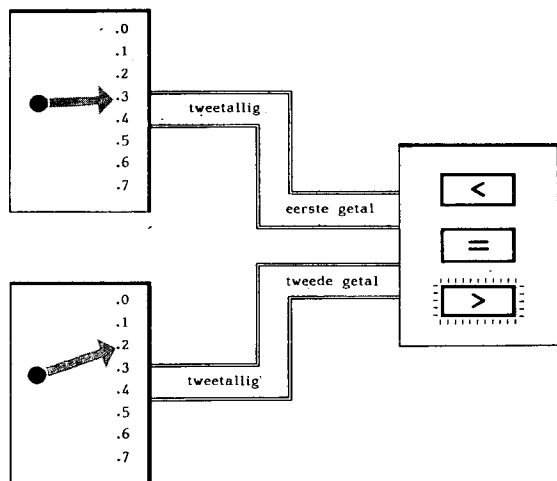
De eerste soort bestaat uit allerlei dozen die invoer vertalen naar het tweetallige stelsel (*codeerdozen*), en dozen die tweetallige getallen terugvertalen naar uitvoer (*decodeerdozen*).

Dit zijn standaardbouwstenen omdat je die bij vrijwel elk probleem in deze sfeer nodig hebt. Met andere woorden, onze beide linkerdozen zijn zo uit de kast te pakken.

Wel is het nodig om precies te omschrijven hoe die elektrische voorstelling van tweetallige getallen er uit ziet, want anders kennen we de invoer van de vergelijkingsdoos niet.

Een codeerdoos voor de getallen 0 t/m 7 moet de volgende vertaling tot stand brengen:

0 → 000
1 → 001
2 → 010
3 → 011
4 → 100
5 → 101
6 → 110
7 → 111



De enige tweetallige cijfers zijn 0 en 1. In plaats van 'tweetallige cijfer' wordt meestal het woord 'bit'

gebruikt¹. We zeggen daarom ook dat je voor de vertaling van de getallen 0 t/m 7 3 bitposities nodig hebt. De bitposities worden van rechts naar links geteld:

5 → 1 0 1
bitpositie 3 bitpositie 2 bitpositie 1

De elektrische voorstelling van tweetallige getallen van 3 bitposities kun je realiseren door 3 parallelle elektrische stroomdraden te gebruiken. Met andere woorden, de zwarte draad

tweetallig getal

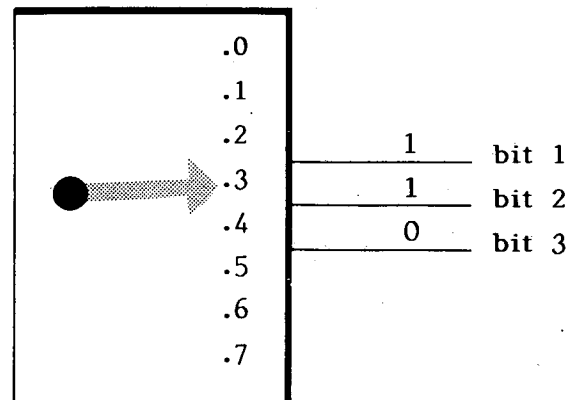
wordt verfijnd tot (we korten bitpositie af tot bit)

____ bit 1
____ bit 2
____ bit 3

Met de afspraak:

- Een stroomloze draad stelt een 0 voor.
 - Een stroomvoerende draad stelt een 1 voor.
- is de elektrische voorstelling van tweetallige getallen vastgelegd.

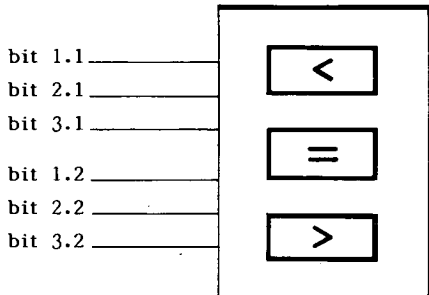
Onze codeerdoos ziet er dus als volgt uit:



¹ 'bit' is een samentrekking van het Engelse woord 'binary digit' dat 'tweetallige cijfer' betekent.

Omdat de codeerdoos een standaardbouwsteen is hoeft hij niet gebouwd te worden. Feitelijk is de constructie erg eenvoudig, en geïnteresseerden worden verwezen naar het intermezzo op pag. 207²).

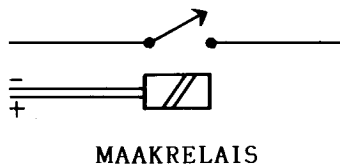
Als probleemstelling hebben we nu het bouwen van de vergelijkingsdoos over. Nu de afspraken over de elektrische voorstelling van tweetallige getallen vastgelegd zijn, kan die doos als volgt getekend worden.



De bovenste 3 draden stellen de 3 bits van het eerste getal voor. De onderste 3 draden stellen de 3 bits van het tweede getal voor.

De fundamentele bouwstenen

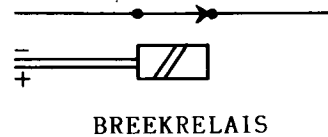
Laten we aannemen dat de vergelijkingsdoos niet op de plank ligt. Om deze te bouwen staat een tweede soort bouwstenen ter beschikking: het *maakrelais* en het *breekrelais*



Het maakrelais bestaat uit een ijzeren schakelaar met daaronder een elektromagneetje (een stukje

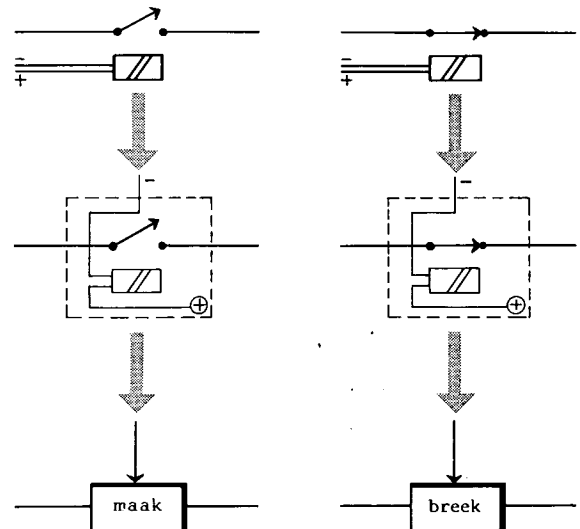
² Als je dozen gaat koppelen moet je er voor zorgen dat er alleen draden tussen tegengestelde batterijpolen lopen: '+' moet aan '-'. Aan dit detail wordt in de rest van deze paragraaf geruisloos voldaan.

weekijzer omwonden met stroomdraad). Als het elektromagneetje stroom voert, dan heeft die een magnetisch veld dat sterk genoeg is om de ijzeren schakelaar naar beneden te trekken. Als het elektromagneetje geen stroom voert, dan is dat magnetisch veld niet sterk genoeg en veert de ijzeren schakelaar automatisch terug naar zijn getekende ruststand (er zit dus een veertje in het scharnier). Gevolg: als het elektromagneetje stroom voert, dan kan er stroom in de bovenste draad passeren; als het elektromagneetje geen stroom voert, dan kan er geen stroom in de bovenste draad passeren.



Het breekrelais werkt precies andersom; als het elektromagneetje stroom voert, dan kan er geen stroom in de bovenste draad passeren; als het elektromagneetje geen stroom voert, dan kan er wel stroom in de bovenste draad passeren.

Deze bouwstenen zijn elementair genoeg om de methode van de stapsgewijze synthese, oftewel de bottom-up methode, mee te demonstreren. De eerste stap is om van het maakrelais en het breekrelais echte zwarte dozen te maken: nu we weten wat ze doen hoeven we niet meer te weten hoe ze het doen.



De werking van deze beide zwarte dozen kan als volgt omschreven worden.

maakdoos: Als er stroom door de pijldraad gaat, dan zijn de beide andere draden met elkaar verbonden (en kan er dus stroom door lopen).

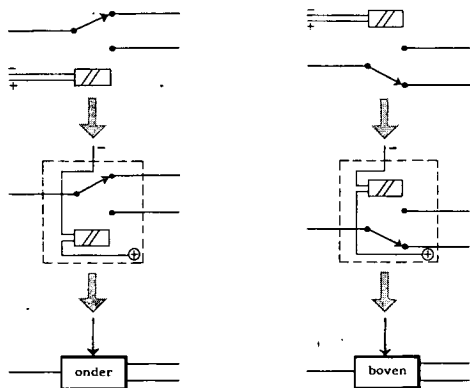
Als er geen stroom door de pijldraad gaat, dan zijn de beide andere draden niet met elkaar verbonden (en kan er dus geen stroom door lopen).

breekdoos: Als er stroom door de pijldraad gaat, dan zijn de beide andere draden niet met elkaar verbonden (en kan er dus geen stroom door lopen).

Als er geen stroom door de pijldraad gaat, dan zijn de beide andere draden met elkaar verbonden (en kan er dus stroom door lopen).

Alhoewel irrelevant voor dit voorbeeld, is het boeiend om te weten dat de beschrijving van de maakdoos en de breekdoos vrijwel geheel overeenkomt met de werking van de modernste CMOS-transistors (de echte bouwstenen van moderne chips). Het aardige van zwarte dozen is dan ook, dat je niet hoeft te weten met welke technologie de binnenkant gemaakt is: het is voldoende om te weten hoe je met de buitenkant om moet springen.

Het is handig om onze twee fundamentele bouwstenen uit te breiden met twee andere bouwstenen: het *onderrelais* en het *bovenrelais*. We maken er meteen zwarte dozen van.



De werking van deze beide dozen kan dus als volgt omschreven worden.

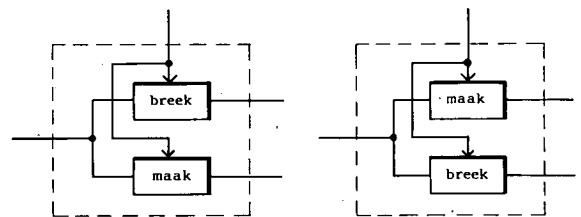
onderdoos: Als er stroom door de pijldraad gaat, dan is er een verbinding tussen de linkerdraad en de onderste rechterdraad.

Als er geen stroom door de pijldraad gaat, dan is er een verbinding tussen de linkerdraad en de bovenste rechterdraad.

bovendoos: Als er stroom door de pijldraad gaat, dan is er een verbinding tussen de linkerdraad en de bovenste rechterdraad.

Als er geen stroom door de pijldraad gaat, dan is er een verbinding tussen de linkerdraad en de onderste rechterdraad.

Deze beide nieuwe bouwstenen lijken wel iets minder 'fundamenteel' dan de beide andere, want de onderdoos en de bovendoos kunnen gebouwd worden m.b.v. de maakdoos en de breekdoos³. Om wat te oefenen in het werken met deze zwarte dozen staan deze bouwsels hieronder. Zoek zelf uit welk bouwsel de onderdoos en welk bouwsel de bovendoos voorstelt.



De maakdoos, breekdoos, onderdoos, en bovendoos zijn vanaf nu echte zwarte dozen: nu we eenmaal weten hoe je ze kunt maken, interesseert ons alleen nog wat ze doen. Dit zijn de vier bouw-

³ Overigens, met de onderdoos en bovendoos als bouwstenen kun je ook weer de maakdoos en breekdoos bouwen door draden weg te laten. Het is nogal relatief wat je fundamenteel noemt.

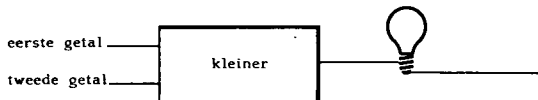
stenen waarmee we het probleem van de vergelijkingendoos gaan aanpakken: het onderste bouwnivo.

Het onderste bouwnivo

We gaan niet meteen proberen een vergelijkingendoos voor tweetallige getallen van 3 bits te bouwen. Die taak is te ingewikkeld om ineens uit te voeren. We doen een tussenstap door eerst een vergelijkingendoos voor tweetallige getallen van 1 bit te ontwikkelen. Die doos blijkt je te kunnen gebruiken bij het bouwen van de 3-bits vergelijkingendoos (in de praktijk zou je zo iets eerst verifiëren via een topdown analyse, maar dat laten we nu even achterwege).

Ook de taak om een 1-bits vergelijkingendoos te bouwen voeren we niet in één keer uit. Eerst gaan we aparte doosjes bouwen om te kijken of twee 1-bits getallen kleiner, groter, of gelijk zijn. Want dat is een denknivo dat dicht tegen de elementaire bouwstenen aanligt.

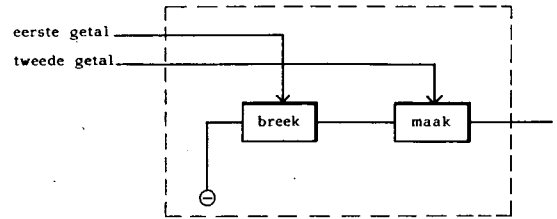
We beginnen met een doosje dat nagaat of het eerste 1-bits getal wel dan niet kleiner is dan het tweede 1-bits getal: de kleinerdoos.



Eerst moeten we vastleggen wat deze kleinerdoos precies moet doen. Het lampje mag alleen maar branden als het eerste getal kleiner dan het tweede getal is. Omdat beide getallen slechts 0 of 1 kunnen zijn, mag dat dus alleen het geval zijn als eerste getal = 0 en tweede getal = 1. Iets abstrakter kunnen we het als volgt formuleren.

kleinderdoos: Als eerste getal = 0 en tweede getal = 1 moet er stroom door de uitgangsdraad lopen. In alle andere gevallen mag er geen stroom door de uitgangsdraad lopen.

Een dergelijke doos is eenvoudig te maken met behulp van een maakdoos en een breekdoos. Controleer maar dat onderstaand bouwsel aan de beschrijving van de kleinerdoos voldoet.



Je kunt hier als volgt naar kijken: er komt alleen stroom uit de doos als beide schakeldozen stroom doorlaten, en dit is alleen het geval als eerste getal = 0 en tweede getal = 1.

Op precies dezelfde manier kun je een groterdoos maken. Daar mag alleen stroom uitkomen als eerste getal = 1 en tweede getal = 0. Maak die doos zelf.

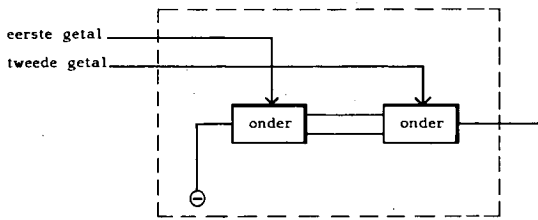
Nu moet de gelijkheidsdoos nog gebouwd worden.



Deze doos mag de lamp alleen maar laten branden als beide 1-bits getallen gelijk zijn. Iets preciezer kun je dat als volgt formuleren.

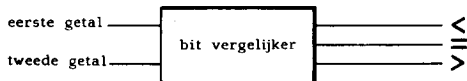
gelijkheidsdoos: Als eerste getal = 0 en tweede getal = 0, of als eerste getal = 1 en tweede getal = 1, moet er stroom door de uitgangsdraad lopen. In alle andere gevallen mag er geen stroom door de uitgangsdraad lopen.

Een dergelijke doos maak je het eenvoudigst met behulp van de schakeldozen voor het onderrelais of het bovenrelais. Controleer zorgvuldig dat onderstaand bouwsel aan de beschrijving van de gelijkheidsdoos voldoet.



Het middelste bouwnivo

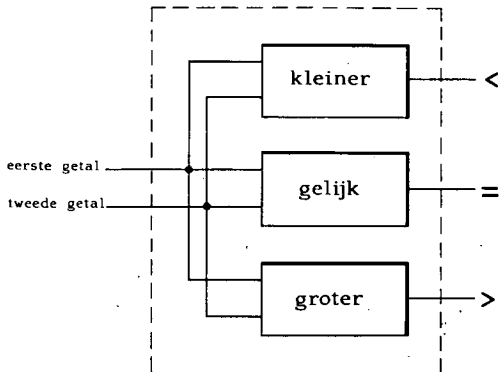
Nu hebben we de bouwstenen in handen om de belangrijkste tussenstap naar de oplossing van het probleem te bouwen: de vergelijkingsdoos voor 1-bits getallen.



Deze doos doet het volgende. In alle gevallen geldt:
 óf eerste getal < tweede getal,
 óf eerste getal = tweede getal,
 óf eerste getal > tweede getal.

In elk van die drie gevallen komt er uitsluitend stroom op de bijbehorende uitgangsdraad, en zijn de beide andere draden stroomloos. Elk van de uitgangsdraden zou weer een lamp kunnen voeden, zodat je ook kunt zien in welk geval je zit.

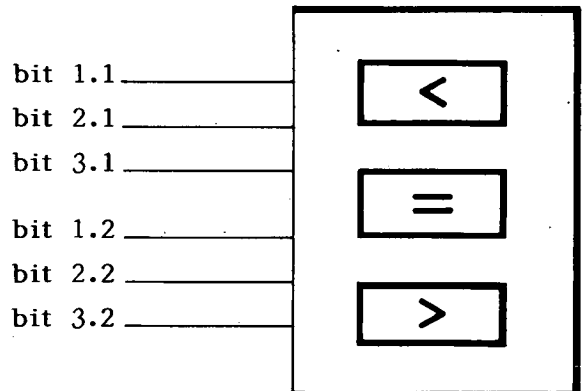
Die bitvergelijker is op een voor de hand liggende manier samen te stellen uit een kleinerdoos, een gelijkheidsdoos, en een groterdoos.



Stel je eens voor dat je deze doos in één keer had moeten ontwerpen, dus zonder de kleinerdoos, gelijkheidsdoos, en groterdoos als tussenstap te nemen. Dan was het veel minder eenvoudig geweest om tot een verifieerbaar correct ontwerp te komen. Dit illustreert op een bescheiden manier de kracht van de bottom-up methode, die heel globaal gesproken als volgt werkt. Neem de moeite om een aantal tussenstappen te doen tussen de bouwstenen en de uiteindelijke probleemoplossing. Elk van die tussenstappen komt overeen met een paar nieuwe zwarte dozen, waarvan we alleen maar hoeven te onthouden wat ze doen, en niet hoe ze het doen. Dit is een van de weinige methoden die ter beschikking staan om de complexiteit van computersystemen beheersbaar te houden.

Het bovenste bouwnivo

We zien dit proces nog eens geïllustreerd in de laatste stap: het bouwen van de 3-bitsvergelijkingsdoos met behulp van 1-bits vergelijkingsdozen.



Om dat bouwprobleem op te lossen moet je dus precies weten hoe je twee getallen van elk 3 bits met elkaar vergelijkt. Omdat dit in het tweetalig stelsel net zo gaat als in het tientalig stelsel, beschrijven we dit vergelijkingsproces via enige voorbeelden in het tientalig stelsel.

Voorbeeld: Vergelijk 721 met 632.
 Bekijk de beide derde posities.
 Omdat $7 > 6$ is $721 > 632$

Voorbeeld: Vergelijk 621 met 632
 Bekijk de beide derde posities.
 Omdat $6 = 6$ gaan we door naar de tweede posities.
 Bekijk de beide tweede posities.
 Omdat $2 < 3$ is $621 < 632$.

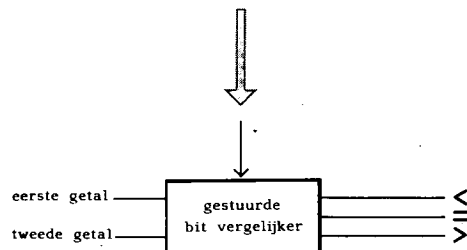
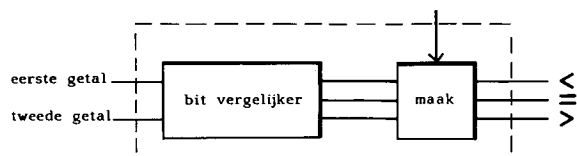
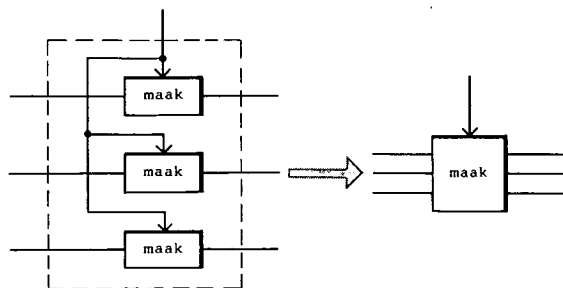
Voorbeeld: Vergelijk 632 met 632
 Bekijk de beide derde posities.
 Omdat $6 = 6$ gaan we door naar de tweede posities.
 Bekijk de beide tweede posities.
 Omdat $3 = 3$ gaan we door naar de eerste posities.
 Bekijk de beide eerste posities.
 Omdat $2 = 2$ en om dat de eerste positie de laatste positie is, volgt $632 = 632$.

Als we deze analyse vertalen in een bouwidee, dan klinkt dat ongeveer als volgt:

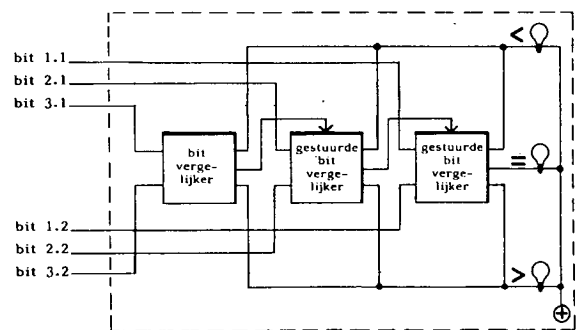
Vergelijk de beide eerste bits via een bitvergelijker. Als het ene bit groter is dan het andere, of omgekeerd, zijn we klaar. Zo niet, vergelijk dan de beide volgende bits met een tweede bitvergelijker. Enzovoorts.

Een belangrijk element in dit bouwidee is het gebruik van '...klaar. Zo niet...'. Want dit impliceert dat de tweede bitvergelijker alleen gebruikt mag worden indien de eerste bitvergelijker stroom op de gelijkheidsdraad aflevert. Met andere woorden, er is een bitvergelijker nodig die alleen 'op bevel' werkt.

Een dergelijke *gestuurde bitvergelijker* kun je maken door de uitvoer van de gewone bitvergelijker door een schakeldoos te laten lopen die de uitvoer alleen doorlaat als er stroom door de besturingsdraad loopt. De nu volgende tekeningen spreken voor zich.



Nu staat niets ons meer in de weg om het geformuleerde bouwidee ook echt te realiseren. De tekening ziet er moeilijk uit, maar als je even kijkt zul je zien dat het meevalt.



Over de auteur:

Theo Kristel was van augustus 1976 tot en met juli 1985 als docent wiskunde en informatika verbonden aan de NLO Interstudie te Nijmegen. Hij was in 1982 en 1983 gedetacheerd bij de sectie informatika van de KU Nijmegen. Vanaf augustus 1985 werkt werkt hij als informatie-analist bij BSO/Utrecht.

Intermezzo: het ontwerp van de codeerdoos

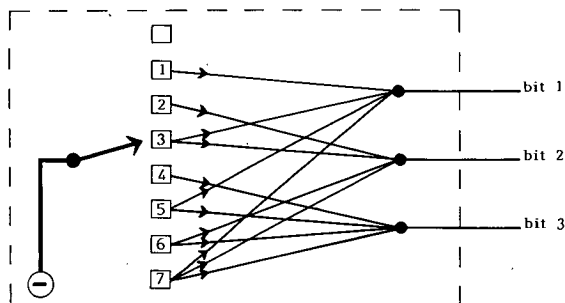
De codeerdoos wordt gemaakt door

a de geleidende schakelaar te verbinden met de negatieve pool van de batterij.

b het schakelpunt voor elk tientallig getal te verbinden met de bitdraden die stroomvoerend moeten worden.

De pijltjes in de verbindingsdraden stellen zogenaamde gelijkrichters voor, die voorkomen dat stroom in de verkeerde richting terugvloeit (bijvoorbeeld van 5 via de aansluiting voor bit 1 naar 1 en van 5 via de aansluiting voor bit 1 naar 7). Voorts moeten de schakelpunten voor de tientallige getallen feitelijk langs een cirkelboog staan vanwege de vaste lengte van de schakelaar.

Ga zelf na dat deze bedrading de juiste codering geeft voor elk van de getallen 0 t/m 7. Merk op dat je geen kennis over het tweetallig stelsel nodig hebt om een dergelijke codering te kunnen begrijpen.



Mededelingen

Opgaven bundel Wiskunde B vwo

De nieuw verschenen bundel 'Opgaven Wiskunde B vwo' is reeds de vijfde bundel die in opdracht van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren werd samengesteld. Na de '250 Opgaven' bij de leerplanherziening van 1958, de 'Opgaven Wiskunde vwo' en de Opgaven Wiskunde havo' na de invoering van de mammoetwet in 1968 wordt nu, bij de invoering van wiskunde A en B, aan de reeds verschenen bundel 'Opgaven Wiskunde A vwo' de bundel 'Opgaven Wiskunde B vwo' toegevoegd.

Het eerste hoofdstuk bevat 75 opgaven analyse die hoofdzakelijk ontleend zijn aan de eerder genoemde bundel 'Opgaven wiskunde vwo'. Het tweede hoofdstuk bevat 50 vraagstukken ruimtemeetkunde, waarvan de eerste 25 korte vraagstukken zijn en de laatste 25 uitgebreidere. Bij de samenstelling hiervan is dankbaar gebruik gemaakt van proefwerken en schoolonderzoeken van experimenterende scholen.

Bij veel vraagstukken horen figuren waarin getekend moet worden. Deze figuren zijn te vinden in een los bijgeleverd katern waarin de tekeningen gemaakt kunnen worden. Op de laatste bladzijden van de bundel zijn verkleiningen van deze tekeningen opgenomen.

In het hoofdstuk Examenopgaven zijn alle analysevraagstukken van de examens Wiskunde I vwo vanaf 1973 opgenomen en de in 1985 aan de twaalf experimentele scholen gehouden examens wiskunde B.

De bundel heeft een voorlopig karakter, want op het ogenblik dat zij werd samengesteld waren de experimenten nog in volle gang en was het leerplan nog niet definitief.

Voor de totstandkoming van deze bundel hebben Joop van Dormolen, Martin Kindt, Theo Korthagen, Jan Maassen (eindredactie), Wolfgang Reuter, Henk Schuring, Jan Stoff, Gerard Stroomer en Nelly Verhoef zich geheel belangeloos ingezet. De bundel is uitgegeven bij Wolters-Noordhoff.

New Trends in the History of Science

Van 27-29 augustus 1986 wordt te Utrecht een internationaal congres gehouden met als thema 'New Trends in the History of

Science'. Het congres wordt georganiseerd door de wetenschapshistorische afdelingen van de RU Utrecht en is een onderdeel van de wetenschappelijke activiteiten ter herdenking van het 350-jarig bestaan van de Utrechtse universiteit. Voor verdere inlichtingen: Dr R. P. W. Visser, Biohistorisch Instituut, Nieuwe Gracht 187, 3512 LM Utrecht.

De 11e studiedag NVvW-VVWL

Op zaterdag 22 maart 1986 houden de Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars hun 11e gemeenschappelijke studiedag.

Plaats van samenkomst: *Motel Brabant te Breda.*

Agenda:

- 9.30 ontvangst
- 10.00 opening door de beide voorzitters
- 10.15 An Mogens-Van Werveke (Rijksnormaalschool Gent), *Ring the changes, een week van luiden en geluid in een 6e leerjaar van een Gentse lagere school*
- 11.30 koffie
- 11.45 Henk Schuring (Cito), *Toetsperikelen*
- 13.00 lunch
- 14.30 Prof. dr. Jaap Seidel (oud-hoogleraar TH Eindhoven), *Eutactische sterren*
- 15.45 sluiting

Wie aan de gemeenschappelijke lunch in het motel wil deelnemen, wordt verzocht voor 14 maart f 15.75 te storten op giro 143917 t.n.v. de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars te Amsterdam. Men kan ook ter plaatse afrekenen, maar betaalt f 5,- extra. Treinreizigers nemen aan het station Breda bus 2 of 6 richting IJpelaar; uitstappen halte Zorgvlietstraat.

Automobilisten uit de richting Gorkum kiezen de richting Roosendaal-Antwerpen en verlaten de snelweg bij de afslag Breda-Bavel. Ze hebben het motel dan direct aan hun rechterhand. Uit de richtingen Tilburg en Roosendaal kiest men ook deze afslag, maar moet dan eerst onder de snelweg door rijden.

Korte inhoud van de voordrachten:

An Mogens-Van Werveke, Ring the changes

De Engelse beiaard wordt op een wiskundige manier bespeeld. Het schrijven van 'partituren' voor een kleine beiaard is een manier om bij de zesdeklassers de zin voor patronen wat aan te scherpen en hen te oefenen in het systematisch noteren.

Om de context van deze wiskunde tot zijn recht te laten komen, werd deze activiteit ingebed in de geschiedenislessen over de tijd waarin de beiaard in de eigen historische stad ontstond, werd dieper ingegaan op de begrippen geluid en horen, op tonen en halve tonen, en op de relatie tussen de grootte en het gewicht van een instrument en zijn toonhoogte.

De muzikale vertolking van de wiskundeoefening op een echt instrument maakte van deze 'geluidsweek' een bijzondere belevenis.

Henk Schuring, Toetsperikelen

Een toets kan de leerlingen op een dwaalspoor brengen doordat de redactie voor tweeërlei uitleg vatbaar is. Ze kan onevenwichtig zijn doordat sommige facetten van het onderwerp dubbel en andere in het geheel niet ter sprake komen en ook doordat vaardigheid en inzicht niet in de juiste verhouding getoetst worden. Cascade-vraagstukken kunnen er de oorzaak van zijn dat sommige leerlingen onredelijk gedupeerd worden. Soms kan een vraag op verschillende manieren beantwoord worden en leidt een van die manieren tot tijdverlies. Gebeurt dit aan het begin van een toets dan kunnen de gevolgen catastrofaal zijn. Dergelijke problemen zullen, toegelicht aan concrete voorbeelden, het onderwerp van deze voordracht zijn.

Jaap Seidel, Eutactische sterren

Een eutactische ster in de d -dimensionale ruimte R_d is een stelsel van n vectoren die de orthogonale projectie op R_d vormen van een orthonormale basis van een R_n die R_d als deelruimte bevat. Voor $d = 3$ en $n = 2$ is dit de situatie van de axonometrie.

De voordracht beschrijft een matrix-criterium voor eutactische sterren en vele voorbeelden, met name uit de discrete wiskunde. Ten slotte wordt een aanduiding gegeven van het verband tussen deze 'open beschrijvende meetkunde in hogere dimensies' en de 'quai-kristallen', een zeer recente ontwikkeling in de kristallografie.

Vrouwen en wiskunde

De werkgroep Vrouwen en Wiskunde bestaat bijna vijf jaar.

Als onderdeel van dit eerste lustrum en om de verdere viering van het lustrum te kunnen voorbereiden, wordt op 8 en 9 maart 1986 een weekend gehouden in een kampeerboerderij te Putten op de Veluwe. Dit weekend is niet alleen bedoeld voor alle meer of minder trouwe bezoekers van de landelijke dagen, maar ook voor alle vrouwen die geïnteresseerd zijn in de activiteiten van de werkgroep maar er tot nu toe nog niet toe gekomen zijn eens een landelijke dag te bezoeken.

Het motto van het weekend luidt: 'Vrouwen doen wiskundig'. De bedoeling is, om op een leuke en concrete manier wiskunde te dóen. Daarnaast zal over het beleid van de werkgroep voor de komende jaren nagedacht worden.

Het weekend begint zaterdagochtend om 11 uur en eindigt zondagmiddag om 16 uur. De kosten voor maaltijden en overnachting bedragen f 17,50 per persoon. Om organisatorische redenen is aanmelding vooraf noodzakelijk. Voor verdere informatie: Heleen Verhage, p.a. vakgroep OW & OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, tel. 030-61 16 11 (tijdens kantooruren); 030-93 68 15 (privé).

Wiskunde, leerstijlen en meisjes

Gerdientje Visser

1 Inleiding

De vraag of de hierboven genoemde onderwerpen een ander plaatje zouden opleveren bij vervanging van het woord 'meisjes' door 'jongens', is niet zo eenvoudig te beantwoorden.

Dit ondanks het feit dat het wel bekend is dat er minder meisjes dan jongens aan de exacte vakken deelnemen en onderzoeken naar leerstijlverschillen¹ tussen jongens en meisjes op sommige punten wel geslachtsgebonden kenmerken *lijken* op te leveren.

Met het verbinden van conclusies aan geconstateerde geringe verschillen tussen de sexen moeten we namelijk zeer voorzichtig zijn.

Want in de eerste plaats is het verschil in prestaties en persoonlijke kenmerken tussen de beide sexen vrijwel altijd minder groot dan de verschillen die binnen elke sexe worden aangetroffen.

Vertaald naar wiskundige kenmerken betekent dit: de jongens die niet veel aanleg hebben voor exacte vakken zijn daarmee tevens ook veel zwakker in exacte vakken dan heel veel meisjes.

Een tweede reden waarom we voorzichtig moeten zijn met die conclusies is, dat men de meest waarschijnlijke verklaring voor de verschillen in leerstijl gelegen acht in de wisselwerking tussen aanlegfactoren en factoren in de omgeving, met name in de houding van de moeder gedurende de eerste levensjaren.

Ter illustratie het volgende verhaal:

In het kader van onderzoek van veldafhankelijkheid werd gezocht naar verschillen in gedrag van moeders die invloed zouden kunnen hebben op de

leerstijl van hun kinderen.

(Onder veldafhankelijkheid wordt een leerstijlaspect verstaan. Als mensen veldafhankelijk handelen laten zij zich bij het oplossen van een probleem sterk beïnvloeden door de context en de omgeving waarin het probleem is gesteld. Dit in tegenstelling tot het leerstijlaspect veldonafhankelijkheid waar sprake is van een meer analytische aanpak.²)

Op basis van dit onderzoek van veldafhankelijkheid constateert Witkin (1962, 1969) dat moeders van veldafhankelijke kinderen meer geneigd zijn tot overmatige bescherming van het kind, tot het zien van veel gevaren; zij beschouwen het kind als zwak en hulpbehoevend, stimuleren het niet tot zelfstandigheid. Moeders van veldonafhankelijke kinderen streven er meer naar dat hun kinderen zo snel mogelijk zichzelf kunnen redden, ze dragen hen al vroeg bepaalde verantwoordelijkheden op, die kinderen echt aan kunnen, bijvoorbeeld kleine taken in huis.

Voornoemde feiten maken het er voor onderwijsmensen niet eenvoudiger op, want:

- als we al zouden weten welke leerstijlaspecten bij meisjes en jongens verschillen, dan zijn die verschillen te gering om daarmee alle meisjes en jongens op een bepaalde manier te benaderen,
- als we al zouden weten hoe we het precies moeten aanleggen om meer meisjes bij de exacte vakken te betrekken, dan is er altijd nog een omgeving die mogelijk een andere invloed doet gelden.

We hadden dan ook niet de pretentie met een oplossing van genoemde problemen te komen in de werkgroep 'Leerstijlen' op de jaarvergadering in 1984 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

2 Uitgangspunten van de werkgroep leerstijlen

Het onderwijs heeft invloed

Men neemt aan, dat ook het onderwijs invloed heeft op de leerstijl. Hoewel reeds bij vijfjarigen duidelijke verschillen aangetoond zijn, vinden er nog tenminste tot het zeventiende levensjaar verschuivingen plaats gericht van een meer globale, naar een meer reflectieve, analytische, gedifferentieerde wijze van functioneren. Daar het onderwijs een zwaar beroep doet op analytische vaardighe-

den, is het zeer wel mogelijk dat het aan deze veranderingen meewerkt.

De leerstijl van de docent en diens doceerstijl

Uiteraard heeft ook de docent zijn/haar eigen leerstijl en mede door die stijl heeft hij/zij 'zijn/haar vak' gekozen, dat wil zeggen enerzijds het beroep als lera(a)r(es), anderzijds het vak dat hij/zij doceert. Dat de doceerstijl van de docent zal samenhangen met zijn/haar eigen leerstijl, en dat die doceerstijl mede beïnvloed wordt door het vak dat hij/zij doceert wordt ook aangenomen. Dit is ten dele ook aangetoond.

Veldonaafhankelijke docenten tenderen naar een didactische doceerstijl. Zij zijn meer geneigd tot het houden van een exposé over onderwerpen uit hun vak, tot frontaal onderwijs dus, en tot discussiemethoden en ontdekkingsmethoden waarbij zij zelf de verantwoordelijkheid dragen voor het organiseren van de situatie.

Veldafhankelijke docenten tenderen naar een evocatieve doceerstijl, maar met een duidelijke en goed aangegeven structuur. Ze verkiezen een vrije discussiemethode boven frontale of ontdekkingsmethoden. Ze verkiezen meer democratische klasprocedures dan veldonaafhankelijken.

De leerstijl van leerlingen en die van de docent

Mensen met ongeveer dezelfde leerstijl, althans met overeenkomst in mate van veldonaafhankelijkheid, mogen elkaar graag en vinden elkaar competenten dan anderen, die in dit opzicht duidelijk van hen afwijken. Die voorkeur is al gebleken na een contact van vijftientwintig minuten.

Ook in het onderwijs is dit verschijnsel teruggevonden: leraar en leerlingen met overeenkomstige kenmerken zijn meer op elkaar gesteld en vinden elkaar competenten. Dit geldt voor beide partijen, en eveneens voor leerlingen onderling.

De leerstijl van leerlingen en de doceerstijl van de docent

Men kan verwachten dat veldafhankelijke leerlingen meer profiteren van een warme, persoonlijke evocatieve aanpak, mits die duidelijk opgelegde structuur, meer kenmerkend voor veldafhankelijke docenten, daarbij niet vergeten wordt. Men meent uit onderzoeksresultaten te mogen opmaken dat

deze veronderstelling juist is.

Veldonaafhankelijken leren bij de didactische aanpak beter dan veldafhankelijken. Bij de evocatieve aanpak is er weinig of geen verschil gevonden. Veldonaafhankelijken verkiezen doorgaans echter de didactische benadering.

Uit het voorgaande blijkt dat verschillen overeenkomsten tussen docenten en leerlingen consequenties hebben voor de leerlingen.

3 Doel en opzet van de werkgroep

Als docenten hun stijl aanpassen aan de leerling zou een leerling daar dus wel eens bij gebaat kunnen zijn. Maar docenten zijn zich vaak niet bewust van hun eigen stijl. Daarom kozen we als doel van deze werkgroep de deelnemers iets van hun eigen stijl te laten ervaren.

Na een korte inleiding over de hiervoor beschreven uitgangspunten van de werkgroep kregen de deelnemers twee zeer uiteenlopende opdrachten:

Opdracht I

In een tijdsbestek van 4 minuten moest men uit negen patronen, waarvan er hieronder twee worden getoond, één van de figuren A t/m E halen. (Educational Testing Service 1962.) (N.B. Deze opdracht is een deel van een test van de leerstijlaspecten veld(on)afhankelijkheid.)

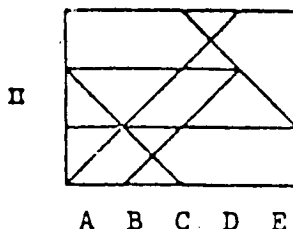
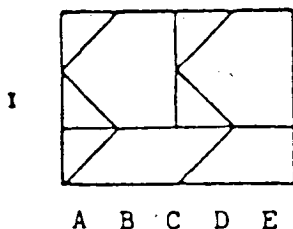
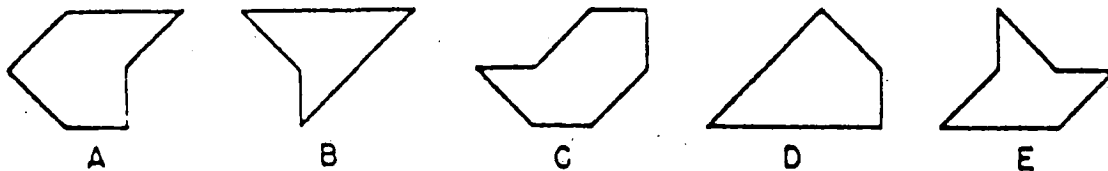
Score op deze test is het aantal juist aangestreepte antwoorden min het aantal onjuist aangestreepte antwoorden.

Opdracht II

Op iedere tafel (± 6 personen) kwam een pak vouwblaadjes te liggen, een plakstift en een schaar. De opdracht luidde: 'Maak zoveel mogelijk ruimtelijke figuren.'

Voor deze opdracht kreeg men meer tijd; ± 12 minuten.

Na afloop van deze twee opdrachten bespraken wij met de deelnemers hoe zij de verschillende opdrachten hadden ervaren. Verder vertellen wij hoe de reacties van de leerlingen waren geweest die ook opdracht II hadden uitgevoerd. Tenslotte toonden we de videoband waarop het werken van die leerlingen was vastgelegd.



4 Wat wij zagen en hoorden

- Wat de eerste opdracht betreft, daar werden scores behaald van 0 t/m 9. Men bedenke dat het hier allemaal docenten wiskunde betrof.
- De tweede opdracht riep door zijn *open* karakter eerst allemaal vragen op over wat wel en wat niet mocht. Ook wij docenten zijn niet zo gewend aan open opdrachten.
- De meeste mensen gingen keihard aan de slag er stond immers: *zoveel* mogelijk ruimtelijke figuren.
- Het waren docenten wiskunde dus er waren wel veel kubussen, viervlakken, balken etc.
- Sommigen stelden door de openheid van de opdracht aan zichzelf meer eisen over fraaiheid en dergelijke.
- Een enkeling ergerde zich aan de tweede opdracht, 'flauw' en onduidelijk. Iets wat onze leerlingen ook vast wel overkomt bij wiskundeopgaven.
- De meerderheid ging met veel enthousiasme aan het werk. Er was een groot verschil in reflectie op eigen handelen. Waar de één onder woorden bracht hoe de opdracht ervaren was, sprak de ander slechts zijn/haar verontwaardiging uit over zo'n opdracht.

Dus ondanks de betrekkelijke homogeniteit van de groep docenten wiskunde werd er zeer verschillend gereageerd.

5 Hoe deden de leerlingen het?

Een heel opvallend verschil tussen de werkgroepen op de jaarvergadering en de klassen leerlingen waar deze laatste opdracht op een videoband werd gezet wil ik nog even noemen: Bij het bekijken van de videoband bleek ons dat de leerlingen zich op geen enkele wijze door de woorden 'zoveel mogelijk' lieten beïnvloeden. Zij maakten op hun gemak wat ze leuk vonden.

Bloemlezing uit de opmerkingen in de klas gemaakt door leerlingen bij opdracht II:

- Is een vliegtuigje een ruimtelijke figuur?
- Is dit wiskunde? Moet je straks de oppervlakte berekenen?
- Een bootje kan toch niet in de ruimte! ... Oh, dus het hoeft geen raket te worden.

De lezer kan zelf wel de verschillen vaststellen.

6 Conclusie

Gezien de grote verschillen bij de docenten wiskunde onderling mogen we veronderstellen dat die er tussen docenten en leerlingen dan ook zeker zullen zijn. Misschien kunnen we iets doen met die bewustwording.

7 Adviezen

Als eerste aanzet om hier iets mee te doen noteer ik hier de adviezen die prof. M. Geensen heeft genoemd aan het slot van haar memo's over leerstijl. Van deze memo's hebben we bij het opzetten van deze werkgroep dankbaar gebruik gemaakt.

- 1 In het algemeen wordt geadviseerd om niet te denken dat er één bepaalde instructie-methode is, die voor alle leerlingen geschikt is. Probeer dus als docent *zo gevarieerd mogelijk* te werken door veel werkvormen en veel, sterk uiteenlopend materiaal.
- 2 Moedig leerlingen aan om *samen te werken* op school en thuis, in tweetallen of groepen. Vorm eventueel zelf studiegroepen. Dwing leerlingen die hier niet voor voelen niet om mee te doen.
- 3 Geef opdrachten met suggesties voor *verschillende* manieren om de zaak aan te pakken en om te tonen dat het materiaal beheerst wordt. Men kan immers in plaats van 'schriftelijke verslagen' over een onderwerp ook mondelinge prestaties accepteren, of nog heel andere vormen.
- 4 Moedig leerlingen aan om *zelf te bepalen hoe ze het beste leren* en zorg dat er de gelegenheid wordt geboden om aan die behoefte tegemoet te komen, bijvoorbeeld door verschillend leermateriaal, geprogrammeerde instructies, video-banden, boeken.
- 5 Vraag schrijvers van schoolboeken om naast het boek *audiovisueel* materiaal beschikbaar te stellen.
- 6 Er zijn enkele onderwerpen en vaardigheden die iedereen moet leren. We moeten trachten cognitieve strategieën te ontwikkelen om deze te doceren en te leren. Een wiskundige kan een meer op interactie gerichte aanpak ontwikkelen om veldafhankelijkheden te helpen. Een meer op groepswerk georiënteerde sociale wetenschapper kan taken verzinnen, die helpen om veldonafhankelijke emotioneel inzicht, en inzicht in sociale gevoeligheid te doen ontwikkelen.
- 7 Docenten moeten zich bewust zijn van de leerstijl van hun leerlingen om rekening te houden met hun behoefte aan sociale, externe evaluatie en aanmoediging.
- 8 Elke school dient er voor te zorgen dat het onderwijs niet in alle opzichten gunstig is voor slechts een groep van leerlingen, de veldafhankelijke of de veldonafhankelijke.

- 9 Er moet meer aandacht geschonken worden aan de mogelijkheden van de leerstijl voor de begeleiding van leerlingen in de school en bij beroepskeuze.
- 10 Men moet in het algemeen meer bouwen op de sterke punten van ieders leerstijl, en niet obsessief bezig zijn met 'verbeteren'.

8 Tot slot

Concluderend kunnen we het volgende zeggen:

- Leerlingen hebben niet allemaal dezelfde stijl waarin ze zich kennis eigen maken.
- Er is ook niet één vaste leerstrategie om meisjes wiskunde te leren.
- Docenten moeten zich bewust zijn van een variatie in leerstijl bij hun leerlingen.
- Dit wetende kunnen docenten op verschillende manieren doceren en hun leerlingen laten leren.
- Die variatie in aanpak zorgt ervoor dat ieder type leerling regelmatig aan haar/zijn trekken komt, dus zeker ook de meisjes.

Noten

- 1 Onder leerstijlen verstaan we hier de manier waarop iemand gewend is of er de voorkeur aan geeft om informatie tot zich te nemen bij het leren.
- 2 Voor meer uitgebreide informatie over de verschillende leerstijl-aspecten verwijzen we naar de artikelen van Harrie Broekman in Euclides: mei, juni/juli, okt en nov '84.

Literatuur

De meeste achtergrondinformatie in dit artikel is ontleend aan een aantal memo's uit 1980 en 1984 van prof. Dr. M. Geensen (PDI Utrecht). Ze geven een uitgebreid overzicht van het onderzoek op deze terreinen:

- Over cognitieve stijl I en II.
- Over sexe-verschillen in (school)prestaties; oorzaken en aanbevelingen.
- Ideeën uit en voor onderzoek betreffende de sexe-rolproblematiek.

Over de auteur:

Ze heeft wiskunde gestudeerd, zes jaar op vwo/havo les gegeven. Sinds 1981 geeft ze les op de Nieuwe Lerarenopleiding Zuidwest Nederland en wel in de vakken wiskunde en informatica.

Rente op rente op rente

Hans Aalmoes

Tijdens de conferentie 'Niet wiskundige contexten in het Wiskunde-onderwijs' presenteerde Fred Goffree het onderwerp 'De wiskundeleraar als educatief ontwerper'. Na een algehele inleiding werden wij zelf groepsgewijs aan het werk gezet.

De opdracht die ons groepje bestaande uit Anne van Streun, Guus Visch, Pieter Terlouw en mijzelf van Fred Goffree meekreeg was het opstellen en voeren van een socratisch gesprek in een tweede klas. Bij een socratisch gesprek kun je denken aan het succesvolle T.V. programma 'De achterkant van het gelijk' en hoewel ik bij Marcel van Dam nu niet direct het beeld van Socrates voor me heb, geeft het toch wel een aardige vergelijking: het steeds maar doorvragen zodat de slaaf of de leerling uiteindelijk zelf tot een goed antwoord komt. Het thema was 'rente op rente' en via een rollenspel wilden we die schoolklas simuleren. De grootste problemen lagen in het kiezen van een geschikte context. Een praatje over sparen dat even dreigde te verzanden in brommers, waarbij knalpot, snelheid en uiterlijk vertoon te veel accent kregen, leidde uiteindelijk tot een zinvolle discussie. Hoe kies je een goede context, die niet al te gezocht is, die ook niet blokkeert, maar die een echte situatie kan betekenen, zodat het kinderen aanmoedigt er zich in te verdiepen. Maar ook, welke vragen ga je stellen, want je zult toch iets moeten sturen. Dan blijkt dat erg veel afhankelijk is hoe de kinderen reageren en we besloten om niet verder bureauwerk te verrichten, maar ik zou in mijn 2-vwo-klas een poging wagen.

Vrijdag 10 mei '85

Een echte aanleiding, zoals een razzia op de gangen omdat er gerookt werd, was er niet. Voor een groepje van zes leerlingen (Karen, Sylvia, Remco, Arjan, Noële, Marco) begon ik mijn verhaal zó: 'Stel je eens voor dat je net 14 bent geworden en jouw opa die 83 is belooft je f 500, — te geven. Máár daar mag je niet eerder aankomen voor dat je 21 bent. Opa had je graag een leuk bedrag zelf willen geven op je 21e verjaardag, maar opa is al erg oud en hij weet niet of hij er tegen die tijd dan nog wel is. Eén ding moet je opa beloven ... dat je niet zult roken, want tenslotte is opa zo oud geworden door zelf niet te roken.

Leraar (ik dus): Wat ga je doen?

Sylvia: Op de bank zetten, want dat geeft rente.

Marco: En als ik het nodig heb dan haal ik het er af.

Leraar: Dat mag niet.

Karen: Ik koop een aandeel.

Marco: Nee, je mag er toch niets voor kopen.

Sylvia: Het wordt dus meer dan f 500, —.

Noële: Je kunt er toch ook voor zorgen dat het weer f 500, — wordt, als je 21 bent.

Leraar: Wat zei opa nou?

Noële: Mag je dat geld dan helemaal niet gebruiken?

Leraar: Nee.

Noële: Dan zet je het op de Zilvervloot.

Leraar: Wat ga je dus in ieder geval doen.

Arjan: Op de bank zetten.

Karen: Ik koop toch een aandeel. Nee, 't is geen aandeel, want daar kun je op achteruitgaan, 't is iets anders.

Arjan: Dat mag jij toch niet kopen.

Marco: Dan laat je je vader het kopen.

Karen: Maar op zo een ding krijg je rente en daarover weer rente.

Sylvia: Je kan er ook zilver voor kopen.

Karen: Of goud.

Sylvia: Voor f 500, — zeker.

Noële: Je mag er niets voor kopen.

Leraar: Wat zei Karen net over die rente?

Sylvia: Mag dat?

Noële: Dat krijg je bij de Zilvervloot ook.

Arjan: Dat kan pas als je 15 bent.

Leraar: Bovendien moet je dan elk jaar sparen en bij ons gaat het er alleen maar om hoeveel je straks

krijgt als je nu met f 500, — begint.
 Karen: En dan haal je het er niet af.
 Leraar: Wat gaan we nu doen?
 Sylvia: We zoeken de bank uit die de meeste rente geeft.
 Leraar: We hebben die bank gevonden, hoeveel rente geeft die?
 Marco: $6\frac{1}{2}$ of 7%.
 Leraar: Wat zullen we nemen.
 Karen: $6\frac{1}{2}$, dat is wel een mooi getal.
 Sylvia: Ik had liever meer gehad.
 Leraar: Hoeveel krijg je als je 21 bent.
 Noële: Je krijgt meer dan f 500, —.
 Karen: Eigenlijk is het niet eerlijk want het is opa z'n geld.
 Arjan: Hij geeft toch gewoon nu die f 500, —.
 Leraar: Als je dus die $6\frac{1}{2}$ % rente neemt. Hoeveel wordt dat na één jaar?
 (er is enig gerekend, sommigen op papier, een ander met een krijtje op het bord)
 Karen: Na 1 jaar is dat f 532,50.
 Leraar: En op je 21e?
 Arjan: Iets meer dan f 270, — erbij.
 Leraar: Hoe kom je daaraan?
 Arjan: Zo'n beetje uit m'n hoofd uitgerekend.
 Leraar: Wie kan dat precies uitrekenen?
 Sylvia: Moet je die rente ook meerekenen?
 Noële: Dat is toch pas later. Bij de Zilvervloot is dat wel zo, 10% geloof ik.
 Karen: Mag het een beetje afgerond zijn?
 Leraar: Jullie kozen zelf die $6\frac{1}{2}$ %.
 Karen: Laten we dan maar 5% nemen.
 Sylvia: Of 10%, dan heb je wat meer.
 Marco: Dat krijg je toch niet.
 Sylvia: Dan richten we zelf een bank op.
 Leraar: Ik wil nu weten wat voor rente we nemen.
 Arjan: 5%.
 (algehele instemming en er wordt weer wat gerekend)
 Arjan: Dat is na een jaar f 525, —.
 Marco: Dat moet je dan zeven keer nemen.
 Noële: Je krijgt rente op rente.
 Leraar: Kun je uitrekenen hoeveel je na twee jaar hebt?
 Arjan: f 551,25.
 Leraar: Heb je nu enig idee, hoe je verder moet?
 Marco: Heeft u een rekenmachientje?
 Leraar: Jammergenoeg niet bij me.
 Karen: Mag je het afronden, dat vroeg ik net ook al?

Leraar: Ja.
 (er wordt weer druk gerekend)
 Karen: Na 3 jaar heb je f 578,25, ongeveer.
 Leraar: Kun je dat ook afronden?
 Karen: Na 4 jaar f 608, —.
 Karen: En na 5 jaar f 638, —.
 Leraar: Er komt dus nu al f 30, — bij.
 Arjan: Ja logisch, er komt steeds meer bij.
 Karen: Na 6 jaar f 670, —.
 Arjan: Nu komt er f 32, — bij. Dus dan zal er nu f 34, — bij komen. Dan kom je op f 704, — uit.
 Karen: Maak er maar f 705, — van, want ik heb het steeds afgerond.
 Leraar: We zijn er, maar, kan het ook sneller.
 Marco: Ja.
 Leraar: Hoe?
 Marco: Met een rekenmachientje.
 Leraar: Maar die heb ik dus niet.
 Arjan: Het 1e jaar f 25, — erbij.
 Het 2e jaar f 26,25 erbij.
 Het 3e jaar f 27, — erbij.
 Er zit een reeks omhoog in.
 Sylvia: Je moet eigenlijk een soort BTW-boekje erbij nemen.
 Leraar: Je gaat uit van die f 500, —. Met hoeveel heb je die 500 vermenigvuldigd om je totale bedrag na één jaar te krijgen?
 Marco: Met $\frac{1}{20}$.
 Arjan: Met 0,05.
 Leraar: Dat komt erbij.
 Arjan: Je krijgt f 525, —.
 Leraar: Hoeveel is dat vergeleken met die f 500, —.
 Arjan: f 25, — meer.
 Leraar: Dat is dus
 $500 + 0,05 \times 500$.
 Arjan: Ja.
 Leraar: Zijn jullie het er mee eens dat het na één jaar $1,05 \times 500$ is?
 Karen: Hoe kom je aan die 1?
 Leraar: Het is 1×500 (die je gewoon hebt en na 1 jaar ook) plus $0,05 \times 500$ (dat is de rente) en dat is $1,05 \times 500$.
 Karen: O ja.
 Leraar: Hoeveel is dat dan na 2 jaar?
 Marco: $1,10 \times 500$.
 Leraar: Is dat zo?
 Marco: Ik dacht van wel.
 Leraar: Wat moet je doen met dat nieuwe bedrag om het totaal een jaar later te berekenen?

Arjan: Weer met $1,05$ vermenigvuldigen.
 Leraar: Wat wordt het dus?
 Arjan: $1,05 \times 500$.
 Leraar: Dat was het na 1 jaar. Ik wil weten wat het na 2 jaar is.
 Marco: $1,05 \times 1,05 \times 500$.
 Karen: Dan wordt het dus $7 \times 1,05$.
 Leraar: O ja?
 Karen: Dan krijg je $1,35 \times 500$.
 Leraar: Karen, wat was 't na 2 jaar?
 Karen: $1,05 \times 1,05 \times 500$
 Leraar: En wat is het dan na 3 jaar?
 Karen: $1,05 \times 1,05 \times 1,05 \times 500$.
 Leraar: Ja, is dat $3 \times 1,05$?
 Arjan: Nee dat is $(1,05)^3$.
 Marco: Maar dan krijg je na 7 jaar $(1,05)^7 \times 500$.
 Leraar: Dat wilde ik zien.

Met dezelfde leerlingen volgde nog een nabeschuiving:

Leraar: Wat heb ik gezegd?
 Karen: Niets.
 Sylvia: U had ons best wat kunnen helpen.
 Leraar: Ik heb jullie toch wel een beetje geholpen
 ...
 Karen: Ik zou het niet weten.
 Arjan: Bij die $1,05$.
 Noële: Om te vragen of het ook sneller kon.

Maandag 13 mei '85

Nadat ik de hele zaak had uitgewerkt en er nog eens over nadacht, bleken voor deze gelegenheid twee zaken van belang. Er waren natuurlijk veel meer vondsten, want uit die opmerkingen van die kinderen kun je een heleboel halen. In de eerste plaats ging het om de echtheid van de context. Dat was voor de kinderen een normale situatie. Er werd al direct enthousiast over gepraat en het maakte later helemaal niet uit hoeveel die rente nu precies moest zijn, als het maar reëel was. Er werd met het grootste gemak overgeschakeld van $6\frac{1}{2}\%$ naar 5% (maar de 10% was weer niet redelijk!). De context blokkeerde in het geheel niet en men liet zich nauwelijks verleiden tot irrelevante zaken. Ten tweede ging het mij om de rol van de leraar (i.v.m. het socratische). Stelde ik wel de goede vragen en

reageerde ik wel goed op vragen en opmerkingen van de leerlingen? De leerlingen kwamen uiteindelijk op de vorm $(1,05)^7 \times 500$, maar had ik niet te veel gestuurd? De kinderen reageerden veel op elkaar en ik pikte zo af en toe iets op, om over door te vragen. Hoewel ik me had voorgenomen zo min mogelijk iets te 'zeggen', kwam ik daar toch moeilijk onder uit al was het maar om iets te constateren of af te spreken. Dit alles met de bedoeling dat de kinderen er verder zelf over zouden nadenken. Alleen moest ik wat trekken bij die $1,05 \times 500$ en als kinderen in de problemen komen, zoals bij dat herhaalde vermenigvuldigen, dan kom je er niet alleen met vragen stellen. Of liever, dan is het de kunst de goede vragen te formuleren.

In ieder geval was het goed dit gesprek daadwerkelijk met een groepje leerlingen uit te voeren, anders blijft het droogzwemmen. Nu zou je verder kunnen gaan, zelf wat conclusies trekken uit dit gesprek en mogelijke verbeteringen aanbrengen. Ik denk dan zelfs aan een gesprek met één leerling om zo nog meer de situatie van Socrates en de slaaf te benaderen.

Over de auteur:

Hans Aalmoes is leraar wiskunde aan de RSG te Schagen. Hij was als vakdidacticus werkzaam in het Mayo Projekt en momenteel is hij verbonden aan het SIO, een ondersteuningsaanbod voor scholen.

Mededelingen

Het maximum aantal deelnemers is op 100 gesteld.

Voor nadere informatie en inschrijfformulier kunt u zich wenden tot:

Vakgroep OW & OC, t.a.v. L. M. Binf-project, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, tel. (030)-61 16 11.

Boekbespreking

Examens wiskunde m.o. A en B 1986

Degene die in 1986 wil deelnemen aan het examen wiskunde m.o. A of wiskunde m.o. B, af te nemen door de *Algemene commissie*, dient zich vóór 1 mei 1986 aan te melden door storting van het examengeld op postrekening 172007 van de voorzitter van de Algemene Examencommissie wiskunde m.o. te 's-Gravenhage met vermelding van de volledige naam en het adres van de kandidaat en met de aanduiding m.o. A dan wel m.o. B. Na 1 mei 1986 ontvangen de aangemelde kandidaten nadere instructies van de examencommissie.

Het examengeld bedraagt f 360,00 onder voorbehoud van vaststelling van het betreffende Koninklijk Besluit.

Alle kandidaten worden geëxamineerd volgens de programma's zoals die zijn omschreven in het 'Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde' jrg. 63 afl. 2, november 1975, bladzijde 86-93. Men kan deze programma's verkrijgen door storting van f 3,- op bovengenoemde girorekening met vermelding van 'examenprogramma A' (resp. B). Het schriftelijk gedeelte van het examen (zowel A als B) wordt afgenomen op donderdag 21 en vrijdag 22 augustus 1986 in het Nederlands Congresgebouw te 's-Gravenhage.

Computers in het onderwijs, stroomversnelling of waterval?

De Vakgroep OW & OC van de RU te Utrecht houdt op 24, 25 en 26 maart 1986 in het Leeuwenhorst Congres Center te Noordwijkerhout een conferentie met als thema: 'Computers in het onderwijs, stroomversnelling of waterval?'

Op de conferentie worden een aantal lezingen gehouden door deskundigen uit binnen- en buitenland op het gebied van computers in het onderwijs.

In een viertal werkgroepen wordt er op de onderwerpen scholing en nascholing van docenten, leerlingenmaterialen informatiekunde, beleidsaspecten op macro-, meso- en microniveau en onderzoek m.b.t. onderwijs in informatiekunde dieper ingegaan. Het ontwikkelingsonderzoek rondom 'De baas over de computer' neemt een belangrijke plaats in.

De conferentie is bedoeld voor docenten, onderzoekers, lerarenopleiders en beleidsmakers.

Er wordt van de deelnemers een bijdrage van f 100,- gevraagd.

Harro G. Heuser, *Functional Analysis*, John Wiley and Sons, Chichester-New York, 1982, XV + 408 bl., £ 9.95, gebonden f 25.00.

Dit boek is een vertaling in het Engels van de oorspronkelijke Duitse uitgave (Teubner Verlag, 1975); de vertaling is geschied door J. Horváth, een deskundige die zelf een boek over een verwant gebied geschreven heeft. Het werk is bedoeld als inleiding tot de functionaalanalyse, een gebied van de wiskunde dat algebraïsche en analytische structuren in zich verenigt en dat daarom niet scherp af te grenzen is van de (lineaire) algebra en de klassieke analyse. Als voorkennis voor het bestuderen van dit boek wordt dan ook de elementaire algebra (vooral lineaire algebra) en analyse ondersteld (geen Lebesgue integraal, wel in de latere hoofdstukken iets over complexe functietheorie en topologie). De eerste zes hoofdstukken (180 bladzijden) vormen reeds een afgerond geheel, dat heel goed als eerste ronde kan dienen (metrische ruimten met de dekpuntstelling van Banach, genormeerde ruimten, operatoren, uitbreidingsstelling van Hahn-Banach, gesloten grafiek, compacte operatoren). Wil men meer weten over Hilbertruimten, dan moeten ook de hoofdstukken 8 en 9 bestudeerd worden. In de laatste hoofdstukken worden moeilijkere onderwerpen behandeld (spectraaltheorie in een Hilbertruimte, topologische vectorruimten, dualiteit, commutatieve Banach algebra's). Het boek bevat vele voorbeelden en vraagstukken en is voorzien van een uitvoerige bibliografie. Een aantal van de meest frappante voorbeelden en toepassingen ontbreekt echter, omdat de auteur nu eenmaal verkozen heeft om de Lebesgue integraal niet te gebruiken. De uitvoering is fraai; de prijs (althans voor de uitgave met slappe kaft) is niet hoog.

A. C. Zaanen

Differentialen: een didactisch probleem

S. A. M. van der Salm

1 Inleiding

Dat het differentiaalbegrip een moeilijk begrip is voor leerlingen die voor het eerst met differentialen in aanraking komen, is bij veel wiskundeleraren bekend.

Uit mijn ervaring met HTS-leerlingen is mij gebleken, dat zij vaak snel met de differentiaalnotatie overweg kunnen terwijl een goed begrip van differentialen ontbreekt.

Er ontstaat een 'notatierekenen' dat, omdat het vaak wel tot goede resultaten leidt, voorkomt, dat de leerling op de diepere begrippen wordt gewezen. De kettingregel geformuleerd in de gedaante:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

kan hij dan denken te verklaren door te zeggen: dit is juist omdat we de dy 's tegen elkaar weg kunnen strepen.

Als oorzaken van dit onbegrip kunnen worden aangeduid:

- 1 het differentiaalbegrip is een moeilijk begrip dat een tamelijk hoog abstractievermogen vereist en
- 2 de zelfdenkende aspecten van de differentiaalnotatie, waardoor het rekenen met differentialen geschieden kan zonder dat er veel begrip wordt vereist.

In relatie met differentiaalvergelijkingen is in dit blad een aantal artikelen verschenen over de problematiek van het differentiaalbegrip. (Zie literatuur 1 t/m 4).

Van Rooij trekt de conclusie dat, differentialen in wiskundeleergangen voor het vwo doorgaans

slecht behandeld worden en dat differentialen in het vwo niet nodig zijn en derhalve achterwege kunnen blijven.

Onafhankelijk van deze artikelen ben ik een aantal jaren geleden op het idee gekomen, om iedere referentie naar het differentiaalbegrip in mijn lessen in de eerste klas van de HTS zo lang mogelijk achterwege te laten. Toen is mij duidelijk geworden wat het nut is van differentialen en wanneer het differentiaalbegrip het beste aan de orde kan komen.

Bovendien is mij gebleken dat het differentiaalbegrip niet veel meer moeilijkheden oplevert dan bijv. integralen als allerlei mystiek maar achterwege blijft.

(Over deze mystiek zou een apart artikel geschreven kunnen worden).

In dit artikel laat ik zien, waartoe het weglaten van differentialen leidt, hoe het differentiaalbegrip behandeld kan worden en bespreek ik een aantal relaties tussen de notaties van begrippen die met differentialen in relatie staan, waaraan gewoonlijk in leerboeken weinig aandacht wordt besteed.

2 Differentieerbaarheid

Omdat differentialen verklaard worden met behulp van differentieerbaarheid, dient het differentiaalbegrip te worden behandeld *nadat* differentieerbaarheid aan de orde is geweest. Het gebruik van differentialen om een afgeleide aan te duiden is derhalve didactisch onlogisch en dient daarom zo lang mogelijk achterwege te blijven. De notatie van Lagrange ($f'(x)$, $f''(x)$, etc.) is hier de aan te bevelen notatie. Deze notatie ontmoeten we in veel leerboeken. In 6) wordt de differentiaalnotatie onmiddellijk ingevoerd, wat tot een aardige didactische puzzel leidt. (Zie blz. 52 e.v.).

Na differentieerbaarheid komen in mijn opbouw allerlei stellingen aan de orde die met dit begrip in relatie staan: de regels voor het differentiëren, middelwaardestelling, de stelling van de l'Hôpital en extremen van functies.

Hierbij wordt het gebruik van differentialen vermeden. Dit is geen enkel probleem zoals bijv. 7) laat zien.

3 Primitieven

Het is niet moeilijk de definitie van primitieven van een gegeven functie zonder differentialen te formuleren.

Een voor de hand liggende vraag is in dit verband: Hoe kunnen we de primitieven van een gegeven functie op het spoor komen? Aan de hand van twee voorbeelden laat ik zien, hoe we zonder differentialen te werk kunnen gaan.

Vb. 1 De regel voor partiële integratie

Zijn de functies f en g differentieerbaar op het interval I , dan kunnen we de produktregel ook formuleren als:

$$f'(x)g(x) = (fg)'(x) - g'(x)f(x); \quad x \in I$$

Nemen we nu als voorbeeld de functie $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$h(x) = x \sin x$$

dan kunnen we als volgt te werk gaan:

$$\begin{aligned} h(x) &= x \sin x = x(-\cos x)' = \\ &= (-x \cos x)' + \cos x \cdot x' \\ &= (-x \cos x + \sin x)' \end{aligned}$$

Hieraan zien we, dat de functie $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$H(x) = -x \cos x + \sin x + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

voor iedere waarde van c een primitieve is van h .

Vb. 2 De substitutieregels

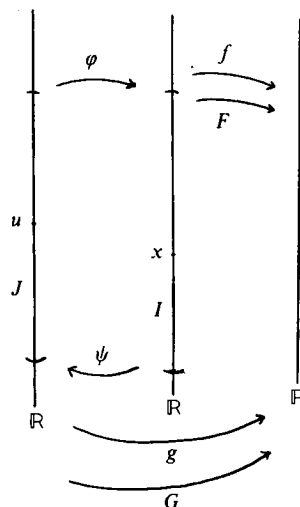
Zij I een interval en $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ met $x \mapsto f(x)$, zij J een tweede interval en $\varphi: J \rightarrow I$ met $u \mapsto \varphi(u)$ een continu differentieerbare functie met $\varphi'(u) \neq 0$ voor alle $u \in J$.

Zij $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ met $g(u) = f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$ primitieverbaar op J en is $G: J \rightarrow \mathbb{R}$ primitieve van g , dan is f primitieverbaar op I en de functie $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$F(x) = G(\psi(x))$$

is een primitieve van f .

Hierin is $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ de inverse functie van φ , die gezien de gestelde voorwaarden bestaat. Zie figuur 1.



Figuur 1

Bepalen we de primitieven van de functie $f: \langle -1, +1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dan is een voor de hand liggende substitutiefunctie:

$$\begin{aligned} \varphi: \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle &\rightarrow \langle -1, +1 \rangle \text{ met: } \varphi(u) = \sin u; \\ \text{en dus } \varphi'(u) &= \cos u \\ \text{en } g: \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle &\rightarrow \mathbb{R} \text{ met:} \\ g(u) &= \sqrt{1 - \sin^2 u} \cdot \cos u \end{aligned}$$

Aangezien g definitief positief is geldt er:

$$\begin{aligned} g(u) &= \cos^2 u = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2u\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u\right)' \end{aligned}$$

g is blijkbaar primitieverbaar en de functie $G: \langle -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ met $G(u) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + c$; $c \in \mathbb{R}$

is voor iedere waarde van c een primitieve van g . Aangezien de functie φ inverteerbaar is, geldt $\psi(x) = \arcsin x = u$ en $\cos u = \sqrt{1-x^2}$ zodat $F: \langle -1, +1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$F(x) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

voor iedere waarde van c een primitieve is van f . We zien aan dit voorbeeld dat het heel wat moeite kost om één en ander nauwkeurig te formuleren. Dit is een kenmerk van het werken zonder differentialen: zonder differentialen zijn de formuleringen wat omslachtiger, maar we worden wel met onze neus op de feiten gedrukt.

4 De Riemann-integraal

Waar komt de differentiaal in de gebruikelijke notatie van integraal vandaan en wat is de functie hiervan?

Is de functie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integreerbaar, dan kunnen we de integraal aanduiden met:

$$\int_a^b f \quad \text{of} \quad \int_a^b f(x)$$

dus zonder de differentiaal.

Door de Hoofdstelling van de integraalrekening wordt een relatie gelegd tussen integralen en primitieven. Deze stelling zegt immers: is $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu, dan is f primitiveerbaar op $[a, b]$ en voor iedere primitieve F van f geldt:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Het berekenen van een integraal zal vaak gepaard gaan met het bepalen van de primitieven van de integrand. Verderop zal blijken, dat de differentiaal in de gebruikelijke notatie hieruit verklaard kan worden.

5 Differentialen in differentiaalvergelijkingen

Zonder differentialen kunnen differentiaalvergelijkingen die op de middelbare school aan de orde komen, geformuleerd worden in de gedaante:

$$y'(x) = f(x, y) \quad \text{of} \quad f(x, y)x'(t) + g(x, y)y'(t) = 0$$

Ik verwijs hierbij naar de artikelen die al eerder in dit blad verschenen zijn. Zie 1 t/m 4.

6 Tussenconclusie

Differentialen kunnen zonder noemenswaardige didactische problemen uit de basis van de analyse geweerd worden. Een nadeel is de iets omslachtiger formulering van stellingen en formules; een voordeel is dat men zich beter rekenschap moet geven van de inhoud van deze stellingen en formules.

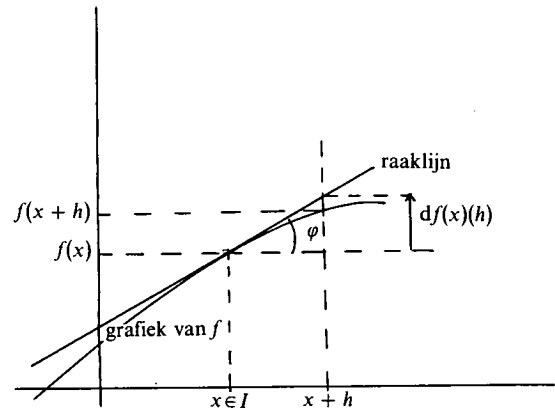
Als differentialen wel aan de orde moeten komen, hoe kan het differentiaalbegrip dan behandeld worden?

7 Differentialen

Wat zijn nu die geheimzinnige differentialen?

Een juiste definitie van differentiaal is naar mijn mening de volgende:

Zij I een interval en $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. We kiezen nu $x \in I$ en $h \in \mathbb{R}$ willekeurig. Zie figuur 2.



Figuur 2

In punt $(x, f(x))$ van de grafiek trekken we de raaklijn. Dit is mogelijk gezien de differentieerbaarheid van f .

Onder de differentiaal van f in $x \in I$ verstaan we de functie $df(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ waarbij

$$h \mapsto df(x)(h) = f'(x) \cdot h$$

Dit is de zogenaamde lineaire benadering van het verschil $f(x+h) - f(x)$.

Nogmaals zij opgemerkt, dat de definitie van differentiaal uitgaat van de differentieerbaarheid van de functie en dat het daarom logisch is om differentiaalen bij het begrip afgeleide aanvankelijk te vermijden.

Is nu $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de identieke functie, dan is $di(x)(h) = h$ zodat:

$$df(x)(h) = f'(x)di(x)(h)$$

We zullen dit inkorten tot:

$$df(x) = f'(x)di(x)$$

Aangezien i de identieke functie is, ligt ook de volgende verkorting voor de hand:

$$df(x) = f'(x)dx$$

De parameter h is geheel uit deze notatie verdwenen, maar men doet er goed aan deze in gedachten te houden.

Is de verborgen parameter h ongelijk aan 0 dan kunnen we schrijven:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

of desgewenst:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Dit inkorten maakt het goed begrijpen van de differentiaalnotatie natuurlijk niet gemakkelijker afgezien van het feit dat in het linkerlid het quotiënt van twee functies staat en in het rechterlid een getal, n.l. de waarde die de afgeleide aanneemt in x .

De grootste moeilijkheid van differentialen is, dat ze worden bepaald door twee gegevens, n.l. de gegeven functie f en de keuze van x .

Kiezen we een andere x , dan vinden we een andere functie die aan een bepaalde waarde van h een geheel andere waarde kan toevoegen.

Bovendien is de differentiaal een functie met $\mathbb{R}$ als domein. Dit kan verschillend zijn van het domein van de functie f . Verder blijkt niet uit de notatie dat we met een functie te maken hebben.

Zo te zien liggen de didactische problemen hier op de loer.

Alhoewel het differentiaalbegrip zeker niet eenvoudig te noemen is, doet het bovenstaande verhaal in elk geval een beroep op het verstand. Het is geen aanpraatverhaal dat leerlingen maar moeten slikken en er wordt niet gesproken over geheimzinnige zaken als infinitesimalen.

8 Het werken met differentialen

In de eerste plaats kunnen we de regels voor het differentiëren formuleren met differentiaalquotiënten en met differentialen als volgt:

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \\ &= g(x)\frac{df(x)}{dx} + f(x)\frac{dg(x)}{dx}; \quad h \neq 0!\end{aligned}$$

$$\text{of } d(fg)(x) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$$

De produktregel zou nog de volgende, verhullender, notatie kunnen krijgen:

$$d(fg) = gdf + fdg$$

Moeilijker is de kettingregel:

Is $\varphi = f \circ g$ dan geldt $d\varphi(x)(h) = \varphi'(x) \cdot h$ of wel:

$$\begin{aligned}d(f \circ g)(x)(h) &= \varphi'(x) \cdot h \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot h \\ &= f'(g(x)) \cdot dg(x)(h) \\ &= df(g(x))(dg(x)(h))\end{aligned}$$

Laten we de parameter h nu weg dan krijgen we:

$$d(f \circ g)(x) = df(g(x))(dg(x))$$

(De differentiaal van f in $g(x)$ toegepast op de differentiaal van g in x).

Vb. 3 Toepassing van differentialen.

Aan de hand van een voorbeeld wordt getoond hoe differentialen gebruikt kunnen worden voor het bepalen van de primitieve functies van een gegeven functie f .

We gebruiken nogmaals de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = x \sin(x)$.

We vragen blijkbaar naar de functies $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = x \sin x; \quad h \neq 0!$$

Dit is equivalent met:

$$dF(x) = x \sin x dx$$

We gaan nu als volgt te werk:

$$\begin{aligned} dF(x) &= d(-x \cos x) + \cos x dx \\ &= d(-x \cos x) + d \sin x \\ &= d(\sin x - x \cos x) \end{aligned}$$

en dus

$$F(x) = \sin x - x \cos x + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

Door de regels voor het differentiëren iets anders te formuleren, kunnen we met differentiaal primitieve functies bepalen.

9 Differentiaal- en integraalnotatie

Volgens de hoofdstelling van de integraalrekening bestaat er een relatie tussen integralen en de klasse van primitieven van de integrand.

We kunnen hierdoor de notaties $dF(x) = f(x)dx$ en $\int_a^b f(x)$ met elkaar verbinden.

We gebruiken daartoe de integraal zonder integratiegrenzen in combinatie met $f(x)dx$ als symbool voor de klasse van primitieven:

$$\text{Is } F'(x) = f(x) \text{ dan } \int f(x)dx = F(x) + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

Als gevolg van deze afspraak vinden we dan:

$$\begin{aligned} d \int f(x)dx &= d(F(x) + c) = dF(x) = f(x)dx \\ \text{en } \int df(x) &= \int f'(x)dx = f(x) + c; \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Passen we dit resultaat toe op de functie van ons laatste voorbeeld dan vinden we:

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \int x d(-\cos x) = - \int x d \cos x = \\ &= -x \cos x + c_1 + \int \cos x dx; \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ &= -x \cos x + c_1 + \sin x + c_2; \quad c_2 \in \mathbb{R} \\ &= -x \cos x + \sin x + c; \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hanteren we nu voor integralen de gebruikelijke notatie, dus:

$$\int_a^b f(x)dx$$

dan wordt deze notatie verklaard uit de hoofdstelling van de integraalrekening en bovenstaande methode voor het bepalen van de primitieven van de integrand.

Hiermee is de vraag betreffende de differentiaal in de integraalnotatie verklaard.

10 Conclusies

Het differentiaalbegrip is een moeilijk abstract begrip dat niet behandeld hoeft te worden in de basis van de analyse. Met enige moeite kunnen differentialen vermeden worden.

Wil men toch differentialen gebruiken – bijvoorbeeld in het technisch onderwijs waar veel gebruik gemaakt wordt van differentialen – dan kunnen differentialen behandeld worden, zonder dat daarbij wiskunde-vreemde redeneringen noodzakelijk zijn. Er moet dan de nodige aandacht besteed worden aan een juist begrip van de notatie van differentialen.

Het nut van differentialen vinden we bij het berekenen van integralen.

Gezien de moeilijkheid van het differentiaalbegrip en de bijbehorende notatie, ben ik van mening, dat differentialen beter niet in het middelbaar onderwijs aan de orde kunnen komen.

Differentialen hebben daar eigenlijk alleen nut in verband met differentiaalvergelijkingen. In eerder verschenen artikelen in dit blad is al aangevoerd, dat differentialen daarbij vermeden kunnen worden.

Literatuur en noten

- 1 Prof. Dr. A. C. M. van Rooij: *Differentialen op de middelbare school*. Euclides 57, 3, blz. 81-92.
- 2 Dr. J. W. Nienhuis: *Differentiaalvergelijkingen*, Euclides 57, 4, blz. 139-152.
- 3 Dr. S. H. Cheng: *Parametervoorstellingen van krommen en differentialen*, Euclides 57, 4, blz. 129-137.
- 4 H. J. K. Moet: *Wie is er bang voor differentiaalvergelijkingen?* Euclides 57, 4, blz. 122-128.
- 5 Prof. Dr. J. C. H. Gerretsen: *Raaklijn en oppervlak*, Haarlem 1959. Zie bladzijden 152-159.
- 6 Dr. B. Meulenbeld en Dr. A. W. Grootendorst: *Analyse I*, Delft 1974.

In dit boek worden differentiaal onmiddellijk met het begrip differentieerbaarheid geïntroduceerd. Zie blz. 52. Op blz. 80/81 wordt het differentiaalbegrip gedefinieerd terwijl in de tussenliggende paragrafen uitgebreid met de differentiaalnotatie gewerkt wordt. Gezien dit artikel heb ik bezwaren tegen deze methode die ik didactisch onlogisch acht. Een en ander leidt tot de opmerking: *het symbool df/dx heeft een dubbele betekenis, welke dubbele betekenis vermeden zou kunnen worden als de schrijvers niet onmiddellijk de differentiaalnotatie zouden hanteren.*

7 *Getal en Ruimte*: Dit boek is op veel middelbare scholen in gebruik. De delen 5/6V1 en 5/6V2 laten zien, dat differentialen eventueel in een laat stadium geïntroduceerd kunnen worden. Tegen de gehanteerde methode om differentialen te introduceren is door Van Rooij het nodige gezegd.

8 Dr. D. J. Struik: *Geschiedenis van de wiskunde*, Amsterdam 1977.

9 E. T. Bell: *The development of mathematics*, New York, 1945 (2e ed.).

In de laatste twee boeken vindt men het nodige over de ontwikkeling van de differentiaalrekening en de notaties die in de analyse gebruikt worden.

Over de auteur:

S. A. M. van der Salm studeerde aan de HTS voor Elektronica te Hilversum, deed staatsexamen Wiskunde MO-A en studeerde Wiskunde MO-B bij de Vrije Leergangen in Amsterdam.

Sinds 1976 is hij als docent wiskunde en informatietechniek verbonden aan de MTS en HTS voor Elektronica te Hilversum.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

In nummer 7 van de vorige jaargang werd een tweetal puzzels aangekondigd uit: Raymond Smullyan, *The Lady or the Tiger? and other logical puzzles* (Pelican, 1982). De eerste (528) ging over een misdadiger. De tweede, over een dichtgevalle brandkast, volgt hieronder. Helaas was de combinatie iets te lang zoek, vandaar de vertraging. Met excuses dus:

536 Een brandkast is dichtgevalle. De code van het slot zit erin en niemand kent de code meer. Het slot is een letterslot dat uit tien hoofdletters bestaat.

Het enige wat men nog weet is, dat er tussen lettercombinaties een relatie bestaat. Smullyan noemt deze relatie 'is related to'; ik zal hem door het symbool $\rightarrow$ voorstellen.

De relatie $\rightarrow$ heeft de volgende eigenschappen.

(De kleine letters zijn variabelen die suites hoofdletters voorstellen.)

Eigenschap Q. $QxQ \rightarrow x$

Eigenschap L. Als $x \rightarrow y$, dan $Lx \rightarrow Qy$

Eigenschap V. Als $x \rightarrow y$, dan $\forall x \rightarrow \overline{\overline{y}}$, waarin $\overline{\overline{y}}$ uit y verkregen wordt door de volgorde van de letters om te draaien.

Eigenschap R. Als $x \rightarrow y$, dan $Rx \rightarrow yy$

Eigenschap DN. Als $x \rightarrow y$ dan geldt:
als x desastreus is, dan is y neutraal en als x neutraal is, dan is y desastreus.

Een neutrale lettercombinatie van tien letters heeft geen uitwerking op het slot. Is de lettercombinatie desastreus, dan wordt het slot erdoor vernietigd.

Vind de lettercombinatie waarvan je nu weet dat hij niet neutraal en niet desastreus is en dat het slot er dus door open gaat.

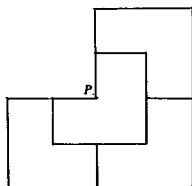
537 L. van Stratum (Eindhoven) wenst de lezers van Euclides op de volgende manier een goed nieuwjaar.

Van een rechthoekige driehoek zijn de lengten van de zijden gehele getallen. Een van de zijden heeft lengte 1986. Vind de lengten van de andere zijden.

538 Een vader had een stuk land (zie de figuur) dat bestond uit drie vierkanten. Zijn vier zoons erfden het land. Ze verdeelden het in vier congruente delen, zoals in de figuur is aangegeven.

Dudeney (Amusements in Mathematics, nr. 180) heeft uitgevonden dat er in punt P een put was. De zoons vonden de verdeling niet optimaal, want drie van hen moesten over het land van nummer vier gaan om de put te bereiken. Ze gingen bij een wiskundige te rade met de volgende vraag.

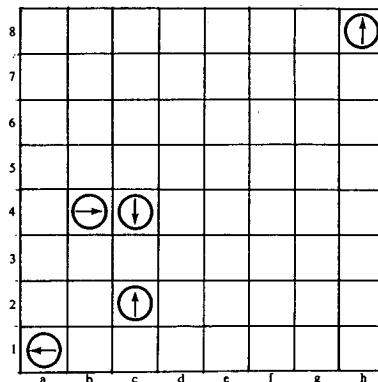
Wilt u het land voor ons verdelen in vier congruente delen en zo, dat we alle vier over ons eigen terrein de put kunnen bereiken? De wiskundige vond snel een oplossing. Nu moet ik, om niet te veel te verraden, enigszins kryptisch me verder uitdrukken. De zoons waren teleurgesteld: zo hadden ze het niet bedoeld, kan het niet beter? De wiskundige antwoordde: neen, een schaap heeft geen vijf poten. Had de wiskundige gelijk? Of kunt u toch een betere oplossing vinden?



Oplossingen

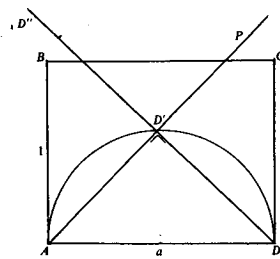
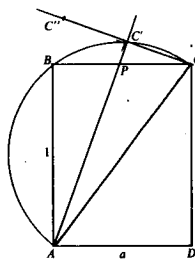
530 Op een schaakbord staat op veld a1 een schijf met een pijl. De richting van de pijl wordt door het lot bepaald. Met de schijf worden zetten gedaan. Elke zet bestaat uit een verschuiving over één veld in verticale of horizontale richting gevolgd door een draaiing over 90° . A doet drie zetten, B daarna twee, A weer drie enz. A moet de schijf aan het einde van een beurt op veld h8 zien te krijgen met de pijl naar boven in maximaal zestien beurten. Lukt hem dit?

- Beginstand met de pijl naar boven. De afstand van de schijf tot veld h8 is bij het begin 15 velden. Na de eerste beurt van A is de pijl -90° gedraaid, na de tweede 0° enz. De eindstand kan dus alleen bereikt worden na $4n + 2$ beurten van A . Na de eerste beurt van A is de afstand van de schijf tot h8 een even aantal velden, na de tweede beurt een oneven aantal velden enz. Dus na de $4n + 2^e$ beurt een oneven aantal. Het zal A dus nimmer lukken de schijf in de juiste stand op h8 te brengen.
- Beginstand met de pijl naar beneden. Om analoge redenen lukt het A niet te winnen.
- Beginstand met de pijl naar links. Ditmaal heeft A $4n + 1$ beurten nodig.
 A zet de schijf op c2 met de pijl naar boven. De afstand tot h8 is dan nog 12 velden. B zet de schijf bijv. op c4. A antwoordt dan met het zetten van de schijf op b4, waardoor de afstand tot h8 nog 11 velden bedraagt. Zo zorgt A ervoor, dat na elke beurt van hem de afstand tot h8 met 1 verminderd wordt. Na 13 beurten is dan de eindstand bereikt.
- Beginstand met de pijl naar rechts. A zet dan na de eerste beurt de schijf op b1 met de pijl naar beneden. Hij volgt dezelfde strategie daarna als in het vorige geval en bereikt na 15 beurten de eindstand.



531

In de figuur is AB de rug van het boek. $AB = 1$ en $AD = a$.



De vouw brengen we aan door punt A . Waar komt punt C dan terecht? Zie de linker figuur.

De vouw is de lijn AP . Laat uit C de loodlijn CC' neer op de lijn AP en maak $C'C'' = CC'$. C'' is het punt waar C terecht komt. C' ligt op de cirkel met middellijn AC . De straal daarvan is $\frac{1}{2}\sqrt{1+a^2}$. Dus steekt C' maximaal buiten het boek uit: $\frac{1}{2}\sqrt{1+a^2} - \frac{1}{2}$. En C'' $\sqrt{1+a^2} - 1$.

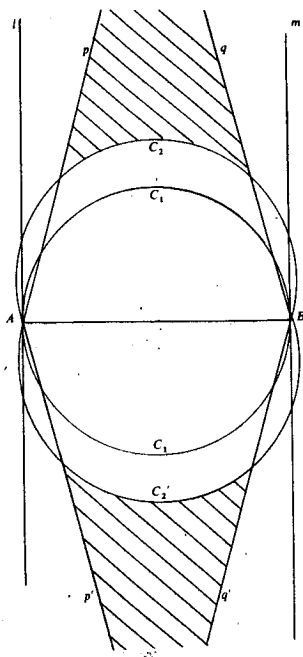
Dit maximum wordt bereikt als $bg BC' = bg CC'$, dus als de lijn AP de bissectrice is van hoek BAC .

Kan, als $a > 1$, D terecht komen in een punt dat nog meer uitsteekt? Zie de rechter figuur.

Laat uit D de loodlijn DD' neer op de lijn AP en maak $D'D'' = DD'$. D' ligt op de cirkel met middellijn AD . De straal hiervan is $\frac{1}{2}a$. D'' steekt dus maximaal uit $2 \cdot \frac{1}{2}a - 1 = a - 1$. Omdat $\sqrt{1+a^2} > a$, steekt D'' minder boven het boek uit dan C'' .

532 In het vlak zijn A en B gegeven. Gevraagd:

- de verzameling van de punten C waarvoor driehoek ABC scherphoekig is.
- de verzameling van de punten C waarvoor de driehoeken van driehoek ABC alle drie hoogstens 75° zijn.



- a De verzameling van de punten C waarvoor driehoek ABC rechthoekig is, bestaat uit cirkel c_1 en de lijnen l en m (met uitzondering van de punten A en B).
De verzameling van de punten C waarvoor driehoek ABC scherphoekig is, bestaat uit de vlakdelen die buiten cirkel c_1 en tussel l en m gelegen zijn.
- b De verzameling van de punten C waarvoor driehoek ABC een hoek van 75° heeft, bestaat uit de twee cirkelbogen c_2 en c_2' en de vier halve lijnen p, p', q, q' (met uitzondering van A en B).
De verzameling van de punten C waarvoor de hoeken van driehoek ABC alle hoogstens 75° zijn, bestaat dus uit de twee gearceerde vlakdelen, de randen inbegrepen.

gens de exterieure algebra, differentieerbare variëteiten, het differentiëren van differentiaalvormen en het integreren van deze behandeld. De essentiële stellingen, zoals de inverse-functiestelling, het lemma van Poincaré, de stelling van Frobenius en de stelling van Stokes, worden bewezen. Slechts bij de inbeddingsstelling van Whitney wordt naar de literatuur verwezen. Ten behoeve van natuurkundigen zijn veel resultaten ook in de taal van de vectoranalyse overgezet.

De presentatie van de stof is gedegen en formeel. Zo wordt systematisch de terminologie van de categorietheorie toegepast. Blijkens het voorwoord is dit boek bestemd voor tweede-jaars studenten. De afwezigheid van opgaven en niet-triviale voorbeelden en de gortdroge stijl maken het echter minder geschikt als zelfstandig leerboek. Als naslagwerk voor gevorderden zal het zeker voldoen.

J. Simonis

G. P. Beaumont, *Introductory Applied Probability*, Ellis Horwood Limited 1983, 235 bladzijden, ISBN 0-85312-392-6, prijs: £7.90.

In dit boekje worden de volgende onderwerpen behandeld: geboorte- en sterfteprocessen, wachttijdtheorie, vervangings-theorie, betrouwbaarheid van systemen en voorraadtheorie. De vereiste voorkennis is enige analyse (waaronder eenvoudige partiële differentiaalvergelijkingen) en elementaire kansrekening. De stof wordt gepresenteerd aan de hand van vele voorbeelden en opgaven. Aldus is dit boekje een aardige inleiding tot de genoemde onderwerpen uit de toegepaste kansrekening. Het zal duidelijk zijn dat met zo'n beperkte voorkennis op al deze onderwerpen niet diep kan worden ingegaan. Aan het eind bevat het boekje een collectie van twintig opgaven, welke onderdeel waren van examens afgenomen aan verschillende Engelse universiteiten.

J. L. Mijnheer

Boekbesprekingen

H. Holmann, H. Rummler, *Alternierende Differentialformen*, Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich, 1981, 257 blz.

Dit boek is in feite een inleiding in de analyse op differentieerbare variëteiten. In vier grote hoofdstukken worden achtereenvol-

Kalender

- 22 februari 1986: Geel (België), jaarvergadering VVWL.
22 maart 1986: Breda, Studiedag NVvW en VVWL.
24-26 maart 1986: Utrecht, Conferentie Computers in het Onderwijs
27-29 augustus 1986: Utrecht, Congres 'New Trends in the History of Science'.

Getal en Ruimte

Wiskunde voor het voortgezet onderwijs

de betrouwbare bondgenoot
in het wiskundeonderwijs

Vraag de gratis documentatie aan...

Educaboek bv

Postbus 48
4100 AA Culemborg
Tel. (03450) 71 911

4922/2

Inhoud

Bram Lagerwerf: Uitdagen 193

Theo Kristel: Bouwen met zwarte dozen 199

Gerdientje Visser: Wiskunde, leerstijlen en meisjes 209

Hans Aalmoes: Rente op rente op rente 213

S. A. M. van der Salm: Differentialen: een didactisch probleem? 217

Boekbesprekingen 198, 216, 224

Mededelingen 207, 208, 216

Recreatie 222

Kalender 224

Adressen van auteurs

B. Lagerwerf, Laan van Cattenbroek 29,
3703 BN Zeist

Th. Kristel, Weezenhof 82-01,
6536 CA Nijmegen, tel. 080-44 71 08

G. Visser, Oostsingel 201, 2612 HL Delft

H. Aalmoes, Spreeuwenlaan 27,
1742 GA Schagen

S. A. M. van der Salm, Bodemanstraat 15,
1216 AH Hilversum