

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

61e jaargang
1985 | 1986
januari

Euclides 5

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Drs H. Bakker
Mw I. van Breugel
Drs F. H. Dolmans (hoofdredacteur)
W. M. J. M. van Gaans
Dr F. Goffree
L. A. G. M. Muskens
Drs C. G. J. Nagtegaal
Drs A. B. Oosten (eindredacteur)
P. E. de Roest (secretaris)
Mw H. S. Susijn-van Zaale
Dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12,
7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 50,- per verenigingsjaar; student-leden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 35,-; contributie zonder Euclides f 30,-.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894-11730. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1\frac{1}{2}$. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52^c, 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-135976.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 44,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 26,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949. Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers f 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 39731 (Samsy).

Leerstijlaspecten

Wie ziet wat?

Harrie Broekman

De leerstijlaspecten veldafhankelijkheid/veldonafhankelijkheid en rigiditeit/flexibiliteit¹ spelen een grote rol bij het bezig zijn met wiskunde. Eveneens is het ordenen, verbanden zoeken, enz. van groot belang. In dit artikel wil ik u daarom een tiental voorvallen voorleggen die te maken hebben met dit ordenen, etc. Ze zijn opgetekend uit diverse lessen van leraren in opleiding én ervaren leraren.²

Al deze voorvallen hebben te maken met hetgeen ik voor het gemak samenvat onder *structuren*.³

Bij een aantal van de beschreven gebeurtenissen zal ik wat 'filosoferen van achter uit de klas'. Mijn uitgangspunt daarbij is: *wat er ook gebeurt, leerlingen structureren altijd*, alleen niet altijd op dezelfde manier als de leraar.

De centrale vragen die ik daarom mee wil geven bij het overdenken van de beschreven situaties zijn:

Wat ziet die leerling? of Wat ziet die leerling niet?
Wat ziet die leraar? of Wat ziet die leraar niet?

In mijn commentaar zal ik ingaan op een aantal redenen waarom in een bepaalde situatie de leerling(en) niet altijd structureert(reren) op de manier die de leraar gewenst vindt. Het afgeleid worden door – in onze ogen – toevallige factoren, evenals de antwoord-gerichtheid zullen daarbij aan bod komen.

In volgende artikelen zal nader ingegaan worden op de mogelijkheden om leerlingen te leren beter te structureren. Tevens zal daarin aandacht besteed worden aan het reflecteren (nagaan wát je gedaan hebt, hoe je het gedaan hebt en wáárom je het zo gedaan hebt).

leerling: ik snap deze som niet!

leraar: heb je al zo'n soort som gemaakt?

leerling: ja, de vorige ... oh, die is eigenlijk hetzelfde!

leraar: probeer eens te vertellen hoe je die gedaan hebt.

leerling: laat maar, ik zie het al!

Voorval 1

Bij de behandeling van het spiegelen in een lijn tekent de leraar een aantal punten en hun spiegelbeeld op het roosterbord. Op het bord er naast komt te staan:

$$A(1, 3) \rightarrow A'(1, -3)$$

$$B(-1, 2) \rightarrow B'(-1, -2)$$

$$C(3, 0) \rightarrow C'(3, 0)$$

Een leerling zegt hardop: *gewoon een min voor het tweede getal*. Een tweede zegt daarop: *Oh, dus dan wordt $D(5, -4)$ gewoon $D'(5, -4)$* .

Wat denk ik dan als toeschouwer achterin de klas zoal? Die tweede leerling lijkt alleen de wijze van opschrijven van het tweede getal te zien. En die eerste leerling? Ja, dat weet ik zo niet. Misschien ziet die een *verandering van teken* (visueel structureren). Misschien denkt deze leerling daarbij ook nog aan *het tegengestelde nemen* (denkend structureren, door betekenis toe te kennen).

Als ik de leraar was zou ik nu een drietal dingen willen weten.

- 1 Wat gebeurt er bij die beide leerlingen: structureren ze visueel of vindt er ook een denkend structureren plaats?

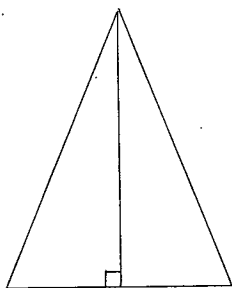
Ik wil dat graag weten om adequaat te kunnen reageren. Dat wat deze leerlingen denken, doen, zou ik namelijk als aangrijpingspunt willen gebruiken voor een volgend leerproces. Uit de opgave en de manier waarop die behandeld is, is voor mij al wel duidelijk dat deze leerlingen niet echt gedwongen zijn tot een andere activiteit dan het volgen van de leraar. Desondanks hebben zij de neiging om structuur aan te brengen (te herkennen) niet onderdrukt.

- 2 Wat heb ik – en mijn eventuele voorgangers – deze leerlingen in de loop der jaren laten doen, waardoor zij dit gedrag vertonen? Heb ik deze leerlingen – bewust of onbewust – geleerd te zoeken naar ‘snelle antwoorden’? Als dat zo zou zijn zal ik zeker proberen daar in het vervolg meer op te letten.
- 3 Had ik kunnen voorkomen dat die leerlingen zo reageerden? Ik had de leerlingen van het begin af aan kunnen aanzetten, dwingen, tot een grotere eigen activiteit door hen zelf te laten bedenken wat het resultaat was bij de spiegelingen. Maar dan loop ik natuurlijk toch het risico dat het fout gaat. De voorbeelden hadden wat beter gekozen kunnen worden (ook negatieve tweede getallen, gebruik van breuken, gebruik van grote getallen). Ook had ik de leerlingen kunnen helpen om te blijven kijken naar de tekening door expliciet vragen te stellen over de coördinaten. Verder zou het mogelijk geweest zijn om direct meer variatie aan te brengen door van een bepaald origineel het spiegelbeeld te geven en te vragen naar dat origineel. Misschien had ik de probleemstelling duidelijker over moeten laten komen (Kun je spiegelen zonder spiegel, resp. rekenen?) Ook zou het zinvol geweest zijn de leerlingen meer emotioneel bij probleemstelling te betrekken, zodat het hun probleem werd. Een probleem dat ze op wilden lossen.

Hoe dan ook. Ik had gewoon gebruik kunnen maken van het feit dat deze leerlingen spontaan iets oppakken, structuur aanbrengen. Ze zouden alleen de kans hebben moeten krijgen om dat ‘goed’ te doen.

Voorval 2

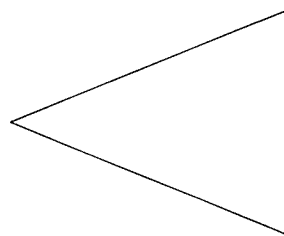
Door spiegeling in een rechthoekszijde is de volgende figuur ontstaan.



Figuur 1

Vervolgens heeft de leraar de naamgeving (basis,

tophoek, etc.) behandeld en tekent hij de volgende figuur.



Figuur 2

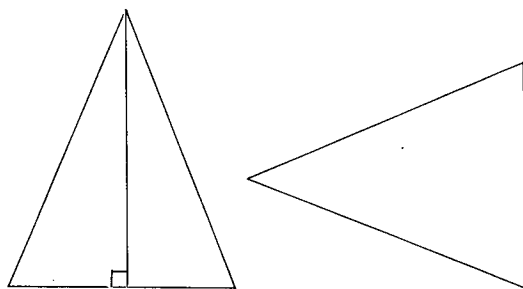
leerling 1 zegt spontaan: *die is ook gelijkbenig*

leerling 2: *nee, die is niet gelijkbenig*

leerling 3: *hij is wel gelijkbenig, maar hij heeft geen basis*

Ik vraag me af wat met name leerling 2 opgepakt heeft van de gelijkbenige driehoek. Leerling 3 heeft in ieder geval opgepakt dat ‘een hondje op zijn rug nog steeds een hondje is’.

Maar leerling 2? Mist die de hoogtelijn? De basis horizontaal? De evenlange opstaande zijden? Of klopt het plaatje als geheel niet met het bekende beeld?

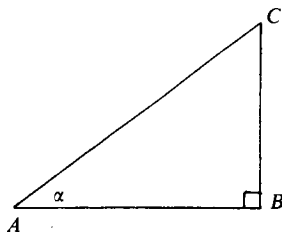


Figuur 3

Nou is een niet-horizontale basis ook iets gek (althans buiten de wiskundeles) en een niet-verticale hoogtelijn evenzo. Het vereist nogal wat abstractievermogen om je los te maken van beelden en te werken met formele kenmerken. En die kenmerken word je vervolgens wel weer verondersteld in een plaatje te ‘zien’. Eigenlijk is het heel fijn dat die drie leerlingen niet hetzelfde ‘zien’. Dat opent de mogelijkheid tot het voeren van een leerzaam gesprek.

Voorval 3

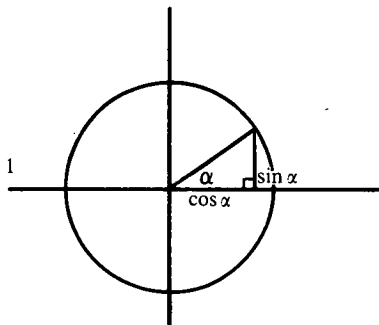
In de lessen goniometrie zijn 'sin' en 'cos' als verhoudingsgetallen geïntroduceerd met veel nadruk op 'overstaande' en 'aanliggende'.



Figuur 4

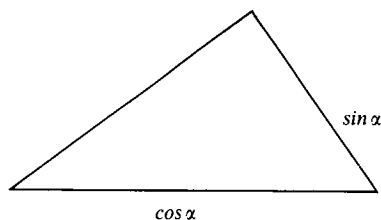
$$\sin \alpha = \frac{BC}{AC} \quad \cos \alpha = \frac{AB}{AC}$$

Voor het geval $AC = 1$ is in de eenheidscirkel het volgende getekend



Figuur 5

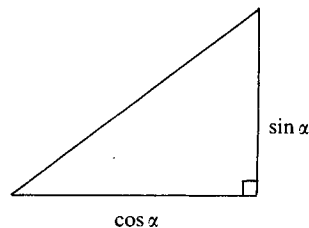
Bij een opgave tekent een leerling



Figuur 6

Achterin de klas denk ik dan: er wordt ook hier vermoedelijk visueel gestructureerd. Wel wat oppervlakkig. Maar kennelijk is dit visuele structureren iets dat gemakkelijk gedaan wordt. Misschien zou je dat hier kunnen gebruiken door de rechte hoek er meer uit te laten springen. Dat kan even-

tueel door zowel $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, als $\sphericalangle$ een andere kleur te geven.



Figuur 7

Maar dat is niet genoeg, want waar blijft nu de 1? En de α ? Visualiseren helpt⁴, maar met alleen visuele structuren kunnen we kennelijk niet verder.

Voorval 4

Op het bord komt $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3} =$
Een leerling zegt: hé, de '1' valt weg!?

Als toeschouwer kijk ik hierbij wel even op. Want wat zie ik zelf? Breuken die gelijknamig gemaakt worden. Eigenlijk zie ik die enen amper. De leerling reageert op het visuele, maar is duidelijk verwonderd over wat hij ziet. Een goed startpunt voor leren.

Voorval 5

Bij het klassikaal behandelen van goniometrische vergelijkingen staat er op het bord:

$\tan \alpha = 2$ Wat is $\sin \alpha$?

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \Leftrightarrow \sin \alpha = 2 \cos \alpha$$

leraar: wie heeft een idee?

leerling: substitueren in $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

leraar: heel slim

leerling 2: hè?

leraar tegen leerling 2: dit heeft te maken met twee vergelijkingen met twee onbekenden

leerlingen: ????

Leerlinge 2 ziet niet waarom haar mede-leerling die $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ er bij haalt. De leraar ziet dit wel, vanuit de optiek van stelsels vergelijkingen. De leraar denkt de leerlinge te helpen door haar zijn manier van structureren op te leggen. Maar is dat wel het geval?

Voorval 6

De behandeling van de opgave: Arceer het gebied waarvoor geldt $x > y$ en $y > 0$ verloopt als volgt: leraar: *wat is de grens van het gebied waarvoor geldt $y > 0$?*

leerling 1: *het bovenste stuk van de y-as*

leerling 2: *boven de horizontale*

leerling 3: *alles daar boven* [wijst aan met armzwaai]

De leraar arceert het gebied.



Figuur 8

leraar: *wat is de grens van het gebied waarvoor $x > y$?*

leerling: *zo'n schuine lijn door de oorsprong*

leraar: *hoe noemen we die lijn?*

leerling 1: ??

leerling 2: ??

leerling 3: *(aarzelend) $x = y$, of zo.*

leraar: *inderdaad. Het zijn de punten waarvoor $x = y$.*

De leraar tekent de lijn in:



Figuur 9

leraar: *waar liggen nu de punten waarvoor $x > y$?*

leerlingen: *daar schuin onder*

leerling 2: *waarom?*

leraar: *probeer maar eens een punt; bv. $(-1, 2)$*

Is de x daardoor groter dan de y ?

leerling 2: ??

leraar: *wat is de x ?*

leerling: *-1*

leraar: *en de y ?*

leerling: *2*

leraar: *is die x groter dan y ?*

leerling: *nee*

leraar: *nou, je ziet dus dat dit gebied* [wijst het gebied aan]

Dus moet het het andere gebied zijn.

leerling zachtjes tegen haar buurvrouw: *maar er kunnen toch net zo goed punten zijn aan die andere kant waarvoor het ook kan?!*

Ik krijg het gevoel dat de leraar de leerlingen een manier van structureren wil opleggen, die een aantal leerlingen niet oppakt. De leraar vertelt achteraf, in dit soort situaties voor een moeilijke keuze te staan; wel of niet opleggen van een bepaalde manier van structureren. Wél opleggen kan bij de leerlingen een houding gaan geven van: we zoeken zelf maar niet meer, we proberen gewoon te achterhalen wat die man van ons wil. Niét opleggen kan tot gevolg hebben dat een deel van de leerlingen het verder voor gezien houdt (niet verder kan). Misschien kan hij in het vervolg voorkomen dat hij in zo'n zwart-wit situatie komt. Het gaat immers niet primair om de oplossing van deze ene opgave. De leerlingen moeten leren zo te structureren dat ze allerlei soorten opgaven/problemen op een bevredigende manier kunnen aanpakken.

Zou er bij hun eigen manier van structureren aangesloten kunnen worden?

Voorval 7

leerling: $-4 - 3 = +7$

leraar: *waarom?*

leerling: *twee minnen is een plus*

Voorval 8

Op het bord staat: *bepaal het midden van AB als $A(8, 2)$ en $B(4, 6)$.*

Een leerling roept: *optellen en door twee delen. Dus $(6, 4)$*

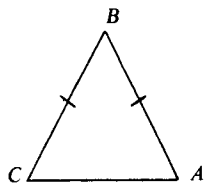
De leraar geeft enkele opgaven op, loopt de klas in en ziet even later in een schrift staan:

$$\begin{array}{r} 10,3 \\ 8,5 \\ \hline 2/18,8 \backslash 9,4 \\ 18 \\ \hline - \\ 08 \\ 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

Voorval 9

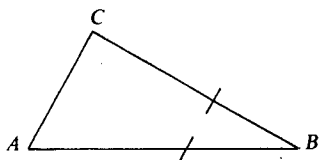
Gegeven de gelijkbenige driehoek ABC met $AB = BC$.

De leraar tekent op een sheet van de overheadprojector



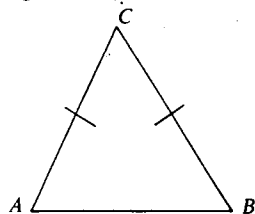
Figuur 10

leerling 1: nee, het moet zijn



Figuur 11

leerling 2: nee, het kan niet, want het moet zijn

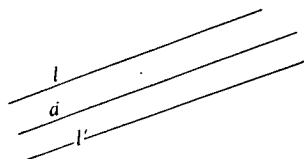


Figuur 12

en dan is AB niet gelijk aan BC .

Voorval 10

l' is de gespiegelde van l bij spiegeling in de lijn a ($l \parallel a$) l' is op het bord getekend alsof hij a snijdt.



Figuur 13

leerling: l' moet toch evenwijdig zijn?

leraar: waarom?

leerling: nou, ja ...

leraar: stel nou dat die l een snijpunt S had met a .

Als je l' spiegelt in a wat krijg je dan?

leerling: (aarzelend) l (?)

Leraar: goed. En waar komt dat snijpunt dan terecht?

leerling: dat blijft op z'n plaats

leraar: zie je het nu?

leerling: wat?

Samenvattend

Bij het structureren gaat het er o.a. om dat de leerling/leraar uit een gegeven probleem (situatie) de essentiële punten en/of verbanden haalt. Dit zonder al te sterk afgeleid te worden door 'toevallige' factoren, zoals:

- de stand van een figuur
- voorval 2, 3 en deels 9
- meerdere betekenissen van een symbool
- de minnen in voorval 1 en 7
- We kunnen dit ook als volgt zeggen:
- een aantal leerlingen en leraren is geneigd naar verbanden te zoeken (kijken)
- tussen P en P' in voorval 1
- tussen gonio en stelsels vergelijkingen in voorval 5
- een aantal leerlingen en ook leraren let vooral op het eindresultaat/het plaatje/de getallen
- gelijkbenige driehoek in voorval 9
- de 1 in voorval 4
- Een zeer veelvuldig optredend probleem is, dat de leraar kan (en wil) 'uitzoomen'⁵ aan de hand van één voorbeeld en de leerling dat voorbeeld (nog?) niet 'van bovenaf' kan beschouwen, zoals:
- het 'zien' van het type vraagstuk '2 vergl. met 2 onbekenden' in voorval 5
- het ene getalsvoorbeeld in voorval 6
- de opgaande deling in voorval 8
- de aard van de redenering in voorval 10.

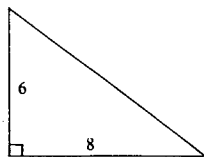
De docent(e) 'ziet' het essentiële/de verbanden etc. die hij/zij kan zien op grond van zijn/haar ontwikkeling resp. voorkennis. De leerling(e) 'ziet' het essentiële/de verbanden etc. die hij/zij kan zien op grond van zijn/haar ontwikkeling resp. voorkennis. En aangezien leraar en leerling verschillen qua ontwikkeling en voorkennis is het in feite zeer verwonderlijk dat zij zo vaak hetzelfde 'zien'.

Als mogelijke oorzaken van problemen met structureren zijn impliciet en expliciet verder genoemd:⁶

- de snelle-antwoorden gerichtheid
- de onvolledige oriëntering, b.v. door het ontbreken van een duidelijke probleemstelling
- een teveel aan ruis bij de uitleg
- het onvolledig sorteren (gebruik van te beperkte, of te eenzijdige sorteervoorbeelden)
- het niet inspelen (gebruik maken van) verschillen tussen leerlingen
- het opleggen van één manier van structureren.

Tot slot

Voor de leraar die zich samen met z'n leerlingen telkens weer verwondert over het feit dat een *dalparabool* een *top* heeft wil ik besluiten met een verband dat Sacha Vedder⁷ ontdekt heeft dat tussen de zijden van een rechthoekige driehoek bestaat. Het verband tussen de zijden gaf zij aan met behulp van een reken-regel. Zo rekende zij de derde zijde uit:



Figuur 14

hele oppervlakte 48
halve oppervlakte 24
som v/d bekende zijden $\frac{14}{2}$ —
derde zijde 10

'Geloof' u niet dat het zo kan, probeert u dan 12 5 maar!!

leerling 1: ik snap die som niet!

leraar: heb je al zo'n soort som gemaakt?

leerling 1: dat zal wel als u dat zo vraagt.

leerling 2 tegen leerling 1: doe niet zo flauw, die man probeert je te helpen.

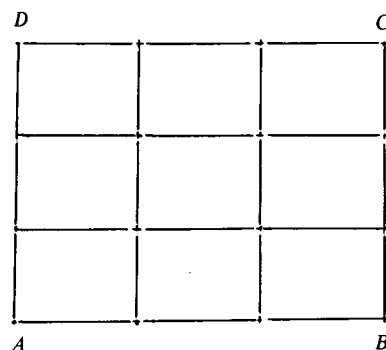
leerling 1 tegen leerling 2: uitslover!

leraar tegen collega's: wat moet ik daar nu mee?

Kijkt u naar de 'plaatjes' of naar de 'getallen'?

Een opgave uit het artikel 'A Square Share: Problem Solving with Squares' door Margaret J. Kenney en Stanley J. Bezuska, *Mathematics Teacher*, September 1984.

Given the 3×3 array of nine congruent unit squares, observe the following:



Figuur 15

- 1 If $\overline{BD}$ is removed, then eight congruent squares remain. Thus, removal of one unit segment leaves eight congruent squares and no other shapes in the 3×3 array.
- 2 If $\overline{AB}$ and $\overline{AC}$ are removed, then eight congruent squares remain. Thus, removal of two unit segments leaves eight congruent squares and no other shapes in the 3×3 array.

MIN TABLE

MAX TABLE

Least Number of Unit Segments to Move	Number of Congruent Squares Remaining in the Array	Maximum number of Unit Segments to Move	Number of Congruent Squares Remaining in the Array
1	8	2	8
	7		7
	6		6
	5		5
	4		4
	3		3
	2		2
	1		1

One is the least number and two is the greatest number of unit segments that can be removed so that eight congruent squares remain. Complete the Min and Max tables below and, on a separate sheet, make a sketch to illustrate each one of your choices.

Ook wij zien vaak niet hetzelfde. Vergelijkt u uw oplossingsmethode van het voorgaande probleem maar eens met de oplossingsmethoden van uw collega's.

Noten

- 1 *Euclides* 59, 10; *Euclides* 60, 2 en *Euclides* 60, 3.
- 2 De voorvallen zijn achtereenvolgens uit de lessen van Peter Denteneer, Hillebrand Dijkstra, Gerard Landheer, Jasper Knoester, Peter Korevaar, Hillebrand Dijkstra, Carel Kleijn, Gert Dankers, Cor Hut en Peter Denteneer.
- 3 De neiging tot structureren wordt veelal structureringsstendie genoemd. De grote overlap van dit leerstijlaspect met de eerder beschreven veld(on)afhankelijkheid laat ik hier buiten beschouwing.
- 4 H. Broekman, Visualiseren helpt! *Euclides* 59, 6.
- 5 Zie hierover o.a. F. Korthagen, Leren en reflecteren in het wiskunde-onderwijs II, *Euclides* 60, 3.
- 6 Zie voor de gebruikte terminologie o.a. J. van Dormolen, *Didactiek van de Wiskunde*.
- 7 Dankzij de oplettendheid van haar vader (mijn collega Jaap Vedder) kan ik dit hier gebruiken.

Mededelingen

Elfde gemeenschappelijke studiedag NVvW-VVWL

De elfde Vlaams-Nederlandse studiedag zal plaats hebben op zaterdag 22 maart 1986 in Breda. Aanvang 10 uur, einde 16 uur. Plaats: motel Brabant.

Van Vlaamse kant zal spreken An Mogensen; van Nederlandse kant zal één spreekbeurt gewijd zijn aan Toetsperikelen, terwijl verder Prof. dr. J. J. Seidel toegezegd heeft een voordracht te houden.

Nadere bijzonderheden volgen. Wilt u nu reeds de datum noteren?

Rectificatie

In 'Een directe weg naar a^x , $\ln a$ en $^{10}\log x$ ' is op blz. 119 van deze jaargang de onderstreping van binaire getallen weggevalen. De tekst van kolom 2 moet als volgt gelezen worden:

Kortweg schrijvend $\underline{k} \rightarrow k$ hebben we allereerst aan te tonen dat

$$\text{Als } \underline{k} \rightarrow k, \text{ dan } a^{\underline{k}} \rightarrow a^k. \quad (6)$$

Bewijs. Neem $m \in \mathbb{Z}$ zó dat $m < k < m + 1$ en een verfijning zó dat $(\underline{k}, a^{\underline{k}})$ hoekpunt is (zie fig. 3). Die verfijning bepaalt een speling met bovenrand boven (k, a^k) en onderrand er onder. Bijgevolg geven ook de lijnen van $(\underline{k}, a^{\underline{k}})$ naar (m, a^m) en $(m + 1, a^{m+1})$ snijpunten met $x = k$ aan weerszijden van (k, a^k) . Gaat $\underline{k} \rightarrow k$, dan nadert $(\underline{k}, a^{\underline{k}})$ tot beide, dus tot (k, a^k) .

En nu de limietovergang voor de drie rekenregels (vanuit (4) naar (5)).

$$a^{\underline{k}} \cdot a^{\underline{l}} = a^{\underline{k}+\underline{l}} \rightarrow a^k \cdot a^l = a^{k+l}, (a^{\underline{k}})^{\underline{l}} = a^{\underline{k} \cdot \underline{l}} \rightarrow (a^k)^l = a^{k \cdot l}, (a^{\underline{k}})^{\underline{l}} = a^{\underline{l}} \cdot b^{\underline{l}} \rightarrow (a^k)^l = a^l \cdot b^l.$$

Bij $(a^{\underline{k}})^{\underline{l}} = a^{kl}$ gebruiken we $(a^{\underline{k}})^{\underline{l}} = (a^{\underline{k}}/a^k)^{\underline{l}} \cdot (a^k)^{\underline{l}}$.
N.b. $a^{\underline{k}}/a^k \rightarrow 1$.

$$(a^{\underline{k}}/a^k)^{\underline{l}} \cdot (a^k)^{\underline{l}} = a^{kl} \rightarrow 1 \cdot (a^k)^l = a^{kl}.$$

Gaat $(a^{\underline{k}}/a^k)^{\underline{l}} \rightarrow 1$? Ja! Neem $n \in \mathbb{N}$ groter dan $\max|l|$. Dan is $-n < l < n$. Tussen de gehele machten $(a^{\underline{k}}/a^k)^n$ en $(a^{\underline{k}}/a^k)^{-n}$ moet $(a^{\underline{k}}/a^k)^{\underline{l}} \rightarrow 1$.

De nu bewezen rekenregels brengen opheldering! Wat is bijv. de limiet $a^{\frac{1}{3}}$? Er geldt $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a$, of ineens $(a^{\frac{1}{3}})^3 = a$. Dus is $a^{\frac{1}{3}}$ de derdemachtswortel uit a . Net zo met $a^{\frac{1}{2}}$.

Wij betreuren deze storende fout.

Redactie

Wiskunde en Onderwijs

Mag ik degenen die een abonnement op Wiskunde en Onderwijs hebben, vragen het voor 1986 verschuldigde bedrag, evenals vorig jaar f 25,50, te storten op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth?

Leden van de NVvW die tegen deze gereduceerde prijs een nieuw abonnement wensen, kunnen zich opgeven door storting van dit bedrag met bijschrift: nieuw abonnee. Ze zijn dan tevens lid van de Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars en ontvangen het Mededelingenblad van deze vereniging.

Nadere informatie over het tijdschrift vindt u in de recensie in nummer 3 van deze jaargang.

P. G. J. Vredenduin

Eén context, vijf leerlingen*

Rijkje Dekker

Vijf leerlingen

Met zeer verschillende rekenervaringen komen ze in de brugklas de wiskundeles binnen en ook hun toekomstverwachtingen lopen dan al ver uiteen.

Roos

Vond je het leuk op de lagere school?

Nee, niet zo.

Nee? Waarom niet?

Weet ik niet.

Waren ze streng? Of waren de kinderen niet zo leuk?

Ja, streng.

Had je op de lagere school wiskunde? Of rekenen of allebei?

Rekenen.

En vond je dat leuk of niet leuk?

Leuk.

Ja? Vond je het moeilijk?

Nee, soms.

Welke dingen vond je moeilijk, kun je je dat nog herinneren?

Breuken.

Ja? En vind je rekenen nuttig?

Hm.

Of gebruik je het eigenlijk niet?

Nee.

Denk je wel eens na over je toekomst, wat je wil worden enzo?

Bakker vind ik wel leuk.

Zou je bakker willen worden?

Ja.

Denk je daar wiskunde bij nodig te hebben?

Weet ik niet.

Is het een vak wat je wel zou willen houden?

Ja.

Waarom?

Gewoon.

Rik

Had je wiskunde op de lagere school?

Nee.

Alleen rekenen.

Rekenen, maar sommige dingen zaten er wel van wiskunde door in het rekenboek.

Zoals?

Staat. Eén staat tot twee, ik weet niet.

Ja, verhoudingen.

Verhoudingen enne grafieken hadden we ook en ik weet niet hoe dat heet. Zo'n landkaart, dat je dat uit moet meten.

Schaal?

Schaal ja, hadden we ook.

Wat voor grafieken heb je gehad dan?

Gewoon eh, ik weet het niet wat voor grafieken.

Staafigrafieken?

Staafigrafieken hadden we ook.

En lijngrafieken?

Ja ook ja. Allebei dus. Hadden we het al gehad.

En weet je ...?

En ook millimeters enzo hebben we ook gehad.

Allang, heel lang.

En wat voor lijngrafieken, kun je je dat nog herinneren waarover die gingen?

Niet precies nee, weet ik niet precies. Ja, ik weet het niet precies, eigenlijk.

Staafigrafieken gingen over ... weet ik ook niet meer precies.

Vond je die wiskunde op de lagere school moeilijk?

Nou, sommige dingen waren wel moeilijk.

Zoals?

Die komma's enzo. Bedoelt u van alleen wiskunde?

Nee, maakt niet uit.

Met die komma's enzo. Staartdelingen. Vond ik wel een beetje moeilijk. Niet zo erg. In het begin werd het makkelijk, werd het steeds moeilijker, op het laatst.

Maar we kregen steeds uitleg. En als je uitleg had gehad, dan begreep ik het wel.

Gaven jullie ook uitleg aan elkaar?

Nou, we moesten meestal naar de meester, maar als de meester het heel druk had, zegt die, vraag het maar aan die, die al heel ver was. Die het al wist dus.

Denk je wel eens na over je toekomst? Wat je wil worden?

Ja, ik wil sportleraar worden. Maar ik dacht dat ik niet meteen de havo kon halen. Ben ik eerst hier op gegaan en daarna kan ik de havo doen en daarna op de sportacademie, dus.

Dat weet je al heel lang?

Ja, van de zesde klas. Als het niet door gaat, gaan ik in de horeca.

Zoals je vader.

Ja.

Denk je bij je vak als sportleraar of in de horeca wiskunde nodig te hebben?

Bij de sport, ja, ik weet niet of ik daar wiskunde bij nodig heb. Maar bij de horeca zeker wel.

Wat voor dingen?

Bijvoorbeeld als je zoveel flesjes nodig hebt, moet je dat allemaal uit kunnen rekenen enzo. En sorteren die flessen. Ja, heb je wel nodig.

Jane

Heb je wiskunde op de lagere school gehad?

Mm, ja rekenen en wiskunde.

Wat kreeg je dan?

Dan moesten we met een liniaal lijntjes trekken en dan stond er een verhaaltje van, zet een liniaal recht en dan moest je een streep trekken. En zet hem nou vierkant, of eh, schuin enzo. En dan kreeg je zo een tekening. En je moest dingen opmeten, hoe lang een tafel was enzo, en daar moest je een rekensom van maken. Dus dan stond er een schoolbord en

een tafel, dat is zoveel. Moest je vermenigvuldigen of gewoon. Echte grafieken hadden we niet zoveel. Ik was een beetje in het midden maar je had ook kinderen die echt helemaal hoog waren en die kregen wel grafieken.

En met rekenen, hoe ging dat?

Soms wel slecht. Ik ben niet zo goed in rekenen, dus kreeg ik meer hulp.

Hoe kreeg je rekenen, sommetjes?

Het waren boekjes en taken. Kreeg je taak 1 tot en met taak 12 en dan moest je taak 1 afmaken.

Vond je wiskunde, rekenen leuk, moeilijk of nuttig op de lagere school?

Nou, ik vond het de ene keer wel leuk. Dan werd het echt wel leuk uitgelegd of kreeg je leuke sommen. Gewone sommen vond ik niet zo leuk. Dan kreeg je zo'n rij met allemaal vragen. Eerst op de ene bladzij stond dan een verhaaltje van kamperen, twee jongens en dan hadden ze dingen meegenomen en dan stond er een heel rijtje wat ze hadden meegenomen en hoeveel het allemaal kostte en hoeveel kilometer ze hadden gelopen enzo. En op de andere bladzij stonden vragen van hoe lang hebben ze gelopen en hoeveel heeft het bij elkaar gekost enzo en dat vond ik weer leuk.

Denk je wel eens na over je toekomst, wat je wil worden?

Ja.

Als je het nou helemaal mocht kiezen, wat zou je dan willen worden?

Eh, fotomodel. Het is zo moeilijk voor mij want ik heb 2 keuzes. Ik heb 2 dingen heel graag. Dat ik fotomodel word en dansjuffrouw. Dat ik les geef aan kinderen. Of gewoon met jongens en meisjes op de dansacademie.

Zou je wiskunde in je pakket willen houden.

Nee.

Waarom niet.

Ik heb er wel wat aan enzo. Maar aan de ene kant heb ik er niks aan en aan de andere kant wel. Ik heb toch niks meer met wiskunde te maken later.

Wil ik niks mee te maken hebben. Ik wil op een modevakschool of op een dansacademie dus dan heb je er niet zoveel aan.

Denk je dat je er op de modevakschool niet mee te maken krijgt?

Nou, aan de ene kant wel ja, want dan moet je ook opmeten enzo.

Patronen?

Ja, maar niet zoveel als gewoon als boekhouder ofzo, want dat was m'n één na jongste broer.

Cari

Had je wiskunde op de lagere school?

Nee.

En rekenen?

Ja, rekenen wel. Elke dag moest je rekenen.

Ja, vond je dat leuk?

Nou ik was behoorlijk ver. Deeltje 12.

Was je goed in rekenen?

Ja, ik was goed in rekenen. Vind ik zelf wel.

En vind je rekenen leuk?

Ja, ik vind rekenen wel leuk.

Vind je het een nuttig vak?

Maar je moet het wel, niet overal bij gebruiken, maar wel heel vaak.

Bij wat voor dingen?

Bij de kassa of, weet ik veel.

Denk je wel eens na over je toekomst? Wat je wil worden?

Nou, ik denk dat ik net als m'n andere zus ga doen, in de horeca.

Wat doet ze dan?

Nou gewoon in een koffiehuis of broodjeszaak.

Dat wil je ook, of ...?

Ja.

Zou je niet door willen leren? Studeren?

Nee, ben ik geen type voor. Daar hou ik niet van.

Heb je alleen zusters of ook broers?

Eén broer en 3 zusters.

Zijn ze allemaal ouder dan jij?

Ja, allemaal ouder.

En hebben zij jou wel eens dingen over wiskunde of rekenen verteld?

Ja, m'n broer is heel goed in rekenen maar die andere gaat nog wel.

José

Heb je wiskunde op de lagere school gehad?

Nee, rekenen.

Alleen rekenen. Vond je dat leuk of vervelend?

Maar dan was dat rekenen was dan ook met grafieken wel, af en toe.

Ja?

Maar dan noemden we het geen wiskunde, dat bleef rekenen. Maar dan was het wel af en toe met grafieken enzo.

Ja.

Dat leerden we wel.

En vond je dat moeilijk of niet?

Nee.

Vind je rekenen nuttig?

Het is wel nuttig, maar ik vind het rottig.

Dus toch een beetje moeilijk.

Ja, af en toe is het wel moeilijk. We hebben zo straks even rekenen gehad maar, ja, wat leer je er eigenlijk van? Je leert er wel optellen en alles van, maar ik vind het wel nuttig, ja.

Denk je wel eens na over je toekomst? Wat je wil worden?

Zelden, zelden. Misschien als iemand me vraagt, wat wil je worden, nou dan moet ik wel heel goed nadenken of dan zeg ik maar gewoon vlug dieren-dokter of wat dan ook.

Dierenarts, ja dat wou ik ook vroeger worden.

Maar ik weet het niet zeker, hoor.

Maar denk je bijvoorbeeld wat je gaat worden, dat je daar wel wiskunde bij nodig zult hebben?

Ik weet niet, ik denk wel dat je overal wel wat op te tellen of wat dan ook met wiskunde te maken heeft.

Eén context

Zo verschillend als leerlingen zijn, met een goed gekozen context hoop je toch alle leerlingen aan te spreken zodat ze gemotiveerd raken om aan het wiskundewerk te gaan en eigen ervaringen daarbij kunnen gebruiken. De ontwikkelaars van het SLO-pakketje 'Grafieken en Verbanden' hebben er tenminste behoorlijk werk van gemaakt.

De les

L, de lerares van Roos, Rik, Jane, Cari en José heeft samen met haar klas het SLO-pakket 'Grafieken-taal' doorgewerkt. Kwalitatieve grafieken kwamen daarin aan de orde. Nu is ze met haar klas bezig met het pakket 'Grafieken en Verbanden'. De overgang naar kwantitatieve grafieken is net gemaakt. Roos,

Rik, Jane, Cari en José zitten in één groepje en ik observeer hen.

L: 'Welke auto huren'.

Het duurt even voordat iedereen zit en de goede bladzij voor zich heeft. Rik kan hem niet vinden en Cari zogenaamd niet.

L leest voor. Bij het woord 'Spanje' zegt José: 'ha, lekker'. Iedereen leest mee.

'Wat zou de voordeligste auto zijn om mee op vakantie te gaan?', besluit L.

Stilte.

'Die eh, Renault', zegt Rik zacht.

'Zijn er al ideetjes?', vraagt L.

'Ik hoor het wel aan het eind van het uur, hè, wat de voordeligste auto is', zegt L.

'De fiets', zegt José.

Rik pakt een blaadje, Jane heeft een pop-blaadje en Roos leest.

José: 'Gewoon een fiets, dan heb je geen benzine nodig. lekker gezond en ...'.

'Wat ben je aan het doen José?', vraagt Jane.

'Niks', zegt José.

Roos leest, Rik leest en schrijft.

'Nou, we moeten even dat ding afmaken', zegt José, 'ik heb helemaal geen zin in wiskunde, gedverdemme'.

Jane praat met José over haar achternaam.

'Ik weet niet, misschien de Renault', zegt José wat sloom, 'misschien zijn ze alletwee wel voordelig'.

'Ik kan zien dat jullie slaap hebben nog', zegt Cari.

'Ik was om half zes wakker', zegt ze.

'Die Renault, die rijdt zuinig en die andere kost niet zo duur. Die Renault rijdt wel zuiniger', zegt José.

'Hoe weet je dat?', zegt Rik.

'Ja, dat zeggen ze', zegt Jane, 'ik zeg ook wat'.

Roos wacht af.

José: 'Die Toyota kost helemaal niet duur, maar kost duurder in de benzine of in het rijden. Maar de Renault draait weer zuinig maar die kost weer duur bij die man als je een Renault neemt. Per week kost die 200 gulden en per week kost die andere 150 hè, of zo'.

'Ik heb lippenstift bij me', zegt Cari.

'Dus toch 50 gulden winst', zegt José.

Jane en Cari zitten te eten.

Rik rekent op een blaadje.

'Weet jij het al?', vraagt José.

'Effe uitrekenen', zegt Cari.

'Ik vind je haar zo veel leuker, José', zegt Jane.

'Ja', zegt José en kijkt gauw in z'n werk.

'Je weet het eigenlijk niet', zegt hij, 'ze zijn alletwee even zuinig bijna'.

'Ja dat dacht ik ook', zegt Jane.

Cari rekent nog.

'De Toyota is duurder', zegt Rik.

'Want hij rijdt niet zo zuinig', zegt José.

Cari begint met een schema.

Toyota

18 ct

Renault

12 ct

'Die Toyota is duurder', zegt José.

'Toyota is duurder', zegt Rik.

'Ik heb het al uitgerekend', zegt Rik, 'als het goed is, maar het klopt nooit, 15 gulden benzine erin gooien en je bent in Frankrijk'.

'Ja, ja', zegt José.

't Is echt zo', zegt Rik.

'Geeltje d'r in, dan rijdt je een week', zegt hij, 'Juf, kunt u nog even komen?'.

'Die ene is toch voordeliger wat ik zei', zegt José.

'Mag ik het effe uitrekenen?', Cari gaat weer aan de slag.

L komt.

'Klopt dit?' vraagt Rik en hij laat zijn berekeningen zien.

'L die 6000 kilometer, is dat heen en terug?', vraagt Cari.

'Ja, totaal', zegt L.

'Oh, 6000 kilometer', zegt Rik.

'Nou dat geeft niet', zegt L, 'maar wat heb jij, 5000 maal 12 is 165 zeg jij, of niet?'.

'Nee, dat klopt dus ook niet', zegt Rik.

L moedigt aan om netter te werken, dan gaan de fouten er wel uit.

'En moet je nou zien hoe je zit', zegt ze.

Rik zit onderuitgezakt achter z'n tafel.

L: 'Jane'.

Jane: 'Ik zit net te schrijven of te lezen, maar ik kom er niet uit'.

'Snap je wat de rest aan het uitrekenen is?' vraagt L.

'Ja', zegt ze.

'Jij ook?', vraagt L aan Roos.

L: 'Misschien kunnen jullie wel wat taakjes verdelen of zo, dat je niet allemaal hetzelfde gaat zitten uitrekenen, dat de een dit uitrekent en de ander dat uitrekent enzo'.

'L kom eens?', vraagt Cari.

L: 'Waarom?'

'L, zondag komt m'n vriendin slapen bij me', zegt Jane.

L bekijkt Roos haar berekeningen.

Cari heeft ondertussen haar schema uitgebreid.

Toyota	Renault
18 ct	12 ct
6000	6000
0,18	0,12
48000	12000
60000	60000
1080,00	720,00
150	200
1230	920,0

'L, ik heb het', zegt Cari.

'Ja?', zegt L.

'Jaaa', imiteert Rik.

'Nee', zegt L, 'of wel. Waarom tel je er nou 200 bij op?'

'Nou, van die auto natuurlijk', zegt Cari.

'Die auto huren kost 200 gulden', zegt Rik.

'Maar wat kost die auto 200 gulden', vraagt L.

'Per 4 weken', zegt Cari.

'Per week', zegt Rik, 'en ze gaan 4 weken en dan moet je nog, oh dat doe ik wel, 800 gulden erbij gewoon'.

L is weer weg.

Cari vraagt trots bewondering voor haar rekenwerk.

Die krijgt ze van mij.

'Ik vind alles moeilijk', zegt Jane, 'behalve dansen'.

'Rik, je bent het helemaal verkeerd aan het uitrekenen jij', zegt Cari met een blik op Rik's papiertje en bij de linkerkolom van haar schema telt ze 450 op en bij de rechter 600.

De playbackshow komt ter sprake.

L gaat van groepje naar groepje.

'Ik ga Dolly Parton nadoen', zegt José.

'En ik André Hazes', zegt Rik.

Cari roept L.

L komt en kijkt bij Cari.

L: 'Toyota, 18 cent, 150 gulden dus dan heb je 8 keer 6 is eh ...'.

'Heb ik al uitgerekend', zegt Cari en ze wijst op haar berekeningen.

'Ja', zegt L, 'maar dan moet je dus geen 150 bij optellen'.

'Nee, dat heb ik toch al', Cari wijst op de laatste optelling.

'Oh', zegt L, 'oh ja, nee prima'.

'Goed uitgerekend van mij, hè?', zegt Cari.

'Ja goed', zegt L, 'welke is nou de goedkoopste van de twee?'

'De Renaut', zegt Cari, 'Renault', verbetert ze.

L: 'Is de Renault altijd goedkoper?'

'Nee', zegt Jane.

'Nee', zegt José.

't Is aldoor hetzelfde grafieken juf, eigenlijk', zegt Rik.

'Je moet het alleen op een andere manier uitrekenen, hè?', zegt L.

'Wanneer wordt de Renault goedkoper dan de Toyota?', vraagt L.

'Omdat benzine', zegt Cari.

Rik: 'Als je meer als eh, zoveel kilometer hebt gereden'.

'Precies', zegt L.

'Reken maar uit, Cari', lacht Rik.

'Hoe zou je dat kunnen oplossen, denk je?', vraagt L.

'Hoe', zegt ze nog eens met nadruk.

'Zou ik heel niet weten', lacht Rik.

'We nemen de fiets', zegt José.

Cari kijkt naar het grafiekenrooster.

'Wat zou je hier mee moeten doen?', L wijst op het rooster.

'Tekenen', zegt Cari.

'Precies', zegt L, 'dus wat maak je er van?'

'Een grafiek', zeggen Jane en Cari tegelijk.

L: 'Ja, twee hè, één voor de Renault en één voor de Toyota'.

'Hè, gadverdamme', zegt Rik.

'Toyotaoaoa', roept José op z'n Japans.

'Die mag Roos uitrekenen', zegt Cari.

'José', zegt L, een beetje streng.

'Roos, kom op', zegt Rik.

L: 'Nou, één kilometerstand heb je al, kun je dus zo even intekenen'.
'Hè wat?!', Cari is verbaasd.
'Gadverdamme', zegt Rik zacht.
L: 'Nee, wat heb je, voor hoeveel kilometers heb je nou uitgerekend?'
'5000', zegt Rik.
'Voor 6000', zegt Cari.
'Voor 6000', zegt L, 'nou dan kun je vast even een stipje zetten, een stipje met de R van Renault en stipje met de T van Toyota'.
Cari: 'L, van die Toyota past er niet meer op'.
L: 'Wat is dat 1640 of zoiets'.
'1680', verbetert Cari.
'Dat is vervelend, hoor', zegt L.
'Stom', vindt Rik.
L: 'Nou, weet je wat, trek het lijntje door en doe dan maar even met een liniaaltje het lijntje beter doortrekken'.
Roos tekent puntjes.
'Met een T en met een R', zegt L.
'Beneden of boven', vraagt Cari.
'Ernaast, zet er maar rechts daarnaast', zegt L.
L laat ze een puntje zetten bij 6000 kilometer en 1520 gulden.
Cari zet hem rechts naast het rooster. L laat het verbeteren. Rik zit op de lijn van 5000.
Het kost echt moeite om de puntjes goed neer te zetten.
Dan het puntje voor de Toyota met een T erbij.
L: 'De kosten van benzineverbruik, wat voor soort grafiek zou dat worden?'
'Hoog en omlaag', zegt José.
L laat een paar mogelijke vormen met haar hand zien.
'Of een rechte lijn', zegt ze.
'Rechte lijn, nee hè?', zegt Rik.
'Zoiets, zo gaattie', zegt Jane en ze schetst een grafiek als die van Lampen.
'Nee, zo', Cari imiteert het bibberstukje dat boven de oorsprong in het rooster staat.
'Als je elke keer de benzine verhoogt, wordt het elke keer zo, iets duurder, zo, iets duurder', José schetst een grafiek die omhoog springt.
'De benzineprijs blijft gelijk', zegt L.
'In Frankrijk wordt het veel meer dan hier', zegt Cari.
'Ja dat zeiden ze', zegt Rik.
L: 'Maar daar zouden we effe nou geen rekening

mee houden'.
'Eh, ikke wel', zegt José, 'moesten we juist wel rekening mee houden'.
L geeft ze gelijk.
'Ja Cari, goed zo van jou', zegt Rik.
L: 'Iedere kilometer wordt het 18 cent duurder dus dat is gewoon continu hetzelfde. Dus die grafiek die wordt een rechte lijn, die je gaat tekenen'.
'Van die Renault hè, oh ja van die Toyota', zegt Cari.
'Van allebei', zegt L, 'maar waar moet je nou die andere punt zetten?'
'Hiero', zegt Rik en wijst op de oorsprong.
'Jij begint bij 0, 0', zegt L.
'Nee bij 600', zegt Cari.
'Welke auto begint er bij 0, 600?', vraagt L.
'De Renault of de Toyota', zegt Jane.
L: 'En waar begint de Renault dan?'
'Bij de 0', zegt Cari.
'Mm', zegt L 'wat is de onderlijn, wat staan daar voor getallen, wat betekenen die?'
'Afstand in kilometers', dat weten ze.
L: 'Als je nou 0 kilometer rijdt met die auto'.
'Ga je niet ver', zegt Jane.
'Dan ga je niet ver', zegt L.
'Moet je bij 1000 beginnen', stelt Cari voor.
'Nou, wacht effies', zegt L, '0 kilometer komt niks hè, want dan huur je geen auto'.
'Jawel, dan word je getrokken', zegt José.
L: 'Stel je nou eens voor dat je wel een auto huurt, maar d'r niks mee rijdt, dat zou ik kunnen doen'.
'Nou, die Toyota', zegt Jane.
'Vind ik wel stom', zegt José en L beaamt dat.
L: 'Wat moet je in ieder geval betalen? Wat je ook rijdt rijdt je maar wat moet je voor een Toyota betalen?'
'600 gulden', zegt Jane.
L: 'Dus ook als ik niks rijdt moet ik voor die Toyota 600 gulden betalen, ja. En als ik niks rijdt moet ik voor die Renault betalen?'
'700 gulden', zegt Jane, '600 gulden'.
'Pakweg', zegt L.
'Zou het niet weten', zegt Jane.
L: 'Gok eens een beetje beter?'
'650', zegt Cari.
'Ah, kom op hè', zegt L, 'gewoon de huur alleen'.
'200', zegt Rik.
Cari: '800'.

'Oh, per 4 weken', zegt Rik.
 L: 'Dus als ik 0 kilometer zou rijden moet ik toch nog voor de Toyota ...'.
 'Ik weet die lijn al L', zegt Cari, 'kijk zo'.
 Ze schetst de gevraagde lijn uit losse hand.
 L: '... 600 betalen en toch nog voor m'n Renault 800 en nou legt Cari de rest uit, dat kan ze best'.
 L gaat weg.
 'Cari legt uit', zegt Rik.
 'Ja', zegt ze met een gezicht van 'vergeet 't maar'.
 'Ah, ik zei toch al een rechte lijn man, tot 600 hè, ja hè, vraagt Rik aan Cari.
 'Nee', zegt Cari, 'eerst vanaf 800'.
 'Oh ja natuurlijk', zegt Rik.
 Roos werkt met liniaal.
 Cari schetst de grafiek uit de hand.
 'Cari gebruik een liniaal', zegt Rik.
 'Mag ik jouw liniaal?', vraagt Cari José.
 'Ja, hallo, dan kan ik het zelf ...', moppert José.
 Jane is klaar.
 'Wij zijn de eerste groep die klaar is', zegt Rik, 'door Cari, moet ik wel even zeggen, door Cari'.
 'Moet je d'r geen kussie geven', zegt José.
 'Nee?', zegt Rik.
 'Cari is de slimste hier uit het hele rot groepie', zegt Rik.
 'Ze is heel goed in rekenen', zegt Jane, 'maar ze wil geen wiskunde nemen, stomme griet'.
 'Vind ik niks stoms aan', zegt José.
 'Ik ga naar een dansacademie, stom van mij, hè?', Jane kijkt mij aan.
 José heeft zijn grafiek tot aan de rechter bovenhoek laten lopen. Rik zegt dat hij hem moet doortrekken. Ze gaan het bij elkaar controleren.
 Cari roept L.
 L komt.
 'Wat is nou de conclusie, welke moet je nou huren?', vraagt ze.
 'De Renault', zeggen ze.
 'Mag je nou verder?', vraagt Cari.
 'Nee', zegt L en ze wil dat ze links op de bladzij duidelijk hun berekening opschrijven.
 'Zijn wij de enige die het nog heeft?', vraagt Jane.
 'De rest zit er vlak bij', zegt L.
 L gaat weer weg.
 'Ik ben uitgewerkt', zegt José, 'de Duracelbatterijen zijn op, ik moet even opgeladen worden'.
 'Snap je het wéér niet?' klinkt Michel op de achtergrond.

'Ik heb het nog nooit gesnapt', protesteert Blanche. Er gaan snoepjes rond.
 Cari schrijft.
 Rik begint ook.
 José kijkt bij Rik.
 'Staat daar een komma?', vraagt José.
 'Ja, dat zie je toch klootzak', zegt Rik.
 Roos kijkt bij Jane en Jane bij Cari.
 Ze vergelijken elkaars werk.
 Cari roept L.
 L komt en kijkt.
 'Renault is voordeliger voor de vakantie', hebben ze opgeschreven.
 'Ik zou er nu nog even bijzetten bij 6000 kilometer', raadt L aan en gaat weer weg.
 José kijkt bij Rik maar kan het niet goed lezen.
 Rik zingt: 'Radio ga ga'.
 Roos kijkt bij Jane en schrijft dan.
 'Hè, hè', zegt Jane, ze heeft de opdracht af.
 L komt kijken.
 'Ja, prima', zegt ze, 'we gaan niet met de volgende opdracht verder'.
 'Wij mogen opruimen en wegwezen', zegt Jane.
 'Wij mogen uitrusten', zegt Rik.
 Ze laten hun grafieken nog wat verbeteren, preciezer maken.
 Ze hebben er weinig zin in.
 'Je hebt er tijd voor', zegt L en gaat weg.
 Van werken komt niet veel meer.
 Cari ruimt haar map op.

Vijfenzestig deskundigen

In groepjes van 5 à 6 mensen hebben 65 deskundigen zich op de conferentie 'Niet-wiskundige contexten in het Wiskunde-onderwijs' van het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde aan de hand van dit verslag over Roos, Rik, Jane, Cari en José gebogen. Spreekt de context hen aan? Raken ze gemotiveerd? Gebruiken ze hun eigen ervaringen bij het oplossen van de opdracht? Wat zijn hun eigen ervaringen?

Roos

Zegt het hele uur niets.
 Is degene die de stoot geeft tot het werken met

liniaal.
 Kijkt bij Jane of ze het goed heeft.
 Ze doet wel mee.
 Waarschijnlijk is ze een stabiele figuur, die gewoon
 langzaam doorwerkt, maar geen initiatiefneemster
 en zeker geen prater.
 Valt niet op.
 Wordt beetje gestimuleerd door Rik.
 Schrijft over.
 Is wel bezig, maar onduidelijk waarom.
 Komt bij samenwerken pas in beeld.
 Roos staat overal buiten.
 Heeft geen inbreng.
 Ze kan het niet leuk gevonden hebben.
 Dat kan ook aan het samenwerken met deze groep
 liggen.

Rik

Rik herkent de situatie.
 Wil erover meepraten.
 Verifieert zichzelf en anderen.
 Rik lijkt geen overzicht te hebben.
 Vindt het wel o.k. als L zegt dat Cari het verder kan
 uitleggen.
 Wel gepakt door het probleem.
 Wil best rekenen.
 Gelooft resultaat niet, 'juf!'
 Ontmoedigd, laat dan maar hangen.
 Als juf er is wel braaf meedoen.
 Rik is wel aangesproken door de context maar hij
 zakt in tot een negatieve houding als hij van de
 opzet van de som eigenlijk niets begrijpt.
 Rekent niet goed.
 Heeft hekel aan grafieken.
 Springt telkens in voortgang van probleemoplos-
 sing en stuurt ook in 'deel' van groepsproces.
 Hemelt Cari op!
 Lekker jong, maar ... niet altijd makkelijk voor
 anderen.

Jane

Niet gemotiveerd, integendeel.
 Ze vindt het bijvoorbeeld gek dat José ergens aan
 wil beginnen.
 Doet daarna ook niet mee, tot grafieken getekend
 moeten worden.

Heeft toch ambivalente houding ten opzichte van
 wiskunde: ze vindt het stom dat Cari geen wiskun-
 de kiest, maar zal het zelf zeker niet kiezen, maar
 vindt dat dan ook weer stom.
 Context heeft geen relatie met haar leefwereld.
 Ze heeft geheel eigen interesses.
 Wordt totaal niet door de situatie gemotiveerd.
 Niet duidelijk of ze het wel of niet volgen kan.
 Doet misschien wel wat maar brengt dat niet in de
 groep.
 'Ik vind alles moeilijk behalve dansen'.
 Lijkt soms meer aan de discussie mee te doen uit
 gezelligheidsoverwegingen dan om andere
 redenen.
 Jane vindt het begin moeilijk maar wil uiteindelijk
 toch wel. Ze probeert en uiteindelijk snapt ze het
 ook wel en ze wil wel meedoen.
 Ze volgt het hele gebeuren.
 Jane vindt de context niet leuk.
 Ze raakt niet gemotiveerd.
 Niets bekend, niets te verifiëren.
 Buiten haar leefwereld.
 Maar ze blijft vrolijk.

Cari

Wel gemotiveerd, maar misschien eerder door het
 rekenwerk dat ze leuk vindt dan door de context.
 Het probleem op zich interesseert haar misschien
 niet bijzonder.
 Elke andere context zou misschien ook o.k. zijn
 geweest.
 Werkt heel goed door.
 Als de rest het over de playbackshow heeft, dan
 roept zij L.
 Kijkt bij Rik mee of hij het wel goed doet.
 Duurt even voor ze zin gemaakt heeft. Daarna is ze
 de motor van de groep, zorgt voor voortgang,
 vraagt L steeds te komen en doorziet het probleem
 vrij vlot.
 Op gezag van L maakt ze de grafiek. Via, via, werkt
 ieder als afgeleide van C.
 Vooral rekenen dus.
 Vantevoren niet gemotiveerd.
 Gericht op groepsleden maar werkt alleen om
 antwoord te vinden. Vraagt ook aan de juf in plaats
 van aan groepsleden.

Kan goed rekenen en ziet dit probleem dan ook als een opdracht om even uit te voeren.
 Geen motivatie vanuit context maar vanuit taakgerichtheid!
 Begint schematisch te werken. Weet een aanpak.
 Vraagt wel bevestiging aan juf.
 Cari lijkt in deze groep een goede wiskundeleerling die dat ook goed weet. Kan een voortrekkersrol vervullen in deze groep.
 Is dat echter sociaal haalbaar? Ze wendt zich liever tot L.

José

Valt op Spanje.
 Wel gemotiveerd, kan er geen touw aan vastknopen. Komt niet verder dan kwalitatieve afweging en dat helpt niet.
 Terrein bekend, kent de soort argumenten, kan niet tot structureren komen.
 Borrelpraat, flapuit, stoorzender, maar maakt ook voortgangsoptmerkingen.
 Heeft aan het eind wel een grafiek.
 José speelt wat betreft de context een thuiswedstrijd, hetgeen zich uit in:
 hij leeft zich uit en 'ziet' het probleem,
 hij permitteert zich veel grappen.
 Zijn oplosbijdrage is naderhand gering.
 José valt zowat stil als de lerares er is, wijst toenaadering van Jane af.
 Wordt onmiddellijk gegrepen door het woord 'Spanje'.
 Doordenkt het probleem dat wil zeggen, hij ziet als eerste dat er een beslissingsprobleem ligt, maar daar blijft het bij.
 Doet niet mee aan het rekenwerk. Geeft wel antwoord op de vraag van L over grafieken, maar dat heeft geen verband met de oplossing.
 Geeft herhaaldelijk spontane reacties, die niets met het vraagstuk te maken hebben.
 Een kleurrijke indruk maakt hij, die het samenzijn leuker vindt dan de leerstof, maar die als hij aandacht krijgt tot meewerken welwillend is.
 Vindt het niet altijd leuk.
 Is ook een hele poos uit de protocollen verdwenen.
 Doet hij dan niets?
 Lijkt de situatie wel te kennen.
 Vindt het stom om over 0 km te praten.

Dit probleem is een 'grote mensen' probleem.
 Waarom staat de suggestie van grafieken al op het blaadje?
 Kunnen deze kinderen niet beter hun 'eigen' sommen maken? Dan heb je een probleem dat tenminste door enkele leerlingen herkend wordt.

Vijf kinderen

Wat te zeggen na deze uitstalling van expertise?
 Klopt het? Klopt het niet? Wat weten we eigenlijk over deze vijf leerlingen? Wat kun je weten aan de hand van één lesverslag?

Roos

Wat voor onderwerpen vind jij het leuk?
 Gewoon, met plaatjes erbij enzo.
Ja, met plaatjes dat vind je wel belangrijk.
 Ja.
En vind je het belangrijk dat het dingen zijn die je interesseren of mag het ook wel eens van hele vreemde dingen zijn, of...
 Gewoon, wel leuk.
Als er nou iets over voetballen zou zijn, zou je dat leuk vinden?
 Een beetje.
Als het iets zou zijn over bakken. Zou je wel leuk vinden?
 Ja.

Rik

Wat vind je van de onderwerpen die je krijgt bij wiskunde?
 Leuk wel, steeds anders.
Vind je prettig.
 Ja, vind ik wel leuk. Steeds hetzelfde is niet leuk.
 Want als je het begrijpt, moet je gewoon weer een ander onderwerp krijgen, vind ik. Dat krijg je hier ongeveer wel.
Heb je een idee waarvoor je wiskunde zou kunnen gebruiken? Waarvoor je het nodig hebt?
 Voor eh, je hebt het wel nodig natuurlijk. Bijvoorbeeld als je zelf uit gaat rekenen hoeveel geld je per jaar opmaakt of zo, dat kan je met grafieken doen.
 Of hoeveel benzine je verbruikt, als je een auto hebt.

Jane

Deze was ook wel moeilijk.

Autohuren.

Maar voor Cari was die Autohuren heel makkelijk. Ik begrijp ook niets van kilometers enzo en van hoeveel meter per uur. Daar begreep ik helemaal niets van. Dat begrijp ik nog steeds niet.

Hoe vond je deze onderwerpen?

Ene kant moeilijk andere kant makkelijk.

Vond je leuk dat het ging over Lampen? Of zeg nou ...

Nee, dat vond ik niet zo leuk.

Nee?

Welke onderwerpen vond je wel leuk?

Van die fiets naar school en de tijd.

En het weer?

Ja, ook wel.

En gasrekenen.

Nee.

Vond je het nou niet leuk omdat het moeilijk was, of omdat het onderwerp je niet aansprak?

Ja, het onderwerp vond ik gewoon niet leuk.

Waarom niet?

Ik begreep er ook helemaal niets van. En dan stond er weer van je moet de grafiek tekenen van de gasrekening. Ik wist niet eens wat gasrekening was.

Cari

Die heb ik niet gehad hè?

Welke auto huren.

Oh, ja die was heel makkelijk. Had ik zo uit.

Ja, die had je inderdaad heel snel. Had je dat met een grafiek gedaan of uitgerekend?

Heb ik gewoon uitgerekend. Die had ik heel snel dus dat vond ik wel leuk.

José

Vond je de onderwerpen leuk?

Soms. Als je een onderwerp hebt dat je niet leuk vindt dan ga je er bijna ook niks aandoen.

Dan ga je helemaal vervelend doen omdat je er niks aan vindt of omdat je het niet begrijpt.

Bijvoorbeeld hiero, met dat journaal met dat weerbericht. Allemaal van die moeilijke dingen. Daar wist ik helemaal niks vanaf.

Nee?

Nee, daar eh ...

Keek je nooit journaal?

Maar ik wil ook dat je weet wat je doet eigenlijk. Soms begrijp ik er helemaal niks van. Ik wil wel dat ik er wat van begrijp.

Als je van die onderwerpen hebt als fietsen of lampen of remweg, maakt dat het leren van grafieken makkelijker? Of vind je niet?

Ja, ik weet niet. Kijk, als het over een lamp gaat weet je een lamp daar zit elektriciteit enzo. Maar als ze bijvoorbeeld vragen van hoeveel stroom zit er in zo'n lamp of wat dan ook. Nou, ik weet wel wat een lamp is maar daarom is het nog niet gemakkelijker.

* N.a.v. lezing op conferentie over 'Niet-wiskundige contexten in wiskundeonderwijs' van het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde.

Over de auteur:

Rijkje Dekker heeft wiskunde gestudeerd aan de Universiteit van Amsterdam. Sinds 1982 werkt ze als onderzoeker bij het SVO-project 'Interne Differentiatie Wiskundeonderwijs 12-16' van de vakgroep Onderwijskunde te Utrecht.

Onlangs verscheen van dit project het tweede interimrapport:

R. Dekker, P. Herfs, J. Terwel, D. v.d. Ploeg, Interne differentiatie in heterogene brugklassen bij wiskunde, 's-Gravenhage: SVO-Selecta reeks, 1985.

Integraalrekening en $\mathbb{R}^*$

A.J.Th. Maassen

0 Uw besturen hebben het wijs geacht een tweede spreker hetzelfde onderwerp t.w. integraalrekening op andere wijze te doen belichten.

Contrastwerking kan verhelderen; daarom heb ik zelf een opponent meegebracht; die opponent zegt een klein beetje ervaring te hebben met integratie van functies die gedefinieerd zijn op (deelverzamelingen van) $\mathbb{Q}$, i.h.b. op zulke deelverzamelingen:

$\mathbb{Q} \cap$ (een of ander samenhangend deel van $\mathbb{R}$).

Mijn opponent en ik nemen t.a.v. de definitie van zoiets als

$$\int_a^b f \quad (:= \int_a^b f(x)dx := \int_a^b f(u)du)$$

hetzelfde standpunt in; ik formuleer die definitie even; een samenvatting van die -te deftige (?) - formulering vindt u in figuur 1.

Zeg: D is een of andere deelverzameling van $\mathbb{R}$ (resp., voor mijn opponent, van $\mathbb{Q}$) en f een functie naar $\mathbb{R}$ die D als domein heeft; neem aan dat a en b elementen zijn van D , dat a kleiner is dan b en dat $[a; b]$ bevat is in D (resp., voor mijn opponent, dat $[a; b] \cap \mathbb{Q}$ bevat is in D); bovendien dat f begrensd is op $[a; b]$ (resp. op $[a; b] \cap \mathbb{Q}$). Neem een strikt-stijgend deelrijtje van elementen van $[a; b]$ (resp. van $[a; b] \cap \mathbb{Q}$); zó:

$$d_0 = a < d_1 < d_2 < \dots < d_n = b.$$

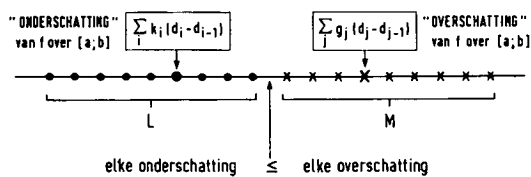
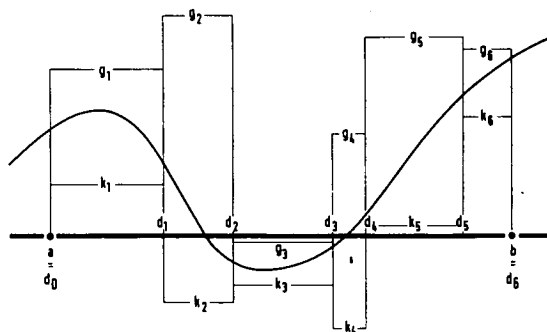
Laat $(k_1, k_2, \dots, k_n, g_1, g_2, \dots, g_n)$ een rijtje reële getallen zijn met de eigenschap:

voor elke $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ en elke $x \in [d_{i-1}; d_i] \cap D$:

$$k_i \leq f(x) \leq g_i; \text{ we zullen } \sum_{i=1}^n k_i(d_i - d_{i-1}) \text{ 'een on-}$$

derschatting van f over $[a; b]$ ' en $\sum_{i=1}^n g_i(d_i - d_{i-1})$ 'een overschatting van f over $[a; b]$ ' noemen.

f is een functie naar $\mathbb{R}$; het domein van f bevat $[a; b] \cap \mathbb{Q}$.



Preciés één getal "tussen" L en M ? ■ Ja? Dat noemen we dan: $\int_a^b f$

Figuur 1

* Voordracht, gehouden op de negende gemeenschappelijke studiedag van NVvW en VVWL, 24 maart 1983, te Breda.

(Moet ik nauwkeuriger zeggen wat we bedoelen met:

' λ is een onderschatting van f over $[a; b]$ '?

Zo ja, we bedoelen ermee dat er zo'n rijtje deelpunten $(d_0, \dots, d_n)$ en zo'n rijtje $(k_1, \dots, k_n, g_1, \dots, g_n)$ bestaan zó dat $\lambda = \sum_{i=1}^n k_i(d_i - d_{i-1})$.

We stoppen alle onderschattingen van f over $[a; b]$ in één pot: ' L ', en alle overschattingen van f over $[a; b]$ óók in één klasse: ' M '; er is dan ten minste één reëel getal z zó dat:

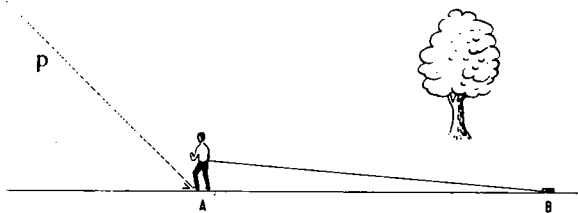
elk element van $L \leq z \leq$ elk element van M ;

als er precies één zo'n reëel getal z is dan zullen we dat 'de integraal van f over $[a; b]$ ' noemen; óók:

$$\int_a^b f.$$

Kenner van $\mathbb{R}$ weten niet alleen dat er zo'n reëel getal z bestaat, maar ook dat er precies één zo'n getal is als er bij elk positief reëel getal α een onderschatting λ en een overschatting μ zijn zó dat $\mu - \lambda < \alpha$.

1 Laten we het volgende probleem bekijken.



Figuur 2

Figuur 2 is een plaatje van een plein; in A staat een mannetje dat het ene uiteinde van een stuk touw in zijn hand houdt;

aan het andere uiteinde is een voorwerp vastgemaakt; dat voorwerp bevindt zich in B , rechts van dat mannetje.

Het touw is strak gespannen; p is een krijtstreep die in A begint; p maakt een rechte hoek met de halflijn AB .

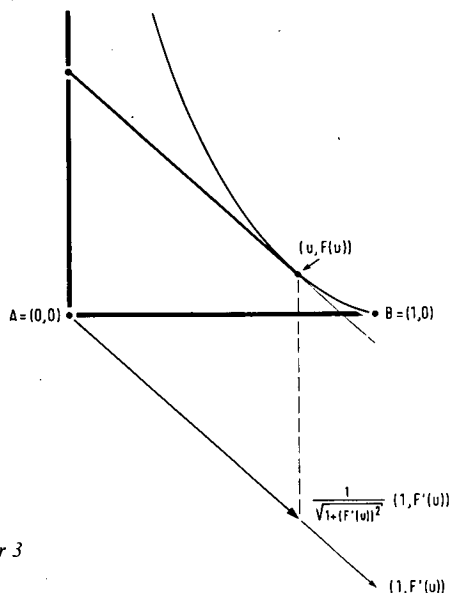
Dat mannetje gaat over die krijtstreep wandelen, het voorwerp aan het touw met zich mee trekkend.

Vraag: Wat is de baan van het voorwerp?

We idealiseren het probleem. Zeg: dat plein is een euclidisch vlak: ' V '; we laten mannetje en voorwerp ineenschrompelen tot punten; we coördineren V ; dat kunnen we op veel manieren doen; een doelmatige manier blijkt te zijn:

A is het punt $(0, 0)$; B is het punt $(1, 0)$; voor het punt $(0, 1)$ nemen we dat punt van p dat even ver van A ligt als B .

Laten we maar aannemen dat de baan van het voorwerp de grafiek is van een of andere differentieerbare functie met $\langle 0; 1 \rangle$ als domein (dat mannetje is onvermoeibaar en het plein oneindig groot).



Figuur 3

Zeg: die baan wordt beschreven door de kromme:

$$K: \langle 0; 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}: u \mapsto (u, F(u)).$$

Bedenk dat voor elke $u (\in \langle 0; 1 \rangle)$ geldt:

de lijn die het punt $(u, F(u))$ bevat en de richting heeft van de vector $(1, F'(u))$, is raaklijn van de kromme K .

Uit figuur 3 lees je af:

$$\text{Voor elke } u (\in \langle 0; 1 \rangle): u = \frac{1}{\sqrt{1 + (F'(u))^2}}; \text{ en dus:}$$

$$\text{voor elke } u (\in \langle 0; 1 \rangle): F'(u) = -\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1} \quad (\text{dat minteken zie je ook uit het plaatje}).$$

Probleem: Vind een primitieve van de functie:

$$f: \langle 0; 1] \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto -\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}.$$

Wij beschikken daarvoor wel over een paar techniekkjes; we zouden het bijvoorbeeld zó kunnen doen:

$$\int -\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1} du = \frac{1}{u} = \cosh(t);$$

$$u = \frac{1}{\cosh(t)}; du = \frac{-\sinh(t)}{(\cosh(t))^2} dt;$$

$$t = \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{u}\right) =$$

$$\ln\left(\frac{1}{u} + \sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}\right) = -\int -\left(\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}\right)^2 dt$$

$$= -\int \left(\frac{1}{(\cosh(t))^2} - 1\right) dt = -\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} + t$$

$$= -\frac{\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}}{\frac{1}{u}} + \ln\left(\frac{1}{u} + \sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}\right) =$$

$$-\sqrt{1 - u^2} + \ln\left(\frac{1}{u} + \sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}\right);$$

die – bijna magische – symbolencombinatie berust op de stelling:

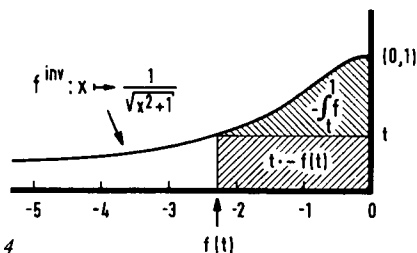
Als f en g differentieerbare functies zijn (op $\mathbb{R}$), g inverteerbaar is en g^{inv} differentieerbaar, en H een primitieve is van $(f \circ g) \cdot g'$,

Dan is $H \circ g^{\text{inv}}$ een primitieve van f .

Maar onze leerlingen kennen zo'n techniek niet; kunnen we met hen het probleem oplossen? Ja, en wel m.b.v. de integraalrekening. We moeten onze leerlingen wel tevoren even de functie $x \rightarrow \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ laten differentiëren; die functie voelt zich wel goed thuis in het lijstje van z.g. standaardprimitieven. We zoeken de inverse van f :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \langle 0; 1] & \xrightarrow{\text{Kw}} & \langle 0; 1] & \xrightarrow{\text{Omg}} & [1; \rightarrow) & \xrightarrow{-1} & [0; \rightarrow) & \xrightarrow{\sqrt{}} & [0; \rightarrow) & \xrightarrow{\text{Teg}} & \langle \leftarrow; 0] \\ f: & u & \mapsto & u^2 & \mapsto & \frac{1}{u^2} & \mapsto & \frac{1}{u^2} - 1 & \mapsto & \sqrt{\frac{1}{u^2} - 1} & \mapsto & -\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1} \\ f^{\text{inv}}: & \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} & \xrightarrow{\sqrt{}} & \frac{1}{x^2 + 1} & \xrightarrow{\text{Omg}} & x^2 + 1 & \xrightarrow{+1} & x^2 & \xrightarrow{\text{Kw}} & -x & \xrightarrow{\text{Teg}} & x; \end{array}$$

en van f^{inv} kennen we een primitieve! Te weten: $x \rightarrow \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. Hier is een grafiek van f^{inv} :



Figuur 4

Uit figuur 4 lezen we af:

$$\left(-\int_t^1 f\right) + \left(t \cdot (-f(t))\right) = \int_0^1 f^{\text{inv}}.$$

$$\text{Dus: } \int_1^t f = t \cdot f(t) - \int_0^{f(t)} f^{\text{inv}} = \dots =$$

$$-\sqrt{1 - t^2} - \ln\left(\frac{1}{t} - \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}\right).$$

Daarmee hebben we de gezochte F gevonden (immers: $F(1) = 0 = \int_1^1 f$!).

We hebben opmerkelijke dingen gedaan:

- we hebben een primitieve gevonden door een integraal uit te rekenen; dat is de gewone gang van zaken op zijn kop: onze leerlingen (trouwens wijzelf ook) plegen integralen uit te rekenen m.b.v. primitieven;
- we hebben een integraal uitgerekend m.b.v. oppervlakteberekening; is dat niet ook een omgekeerde weg?

Weggetjes met eenrichtingsverkeer eens in andere richting doorlopen is toch goede didactiek? Bovendien blijkt: visualiseren helpt écht (ook bij het oplossen van sommige problemen).

2 (De opponent neemt het woord.)

Zeker, die eenrichtingsverbinding wordt er een met twee richtingen: de schakel tussen integreren en primitiveren wordt versterkt.

Ik ga een knuppel in het hok gooien en een gewetensvraag stellen.

(Voor ik dat doe, stem ik in met de gegeven definitie van $\int_a^b f$; van belang is: f is een begrensde functie van (een deel van) $\mathbb{Q}$ naar $\mathbb{R}$; a en b zitten in het domein van f , dat domein bevat $[a; b] \cap \mathbb{Q}$; die deelpunten $d_0, \dots, d_n$ zijn rationaal. Wie vertrouwd is met Lebesgue-integratie, vindt deze integraaldefinitie voor functies op $\mathbb{Q}$ misschien wel gek; akkoord, maar je kunt het wel doen; laten we het even doen!)

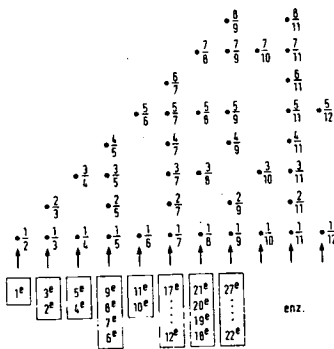
Hier zijn de knuppel en de (gewetens)vraag:

- de begrippen **primitiveren** en **integreren** zijn disjunct; ze hebben slechts een randpunt gemeen;
- is het goede didactiek twee begrippen die vrijwel niets met elkaar te maken hebben, zó sterk gebonden te presenteren?

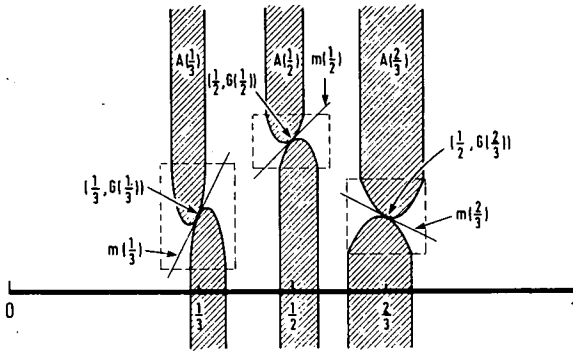
Geloof u mij niet?

Dan zal ik u een functie presenteren die **continu** is, zelfs **differentieerbaar**, waarvan de **afgeleide** de **nulfunctie** is, en die **niet-integreerbaar** is. Misschien maakt dat alleen nog niet voldoende indruk? Combineert u dit eens met de volgende Stelling: **Elke functie op $\mathbb{Q}$ is primitiveerbaar.**

Ik schets eerst een bewijs van die stelling (prof. van Rooij heeft die bedacht). U vindt het vast wel goed dat ik mij beperk tot rationale getallen tussen 0 en 1; laten we die aftellen:



de. Zó werken we alle rationale getallen tussen 0 en 1, op toerbeurt, af. De functie G (van $\langle 0; 1 \rangle \cap \mathbb{Q}$ naar $\mathbb{R}$) die we zo verkrijgen, heeft kennelijk als afgeleide: g . Zie figuur 7.

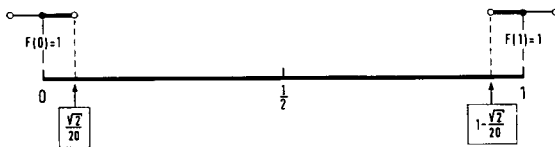


Figuur 7

Vervolgens de beloofde constructie van een functie die **differentieerbaar** is, als **afgeleide** de **nulfunctie** heeft en **niet-integreerbaar** (over zijn domein) is; het domein zal zijn $[0; 1] \cap \mathbb{Q}$ en het bereik: $\{1, 2\}$. Laten we die functie in-statu-nascendi, de naam 'F' geven.

We geven elk rationaal getal tussen 0 en 1 hetzelfde volgnummertje als zojuist.

We geven zowel 0 als 1 een parapluutje in handen: een parapluutje met hoogte 1 en halve breedte: $\frac{1}{20}\sqrt{2}$; zó:



Figuur 8

Met die beeldspraak bedoel ik de volgende afspraak:

Voor elke $x \in ([0; \frac{\sqrt{2}}{20}] \cup [1 - \frac{\sqrt{2}}{20}; 1]) \cap \mathbb{Q} : F(x) := 1$.

Door deze twee parapluutjes worden veel rationale getallen overdekt: dié hebben hiermee hun beurt gehad, zij treden uit de rij en vernietigen hun volgnummertje. We roepen nu het getal met het laagste ongeschonden volgnummertje op; dat is: $\frac{1}{2}$; we willen ook $\frac{1}{2}$ een parapluutje in handen geven; we moeten beslissen over de hoogte en de halve breedte daarvan; we zullen dat doen aan de hand van de volgende gedragslijn:

i wat de hoogte betreft:

het in behandeling zijnde getal (nú: $\frac{1}{2}$) heeft twee naaste burenen die al een parapluutje in handen hebben (voor $\frac{1}{2}$ zijn dat: 0 en 1);

We geven aan het parapluutje van het getal dat onder behandeling is dan en alleen dan de hoogte 2 als de parapluutjes van die twee burenen beide hoogte 1 hebben, in alle andere gevallen: hoogte 1.

ii Wat de halve breedte betreft:

noem het getal dat onder behandeling is: 'b'; we nemen het volgnummer van b: ' $N(b)$ '; we nemen de eerste coördinaat van het linkeruiteinde van het parapluutje van b's rechterbuur: 'L'; ook die van het rechteruiteinde van dat van b's linkerbuur: 'R';

de halve breedte van het parapluutje dat we b in handen geven, is het kleinste van de positieve(!) getallen:

$$2^{-N(b)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{20}; \frac{1}{2} \cdot (L - b); \frac{1}{2} \cdot (b - R).$$

Met: 'we geven b het parapluutje in handen met hoogte h en halve breedte r' bedoelen we: voor elke $x \in \langle b - r; b + r \rangle \cap \mathbb{Q} : F(x) := h$.

Telkens als we een parapluutje hebben opgericht, laten we alle rationale getallen (tussen 0 en 1) die erdoor worden overdekt, uit de rij treden en hun volgnummertje vernietigen.

Vervolgens roepen we het getal op met het laagste, ongeschonden volgnummertje en nemen dat in behandeling.

Ik teken een paar van die parapluutjes (zie figuur 9):

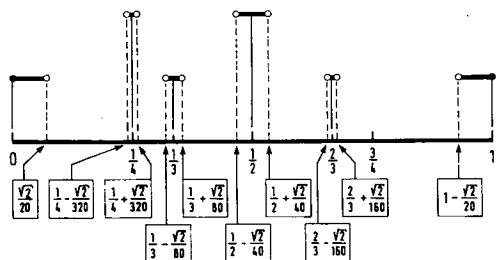
Zó wordt van elk rationaal getal (tussen 0 en 1) het F-beeld gedefinieerd.

Bedenk nu even dat elk parapluutje een irrationale halve breedte heeft, terwijl het midden ervan een

rationale eerste coördinaat heeft; elk rationaal getal tussen 0 en 1 heeft dus een open omgeving I zó dat de restrictie van F tot $I \cap \mathbb{Q}$ een constante functie is;

bovendien: F heeft, zowel te 0 als te 1, als eenzijdige afgeleide: 0;

dus: F is differentieerbaar en heeft de nulfunctie als afgeleide.



Figuur 9

Bedenk vervolgens dat er niet twee parapluutjes zijn met een gemeenschappelijk uiteinde, en dat tussen elke twee parapluutjes met dezelfde hoogte zich een parapluutje met andere hoogte bevindt.

Laat nu $((d_0 :=) 0, d_1, d_2, \dots, d_{n-2}, d_{n-1}, (d_n :=) 1)$ een strikt-stijgend rijtje zijn van (rationale) deelpunten van $[0; 1] \cap \mathbb{Q}$; maak de z.g. ondersom en bovensom op van F die bij die verdeling behoren; alleen die deelsegmenten hebben een bijdrage 0 tot het verschil van die boven- en die ondersom die ieder geheel overdekt worden door precies één parapluutje: elk ander heeft een bijdrage tot dat verschil die gelijk is aan zijn eigen lengte.

Nu is de som van de lengten van die segmenten die ieder door één parapluutje worden overdekt, op z'n hoogst de som van de breedten van alle parapluutjes, en die is op z'n hoogst $\frac{\sqrt{2}}{10} : (1 - \frac{1}{2})$, dus minder

dan $\frac{1}{2}$; het verschil tussen die boven- en die ondersom is dus meer dan $\frac{1}{2}$.

F is dus niet integreerbaar. $\square$

Ziet u wel: wat hebben primitiveren en integreren nu met elkaar te maken? Toegegeven: niet helemaal niks; ze hebben een raakpunt in de volgende, bekende stelling.

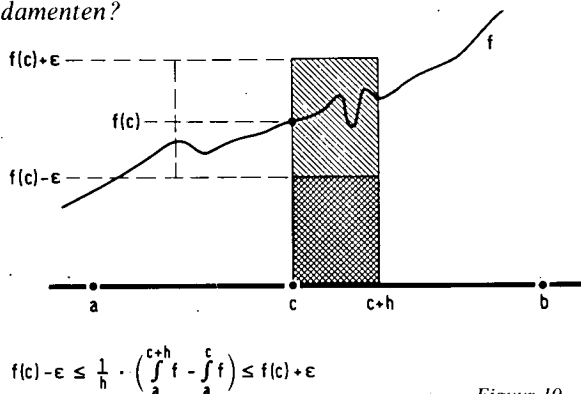
Als f integreerbaar is over $[a; b]$ en continu in $c (\in \langle a; b \rangle)$ dan is f integreerbaar over elk deelsegment van $[a; b]$ en

de functie $x \mapsto \int_a^x f$ is differentieerbaar te c en heeft te c als afgeleide: $f(c)$.

Waarom kunt u wél integralen berekenen m.b.v. primitiveren? Dat berust op het volgende wonderlijke feit:

Elke twee functies die hetzelfde samenhangende deel S van $\mathbb{R}$ als domein hebben, differentieerbaar zijn en bovendien dezelfde afgeleide hebben, verschillen een constante functie op S .

Vergis ik mij als ik meen dat wie de integraalrekening geheel baseert op primitiveringsrekening, het wonderlijke als vanzelfsprekend voorstelt en eenvoudige zaken laat steunen op moeilijke, relatief diepe fundamente?



Figuur 10

3 Wat mijn opponent te berde brengt, klinkt als verstandige taal. Maar zit daarmee bijvoorbeeld die definitie

(voor een continue f die F als primitieve heeft):

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

in de beklaagdenbank?

Dat wonderlijke feit mag een wonder zijn: het wonder geschiedt. En heeft de beklaagde niet serieuze verdedigers?

Kuratowski gebruikt die definitie in zijn *Introduction to Calculus* (1961) en is dat niet een prachtig boek? Trouwens deed Newton het niet zelf ook? Het is waar: Kuratowski moet wel moeilijke dingen doen om te bewijzen dat elke continue functie (op een segment) een primitieve heeft; maar zoiets is voor de school niet nodig ... of misschien toch? Hoe staat het met de constructie van de functie $\ln$ (op $\mathbb{R}^+$)?

Ik formuleer twee vragen, één aan onszelf, de tweede aan onze opponent.

- Hoe moeilijk zijn eigenlijk die moeilijke dingen, en wat zou de gemakkelijkste weg zijn die wij kunnen bedenken en waarlangs wij onze leerlingen door de moeilijkheden heen kunnen loodsen, zonder die moeilijkheden te verbergen?
- Wat zou onze opponent doen als hij aan onze leerlingen integraalrekening zou moeten onderwijzen?

4 (De opponent aan het woord.)

Laat ik in het kort mijn antwoord op die tweede vraag schetsen.

(Een paar uitgewerkte voorbeelden vindt u in paragraaf 6.)

- 4a Samen met uw leerlingen zou ik zulke dingen gaan berekenen.

$$\int_0^A (\text{Kwadraat}) (= \frac{1}{3}A^3);$$

$$\int_0^A (\text{Derde macht}) (= \frac{1}{4}A^4); \dots$$

(voor een of ander positief getal A).

We zouden dat doen met elementair-algebraïsche middelen (limieten zouden er niet aan te pas komen): een rij onderschattingen en een rij overschattingen van de functie Kwadraat over $[0; A]$ zó dat $\frac{1}{3}A^3$ het enige getal is tussen elke van die onder- en elke van die overschattingen. Ik zou het doen zolang ik uw leerlingen daartoe kan motiveren en de tijdsbesteding verantwoord vind; ik zou blij zijn met de volgende reactie:

'ik snap dat ik zo kan doorgaan; maar u verwacht toch niet dat ik het doe?'

- 4b Vervolgens zou ik – weer met behulp van uitsluitend elementair-algebraïsche middelen; ik zeg niet: met uitsluitend gemakkelijke middelen – samen

met hen uitrekenen (voor een positief getal A):

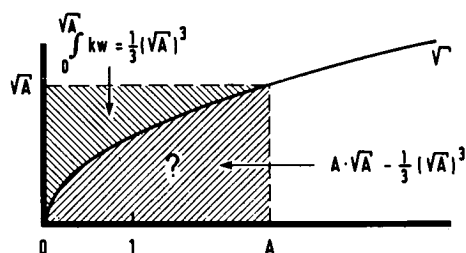
$$\int_1^{A+1} \frac{dx}{x^2}; \int_1^{A+1} \frac{dx}{x^3}; \dots$$

Ik verwacht zo'n reactie (ik zou die direct accepteren):

'ik wil wel geloven dat het met al die volgende ook lukt; maar u snapt toch wel dat ik geen zin heb om het te dóen?'

- 4c Ik zou ook – nu met behulp van plaatjes – met hen uitrekenen:

$$\int_0^A \sqrt{x}; \int_0^A \sqrt[3]{x}; \dots$$



Figuur 11

- 4d En tenslotte ook nog: $\int_0^A \sin(A \in [0; \frac{1}{2}\pi])$; en dat weer met een rij onder- en een rij overschattingen; limieten zullen hieraan wel te pas komen.

Ik verwacht zulke reacties:

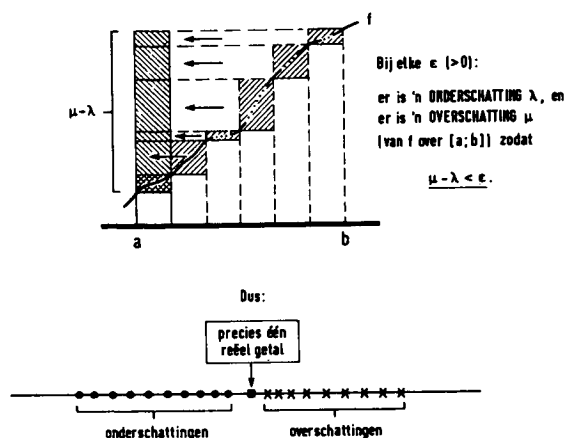
- i 'Waarom doen we $\int_1^A \frac{dx}{x}$ niet, mijnheer?'
- ii 'We nemen in het laatste geval die A tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$; gaat het niet als A groter is dan $\frac{1}{2}\pi$?''
- iii 'Zó kan een mens toch niet aan de gang blijven: zijn er geen andere manieren om de oppervlakte van zulke vlakstukken uit te rekenen?'

- Ad i Een mooie gelegenheid om, samen met uw leerlingen, te gokken op de existentie van de functie I (op $\mathbb{Q}^+$ of $\mathbb{R}$): $x \rightarrow \int_1^x$ (Omgekeerde); aangenomen dat die functie I bestaat: die I heeft de eigenschappen van een logaritme:

$I(y \cdot z) = I(y) + I(z)$ (enz.). We zouden dat bewijzen m.b.v. onder- en overschattingen.

Ad i en ii 'Elke functie die monotoon is op een segment S heeft een integraal over S !'

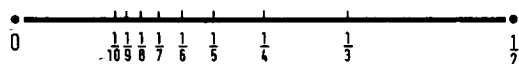
'Kijk maar naar figuur 12'.



Figuur 12

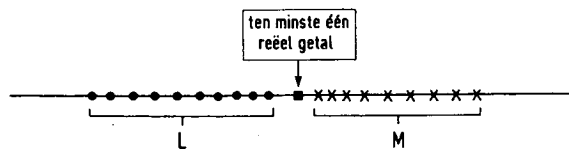
'Noemen jullie mij maar een of ander heel klein positief getal; ik zal jullie een onder- en een overschatting van die functie aanwijzen die minder dan dat kleine positieve getal verschillen'.

Vervolgens zou ik – voor het eerst in de lessen over integraalrekening, en met veel nadruk – een beroep doen op de volgende eigenschap (!) van zowel $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{R}$, en die ene heel bijzondere eigenschap (!!)



Figuur 13

(!) Bij elk positief getal α is er een natuurlijk getal n zó dat $\frac{1}{n} \leq \alpha$.



Figuur 14

(!!) ALS L en M niet-lege deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}$ zó dat voor elke $x (\in L)$ en elke $y (\in M)$: $x \leq y$,

DAN is er ten minste één $z (\in \mathbb{R})$ zó dat voor elke $x (\in L)$ en elke $y (\in M)$: $x \leq z \leq y$.

(Die twee eigenschappen kunnen worden gevisualiseerd m.b.v. de alom bekende getallenlijn; die visualisering is niet triviaal: er ligt een goede voorstelling aan ten grondslag van wat met 'een lijn' wordt bedoeld; wie (!) en (!!)

ooit met zijn leerlingen wil gebruiken, doet er vast en zeker goed aan, daar bij elke geschikte gelegenheid woorden aan te wijden.)

'De gok op de existentie van die functie I (onder i) was dus terecht'.

Ad iii 'Ja! zulke algoritmen zijn er; als algoritmen zijn ze zelfs heel gemakkelijk. Maar zij steunen op moeilijke dingen die afgeleid kunnen worden uit de zojuist vermelde eigenschappen (!) en (!!).

Zullen we daaraan even aandacht schenken? Zet je schrap.'

(Ik zou dan – op mijn manier – een antwoord geven op de vraag die u zojuist aan uzelf hebt gesteld. Hier en nu doe ik er het zwijgen toe en zal met aandacht naar uw antwoord op die vraag luisteren.)

5 Bedankt!

Hoe zouden wij – ons met onze leerlingen bevindende op het punt dat onze opponent zojuist heeft geschetst – verder kunnen gaan? Hoe kunnen we aan hen dat eerder genoemde wonderlijke feit uitleggen?

(In 'Euclides' is daarover meer dan eens geschreven (o.a. in 1973/1974: 'Een fundamentele stelling van de Analyse', door A. Maassen, en in 1982/1983: 'Differentiëren zonder Middelwaardestelling', door J.v.d.Craats: die twee auteurs waren het eens. Het volgende is een vereenvoudiging van wat in die twee artikelen betoogd is.)

Laten we (!) en (!!)

als uitgangspunt nemen. Met Stelling A en Stelling B treden we in het hart van het probleem; wanneer we die bewezen hebben, zijn de moeilijkheden opgelost.

Stelling A:

ALS f een **continue** functie is en $[a; b] \subset \text{Dom}(f)$ en $f(a) < 0 < f(b)$,

DAN is er een reëel getal c zó dat

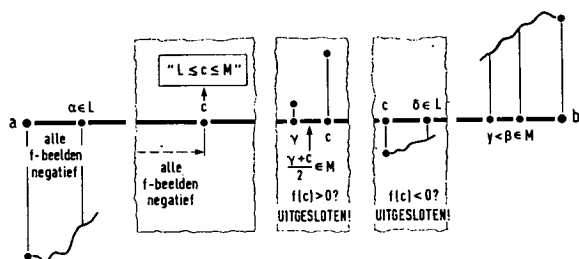
- (i) $a < c < b$ en $f(c) = 0$, en voor elke $x \in [a; c)$: $f(x) < 0$;
 (ii) als f differentieerbaar is te c , dan $f'(c) \geq 0$.

Bewijs:

Zeg: $L := \{\lambda \in \langle a; b \rangle \mid \text{voor elke } x \in [a; \lambda]: f(x) < 0\}$;

en: $M := \{\mu \in \langle a; b \rangle \mid \text{er is } y \in [a; \mu]: f(y) \geq 0\}$.

Omdat f continu is in a , is L niet de lege verzameling; en: $M \neq \emptyset$, omdat f continu is in b . Klaarblijkelijk geldt voor elke $\lambda \in L$ en elke $\mu \in M$: $\lambda < \mu$. Gebruik nu (!): laat c een getal zijn zó dat voor elke $(\lambda, \mu) \in L \times M$: $\lambda \leq c \leq \mu$.



Figuur 15

Merk nu eerst even op: Voor elke $x \in [a; c)$: $f(x) < 0$; immers: als $a \leq \gamma < c$ en $f(\gamma) \geq 0$, dan: $\frac{1}{2}(\gamma + c) \in M$ en $\frac{1}{2}(\gamma + c) < c$; en dat laatste kan niet waar zijn.

Kan $f(c)$ een negatief getal zijn? Als $f(c) < 0$, dan is er een $\delta \in \langle c; b \rangle$ zó dat voor elke $x \in [c, \delta)$: $f(x) < 0$; zo'n δ zou dan element zijn van L en ook groter dan c ; en dat kan niet.

Kan $f(c)$ een positief getal zijn? Als $f(c) > 0$, dan is er een $\varepsilon \in \langle a; c \rangle$ zó dat $f(\varepsilon) > 0$ en $c > \frac{1}{2}(\varepsilon + c) \in M$; dat kan dus ook niet.

Dus: $f(c) = 0$. Neem nu aan dat f in c differentieerbaar is, dan:

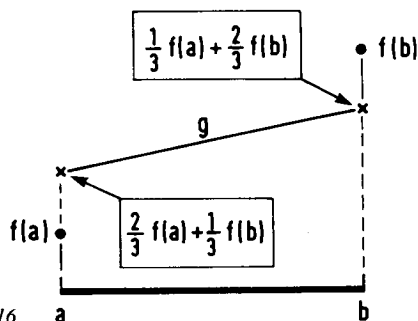
$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \uparrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \text{ omdat voor elke } x \in [a; c): \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0. \quad \square$$

Stelling B is een directe toepassing van Stelling A.

Stelling B:

ALS f een **continue** functie is en $[a; b] \subset \text{Dom}(f)$ en f **differentieerbaar** is op $\langle a; b \rangle$,

DAN $f(a) < f(b) \Rightarrow$ er is $x \in \langle a; b \rangle : f'(x) > 0$ en $f(a) > f(b) \Rightarrow$ er is $x \in \langle a; b \rangle : f'(x) < 0$.



Figuur 16

Bewijs:

Neem aan: $f(a) < f(b)$.

Laat g de eerstegraadsfunctie zijn waarvoor geldt:

$$g(a) = \frac{2}{3} \cdot f(a) + \frac{1}{3} \cdot f(b) \text{ en} \\ g(b) = \frac{1}{3} \cdot f(a) + \frac{2}{3} \cdot f(b).$$

Pas nu stelling A toe op $f - g$ en bedenk daarbij dat voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: $g'(x) > 0$. $\square$

Nu volgt direct dat eerdergenoemde wonderlijke feit:

Stelling C:

ALS $H : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie is die **differentieerbaar** is op $\langle a; b \rangle$ zó dat voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: $H'(x) = 0$,

DAN is H een **constante** functie

(en dus verschillen twee functies die op een samenhangend deel S van $\mathbb{R}$ dezelfde afgeleide hebben, op S een constante functie).

Bewijs: Kies maar twee elementen van $\langle a; b \rangle$: ' p ', ' q '; zowel ' $f(p) < f(q)$ ' als ' $f(p) > f(q)$ ' is in conflict met stelling B. $\square$

Bij het bepalen van (lokale) **extremen** – op de manier die in het voortgezet onderwijs gebruikelijk is – is stelling D van belang, die niet veel meer is dan een directe toepassing van Stelling B:

Stelling D:

ALS $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ een **continue** en, op $\langle a; b \rangle$, **differentieerbare** functie is

DAN: (voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: $f'(x) \geq 0$) $\Rightarrow f$ is stijgend,

en: (voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: $f'(x) \leq 0$) $\Rightarrow f$ is dalend,

en: (voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: $f'(x) > 0$) $\Rightarrow f$ is strikt-stijgend,

en: (voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: $f'(x) < 0$) $\Rightarrow f$ is strikt-dalend.

De laatste twee delen van Stelling D behoeven misschien een toelichting:

Kies weer twee elementen van $\langle a; b \rangle$: 'p', 'q'; zeg: $p < q$.

Omdat $f'\left(\frac{p+q}{2}\right) > 0$, zijn er getallen — 'r', 's' — zó dat:

$$p < r < \frac{p+q}{2} < s < q \text{ en } f(r) < f\left(\frac{p+q}{2}\right) < f(s);$$

pas tenslotte het eerste deel van Stelling D toe op zowel $[a; \frac{1}{2}(p+q)]$ als op $[\frac{1}{2}(p+q); b]$; je vindt:

$$f(p) \leq f(r) < f(s) \leq f(q). \quad \square$$

Gewoonlijk wordt 'het wonder' bewezen met de z.g. Stelling van het gemiddelde ('Mittelwertsatz'); blijkbaar is die beroemde stelling, althans de zwakke vorm ervan, een corollarium (een 'kransje', 'toegift') van Stelling D; met 'de zwakke vorm ervan' bedoel ik:

Stelling E:

ALS $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ een **continue** functie is die **differentieerbaar** is op $\langle a; b \rangle$ zó dat voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: $m < f'(x) < M$,

DAN: $m \cdot (b-a) < f(b) - f(a) < M \cdot (b-a)$.

(NB. I.p.v. (viermaal) '<' mag u ook lezen (viermaal): ' $\leq$ '.)

Zeg: $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto m(x-a) + f(a)$,

en: $h: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto M(x-a) + f(a)$.

Pas stelling D toe op $f - g$, en ook op $f - h$. $\square$

Tenslotte de stelling waarom het allemaal begonnen was:

Stelling F:

ALS $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ **integreerbaar** is over $[a; b]$

(bijvoorbeeld omdat f **monotoon** is, of **som** is van **monotone** functies, of — als u dat liever hoort — **stuksgewijs monotoon** is),

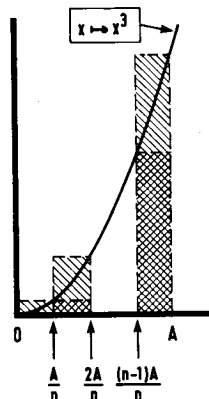
en **continu** is, en $F: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ als **primitieve** heeft,

$$\text{DAN: } \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

(Immers: dan zijn F en $x \mapsto \int_a^x f$ beide een primitieve van f , en die twee functies verschillen dan een constante functie.)

6 Hier komen de voorbeelden die onze opponent in paragraaf 4 heeft beloofd.

6.1 Berekening van $\int_0^A x^3 dx$ (voor een positief getal A).



Figuur 17

We maken — door verdeling van het segment $[0; A]$ in n ($n \in \mathbb{N}$) congruente delen — een rij overschattingen en een rij onderschattingen:

de n^e onderschatting is:

$$\frac{A^4}{n^4} (1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3);$$

de n^e overschatting is:

$$\frac{A^4}{n^4} (1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3).$$

Bijvoorbeeld uit 'Mathematical discovery' van

G. Polya kun je leren hoe zulke sommen: $\sum_{i=1}^n i^2$,

$\sum_{i=1}^n i^3$, $\sum_{i=1}^n i^4$, $\sum_{i=1}^n i^5$, ... te berekenen.

$$\begin{aligned}2^3 &= (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\3^3 &= (2+1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\4^3 &= (3+1)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\5^3 &= (4+1)^3 = 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1\end{aligned}$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

$$\text{Dus: } \sum_{i=2}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^n i^3 + 3 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \cdot \sum_{i=1}^n i + n;$$

$$\text{dus: } (n+1)^3 - 1 - 3 \cdot \sum_{i=1}^n i - n = 3 \cdot \sum_{i=1}^n i^2;$$

$$\text{dus: } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

en:

$$\begin{aligned}2^4 &= (1+1)^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \\3^4 &= (2+1)^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\4^4 &= (3+1)^4 = 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1\end{aligned}$$

$$(n+1)^4 = n^4 + 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1$$

Dus:

$$(n+1)^4 - 1 - 6 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 - 4 \cdot \sum_{i=1}^n i - n =$$

$$4 \cdot \sum_{i=1}^n i^3,$$

$$\text{je vindt: } \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2.$$

enz.

Dus: die n^e onderschatting van $x \mapsto x^3$ over $[0; A]$

$$\text{is: } \frac{1}{4}A^4 \cdot \left(1 - \frac{2n-1}{n^2}\right),$$

die n^e overschatting van $x \mapsto x^3$ over $[0; A]$ is:

$$\frac{1}{4}A^4 \cdot \left(1 + \frac{2n+1}{n^2}\right).$$

Duidelijk is dat $\frac{1}{4}A^4$ tussen elke van die onderschattingen en elke van die overschattingen ligt, en dat $\frac{1}{4}A^4$ het enige getal is dat dat doet.

6.2 Berekening van $\int_1^{P+1} \frac{dx}{x^2}$ (voor een positief getal P).

We verdelen het segment $[1; P+1]$ telkens in $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ even grote stukken.

Daarbij hoort de n^e onderschatting: $\sum_{k=1}^n \frac{P \cdot n}{(n+kP)^2}$

en de n^e overschatting: $\frac{P}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P \cdot n}{(n+kP)^2}$.

Merk op:

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} \left(\frac{1}{n+kP} - \frac{1}{n+(k+1)P} \right) &= \\ \frac{1}{(n+kP)(n+(k+1)P)} &\leq \frac{1}{(n+kP)^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{(n+(k-1)P)(n+kP)} = \\ &= \frac{1}{P} \cdot \left(\frac{1}{n+(k-1)P} - \frac{1}{n+kP} \right).\end{aligned}$$

Sommerend over k vinden we (voor elke $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$):

$$Pn \cdot \frac{1}{P} \left(\frac{1}{n+P} - \frac{1}{n+(n+1)P} \right) \leq n^e \text{ onderschatting en } n^e \text{ overschatting}$$

$$\leq \frac{P}{n} + P \cdot n \cdot \frac{1}{P} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+(n-1)P} \right)$$

$$\text{en dus: } \frac{1}{1 + \frac{P}{n}} - \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)P} \leq n^e \text{ onderschatting en}$$

$$n^e \text{ overschatting} \leq \frac{P}{n} + 1 - \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)P};$$

$$\text{dus a fortiori: } 1 - \frac{P}{n} - \frac{1}{1+P} \leq n^e \text{ onderschatting}$$

en

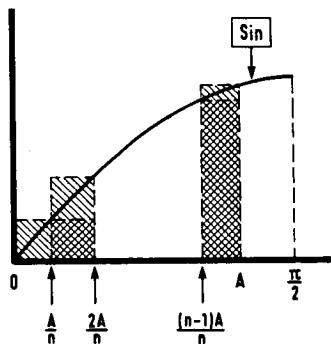
$$n^e \text{ overschatting} \leq \frac{P}{n} + 1 - \frac{1}{1+P}.$$

Dus: elke onderschatting $\leq 1 - \frac{1}{P+1} \leq$ elke overschatting

en: $1 - \frac{1}{P+1}$ is het enige getal x waarvoor geldt: voor iedere

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}: 1 - \frac{1}{P+1} - \frac{P}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{P+1} + \frac{P}{n}.$$

(Zeker, hier maken we gebruik van (!).)



Figuur 18

6.3

We verdelen weer $[0; A]$ (voor een of andere A , element van $[0; \frac{\pi}{2}]$) telkens in $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ congruente delen.

De n^e onderschatting

$$= \frac{A}{n} \cdot \left(\sin \frac{A}{n} + \sin \frac{2A}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)A}{n} \right) \text{ en}$$

de n^e overschatting

$$= \frac{A}{n} \left(\sin \frac{A}{n} + \sin \frac{2A}{n} + \dots + \sin \frac{nA}{n} \right).$$

$$\text{Merk op: } \sin \frac{A}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)A}{n} =$$

$$\begin{aligned} & \left(2 \sin \frac{A}{n} \cdot \sin \frac{A}{2n} + \right. \\ & + 2 \sin \frac{2A}{n} \cdot \sin \frac{A}{2n} + \dots + \\ & \left. + 2 \sin \frac{(n-1)A}{n} \cdot \sin \frac{A}{2n} \right) : 2 \sin \frac{A}{2n} = \\ & = \frac{\cos \frac{A}{2n} - \cos \frac{(2n-1)A}{2n}}{2 \sin \frac{A}{2n}}. \end{aligned}$$

$$\text{Dus: } \lim_{n \rightarrow \infty} (n^e \text{ onderschatting}) = 1 - \cos A =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^e \text{ overschatting}).$$

Mededelingen

Jaarvergadering van de VVWL 22 februari 1986

De jaarvergadering van de VVWL vindt plaats op zaterdag 22 februari 1986 op de campus van het Hoger Instituut der Kempen (adres: Klein Hoefstraat, 2440 Geel), auditorium 1.

Agenda

Vanaf 9.30 u.: ontvangst

10.00 u.: opening door voorzitter Frank Laforce

10.05 u.: aanduiding van de kascommissie

10.10 u.: Roger Wilrycx (HORITO Turnhout), *Vergelijkingen en ongelijkheden in het secundair onderwijs*

11.20 u.: keuze tussen

Jos De Schryver (BME Gent), *De grondslagen van de hedendaagse wiskunde*

en

Romain Pelsmaekers (bestuurslid), *Definities in het lager secundair onderwijs*

12.45 u.: lunch

14.30 u.: Wilfried Van Hirtum (Sint-Vincentiusinstituut Westerlo), *Limieten, blikopeners naar het onbereikbare* (tot 15.40 u.)

15.45 u.: Statutaire Algemene Vergadering van de VVWL

1. opening

2. jaarverslagen

3. verslag van de kascommissie en decharge van de penningmeester

4. bestuursverkiezing

5. rondvraag

6. sluiting

Wie aan de gemeenschappelijke lunch deel wil nemen, wordt verzocht zich tijdig, en in elk geval voor 10 februari a.s., aan te melden door overschrijving van 270 fr. op postrekening 000-1116247-68 van de VVWL, Hoge Aardstraat 44, 2610 Wilrijk, onder vermelding 'lunch 22 februari'.

Mededeling aan de treinreizigers. Geel ligt aan de spoorlijnen Antwerpen-Neerpelt en Mechelen-Neerpelt. Aankomst in Geel om 9.51 u. (als u uit het westen komt) en 9.52 u. (als u uit het oosten komt).

Als u met de wagen naar deze jaarvergadering komt, verlaat u de autoweg langs de afslag Geel-West, u rijdt naar het centrum, daar volgt u de ringlaan richting Turnhout tot aan het Hoger Instituut der Kempen.

Een olifant op zijn tenen getrapt*

Hans Aalmoes

Nu eindelijk Schagen op de kabel is aangesloten, kunnen wij ook in dit stukje Nederland genieten van een uitgebreid televisie-aanbod. Geen trammelant meer met een antenne op het dak in allerlei krampachtige pogingen om vanwege de uitzonderlijke ligging nog IJsland te ontvangen. Nee, er is nu een legale ontvangst van alle Duitslanden, België en in haar ongeremde enthousiasme is onze gemeente zover gegaan dat we zelfs via de satelliet kunnen afstemmen op Moskou. Alvorens de televisie uit te zetten ga je natuurlijk eerst nog even alle kanalen langs en zo raakten we verzeild in het Russisch staatscircus. Daar zagen we een olifant een akrobatenummer uitvoeren op een evenwichtsbalk. En als ik nu dit artikel had geschreven voor het blad *Archimedes*, dan lag hier een prachtig stukje natuurkunde verpakt in het 'dagelijks leven': Hoe dik moet de evenwichtsbalk zijn om de olifant te houden, desnoods na het uitvoeren van een salto.

Maar bij ons thuis ging het een andere kant uit: 'Er is nauwelijks ruimte om zijn poot neer te zetten' zei mijn zoontje. 'Straks gaat hij nog op zijn eigen poot staan', vervolgde zijn jongere broertje, die zich al op een amusante finale verheugde. Mijn oudste zoon wilde tenslotte enige structuur in de discussie brengen:

'De kans dat die olifant op zijn tenen gaat staan is wel een stukkie groter dan bij ons'.

Of men nu op een bevestiging van mij wachtte of dat mijn kinderen ademloos verder keken en in het geheel niet in wat voor reactie dan ook geïnteresseerd waren, ik weet het niet, maar het werd opmerkelijk stil. De olifant kwam weer heelhuids op zijn vier pootjes terecht en de televisie ging nu echt uit. Ik zei dus ook niets. Ik zat er helemaal niet mee. Integendeel een gevoel van vreugde en inspiratie ging door mij heen. Want als je, gestimuleerd door allerlei akties voor zingeving van het wiskunde-onderwijs en het vinden van de maatschappelijke relevantie van wiskunde je wezenloos zit te zoeken naar contexten, dan mag je je met die olifant gelukkig prijzen.

Eén van de volgende dagen legde ik, na een inleiding over het bewuste circusnummer, dit probleem voor aan mijn 6 vwo klas:

- Hoeveel groter is de kans dat een olifant op zijn eigen tenen gaat staan dan een mens?

Niet zo zeer om mijn leerlingen tot het uiterste te doen gaan in het vertonen van hun kunsten in de combinatoriek, maar ik was benieuwd hoe leerlingen tegen deze context aankeken, wat voor wiskunde zij er uit zouden halen en nog belangrijker wat voor andere zaken aan het licht zouden komen.

Nu had ik van te voren al rekening gehouden met allerlei opmerkingen en vragen variërend van serieus tot lolbroekerij zoals de volgende bloemlezing aangeeft:

- Staat die olifant op de evenwichtsbalk of op de grond?
- Kan een olifant ook met een voorpoot op een achterpoot staan?
- Wat is het voor een olifant? (Want onnozelheid wordt altijd wel gewaardeerd door medeleerlingen.)
- Doet zijn slurf ook mee?

Daar had ik me dus op voorbereid. Ik zou ook wel raad weten met het onderscheid tussen tenen en voeten. Daar waar de omgangstaal al te letterlijk wordt gebruikt zal het de werkelijke bedoelingen blokkeren. Bij contexten moet je de leerlingen leren de kern eruit te halen door het probleem te verschraken en de vraagstelling na wat filosoferen over het 'meest voor de hand liggende' te verduidelijken.

* N.a.v. een lezing tijdens de conferentie over Niet-wiskundige contexten in wiskunde-onderwijs van het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde.

Maar het aardige van een klas is, dat je ook al weet dat er opmerkingen gemaakt worden die je niet van te voren hebt ingeschat.

Dat is niet erg. Je weet dat het komt. Inderdaad, al heel gauw kwam de mededeling: 'die kans is 0, want een olifant heeft geen tenen'. Er was natuurlijk enig verzet, mede veroorzaakt door de voor een 6 vwo wat provocerende context, zoals de jongen die er integralen en een sinus bij ging halen. Toch ging een groot gedeelte van de klas aan de slag met dit gekke probleem want het was totaal iets anders dan het combineren van allerlei mogelijke dansparen uit een tiental echtparen. Een jongen kwam met de volgende oplossing: 'Daar de olifant naar mijn mening geen tenen bezit welke duidelijk, zoals bij de mens uitsteken zal de kans nihil zijn dat hij op zijn eigen tenen stapt. Zou dit echter wel zo zijn dan zou hij toch al niet met zijn achtertenen op zijn voortenen staan en andersom.'

Dus hij kan alleen:

- voor op voor, dat is twee keer
- achter op achter, dat is ook twee keer,
- en bij een mens is het alleen
- voet op voet, twee keer.

Dus, niet rekening houdend met het oppervlak van de tenen is de kans twee keer groter.'

Die tenen bleken mij toch dwars te zitten. Zo schreef een ander: 'Een olifant heeft vier tenen, een mens heeft vijf tenen. Dus een olifant heeft 0,8 minder kans. Maar een olifant heeft vier voeten en dat is twee keer zo veel als een mens, dus wordt het $(0,8)^2$ minder kans. Maar dat moet dan met twee vermenigvuldigd worden, dus is er 1,28 keer zoveel kans.'

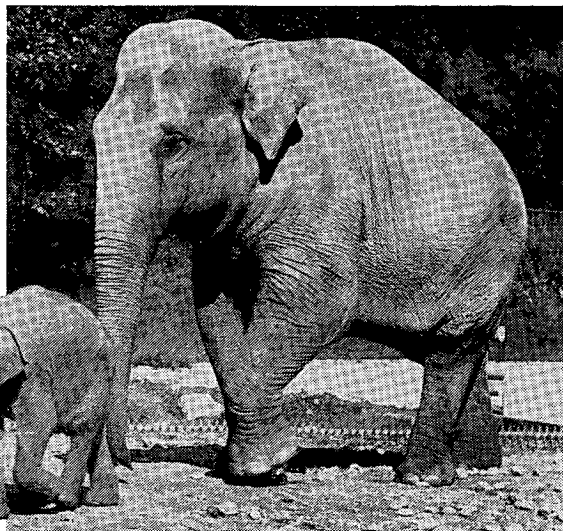
Natuurlijk waren er ook oplossingen die mijn richting ingingen:

olifant:	A	B	voor A	3 mogelijkheden
			voor B	3 mogelijkheden
	C	D	voor C	3 mogelijkheden
			voor D	3 mogelijkheden
				—
in totaal				12 mogelijkheden

mens:	A	voor A	1 mogelijkheid
	B	voor B	1 mogelijkheid
			—
in totaal			2 mogelijkheden

Dus een olifant heeft 6 keer zoveel kans. En soms werden er nog volledige olifantspoten getekend.

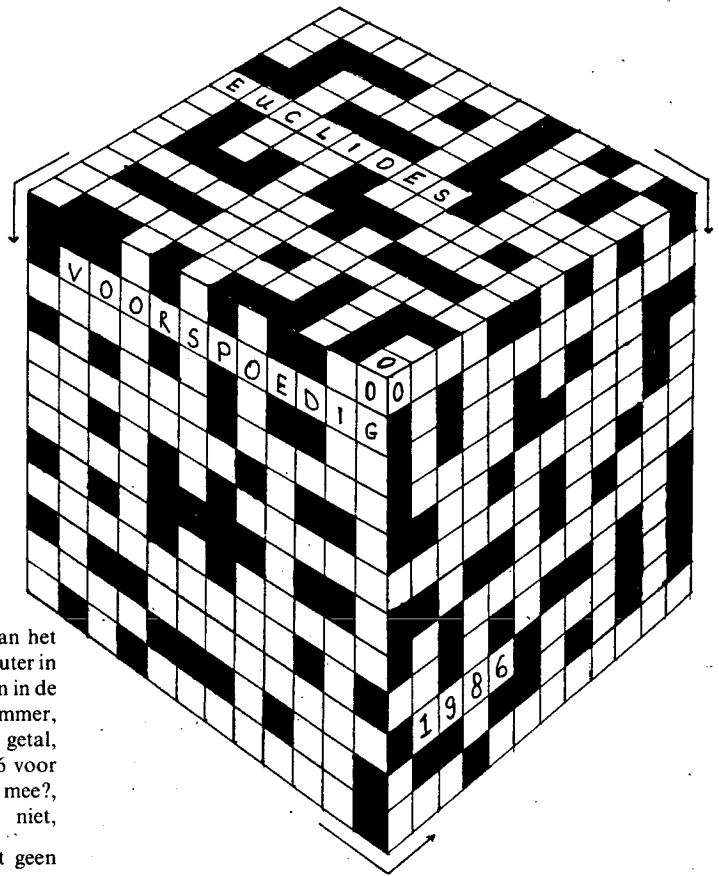
Was dit nu onzin, heb ik mijn leerlingen in de maling genomen en zij, op hun beurt, weer mij? Het doet er allemaal niet toe. Er zit wel degelijk ernst in. In de eerste plaats het zoeken naar contexten, maar



waar het me bij dit olifantsprobleem in de klas echt om ging was het nagaan van allerlei te verwachten vragen en wat er dan verder nog uit je leerlingen komt. En dat is voor contextrijke leerstof heel belangrijk. In het dagelijks leven zijn tal van problemen om wiskunde verpakt. Dat moet je benutten, maar daarbij dien je goed te beseffen of bepaalde vereenvoudigingen of aannamen voor kinderen realistisch genoeg zijn. Tenminste als je naar de wiskundige technieken toe wil en niet in discussies wil blijven verzanden.

Ik ben gek op wiskunde A en op contextrijke wiskunde in de onderbouw, echter met de waarschuwing: maak van een mug geen olifant.

Cryptokubus



019 verminkte onderdaan,
 024 auto-onderdeel, 028 bv. 7 of 13,
 034 vierhoekig raam, 035 overdreven
 verzameling, 042 van slag geraakte computertaal
 in de disco, 043 genoten? 048 vorig jaar, -
 048 onomstotelijk afgebeeld, 052 gij Brutus?,
 0512 <, >,
 065 plannen van Ginjaar Maas?, 065 deze versiering kan het
 diertje niet waarderen, 0710 convex, 0710 houdt de computer in
 toom, 084 groen en stil, 084 slag, 086 christendemocraten in de
 sneeuw, 098 start de bieding, 093 verouderd nummer,
 0102 werkt sinds Babylon, 0107 sprookjesachtig getal,
 0107 was er al vóór de kip?, 0111 €, 0112 niet niks, 0116 voor
 jong en oud, 0116 wat moet Loekie Knol daar nou mee?,
 110 Oorsprong in het vlak, 0124 zo gaar smaakt niet,
 $120 \int_0^x (1-t^2)^{-1} dt$, 120 kan gecompliceerd zijn, 170 net geen
 snee, 1110 omgekeerd brood, 1110 vierde vlak, 201 duizend,
 201 spant de boog, 203 groet de kinderen, 208 |el, 290 zing
 Dore na, 2120 natuurlijke basis, 3010 zeer oud, 3011 $\exists$,
 340 zwak lichaam, 380 zoiets, 390 $x^2 + 1 = 0$, 3110 moderne
 ondernemende grootmoeder, 404 harde werker, 460 -bool of -
 normaal, 470 juridische plaatsbewaarders, 4100 half onbeken-
 de cirkel, 4110 jij de klas maar uit, Bernlef!, 4120 verouderde
 nul, 501 Van Dormolen en Den Uyl, 504 sinus, 508 Ober: Twee
 gemengde thee, 506 zekerwetters, 508 haalt de havo dit?,
 550 klinkt het hoogst in de buurt van de redding, 580 kan ook
 mondeling zijn, 609 spelende Griek zonder kwaal, 670 |vector|,
 6120 uit het heilig slot, 708 bodem, 750 oude vooronderstel-
 ling, 804 buitenaards, 809 dode heffing, 830 tussen meer,
 850 terreinwagen, 8010 Zoetermeer, 8012 jargon, 880 gelijk-
 hoeks, 8120 ordinaat, 904 vreemde verzameling, 920 inzenden
 voor 1 maart 1986 naar de eindredacteur: Elzenlaan 34,
 9321 GN Peize, 980 fysieke training, 1002 dubbelblank,
 10011 eigentijdse Griekse letter, 1070 ik geef mijn salaris bij het
 carnaval, 10100 modern gewicht, 10100 hogere eendracht,
 1102 erelid, 1203 dozijn dozijnen, 1205 samengesteld,
 1205 vlakke maat, 1206 weer zingen? 1207 uniek en toch leuk,
 1209 onzinnig deel van een breuk, 12011 verbrande verbinding,
 12011 wiens tijdperk?, 1220 uitgesproken vertegenwoordiger,
 1240 pijlsnel stuk, 1280 ternauwernood een groot aantal,
 12120 Freudiaanse wiskunde, 12120 het begin van alle oplos-
 singen.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen
 en correspondentie over deze rubriek
 aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillen-
 burg 148, 6865 HN Doorwerth.

534 Zoek vier verschillende natuurlijke getallen A, B, C en D
 waarvoor geldt:
 $A^2 - B^2 = B^2 - C^2 = C^2 - D^2$
 (De opgave is afkomstig van B. Kootstra, de oplossing van dr.
 R. S. Tjaden Modderman, Rozendaal.)

535 De ribben van een kubus hebben lengte p ($p \in \mathbb{Z}^+$). De
 kubus moet door vlakke doorsnijdingen verdeeld worden in p^3
 kubussen met ribbe 1. Men mag bij het doorsnijden reeds
 verkregen stukken stapelen en dan gelijktijdig doorsnijden. Het
 minimaal nodige aantal sneden is een functie van p . Stel deze
 functie op.
 (Mathematics Teacher, March 1983)

Inhoud

Harrie Broekman: Leerstijlaspecten. Wie ziet wat? 161

Rijkje Dekker: Eén context, vijf leerlingen 168.

A. J. Th. Maassen: Integraalrekening en $\mathbb{R}^+$ 178

Hans Aalmoes: Een olifant op zijn tenen getrapt 190

Recreatie: 192

Mededelingen 167, 189

Cryptokubus 192

Adressen van auteurs

H. G. B. Broekman, PDI, RU Utrecht,
Heidelberglaan 2, 3584 CS Utrecht

R. Dekker, Weteringschans 185^{III},
1017 XE Amsterdam

A. J. Th. Maassen, Math. Inst. K.U. Nijmegen,
Toernooiveld, Nijmegen

H. Aalmoes, Spreeuwenlaan 27,
1742 GA Schagen