

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

61e jaargang
1985 | 1986
december

Euclides 4

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Drs H. Bakker
Mw I. van Breugel
Drs F. H. Dolmans (hoofredacteur)
W. M. J. M. van Gaans
Dr F. Goffree
L. A. G. M. Muskens
Drs C. G. J. Nagtegaal
Drs A. B. Oosten (eindredacteur)
P. E. de Roest (secretaris)
Mw H. S. Susijn-van Zaale
Dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12,
7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 50,- per verenigingsjaar; student-leden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 35,-; contributie zonder Euclides f 30,-.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894-1 17 30. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52^c, 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 44,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 26,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers f 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 39731 (Samsy).

In memoriam Johan Wansink

Op 30 oktober is Johan Wansink overleden. Hij werd 91 jaar.

De wiskundige onderwijswereld heeft veel aan hem te danken. Hij was een intelligent wiskundige, maar hij stelde zijn gaven in eerste instantie in dienst van het onderwijs. Tot aan de vernieuwing in 1968 werd het wiskunde-onderwijs op beslissende manier beïnvloed door zijn denkbeelden, en we mogen hem daar dankbaar voor zijn. Lange tijd, van 1948 tot 1961, was hij voorzitter van Wimecos, de voorloper van de huidige Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Bij zijn afscheid werd hem het erelidmaatschap van de vereniging aangeboden. Hij leidde tijdens zijn voorzitterschap de Wimecos-commissie. Deze commissie was belast met het ontwerpen van een nieuw leerplan voor de hbs. Ze is daarin geslaagd en wist tevens daardoor de zo hinderlijke kloof tussen hbs en gymnasium te overbruggen. In 1958 werd het nieuwe programma voor beide schooltypen ingevoerd.

Euclides heeft veel aan hem te danken. Van 1956 tot 1968 leidde hij de redactie. Veel artikelen van zijn hand zijn in ons tijdschrift verschenen. Opvallend was daarbij hoe hij steeds weer een lans brak voor de ruimtemeetkunde.

Een sturende invloed op het onderwijs heeft hij mede gehad door zijn activiteit in de, toenmaals zeer geheime, commissie die de opgaven voor de eindexamens hbs samenstelde. Als secretaris van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde is hij de geestelijke vader geweest van Pythagoras en van de Wiskunde-olympiade.

Zijn onderwijskundige bekwaamheid heeft hij ten nutte kunnen maken als leraar en ten slotte directeur van de Lorentz hbs te Arnhem. En ook als schrijver van uitstekende schoolboeken. Toen aan de Technische Hogeschool te Delft in 1959 een

didactische opleiding werd verbonden, is hem gevraagd daarvan het wiskundige deel te verzorgen. Vijf jaar lang, van zijn 65e tot zijn 70e jaar, heeft hij dit gedaan. In deze periode heeft hij ook de didactiek verzorgd aan verschillende andere opleidingen. Hij examineerde bij de examens MO en verrichtte veel nuttig werk ten behoeve van de LO-opleiding. Het is dan ook geen wonder dat deze verdiensten erkend werden door hem eerst de ridderorde Oranje Nassau uit te reiken en later tot officier te bevorderen.

Na het afsluiten van zijn loopbaan als docent schreef hij zijn driedelige Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren.

Een grote voldoening was voor hem dat het Wiskundig Genootschap bij zijn 200-jarig bestaan hem in 1978 het erelidmaatschap aanbood.

Genoeg over de prestaties van Johan. Van minstens even groot belang waren zijn persoonlijke kwaliteiten. Wie daar inzicht in wil krijgen, raad ik aan de weergave van het interview te lezen in het onlangs verschenen boek van Fred Goffree, *Ik was Wiskundeleraar*. Johan heeft het verschijnen van dit boek nog kunnen meemaken en met grote en ook kritische belangstelling heft hij de vijf interviews gelezen. In het interview dat Fred aan Johan heeft afgenomen, proeft men zijn warme menselijkheid. U moet dit interview lezen. Volgens mij is het het hoogtepunt van het boek.

Ik heb het voorrecht gehad vijftig jaar met Johan te mogen samenwerken, veelal onder zijn leiding. Mijn oudste dochter heeft bij hem in de klas gezeten. Ik heb hem dus goed leren kennen en ben dankbaar voor de samenwerking met hem, voor zijn vriendschap en ook voor hetgeen hij voor mijn dochter gedaan heeft.

De laatste jaren, na het overlijden van zijn vrouw, waren moeilijker voor hem. Gelukkig is hij erin geslaagd tot het laatst toe een positieve inhoud aan zijn leven te geven. Juist in de periode dat hij alleen stond, is het persoonlijk contact tussen ons geïntensiveerd. Vele ochtenden hebben we samen gepraat. Hij was onvermoeibaar en de gesprekken met hem waren steeds boeiend.

Ik ben er zeker van dat velen van ons nog lange tijd uitstekende herinneringen aan Johan Wansink zullen bewaren.

Piet Vredenduin

Gesloten vragen binnen de wiskunde: *nee*

Harrie Broekman, Johan Wetering

In een eerder artikel¹ zijn we ingegaan op de zgn. kerntoets die gebruikt is door het TWP om kennis en vaardigheden bij leerlingen te meten. Uitgaande van een aantal eisen waaraan een toets of proefwerk moet voldoen zetten wij onze vraagtekens bij de kerntoets van het T.W.P. Daarnaast gaven we onze bezwaren, aansluitende bij o.a. Freudenthal en Querelle² tegen het belangrijkste uitgangspunt van deze toets, nl. dat het mogelijk is een adequaat beeld te krijgen van wat een leerling begrijpt van de wiskunde middels zgn. meerkeuzevragen.

In dit artikel willen wij onze bezwaren verder onderbouwen door, niet systematisch, een aantal ervaringen te geven die studenten aan de lerarenopleiding hadden toen zij de kerntoets afnamen bij leerlingen.

Bij elk van die ervaringen kwam steeds weer naar voren dat een goed of fout antwoord niets zegt over hoe een leerling met een bepaald wiskunde-onderdeel of met wiskundige problemen in het algemeen, omgaat.

1 Activiteiten van de studenten

We beginnen met een schets van wat de studenten precies hebben gedaan. Het gaat hier om studenten aan de COCMA te Utrecht en het Nutsseminarium te Amsterdam. Dit zijn geherstrukturerde opleidingen voor tweede- en derdegraads bevoegdheid, voorheen MO-A opleidingen.

In het tweede studiejaar is een zgn. schooloriëntatie gepland. Belangrijkste doel van deze oriëntatie is een hernieuwde kennismaking met het voortgezet onderwijs en dan liefst het derdegraads gebied. De

studenten voeren tijdens deze schooloriëntatie een of meer opdrachten en onderzoeken uit. Een van de opdrachten in het studiejaar 84/85 hing samen met de kerntoets van het TWP.

De bedoeling was dat studenten die toets afnamen bij twee leerlingen. Daarbij moesten de studenten de leerlingen zoveel mogelijk stimuleren achterliggende redeneringen te expliciteren.

Vervolgens moesten de studenten een verslag schrijven waarbij ze moesten ingaan op de volgende vragen:

- Hoe begrijpt de leerling een stuk wiskunde?
- Welke manieren gebruikt de leerling om tot het antwoord te komen? Een leerling hoeft namelijk niet tot een antwoord te komen door iets uit te rekenen. Het kan best zijn dat de leerling de oplossing vindt door de antwoordalternatieven in te vullen.
- Met welke vragen had de leerling vooral moeite en wat was de mogelijke oorzaak daarvan?

Een deel van de bevindingen van de studenten waren vervolgens uitgangspunt voor besprekingen tijdens de cursus.

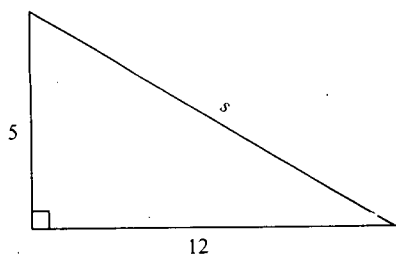
Onderstaande voorbeelden en konklusies komen voor een groot deel uit die verslagen van studenten.³ Ze zijn door ons geselecteerd en van commentaar voorzien. Duidelijk moge zijn dat dit artikel geen wetenschappelijke pretenties heeft, in de zin dat het hier om een verslag van een objectief en valide onderzoek gaat. Desondanks menen we dat het een goed beeld geeft van hoe een aantal leerlingen uit de tweede klas van het voortgezet onderwijs (vooral mavo en lbo) omgaat met onderdelen uit de wiskunde in het bijzonder en met (wiskunde)problemen en (wiskunde)meerkeuzevragen in het algemeen.

2 Hoe begrijpt de leerling een stuk wiskunde

Leerlingen maakten fouten bij het geven van het juiste antwoord. Mag je daaruit altijd konkluderen dat ze de stof niet begrepen hebben? Wij menen van niet. Uit de verslagen kwamen een aantal *achtergronden bij de foute antwoorden* naar boven.

Allereerst bleek dat leerlingen fouten maakten omdat een bepaald onderwerp nog niet in de klas behandeld was. Frappant in deze is dat veel leerlin-

gen in eerste instantie dit niet aangeven. Zeer duidelijk kwam dit naar voren bij opgave 2 waar men de stelling van Pythagoras moest toepassen



Wat is de waarde van s ?

Leerlingen probeerden maar wat of gokten naar een antwoord (' $12 + 5 = 17$ '; maar ook '13 want het is iets meer dan 12').

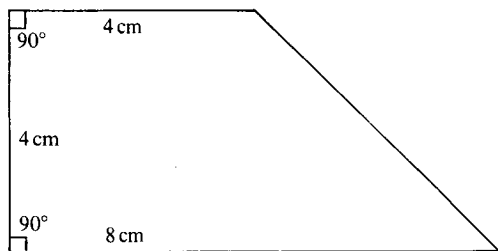
Leerlingen maakten ook fouten omdat ze bepaalde gebruikte termen niet kenden, bijvoorbeeld 'breuken van gelijke waarde' in vraag 14.

Een tweede categorie fouten zal de meeste docenten niet onbekend voorkomen. Het gaat hierbij om fouten die terug te voeren zijn op redeneringen waarbij de begrippen omtrek en oppervlakte worden verwisseld; idem vereniging en doorsnede.

Leerlingen maakten ook fouten doordat zij bij het oplossen terugvielen op voor hen makkelijkere en begrijpelijke maar foute oplossingschema's, zoals het aftrekken i.p.v. delen. Deze fouten hangen dus samen met het niet begrijpen van de essentie van een aanpak of begrip.

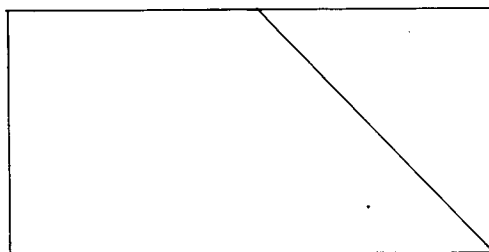
Bij een derde categorie fouten waren echter wel degelijk goede elementen in de oplossingswijzen aan te geven.

Een voorbeeld hierbij is vraag 8.



Een koperen plaat heeft de vorm en afmetingen zoals in de figuur hierboven aangegeven. Hoe groot is de oppervlakte in vierkante centimeters?

Een leerling maakt hierbij eerst de volgende tekening:



Hij stelt dan: 'Je moet er eerst een rechthoek van maken. Die heeft een oppervlakte van 32. Dan haal je er de driehoek vanaf. Die heeft oppervlakte 16. Dus $32 - 16 = 16$.

Minstens even interessant zijn bepaalde *redeneringen achter goede antwoorden*. Kijken we nogmaals naar opgave 8. Een leerling maakte er eerst een rechthoek van en berekende daarvan de oppervlakte (32). Vervolgens trok ook hij de oppervlakte van het driehoekje eraf: 'Die is $4 + 4 = 8$; dus de oppervlakte van de plaat is $32 - 8 = 24$ '.

Een ander voorbeeld, vraag 1:

– 10 0 10

In welk van de volgende rijtjes staan de getallen in de volgorde waarin ze van links naar rechts op de getallenlijn voorkomen?

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| A. $0, \frac{1}{2}, -1$ | D. $-1, 0, -\frac{1}{2}$ |
| B. $0, -1, \frac{1}{2}$ | E. $-\frac{1}{2}, -1, 0$ |
| C. $-1, -\frac{1}{2}, 0$ | |

Leerling: 'Het is C, want $-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ en $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ '.

Deze leerling kwam in problemen toen de student later een soortgelijke opgave gaf, alleen nu met de getallen $-3, -\frac{1}{2}, 0$: Toen bleek dat de leerling bij beantwoording van opgave 1 was uitgegaan van een regelmaat die hij zag, nl. 'sprongetjes van $\frac{1}{2}$ ' of ' $\frac{1}{2}$ erbij optellen'. Hij had geen koppeling gemaakt met plaats op de getallenlijn.

Een goed antwoord hoeft dus niet altijd voort te komen uit een goed denkschema.

Er is echter meer. Achter een goed antwoord kunnen verschillende niveaus van redeneren schuil gaan.

Bijvoorbeeld vraag 4.

$(-2) \times (-3)$ is gelijk aan

Leerling A: 'Min maal min is plus, dus $2 \times 3 = 6$ '.

Leerling B: 'Het produkt van twee negatieve getallen is positief, dus $+6$ '.

Leerling B zit op een hoger denkniveau (relationeel versus instrumenteel). Dit betekent dat hij niet alleen op dit moment minder problemen heeft, maar dat hij later ook niet zo gauw in problemen zal komen. Want, hoe denkt u dat leerling A later een opgave zal oplossen als 'Voor welke a en b geldt dat $ab > 0$ '.

Behalve verschillende niveaus van redeneren kan men bij analyse van de antwoorden zien of leerlingen een al dan niet efficiënte wijze van oplossen hebben. Efficiënt in de zin van tijd en moeite besparend maar ook efficiënt in de zin van minder in problemen komend.

Vergelijk opgave 33.

30 is 75 % van

- A. 40
B. 90
C. 105
D. 225
E. 2250

Leerling A: ' $30 : 3 = 10$ Dat is dan 25 %. Dat doe je bij 30 en dat is dan 40'.

Leerling B: ' 30% , dus $\frac{1}{4}$ van 30, o nee, 25 % erbij. Ik neem 1 % van 40, dat is 0,4. Dus A'.

Leerling C: ' $1\% = 0,03$. Dus (schrijft)

$$\begin{array}{r} 0,03 \\ 75 \times \\ \hline 15 \\ 210 \\ \hline 225 \end{array}$$

Dus D'.

De gebruikte oplossingsmethode wordt ook wel eens omschreven als 'additieve methode'. De problemen van deze methode zijn duidelijk te zien bij leerling B en C.⁴

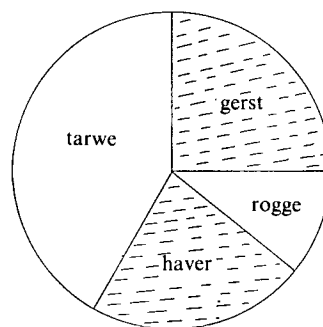
Een ander voorbeeld, opgave 18:

$0,40 \times 6,38$ is gelijk aan

Leerling schrijft op:

$$\begin{array}{r} 6,38 \\ 0,40 \\ \hline 000 \\ 25520 \\ 000000 \\ \hline 2,5520 \end{array}$$

Tot slot nog een heel ander voorbeeld, opgave 21:



Het cirkeldiagram laat de verhoudingen zien tussen de oogsten van verschillende graansoorten, die een land produceert. Welke van de volgende beweringen is WAAR?

- A. Er wordt meer haver dan rogge geproduceerd.
B. De grootste oogst is die van de gerst.
C. Er worden gelijke hoeveelheden tarwe en gerst geproduceerd.
D. De kleinste oogst is die van de haver.
E. De hoeveelheid tarwe en gerst samen is minder dan de helft van de totale graanoogst.

Leerling: 'A want het stukje land van haver is groter dan dat van rogge'.

Uit gegeven voorbeelden blijkt o.i. dat een fout of goed antwoord weinig hoeft te zeggen over wat een leerling weet of hoe hij een stuk wiskunde begrijpt. Juist de achterliggende redeneringen zijn daarvoor nodig. Als docent zul je dus niet alleen met een gegeven antwoord genoeg moeten nemen. Leerlingen zullen hun antwoorden moeten toelichten. Dat toelichten blijkt nu een groot probleem te zijn.

Zoals veel leerlingen tijdens de afnames van de toetsen aangaven en zoals veel docenten in hun lessen ervaren hebben leerlingen hier nogal wat moeite mee ('dat zie je toch zo'; 'het is dat antwoord maar ...'). Vraag is alleen of het feit dat leerlingen weinig of geen toelichting kunnen geven op hun antwoorden te maken heeft met hoe ze een stuk wiskunde begrijpen of met de manier waarop ze les hebben gehad.

In de volgende paragraaf zullen wij nader op deze vraag ingaan, door te kijken naar hoe leerlingen met wiskundige problemen omgaan.

3 Hoe gaan leerlingen met wiskundige problemen om?

Zoals gezegd hadden leerlingen problemen met het hardop denken en het achteraf weergeven hoe ze tot een antwoord gekomen waren. Daarmee samenhangend viel het op dat leerlingen erg op het antwoord gericht waren. Had men een goed of fout antwoord dan was men klaar.

Een aantal voorbeelden hiervan, opgave 39:

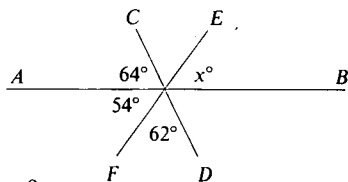
De onderstaande tabel geeft de relatie tussen de hoogte van waar men een bal laat vallen (v) en de hoogte tot welke hij terug stuit (s).

v	50	80	100	150
s	25	40	50	75

Welke formule beschrijft deze relatie?

- A. $s = v^2$ D. $s = v + 25$
 B. $s = 2v$ E. $s = v - 25$
 C. $s = \frac{v}{2}$

Leerling: 'E want s is 25 minder dan 50'.



en opgave 9:

De rechte lijnen AB , CD en EF snijden elkaar zoals in de figuur is aangegeven. De grootte van enkele hoeken is gegeven.

x is gelijk aan
 A. 54

Leerling: 'A want CD is de spiegelas'.

Het antwoord is gevonden, dus de som is af.

Dat gericht zijn op het snel vinden van een antwoord kan o.a. tot gevolg gehad hebben dat leerlingen alleen die elementen uit een opgave meenamen die ze begrepen. Moeilijke onderdelen werden dan zoveel mogelijk buiten beschouwing gelaten, tenzij men een antwoord kreeg dat niet bij de alternatieven stond. (Ten dele hing dit ook samen met het feit dat leerlingen een opgave slecht lazen.)

Bijvoorbeeld opgave 16.

$$Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$R = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

$$S = Q \cap R$$

De verzameling Q heeft 9 elementen en de verzameling R heeft er 6. Hoeveel elementen heeft de verzameling S ?

- A. 16 D. 4
 B. 11 E. 2
 C. 7

Leerling A: ' $9 + 6 = 15$... o nee, 16, want S heeft maar 1 element'.

De leerling begon met een schijnbaar voor de hand liggende berekening. Het gevonden antwoord werd echter niet bij de alternatieven gevonden. Dus werden de gegevens aangepast. De leerling gaat dus uit van het antwoord en past de (interpretatie van de) gegevens hier bij aan i.p.v. dat uitgegaan wordt van een analyse van vraagstelling en gegevens om zo tot een bepaalde oplossingsmethode te komen.

Een ander voorbeeld bij deze opgave:

Leerling B: '3 ... eh ... 12 ...'.

Student: 'Wat betekent $\cap$ '?

Leerling B: (haalt schouders op)

De leerling kende blijkbaar de betekenis van het teken $\cap$ niet. Desondanks begon hij toch te rekenen.

In bovenstaande voorbeelden zien wij een ander punt naar voren komen. De leerling realiseert zich niet meer waar hij mee bezig is. Een heel duidelijk voorbeeld hiervan zagen wij bij opgave 19:

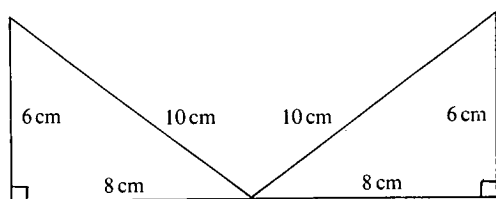
Op een vlak terrein heeft een jongen van 5 eenheden groot een schaduw van 3 eenheden lang. Hoe lang zal, in dezelfde eenheden, tegelijkertijd de schaduw zijn van een nabij gelegen telefoonpaal van 45 eenheden groot?

Leerling: 'Wat zijn eenheden?'

Student: 'Hoeveel eenheden ben ik lang?'

Leerling: O ja. Die jongen is 5 meter en zijn schaduw is 3 meter lang'.

Een laatste gevolg van het gericht zijn op het snel vinden van een antwoord was dat controle van het antwoord en oplossingsmethode haast niet plaatsvond. Studenten probeerden bij, meestal foute, antwoorden leerlingen nogmaals naar de opgave te laten kijken. Als een leerling een vaag gevoel heeft dat er iets fout zit, zal hij daartoe nog wel genegen zijn, anders vrijwel niet. Een leerling is dat niet gewend en 'af is af dus volgende opgave'. Daarnaast speelt ook een rol dat leerlingen emotioneel aan de eigen oplossingen gebonden zijn. Het is dan ook moeilijker je in andere oplossingen in te leven; opgave 24.



De totale oppervlakte van de twee driehoeken is

- A. $6 \times 8 \text{ cm}^2$ D. $\frac{16 \times 12}{2} \text{ cm}^2$
 B. $\frac{6 \times 8}{2} \text{ cm}^2$ E. $\frac{20 \times 12}{2} \text{ cm}^2$
 C. $\frac{10 \times 6}{2} \text{ cm}^2$

Een student beschrijft bij deze opgave de volgende ervaring:

'... Uiteindelijk hadden wij de oppervlakte van een

driehoek. Om die uitkomst met twee te vermenigvuldigen vermenigvuldigde de leerling de lengte van de zijden met 2 om zo tot alternatief D te komen. Een poging van mij om het probleem te reduceren tot het bepalen van de oppervlakte van een rechthoek probeerde de leerling in de kiem te smoren omdat hij het goede antwoord al had'.

Naast het moeilijk kunnen verwoorden wat men gedaan had en het gericht zijn op een antwoord viel nog een ander punt op. Leraren weten dat het handig kan zijn bij bepaalde problemen eerst een tekening of schets te maken of eerst een aantal voorbeelden te proberen. Voor leerlingen is dat niet zo vanzelfsprekend. Duidelijk kwam dit naar voren bij opgave 3:

Alexandra liep van Rivierstad naar Brugdorp, die op een afstand van 3,1 kilometer van elkaar liggen. Onderweg verloor zij haar horloge en ging 1,7 kilometer terug tot ze het vond. Daarna ging ze in de oorspronkelijke richting verder tot zij Brugdorp bereikte. Hoeveel kilometer had Alexandra in totaal gelopen toen ze in Brugdorp aankwam.?

Veelal werd er bij deze opgave lang gekeken en gezwegen. Leerlingen maakten, uit zichzelf, niet gauw een tekening.

Als wij de ervaringen uit deze paragraaf nogmaals overzien blijkt dat de desbetreffende leerlingen een aantal essentiële vaardigheden voor het omgaan met problemen niet toepasten: Daarbij denken wij met name aan het analyseren van de gegevens, het jezelf voorstellen wat voor antwoord verwacht wordt, het controleren, het jezelf helpen bij het vinden van een oplossing middels een tekening of getallenvoorbeeld, etc.

Het is ook tekenend dat leerlingen nogal wat moeilijkheden ondervonden bij het verwoorden van wat ze gedaan hadden of waar ze problemen zagen. Zijn dit vaardigheden die leerlingen nooit expliciet geleerd hebben of bezitten ze ze niet meer? Is deze leerlingen nooit geleerd hoe ze een opgave moeten lezen of kunnen ze het niet meer? En als er wel expliciet aandacht aan besteed is, geeft hun docent misschien impliciet anders les?⁵ Impliciet in de zin dat hij de gedachtengang bepaalt en gericht is op het antwoord? Als illustratie van dit laatste een stukje uit een les van één student aan één leerling.

De docent heeft net een hoofdstuk behandeld waarin de as van symmetrie algebraïsch is gedefinieerd. Hij wil nagaan wat de leerling er van weet.

lr: Wat is de as van symmetrie?

ll: Nou, dat is die lijn door de top die tussen de nulpunten loopt.

lr: Ja, maar hoe zou ik nu bij de grafiek van deze functie ($y = x \cdot x - 2 \cdot x$) kunnen bewijzen dat de lijn $x = 1$ de symmetrie-as is?

ll: Nou, dan kijk je naar de nulpunten en dan weet je dat die symmetrie-as er midden tussenin ligt.

lr: Ja, maar zou je het ook wiskundig kunnen doen. Je weet dat het voor deze punten geldt, maar geldt het voor alle punten. Kijk voor $(0, 0)$ en $(2, 0)$ geldt en voor $(-1, 3)$ en $(3, 3)$ ook, maar hoe zit het als $x = -95$ en $x = 97$?

ll: Spiegelen?

lr: Nee, je hebt hier een formule gehad. Wat is die a ?

ll: De spiegelas.

lr: Ja, en dat is

ll: 1.

lr: Ja, en wat moet je dan doen? Je vult dat in in de formule en kijkt of het klopt. Doe dat eens. Vul in $f(a - x)$ en werk dat eens uit.

ll: (vult in en werkt uit)

lr: Doe dat ook voor $f(a + x)$

ll: (werkt uit)

lr: Zie je dat er hetzelfde uitkomt. Nu heb je bewezen dat de lijn $x = 1$ de as van symmetrie is van de grafiek van f .

ll: Ja, maar dat wist ik toch al?

Wie heeft hier het probleem opgelost, de leraar of de leerling? Men kan zich voorstellen dat als de interactie tussen docent en leerlingen steeds zo is, dat de leerlingen nooit gestimuleerd worden en dus nooit leren zelfstandig problemen aan te pakken.

4 Enkele specifieke ervaringen en conclusies

Een aantal saillante ervaringen willen wij u tot slot niet onthouden. Een deel daarvan heeft betrekking op het proefwerk maken door leerlingen. Je zou zeggen dat iedereen altijd al proefwerken heeft gemaakt. Een docent zal dus niet vaak stilstaan bij dit onderwerp. In aansluiting op wat wij in de vorige paragraaf schreven kan dit, ten onrechte, ten

nadele van een leerling werken. Dat bleek ook bij afname van de toets. Zo was er een leerling die er bij de vierde vraag achter kwam dat het goede antwoord bij de alternatieven moest staan. Een andere leerling wist niet dat er bij de alternatieven maar één goed antwoord stond. Een student merkte in de nabespreking hierbij op dat hij vroeger bij meerkeuzevragen nooit iets op papier schreef. Hij dacht namelijk dat het bij deze vragen om hoofdrekening ging, wat je dus uit je hoofd moest doen.

Of wat denkt u van de volgende twee voorvallen.

Een leerling van Turkse afkomst wordt aangeraden bij vraag 3 een tekening te maken. Hij begint een huis te tekenen.

Een Surinaamse leerling roept bij vraag 21: 'Tarwe en haver, dat weet ik niet' en gaat verder met opgave 22.

Konkluderend menen wij te kunnen stellen dat het gebruik van deze zgn. kerntoets binnen de lerarenopleiding een rijke bron van ervaringen voor studenten is. Alleen ligt dat niet aan het specifieke karakter van de toets, maar meer aan de manier waarop de toets gebruikt wordt. Juist door door te vragen en leerlingen de achterliggende redenering (proberen) te laten expliciteren leren studenten veel over hoe leerlingen een stuk wiskunde begrijpen.⁶ In bovenstaande zit echter ook de essentie van ons bezwaar tegen het gebruik van gesloten vragen, binnen het TWP, maar met name ook binnen het onderwijs. *Meerkeuzevragen zijn als evaluatiemiddel binnen de wiskunde minder valide en dus ongeschikt.*

In paragraaf 2 zagen wij hoe leerlingen middels een foute redenering tot het goede antwoord kwamen. Of nog erger, leerlingen streepten een fout antwoord aan terwijl een groot deel van de gedachten-gang goed was. Maar fout is fout, dus geen punten. In paragraaf 3 zagen wij hoe leerlingen de meest primaire en essentiële vaardigheden misten om goed met problemen om te gaan. De oorzaak hiervan kan velerlei zijn. Het kan zowel liggen aan het genoten onderwijs als aan de capaciteiten van de leerlingen. Wij willen hier verder niet bij stilstaan. Wij menen wel dat door toename van het gebruik van gesloten vragen binnen de wiskunde één en ander alleen nog maar kan verslechteren. Het wordt namelijk steeds meer gebruikelijk binnen het onderwijs leerlingen al zo vroeg mogelijk

met gesloten vragen in aanraking te laten komen. Achterliggende redenering is dat 'leerlingen dan al gewend zijn aan deze vorm van examineren'. Hoewel dit motief zeer begrijpelijk is en in zekere zin niet onterecht, betekent deze praktijk wel de zaak omdraaien. In plaats dat de evaluatievormen, als *middel* om de resultaten te meten, een afspiegeling vormen van de lesinhoud, wordt nu deze lesinhoud aangepast aan de evaluatiemethoden.

Een ieder kan wel raden wat de gevolgen daarvan zullen zijn. Wat zul je je als leerling druk maken over hoe je precies problemen moet aanpakken, hoe je een probleem hebt aangepakt, notatie, etc.

Het antwoord is belangrijk, dát telt. Als je als leerling het goede antwoord hebt, dan ben je klaar. Wiskunde op zijn smalst dus.

Noten

- 1 Zie Euclides, 61e jaargang nummer 2 en 3.
- 2 Freudenthal, H., Vierkeuzetoetsen MAVO-3/LTO-C Verontrustend! In: *Wiskrant 3* (1978), nr. 2, blz. 1-3.
- Freudenthal, H., Driemaal is scheepsrecht. Meerkeuzetoetsen MAVO-3/LTO-C. In: *Wiskrant 5* (1980), nr. 2, blz. 16-17.
- Freudenthal, H., Cito-leerdoelgerichte toetsen. In: *Nieuwe Wiskrant 4* (84), nr. 1, blz. 15-23.
- Querelle, W. M. G., Ach ja. In: *Nieuwe Wiskrant 4* (84), nr. 1.
- 3 Wij hebben dankbaar gebruik gemaakt van vooral de verslagen van J. van Bellen, B. van Iersel, A. Kooy, L. van Lieshout, I. Mansro, P. Mulder, J. Roodenburg, K. Schnottelndreier, P. Veldkamp, J. Vermeer en A. Verschuur.
- 4 Zie bijvoorbeeld ook
Treffers, A. en H. Verhagen, Enkele gedachten over procentrekening in het V.O. In: *Nieuwe Wiskrant 3* (1983), nr. 2, 12-15.
- Kerkhofs, W., Procenten: een stukje basisschool in de brugklas? In: *Willem Bartjens 3* (1983), nr. 1, 48-53.
- 5 Marilyn Burns beschrijft het aldus in *Arithmetic Teacher*, 32 (1985), nr. 6, blz. 14: 'In traditional instruction, the primary goal is to develop computational competence. The emphasis is often on getting right answers, enough right answers to earn good grades or to do well on standardized tests. The teacher or the answer key is the source for revealing to the students the correctness of their answers. And, sadly, it's the quick right answer that is often valued more than the thinking that leads to that answer. What is missing is attention to children's deciding on the reasonableness of their solutions, justifying their procedures, verbalizing their processes, reflecting on their thinking – all those behaviors that contribute to the development of mathematical thinking.'
- 6 Zie ook Hart, K., Tell me what you are doing – discussions with teachers and children. In: *Tijdschrift Didactiek β -wetenschappen 3* (1985), nr. 2, blz. 140-157.

Mededeling

Video wiskunde video

'Wat is meer'

Wat is meer en is toch voor niets????

'Wat is meer' is een videofilm, die gaat over het werken in heterogene groepen met open opdrachten. We zien een groepje leerlingen aan het werk in een wiskundeles. Voorafgaand hieraan worden de leerlingen in het kort geportretteerd en tot slot volgt een kort interview met de leerlingen over de werkwijze.

En deze video krijg je voor niets.

Gebruiksmogelijkheden

Op school:

- 1 Voor docenten aan een school, waar men heterogeen en met open opdrachten wil gaan werken.
- 2 Voor docenten, die al heterogeen en met open opdrachten werken om de werkwijze en resultaten aan docenten van andere vakken te laten zien.

Thuis:

De film is geschikt om familieleden en vrienden kennis te laten maken met hoe je met wiskunde werkt of wil gaan werken.

Hoe krijg je deze film:

Het enige, wat je hoeft te doen om deze film te verkrijgen is een lege videoband op te sturen naar: A.P.S., I.S.G. secretariaat, 'Wat is meer', Postbus 7888, 1008 AB Amsterdam, tel.: 020-44 18 15. Er zijn geen kosten aan verbonden. Vermeld s.v.p. uw naam, adres, postcode, telefoonnummer en het merk van de band.

Boekbespreking

Prof. dr. A. van der Sluis, drs. C. A. C. Görts, *Cursus Pascal*, Academic Service, Den Haag, 309 blz., f39,90.

Deze cursus Pascal geeft een volledige behandeling van de programmeertaal Pascal. Het boek is duidelijk in twee delen te onderscheiden. In het eerste gedeelte worden die faciliteiten van Pascal behandeld die ook in veel andere talen aangetroffen worden. Het tweede gedeelte behandelt de meer bijzondere faciliteiten. De cursus wordt besloten met een aantal toepassingsgerichte programmeervoorbeelden en een verzameling opgaven met uitwerkingen.

De cursus is met name ook geschikt voor diegenen die nog geen programmeerervaring hebben.

W. Kleijne

Een transfertest voor wiskunde

Jacob Perrenet

Dit artikel beschrijft een deel van het werk van het onderzoeksproject 'Constructie en validering van een transfertest voor wiskunde-onderwijs met gebruikmaking van items met gefaseerde hulp'. In dit project van de Vrije Universiteit werken psychologen samen met wiskunde-didaktici. De medewerkers zijn, naast de auteur, de psychologen Leen de Leeuw (projectleider), Rian van Blokland, Joost Meyer en Helma Zeillemaker en de wiskunde-didaktici Wim Groen en Douwe Kok. De financiering van het project komt deels van de Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs.

1 Doel van onderzoek

Tussen de meest gebruikte drie wiskundemethoden voor havo/vwo – Sigma, Getal en Ruimte, en Moderne Wiskunde – bestaan behoorlijke verschillen in opzet en uitwerking. Als voorbeeld noem ik de sterke scheiding tussen theorie en vraagstukken bij Sigma en de opbouw in kleine stappen bij Getal en Ruimte. Met name de vierde editie van Moderne Wiskunde wijkt aanzienlijk af van de beide andere door bijvoorbeeld het later invoeren van formele notaties. Hoe moet je er als leraar of sekte tussen kiezen? Wanneer loont het de moeite op een andere methode over te schakelen?

Voorzover het is onderzocht, zijn er wat betreft leerresultaten over het geheel genomen geen grote verschillen gevonden. Het Tweede Wiskunde Project – de Nederlandse tak van een internationaal onderzoek naar vorm, inhoud en resultaat van wiskunde-onderwijs aan 13-jarigen – geeft als één van de vele uitkomsten, dat er wat betreft beheer-

sing van de leerstof als geheel tussen de methoden geen noemenswaardige verschillen zijn (Pelgrum, Eggen, Plomp en Kuper, 1984). Bij deze vergelijking ging het bij Moderne Wiskunde niet om de vierde, maar om de derde editie. Stel dat we deze uitkomst mogen generaliseren, dan wil dat nog niet zeggen, dat er buiten de beheersing van de leerstof geen grote verschillen in leerresultaten kunnen bestaan. Bij genoemd onderzoek werd niet gemeten in hoeverre de leerlingen in staat waren het geleerde toe te passen in nieuwe situaties, met andere woorden: niet gemeten werd het generaliseringsvermogen van geleerde kennis en vaardigheden, de mate van transfer.

De bedoeling van ons onderzoek is een test te ontwikkelen, waarmee de leermethoden ook op dit aspect vergeleken worden. De transfer zal op een speciale manier gemeten worden. Gebruikelijk is transfer te meten door het aanbieden van opgaven die enige afstand tot het geleerde vertonen. Bij elke opgave zal een klein aantal leerlingen de oplossing vinden; veel leerlingen zullen ergens blijven steken of zelfs niet weten hoe te beginnen. Onder hen zullen er leerlingen zijn, die met enige hulp wel tot een oplossing hadden kunnen komen. De klassieke transfertest houdt met die groep geen rekening: er ontstaat per opgave een alles-of-niets score. Bij een test met gelijksoortige opgaven kan zelfs de totaalscore alles-of-niets zijn.

Het doel van het project is, een transfertest te konstrueren, die subtieler meet dan het gebruikelijke type. Dit wordt gedaan door bij de opgaven hulpaanwijzingen (hints) aan te bieden, die de leerling kan gebruiken, wanneer het zelfstandig oplossen niet lukt. Hoe minder hulp er bij een opgave door een leerling is gebruikt, des te hoger het aantal punten, dat die leerling voor de betreffende opgave krijgt. Met deze transfertest is het de bedoeling verschillen in effect van leerboeken te vinden, die voorheen verborgen bleven. Daarnaast is de verwachting, dat een dergelijke transfertest beter zal voorspellen hoe goed de leerling het verder in zijn wiskundeloopbaan zal doen dan een transfertest van het klassieke alles-of-niets type of een beheersingstest. Dit zal in paragraaf 3 worden toegelicht.

In het onderzoek wordt zeker niet vergeten, dat naast het boek ook de leraar grote invloed heeft op

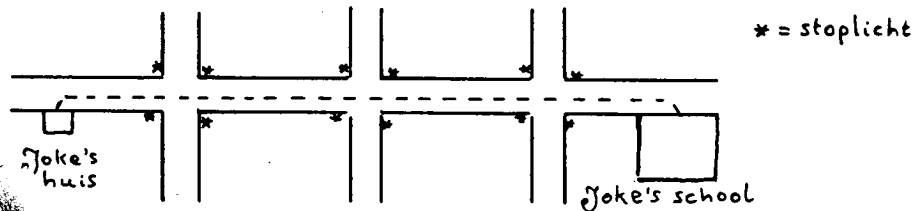
TRANSFEROPGAVEN

Opgave 1: (horizontale transfer naar buiten)

Hier volgt de beschrijving van de tocht per fiets van huis naar school, die Joke van den Berg maakte op maandagochtend 10 september 1984 (let ook op de plattegrond hieronder):

Joke stapt op en kan bij het eerste kruispunt rustig doorrijden; bij het tweede kruispunt lukt het haar door harder te gaan rijden om nog net door oranje te glippen. Dan laat ze zich uitrijden en moet ze wachten voor het derde stoplicht. Het laatste stukje naar school rijdt ze weer flink hard.

Teken in een grafiek de snelheid van Joke als functie van de tijd vanaf het moment dat ze thuis op de fiets stapt tot het moment dat ze bij school afstapt.



Opgave 2: (horizontale transfer naar binnen)

Wat is het minimum van de tweedegraads functie

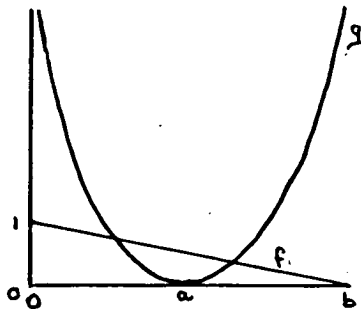
$$\rightarrow \sqrt{2} (x - 3\sqrt{2}) (x - 5\sqrt{2}) ?$$

in je antwoord wortels laten staan.

(vertikale transfer)

Onder zijn de grafieken geschetst van de functies f en g voor $0 \leq x \leq b$. De functie h wordt gedefinieerd door: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ voor elke x . Schets de grafiek van h voor $0 \leq x \leq b$.

Met schetsen wordt bedoeld, dat precies tekenen van elk punt van de grafiek niet hoeft.



Afbeelding 1

het leerresultaat bij de leerlingen. Deze bepaalt in belangrijke mate hoe het boek gebruikt wordt. Dit artikel zal echter vooral de vorm en de inhoud van de test belichten. De leerlingengroep, waarvoor de test zal worden ontwikkeld, wordt gevormd door eind-derde-klassemers havo en vwo. De test zal niet de gehele wiskundestof omvatten; we hebben gekozen voor de funktielijn. De methoden die vergeleken zullen worden, zijn de reeds genoemde Sigma, Getal en Ruimte, en Moderne Wiskunde (vierde editie).

2 Transfer

Binnen de Nederlandse wiskunde-didaktiek staat een bepaald type transfer momenteel zeer in de belangstelling: het kunnen toepassen van wat geleerd is op een gebied buiten de wiskunde. De invoering van de HEWET is er een uitvloeisel van. We noemen deze soort transfer: horizontale transfer naar buiten. Er bestaan echter meer typen transferen die willen we bij de test niet verwaarlozen: we willen ook onderzoeken hoe goed leerlingen een vraagstuk over een ongewone combinatie van funktieleerstof met andere bekende wiskunde kunnen doorgronden (horizontale transfer naar binnen) en in hoeverre ze problemen in verband met funkties kunnen oplossen over leerstof van een iets hoger nivo dan behandeld is (vertikale transfer).

Bij elk type transfer is hierbij een voorbeeld gegeven (zie afbeelding 1). Naar deze drie voorbeelden zal verder in het artikel regelmatig worden verwezen.

Vraagstukken als opgave 1 zullen, als de huidige trend naar het onderwijzen van bruikbare wiskunde in realistische situaties zich voortzet, steeds veelvuldiger in de onderbouwboeken voorkomen. In opgave 2 wordt van de leerling gevraagd zijn kennis van tweedegraads funkties toe te passen in een kontekst van irrationale getallen. In de funktievoorschriften van de onderbouwstof staan zelden andere dan gehele getallen.

Bij opgave 3 zit de transfer in het produkt van de twee funkties; de gebruikte funkties behoren tot de bekende leerstof.

3 Leergang-analyse

De transferopgaven bestaan alle uit iets bekends en iets nieuws. Het bekende deel moet behandeld zijn in alledrie de leergangen. Het nieuwe mag in geen der drie tot de onderbouwstof behoren. Een vraagstuk over inverse funkties bijvoorbeeld is niet geschikt. Voor gebruikers van Getal en Ruimte of Moderne Wiskunde zou het wel een transfervraagstuk zijn, maar voor de gebruikers van Sigma niet. Immers in Sigma wordt de inverse funktie eind derde klas behandeld (althans in het vwo-boek).

Ook moet rekening worden gehouden, met de vorm waarin het leerboek de stof aanbiedt: Sigma gebruikt in de onderbouw geen tabellen, waar de beide andere methoden dat wel doen; Getal en Ruimte voert het tekenoverzicht pas in de vierde klas in, later dan Moderne Wiskunde en Sigma. Er zijn tussen de drie methoden ook kleine verschillen in notatie en terminologie. Een leerganganalyse is noodzakelijk, die alle overeenkomsten en verschillen in leerstof, notatie en terminologie in kaart brengt.

Er is een tweede reden om de boeken te analyseren: wanneer er vooraf uitspraken gedaan kunnen worden betreffende verschillen in soort en mate van transfer die bij de drie gebruikersgroepen verwacht worden, dan is dat veel sterker dan het geven van verklaringen van gevonden verschillen achteraf. Door de leerboeken op een aantal relevante aspecten te vergelijken kunnen hypothesen worden geformuleerd.

Deze manier van analyseren is nog slechts gedeeltelijk voltooid. Ter zijner tijd zal er elders verslag van worden gedaan. Een voorbeeld kan wel worden gegeven: Sigma presenteert de diverse leerstofonderdelen (zoals funkties of getalsverzamelingen en hun bewerkingen) in enkele grote gescheiden blokken, terwijl bij Moderne Wiskunde alles meer gemengd is. Op grond daarvan zou voorspeld kunnen worden, dat het voor de Sigma-leerling moeilijker zal zijn de kennis betreffende funkties te mobiliseren, wanneer er een ander onderdeel van de leerstof aan de orde is, dan voor een gebruiker van Moderne Wiskunde. Dus zou voorspeld kunnen worden dat bij de Sigma-leerling meer horizontale transfer naar binnen zal worden aangetroffen

dan bij de leerling die Moderne Wiskunde gebruikt.

4 Zone van naaste ontwikkeling, leerpotentieel

Wat zit er achter de gedachte, dat een transfertest met opgaven met hulp beter meet dan een test met opgaven zonder hulp? Een kleine zestig jaar geleden ontwikkelde Vygotsky, één van de grondleggers van de Sovjetpsychologie, zijn theorie over de zone van naaste ontwikkeling. Vygotsky stelde vast, dat leerlingen met gelijke vaardigheid in het zelfstandig oplossen van bepaalde problemen behoorlijk kunnen verschillen in hun prestaties, wanneer hen hulp wordt geboden. Wat een leerling met hulp aan kan, noemde Vygotsky de zone van naaste ontwikkeling van die leerling. De breedte van de zone van naaste ontwikkeling geeft de ontwikkelingsmogelijkheden van de leerling aan, het leerpotentieel, want, zo stelde hij: 'Wat een leerling vandaag met hulp kan, kan hij morgen zelfstandig.'

Krutetskii, een Russisch onderzoeker van recenter datum, gebruikte Vygotsky's theorie. Hij deed uitgebreid onderzoek naar wat wiskundige vaardigheid precies inhoudt. Onder meer liet hij leerlingen lastige opgaven oplossen, waarbij hij hulpaanwijzingen gaf. Op deze wijze trachtte hij de breedte van de zone van naaste ontwikkeling te peilen: hoe meer een leerling met hulp kon, des te breder de zone, dus hoe groter het leerpotentieel. Krutetskii schreef een lezenswaardig boek over zijn onderzoek, dat in het Engels vertaald is: 'The psychology of mathematical abilities in schoolchildren' (Krutetskii, 1976); ook over Vygotsky's theorie is in het boek meer te vinden.

Terug naar het onderzoek, dat het eigenlijke onderwerp van dit artikel is. Waar Krutetskii werkte met individuele leerlingen, is het de bedoeling van het project een meer gestandaardiseerde test te ontwikkelen die aan een hele klas tegelijk kan worden afgenomen. We bouwen daarbij voort op het werk van beide Russische wetenschappers: met behulp van het aantal hints, dat een leerling nodig heeft om de transferproblemen op te lossen, bepalen we de breedte van de zone van naaste ontwikkeling. Zo

denken we – beter dan met een alles-of-niets test – te kunnen voorspellen hoe de leerling in de toekomst op het gebied van de wiskunde zal presteren. Bovendien verwachten we op deze wijze beter verschillen in effect van de diverse leermethoden te kunnen opsporen.

De transfertest levert een score op, die hoger is naarmate de leerling meer problemen oplost en daarbij minder hulp nodig heeft. Bij iedere opgave is namelijk een zelfde aantal punten te verdienen. Voor elke gebruikte hint gaat van het maximaal haalbare aantal punten er één af. Een niet-opgeloste opgave levert geen punten op.

5 Eerste soort hints: met open einde

Hints bedenken is niet eenvoudig. De Amerikaanse onderzoeker Trismen experimenteerde met hints bij wiskunde-opgaven, zonder daarbij het ontwikkelen van een test op het oog te hebben. Hij ontdekte, dat door deskundigen (wiskundeleraren, wiskunde-didactici) bedachte hints niet per definitie goede hints zijn. Soms hadden hints bij leerlingen helemaal niet het verwachte effect (Trismen, 1981). Bij ons zijn het de wiskunde-didactici, die de hints bedenken, met inbreng van de psychologen, maar er zal zeker bijstelling nodig zijn op grond van de ervaringen in de scholen.

De eerste soort hints, waar we mee experimenteerden, hadden een open einde vorm: aanwijzingen of open vragen. Ter toelichting zijn hier de hints bij de in paragraaf 2 gegeven opgave 1 te zien (zie afbeelding 2).

Er zijn drie zogenaamde hoofdhints en drie vervolghints. Een hoofdhint geeft een aanwijzing in algemene termen, een vervolghint gaat meer concreet op dezelfde aanwijzing in. Een leerling, die er zelfstandig niet uitkomt, neemt de eerste hoofdhint en probeert dan weer de oorspronkelijke opgave op te lossen. Lukt dat niet, dan kan de leerling er voor kiezen de eerste vervolghint te gebruiken, wanneer hij meer over dezelfde aanwijzing wil weten. Er is echter ook de mogelijkheid de vervolghint over te slaan en door te gaan naar de tweede hoofdhint. Voor deze constructie is gekozen om het probleem van de zogenaamde overbodige hints het hoofd te bieden: Wanneer een leerling hulp vraagt, heeft hij

OPEN EINDE HINTS BIJ OPGAVE 1

HOOFDHINT 1: Teken een horizontale en een vertikale as en zet de namen van de grootheden erbij.

VERVOLGHINT 1: Waar komt 'snelheid' te staan en waar 'tijd'?

HOOFDHINT 2: Hoe verandert Jokes snelheid van huis tot aan het eerste stoplicht?

VERVOLGHINT 2: Kies een hoogte op de vertikale as voor de snelheid 'rustig rijden' en teken het eerste deel van de grafiek.

HOOFDHINT 3: Wat betekent wachten bij een stoplicht?

VERVOLGHINT 3: Heeft Joke ooit een tijdje snelheid 0 gehad?

Afbeelding 2

waarschijnlijk al iets geprobeerd en misschien ook al iets gedaan, dat nuttig is voor het oplossingsproces. Aangezien de eerste hint begint alsof er nog niets is uitgevoerd, kan een leerling aangespoord worden iets te doen, dat al is gebeurd. Het levert mogelijk irritatie op bij de leerling en een onnodig strafpunt bij de score. Het kunnen overslaan van de vervolghint komt daaraan tegemoet.

Een tweede probleem is, dat de leerling een beetje op weg kan zijn met een oplossingsmethode, die een andere is, dan welke door de hints wordt aangegeven. Eigenlijk zou een vertakte hintstructuur nodig zijn, die op alle mogelijke oplossingswijzen inspeelt. Er zou dan, op het moment dat de leerling om hulp vraagt, uitgezocht moeten worden met welke oplossingsmethode de leerling bezig is. In de situatie van een schriftelijke test is dat zeer lastig uit te voeren. Schriftelijke vragen naar de wijze van oplossen zouden op zich weer als hints kunnen werken. Derhalve is er voor gekozen, hoewel veel wiskundeproblemen meerdere oplossingen kennen, in de test geen problemen op te nemen met meerdere aanvaardbare oplossingswegen.

6 Proefafname

Een aantal transferopgaven werd gekonstrueerd, waaronder de genoemde drie, met daarbij hints van de beschreven vorm. Bij elk der drie methoden Sigma, Moderne Wiskunde, en Getal en Ruimte werd een klas gezocht. Aangezien het in het begin van het schooljaar was, leek een vierde klas meer geschikt dan een derde. Elke leerling kreeg een drietal opgaven. De bijbehorende hints konden door het verwijderen van een bedekkende strook stuk voor stuk zichtbaar worden gemaakt. De opgaven werden met enige tolerantie nagekeken: niet alle rekenfouten werden afgestraft. Ook de uitwerkingen werden geanalyseerd. Allereerst bleek, dat zelfs voor deze vierdeklassers de meeste opgaven te moeilijk waren: ook met gebruik van hints kwamen veel leerlingen niet tot een aanvaardbare oplossing. Dit was het geval met de opgaven 2 en 3. Vaak gebruikten leerlingen geen hints, waar ze het beter wel hadden kunnen doen. In een dergelijk geval leek de opgave waarschijnlijk eenvoudiger dan hij was. In opgave 1 bijvoorbeeld was een veel voorkomende fout, dat in de grafiek werd vergeten aan te geven, dat het meisje moest wach-

ten bij het stoplicht (de snelheid is enige tijd nul). Dit ondanks de onderstreping in de opgavetekst; in de hints wordt er nog eens op gewezen. Ogenscheinlijk eenvoudige opgaven zijn minder geschikt voor de test. Immers ze hebben het eerder bekritiseerde alles-of-niets karakter: wie op de adder onder het gras trapt, denkt er niet over een hint te raadplegen. De hints bij opgave 1 bleken het over het algemeen goed te doen: gebruik ervan vergrootte de kans op een goed antwoord. Bij de hints van opgave 3 was dat veel minder het geval. Alleen hoofdhint 1 had enig effect (zie afbeelding 3).

Het kwam voor, dat leerlingen al moeite hadden met de taal waarin de opgave was gesteld. Een voorbeeld is de uitdrukking: minimale waarde van een functie. Dit werd door enkele leerlingen als negatieve waarde geïnterpreteerd. Ook lastig bleek de uitdrukking: als functie van (zie opgave 1). Opvallend was verder het automatisme, waarmee veel leerlingen bepaalde handelingen uitvoerden, die een oplossing niet dichterbij brachten. Zo werd bij opgave 2 regelmatig begonnen met het uitwerken van de haakjes. Vervolgens liep men dan vast in het rekenen met wortels.

Opgave 3 leverde een mooi voorbeeld van een andere oplossingsweg dan die door de hints wordt aangegeven: Een leerling loste deze opgave op door systematisch een aantal functiewaarden voor f en g uit de grafiek te schatten en daarmee waarden van h te berekenen. Dat betekent dus, dat de opgave in de

huidige vorm voor de test niet geschikt is: opgaven met verschillende aanvaardbare oplossingswegen zijn niet bruikbaar.

Een belangrijke ontdekking werd gedaan bij het analyseren der uitwerkingen. Het viel op, dat de in de hints gegeven informatie vaak niet over kwam. Van volgende hints, die erop voortbouwen, mag dan weinig effect worden verwacht: ze zijn gebouwd op drijfzand. Om dit probleem op te lossen werd besloten met een tweede soort hints te gaan experimenteren: hints in de vorm van meerkeuzevragen en met feedback. Deze vorm van hints, waarmee de eerder genoemde Trismen ook al experimenteerde, zal nader worden toegelicht in de volgende paragraaf.

7 Tweede soort hints: meerkeuze vragen met feedback

Op grond van de resultaten van de proefafname werd besloten verder te werken met een vorm van hints, waarbij er meer zekerheid is ingebouwd, dat de aangeboden informatie ook door de leerling wordt opgenomen. De hints bij opgave 2 in die nieuwe vorm staan in afbeelding 4.

In de verschillende onjuiste alternatieven zijn mogelijke fouten en misverstanden ingebouwd. Gokken wordt tegengegaan door het alternatief 'Ik weet het niet'. Wie het goede alternatief kiest, krijgt

Afbeelding 3

OPEN EINDE HINTS BIJ OPGAVE 3

HOOFDHINT 1: De nulpunten van h zijn eenvoudig te bepalen.

VERVOLGHINT 1: Als de functie f of de functie g gelijk aan 0 is voor een bepaalde x , dan is $h(x) = \dots\dots\dots$

HOOFDHINT 2: f en g zijn niet negatief op het aangegeven stuk, dus h ook niet. Hoe ligt de grafiek van h ten opzichte van de grafiek van g ?

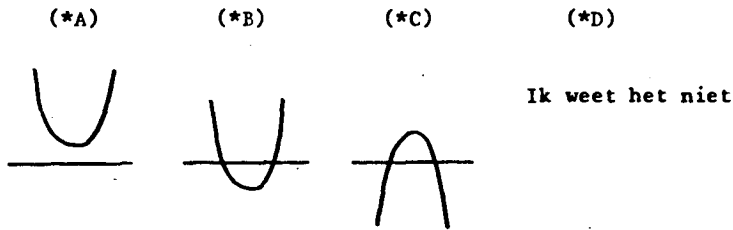
VERVOLGHINT 2: Als $f(x) = 1$, dan is $h(x) = f(x) \cdot g(x) = \dots\dots\dots$ Als $f(x) < 1$, dan is $h(x) < \dots\dots\dots$

HOOFDHINT 3: Tussen a en b is h eerst stijgend en daarna dalend. Snijdt de grafiek van h ergens op dat stuk de grafiek van f ?

VERVOLGHINT 3: Als $g(x) = 1$, dan is $h(x) = \dots\dots\dots$

MEERKEUZE HINTS BIJ OPGAVE 2

HINTVRAAG 1: Aan het functievoorschrift is te zien, dat de grafiek er ongeveer zo uit ziet:

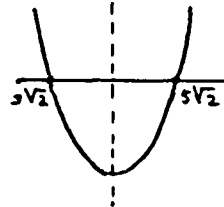


ANTWOORD 1: B is het goede antwoord. Er is aan het functievoorschrift te zien, dat er twee nulpunten zijn ($x-3\sqrt{2}=0$ of $x-5\sqrt{2}=0$). Als je haakjes uit zou werken, zou je krijgen: $\sqrt{2} x^2 + \dots$. $\sqrt{2}$ is een positief getal, dus de grafiek is een dalparabool.

HINTVRAAG 2: De nulpunten van de grafiek zijn $3\sqrt{2}$ en $5\sqrt{2}$. Voor welke x bereikt de functie het minimum?

- (*A) voor $x=\sqrt{2}$
- (*B) voor $x=8\sqrt{2}$
- (*C) voor $x=4\sqrt{2}$
- (*D) ik weet het niet

ANTWOORD 2: C is het goede antwoord. De grafiek is symmetrisch; de x , die bij het minimum hoort, ligt precies tussen de nulpunten $3\sqrt{2}$ en $5\sqrt{2}$ in.



Afbeelding 4

slechts als feedback: 'Dat is goed'. Bij elk ander alternatief wordt als feedback het goede antwoord met uitleg gegeven. Het kiezen van een onjuist alternatief betekent een extra strafpunt. Aangenomen wordt, dat wie het goede alternatief kiest, de uitleg niet nodig heeft. Op deze wijze wordt – zoals eerder met de mogelijkheid een vervolghint over te slaan – niet onnodig een punt afgetrokken.

Bij de nieuwe vorm werken we met twee hints met feedback; de eerste hint heeft in het algemeen een

oriënterend karakter; de tweede is meer sturend van aard.

Op grond van de proefafname zijn oude opgaven bijgesteld (meestal vereenvoudigd). Daarnaast is er een aantal nieuwe bedacht. De nieuwe serie met meerkeuze hints wordt op een aantal leerlingen individueel uitgeprobeerd, waarbij hen gevraagd wordt hardop te denken, zodat we kunnen nagaan welk effect de hints hebben op het oplossingsproces.

Tot zover de beschrijving van de eerste fase van het onderzoek. Slechts een aantal aspecten is belicht. Niet behandeld is bijvoorbeeld de rol die leerlingkenmerken spelen. Het effect van een leerboek kan bij het ene type leerling anders zijn dan bij het andere. Ook de manier, waarop de gegevens zullen worden verwerkt, de wijze van hypothesetoetsing, is niet aan de orde geweest. Geïnteresseerden kunnen daarover meer vinden in onze bijdrage aan de Onderwijs Research Dagen van 1985 (van Blokland e.a., 1985).

Ik besluit met een oproep aan die wiskundeleraars die bereid zijn enkele uren in een derde klas beschikbaar te stellen voor ons onderzoek om contact op te nemen. Het contactadres is: Vrije Universiteit, Subfakulteit Psychologie, Vakgroep Funktieler en Methodenleer, Postbus 7161, 1007 MC Amsterdam; t.a.v. Joost Meyer (020-548 38 33) of Jacob Perrenet (020-548 38 76).

Literatuur

- Blokland, A. W. van, e.a.: *Een transfertest voor wiskunde met items met gefaseerde hulp*, paper voor de Onderwijs Research Dagen aan de TH Twente, 1985 (opvraagbaar bij het project).
 Krutetskii, V. A., *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press, 1976.
 Pelgrum, W. J., Eggen, Th. J. H. M., Plomp, Tj. en Kuper, J. *Tweede Wiskunde Projekt*. I. E. A. rapport, Enschede: Technische Hogeschool Twente, 1984.
 Trismen, D. A., *The development and administration of a set of mathematics items with hints*. Research Report, Princeton, N.J.: Educational Testing Service, 1982.

Over de auteur:

Hij voltooide een studie wis- en natuurkunde in 1972, gaf enige jaren onderwijs op diverse nivo's en verrichtte onderzoek naar rekenonderwijs. In 1983 rondde hij een tweede studie af: psychologie. Momenteel is hij als onderzoeker wiskunde-didaktiek verbonden aan de Vrije Universiteit; daarnaast geeft hij wiskundekursussen.

Mededelingen

ICOTS 2. The Second International Conference On Teaching Statistics

11-16 augustus 1986, Victoria, Canada (British Columbia)

Na de eerste succesvolle internationale conferentie over het onderwijs in de statistiek in Engeland (Sheffield, 1982), wordt de tweede conferentie aanstaande zomer in Victoria, Canada-West georganiseerd. Zij is bedoeld voor allen die zich bezig houden met de ontwikkeling van het statistiek-onderwijs, of daarvoor grote interesse hebben, vanaf de lagere school tot en met de universiteit.

De conferentie beoogt het statistiek-onderwijs wereldwijd te verbeteren door uitwisseling van ideeën, methoden en materialen. Naast vier plenaire lezingen zijn er de volgende activiteiten:

- werkgroepbijeenkomsten naar aanleiding van voordrachten op diverse terreinen, zoals statistiek voor 6-11, resp. 12-18 jarigen, leraarstraining, gebruik van de computer, principes van het aanleren van de kansrekening en statistiek, statistiek voor de overheid, resp. industrie en bedrijfsleven;
- panelbijeenkomsten over inleidende kursussen in het tertiair onderwijs, praktijkopleiding versus theorie, statistiek in ontwikkelingslanden;
- tutorials over steekproeftrekking, grafieken op de computer, statistiek bij simulaties, statistische software;
- korte voordrachten en poster-exposities door een ieder die daaraan wil bijdragen;
- tentoonstellingen van bedrijven en diverse organisaties, films, computerdemonstraties, enz.

Kosten: voor deelname 100 Can.\$; voor logies ca. 200 Can.\$; voor de reis ca. f 2000, —.

Belangstellenden kunnen nadere informatie inwinnen bij Bert Nijdam, p/a Faculteit der Sociale Wetenschappen, R.U.U., Heidelberglaan 1, 3584 CS Utrecht, (telefoon: 030-53 47 70).

Wintersymposium

Het wintersymposium van het Wiskundig Genootschap heeft deze keer als thema: 'Discrete wiskunde'. Het symposium wordt gehouden op zaterdag 4 januari in de aula van het Dr. F. H. De Bruijne Lyceum, Koningsbergerstraat 2, 3531 AJ Utrecht.

Het programma is als volgt:

10.00-11.00 H. M. Mulder (VU, Amsterdam)

Grafentheorie: beeldspraak

11.15-12.15 C. Roos (TH, Delft)

Lineair programmeren, kan het beter dan met de simplex methode?

13.30-14.30 J. H. van Lint (TH, Eindhoven)

Fouten verbeterende codes

U kunt u voor dit symposium uitsluitend schriftelijk opgeven bij: Mw. H. Weenink, Ambonstraat 4, 2612 BM Delft. Op verzoek kunt u een prospectus met samenvattingen van de voordrachten thuisgestuurd krijgen. Deze prospectussen zullen begin december naar de scholen worden gestuurd. Indien u wilt deelnemen aan de gezamenlijke lunch, stort u f 10, — op giro-nummer 4015571 t.n.v. H. Weenink, Delft.

Als ... dan

P. G. J. Vredenduin

Voor een gemakkelijker begrip een enkele opmerking vooraf. Bij 'geldig' moet men denken aan: in overeenstemming met de wetten van het denken. Bij 'waar' aan: in overeenstemming met de feiten.

1 De propositielogica

Ik ga uit van een axiomastelsel dat ik ontleend heb aan Hilbert-Ackermann.

Grondtermen: uitspraak, geldig, $\vee$, $\neg$.

Axioma's

A1 Als p en q uitspraken zijn, dan is $p \vee q$ een uitspraak.

A2 Als p een uitspraak is, dan is $\neg p$ een uitspraak.

Definities: $p \rightarrow q \stackrel{\text{def}}{=} \neg p \vee q$

$$p \wedge q \stackrel{\text{def}}{=} \neg (\neg p \vee \neg q)$$

Als p , q en r uitspraken zijn, dan is:

A3 $p \vee p \rightarrow p$ geldig

A4 $p \rightarrow p \vee q$ geldig

A5 $p \vee q \rightarrow q \vee p$ geldig

A6 $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \vee p \rightarrow r \vee q)$ geldig.

Totnogtoe kan men met deze axioma's weinig uitrichten. Men kan volgens A1 en A2 steeds gecompliceerder uitspraken vormen. Deze kan men dan in A3-6 substitueren, waardoor steeds langere geldige uitspraken ontstaan. Nieuwe perspectieven worden geopend door:

A7 Als p en q uitspraken zijn en p en $p \rightarrow q$ geldig zijn, dan is q geldig.

In dit axioma komen enkele woorden voor, namelijk 'als ... dan', 'en', 'is' ('zijn'), waarvan men de betekenis moet begrijpen om het axioma te kunnen hanteren.

In dit artikel wil ik me speciaal bezighouden met de betekenis van 'als ... dan'.

Het merkwaardige is, dat ik het niet in mijn hoofd zou halen een alleen maar normaal denkend mens uit te leggen wat 'als ... dan' betekent. Wiskundigen echter zijn, juist ten gevolge van hun mathematische activiteiten, zodanig gedeformeerd, dat de oorspronkelijke betekenis van 'als ... dan' in het natuurlijke denken bij hen verloren is gegaan. Ik waag me dus aan een explicatie.

'Als ... dan' is een soort automaat. In het geval van A7 reageert deze als volgt. Beschik je over twee uitspraken p en $p \rightarrow q$, beide voorzien van het predikaat 'geldig', en stop je deze in de automaat, dan komt er de uitspraak q , eveneens voorzien van het predikaat 'geldig', uit. Als je er iets anders in stopt, dan komt er niets uit; dan functioneert de automaat niet.

Als je van de toren springt, dan breek je je nek. (1)
En als ik nu niet van de toren spring, is (1) dan ook waar?

Het antwoord op deze vraag kan variëren van een onbeleefd gebaar naar het voorhoofd tot 'daar heb ik het niet over', 'niet van toepassing' of iets dergelijks. De automaat werkt niet. Alleen een wiskundige dreigt te overwegen of (1) misschien ook waar is, als je niet van de toren springt.

'Als ... dan' komt in zeer verschillende contexten voor. Het kan wijzen op:

een logische noodwendigheid, zoals in A7;

een causaal verband (als je een steen in het water gooit, dan zinkt die);

een oorzakelijk verband (als je tegen de tafel stoot, dan kan ik niet schrijven);

een wetsregel (als geconstateerd wordt dat je te hard rijdt, dan moet je boete betalen);

een afspraak (als het morgenmiddag niet regent, dan kom ik je om drie uur halen om te gaan wandelen).

Nog even terug naar A7. Dit axioma is een deductieregel, die ons in staat stelt uit geldige uitspraken

nieuwe geldige uitspraken af te leiden. Dergelijke deductieregels zijn er meer. Ze kunnen uit A1-7 afgeleid worden. Voorbeelden zijn:

als p en q geldige uitspraken zijn, dan is $p \wedge q$ een geldige uitspraak;

als p en $\neg p$ geldige uitspraken zijn, dan is q een geldige uitspraak (d.w.z. is elke uitspraak geldig).

Ik voel u al nijdig worden. Daar heb je nu juist een voorbeeld van een automaat die gedoemd is nooit in werking te treden! We zullen merken dat dit protest voorbarig is. Soms treedt hij wel degelijk in werking.

2 Deductieve theorieën

De propositielogica gaat eerst functioneren, als we hem toepassen in een deductieve theorie. Bijv. in de theorie van de natuurlijke getallen, van de planimetrie, van de lineaire algebra, van de groepen. Bij een dergelijke theorie gaan we uit van axioma's. We stellen vast dat dit geldige uitspraken zijn. Verder stellen we regels op hoe uitspraken gevormd worden (welke tekencombinaties uitspraken zijn). De propositielogica levert ons dan de mogelijkheid uit geldige uitspraken nieuwe geldige uitspraken af te leiden. Men noemt dit bewijzen. Deze procédés zijn bekend; ik sta er niet verder bij stil.

Voor ons is van belang dat men bij het ontwikkelen van een deductieve theorie soms constateert:

als uitspraak p geldig is, dan is uitspraak q geldig.

Hoe komt men tot een dergelijk resultaat?

Men vormt een nieuwe theorie door aan de oude theorie één axioma toe te voegen, namelijk:

p is geldig.

Als men in deze nieuwe theorie bewijzen kan, dat q geldig is, weet men in de oude theorie dat als p geldig is, ook q geldig is.

Men zegt dan dat: p impliceert q .

p impliceert q – betekent dus – als men aan de axioma's van een theorie toevoegt: p is geldig, dan kan men bewijzen dat q geldig is.

Nu kan het zijn dat men in een theorie kan bewijzen:

$\neg p$ is geldig.

We vragen ons af of we dan kunnen aantonen: p impliceert q .

We voegen aan de axioma's toe:

p is geldig.

Nu zetten we de deductieregel:

als p en $\neg p$ geldige uitspraken zijn, dan is elke uitspraak geldig

in werking. In onze nieuwe theorie zijn de uitspraken p en $\neg p$ beide geldig. En dus ook de uitspraak q .

Hieruit zien we:

als $\neg p$ geldig is, dan weten we dat p impliceert q .

En nu de essentie van mijn betoog:

' p impliceert q ' spreekt de wiskundige uit: als p dan q . Hij heeft daarmee aan 'als ... dan' een andere, ruimere betekenis gegeven dan in de natuurlijke taal gebruikelijk is. Volgens hem is 'als p dan q ' ook het geval in al die gevallen waarin $\neg p$ een geldige uitspraak is.

Opmerking 1. Dat de wiskundige een taalgebruik kiest dat van het natuurlijke afwijkt, is niet ongevoel. In de natuurlijke taal heeft 'of' een diversiteit van betekenissen. Uit deze diversiteit kiest de mathemaat er één, het inclusieve of. Als hij 'of' zegt, spreekt hij af daarmee het inclusieve of te bedoelen. Bij 'als ... dan' ligt het iets moeilijker. De wiskundige kiest hier een taalgebruik dat afwijkt van het natuurlijke. Dat is niet erg, als men het zich maar bewust is. Juist als leraar moet men zich hiervan terdege rekenschap geven, want voor de leerlingen heeft 'als ... dan' uiteraard zijn natuurlijke betekenis.

Opmerking 2. Kan een uitspraak p ook niet-geldig zijn? Om dit aan te tonen, zou men moeten laten zien dat het onmogelijk is binnen de theorie af te leiden dat p geldig is. Dat kan alleen door beschouwingen te houden over (en niet in) de theorie. (Dus in een metatheorie.) In de theorie kunnen we aantonen dat p geldig is, maar niet dat p niet-geldig is. Vandaar dat de term 'ongeldig' in een theorie niet voorkomt. Wel kan men eventueel aantonen dat $\neg p$ geldig is. Daaruit volgt nog niet dat p niet-geldig is. Wel dat mocht p ook geldig zijn, elke uitspraak geldig is. De theorie is dan contradictoer.

3 Didactische consequenties

$W \subset V$ betekent: als $x \in W$, dan is $x \in V$ (in onderwijstermen). In terminologie die past bij dit artikel: als $x \in W$ geldig is, dan is ook $x \in V$ geldig. Of: $x \in W$ impliceert $x \in V$.

Nu komt de didactische hamvraag: is $\emptyset \subset V$? Het 'wetenschappelijke' antwoord is snel geleverd. We weten al, dat $\neg(x \in \emptyset)$ (volgens de definitie van een lege verzameling). Voeg als nieuw axioma toe: $x \in \emptyset$. Dan wordt elke uitspraak geldig, dus ook $x \in V$. Dus: $x \in \emptyset$ impliceert $x \in V$.

Wetenschappelijk correct, maar wel rijp voor de didactische prullemand. Hoe redden we ons op didactisch verantwoorde wijze uit deze moeilijkheid? Ik heb prachtige schijnredeneringen ontmoet. Zoals: neem een element van V weg. Dan krijg je een deelverzameling van V . Neem er nog één weg. Dan krijg je weer een deelverzameling. Neem het laatste weg. Dan krijg je dus weer een deelverzameling. Als je als redeneervorm de analogie toelaat om geldigheid ook in randgevallen aan te tonen, dan is het voortreffelijk. Maar dan kun je

ook gemakkelijk bewijzen dat $\frac{0}{0} = 1$. Want $\frac{0,1}{0,1} = 1, \frac{0,01}{0,01} = 1$ enz.

Zelf heb ik er het volgende op verzonnen. Ik heb huiswerk opgegeven, tien sommen. Ik heb ze besproken. Wie had er vijf goed? Enkele vingers. Zo krijg je een deelverzameling van de leerlingen uit de klas. Wie had er zes goed? Weer een deelverzameling. Wie had ze alle tien goed? Geen enkele vinger. De lege deelverzameling. Ik had de moeilijkheden omzeild door een andere definitie te geven van deelverzameling. De setbuilder $\{x \in V | \dots\}$ levert een deelverzameling van V . Anders gezegd: een deelverzameling van V is een verzameling elementen van V met een bepaalde eigenschap. En het kan dan uiteraard het geval zijn, dat geen enkel element die eigenschap heeft.

Deze definitie van deelverzameling heeft trouwens een zeer solide basis. Ze is in overeenstemming met de axiomatische opbouw van de verzamelingenleer volgens Zermelo-Fraenkel.

Een dergelijke handigheid vond ik echter niet altijd. Eens stuitte ik op de volgende uitspraak uit de planimetrie: elk punt is middelpunt van de lege verzameling.

M is middelpunt van $V \stackrel{\text{def}}{=} x \in V$ impliceert $S_M(x) \in V$.

In ons geval houdt dit in: kies M willekeurig. Kies $x \in \emptyset$. Dan is het spiegelbeeld $S_M(x)$ eveneens element van $\emptyset$.

Natuurlijke reactie van de leerling: je kunt geen element x van $\emptyset$ kiezen. De automaat werkt niet. Hier zegeviert het natuurlijke verstand en sta je als mathemaat machteloos. Vertel maar eens dat $\neg(x \in \emptyset)$ geldig is en dat toevoeging van het axioma $x \in \emptyset$ mogelijk maakt te bewijzen dat elke uitspraak geldig is, dus ook $S_M(x) \in \emptyset$.

Ik heb geprobeerd er iets anders op te verzinnen. Tevergeefs. Maar daarover in de volgende paragraaf.

Liever eerst nog een ander voorbeeld, afkomstig van Roger Holvoet. Op een conferentie in Knokke hield hij een voordracht waarin hij beweerde: de relatie $R = \{(3, 4)\}$ is transitief. Want hij bestaat uit slechts één koppel, het koppel $(3, 4)$. Transitief wil zeggen: als $(x, y) \in R$ en $(y, z) \in R$, dan $(x, z) \in R$. En $(x, y) \in R$ en $(y, z) \in R$ kan zich niet voordoen, omdat de relatie slechts één koppel bevat. Waarmee de transitiviteit aangetoond is.

Zijn auditorium bestond niet uit leerlingen, maar uit wiskundeleraren. Maar ook in dit gezelschap rees verzet. Velen waren niet te overtuigen. Eén zei zelfs: in de intuïtionistische wiskunde heb je uitspraken die niet geldig zijn en waarvan de negatie ook niet geldig is. Iets dergelijks heb je hier. Dit is niet zo, maar je kunt het ook niet weerleggen.

Waaruit volgt, dat bij sommige wiskundeleraren het natuurlijke verstand nog de overhand heeft. Merkwaardigerwijs hebben ze daar juist last en geen plezier van, als ze wiskunde moeten beoefenen.

Tot slot nog een aardig voorbeeld waarvan ik de uitwerking aan de lezer overlaat. Een afbeelding van V in W is een verzameling koppels waarvan het eerste element tot V en het tweede tot W behoort met de eigenschap dat elk element van V in precies één koppel als eerste element voorkomt. Op grond van deze definitie kan men aantonen dat er precies één afbeelding is van $\emptyset$ in W , namelijk de lege afbeelding. Daaruit volgt dan weer dat $a^0 = 1$ waarin a een kardinaalgetal is, en in het bijzonder dat $0^0 = 1$. Men stuit hier op dezelfde moeilijkheden.

4 Weerleggen

Als men er niet in slaagt, zoals in de vorige paragraaf, aan te tonen, dat

als p dan q ,

dan kiest men vaak als uiterste redmiddel: weerleg het dan maar. Geef maar een voorbeeld waarin p geldt en q niet, of correcter gezegd: $\neg q$ geldt.

Eerst nog een voorbeeld uit de klaspraktijk. Op een dag vlak voor de kerstvakantie had ik klas 5 β . Er lag die dag een behoorlijke laag sneeuw. Ik kwam binnen en zei: 'Vanmorgen voordat ik naar school ging, heb ik alle orchideeën in mijn voortuin begoten.' – Mijnheer, in die sneeuw? – Ja. –

Waarom? – Doet er niet toe; ik heb ze allemaal begoten. – Heeft u dan orchideeën in uw voortuin in de winter? – Nee. – Hoe kunt u ze dan begieten, als ze er niet zijn? – Dat is het hem juist; daarom is het waar dat ik ze allemaal begoten heb.

Nu was het initiatief verder aan mij. Ik beweer dat ik ze allemaal heb begoten. Ik beweer dus:

als x een orchidee in mijn voortuin is, dan heb ik x begoten.

Ben je het daar niet mee eens? Weerleg het dan maar. Wijs maar eens een orchidee in mijn voortuin aan die ik niet begoten heb. Reactie: je kunt geen orchidee in uw voortuin aanwijzen, want ze zijn er helemaal niet. Ik daagde ze uit de automaat in werking te stellen. Hun reactie is: deze automaat werkt niet, en daarmee basta.

Het voorbeeld uit de vorige paragraaf:

als $x \in \emptyset$ dan $S_M(x) \in \emptyset$

werkt analoog. Ook hier kun je de leerlingen vragen dit te weerleggen. Je stuit op hetzelfde verzet. Hoe doorbreek je dit?

Ik kan iemand met een gerust hart beloven:

als je binnen een uur van Amsterdam naar Arnhem fietst, dan krijg je f 100.000, –.

Want dat lukt hem toch niet.

Zoiets heb je hier ook. Als je een x vindt die element is van de lege verzameling dan is ook $S_M(x) \in \emptyset$.

Want een dergelijke x vind je toch niet.

Juist omdat de lege verzameling geen enkel element heeft, kun je dus zeggen dat

als $x \in \emptyset$ dan $x \in S_M(x)$.

De in 2 onder wiskundigen gemaakte afspraak, praten we hier onze leerlingen aan. Dat kan moeilijk anders dan met een kreuple redenering. Want

een afspraak moet je maken en je kunt niet de juistheid ervan aantonen. Ik geloof niet dat we onze leerlingen een dienst bewijzen door ze zo min of meer om de tuin te leiden.

Er is een andere mogelijkheid, waarvoor ik meer voel. Namelijk: vermijd dergelijke monsterredeneringen in het onderwijs. Doe geen pogingen aan te tonen dat elk punt middelpunt is van de lege verzameling. Probeer niet een afbeelding te zoeken van een lege verzameling in een verzameling V . Probeer niet duidelijk te maken dat alle elementen van een lege verzameling een bepaalde eigenschap hebben. Of, om het kort te formuleren: probeer geen automaat te laten werken die niet werken kan.

5 Het symbool $\rightarrow$

Als we in een theorie aangetoond hebben dat

$p \rightarrow q$ geldig is

en we voegen als nieuw axioma toe

p is geldig

dan weten we uit A7 dat ook q geldig is.

Dus: als $p \rightarrow q$ geldig is, dan weten we dat p impliceert q .

Omgekeerd kan men bewijzen:

als we weten dat p impliceert q , dan kunnen we bewijzen dat $p \rightarrow q$ geldig is. (Dit is het deductie-theorema van Herbrand.)

Waarmee is aangetoond:

in alle gevallen waarin p impliceert q , is bewijsbaar dat $p \rightarrow q$ geldig is, en omgekeerd.

Begripmatig kan men dus

' $p \rightarrow q$ is geldig' identificeren met ' p impliceert q '.

We hebben ' p impliceert q ' uitgesproken: als p dan q . Dit was onze nieuwe betekenis van 'als ... dan'.

Dit is voldoende reden om voortaan ook

$p \rightarrow q$ is geldig

uit te spreken: als p dan q .

Voor sommigen is dit aanleiding ' $p \rightarrow q$ ' uit te spreken: als p dan q . Dat is een ongeoorloofde slordigheid. Immers $\rightarrow$ is een operator die uit een geordend paar uitspraken (p, q) een nieuwe uitspraak afleidt. Het resultaat van deze operatie is de uitspraak $p \rightarrow q$. Daarentegen is 'als p dan q ' geen uitspraak, maar duidt op een verband tussen de uitspraken p en q .

6 Waarheidswaardentabellen

Totnogtoe hebben we ons uitsluitend beziggehouden met deductieve theorieën. We gingen uit van grondtermen. Op grond van de structuur van de uitspraken werd geldigheid geconstateerd. De betekenis van de grondtermen was daarbij irrelevant. We vergeten nu al het voorgaande en beginnen opnieuw.

Als ik beweer dat het regent, dan zijn er twee mogelijkheden. Het kan zijn dat het inderdaad regent. Dan is mijn bewering waar. Het kan ook zijn dat het niet regent. Dan is de bewering onwaar. Ik ga ervan uit dat ieder weet wat een bewering is en wat het wil zeggen dat een bewering waar resp. onwaar is. Bewering, waar en onwaar zijn nu geen grondtermen waarvan de betekenis irrelevant is. Integendeel het zijn termen waarvan de betekenis bekend ondersteld wordt. Van deze betekenis mogen we naar believen gebruik maken.

Uitgaande van beweringen p en q kunnen we nieuwe beweringen vormen: niet- p , p of q , p en q . We definiëren wat hieronder verstaan wordt.

Definities:

niet- p is de bewering die waar is als p onwaar is en anders waar;

p of q is de bewering die onwaar is als p en q onwaar zijn en anders waar;

p en q is de bewering die waar is als p en q waar zijn en anders onwaar.

Notatie resp: $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$.

Deze definities vatten we in de regel samen in de vorm van *waarheidswaardentabellen*:

p	$\neg p$	p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0
		0	1	1	0
		0	0	0	0

Hierin wordt 'waar' voorgesteld door '1' en 'onwaar' door '0'. We definiëren verder nog:

$p \rightarrow q$ is de bewering die onwaar is als p waar is en q onwaar en anders waar.

De tabel luidt:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

We hadden dus ook kunnen definiëren:

$$p \rightarrow q \stackrel{\text{def}}{=} \neg p \vee q$$

Sommige beweringen hebben een waarheidswaardentabel die uitsluitend uit 1'en bestaat. Bijv. $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$.

Definitie. Een bewering waarvan de waarheidswaardentabel uitsluitend uit 1'en bestaat, heet *tautologisch*.

Tautologische beweringen noem je in de omgangstaal meestal waarheden als koeien. Je hoeft helemaal niet te letten op de betekenis van hetgeen beweerd wordt. Los daarvan zijn ze reeds automatisch waar.

Het is duidelijk dat er een zekere verwantschap is tussen de propositiologica uit paragraaf 1 en de waarheidswaardentabellen uit deze paragraaf. Om dit verband aan het licht te brengen, stel ik een vertaalmechanisme op.

Verwarring tussen $\Rightarrow$ en $\rightarrow$ heeft veel misverstanden als gevolg gehad. Ten onrechte ging men $p \rightarrow q$ uitspreken: als p dan q . De eerste die zich hieraan schuldig gemaakt heeft, is de beroemde logicus Russell. Hij beweerde:

als de maan van groene kaas is, dan is de duivel president van de Verenigde Staten.

En hij zag geen verschil in betekenis tussen het 'als ... dan' in deze bewering en het deductieve 'als ... dan', dus $\Rightarrow$.

Ik heb me laten vertellen dat sommige Russen, die Russell gelezen hebben, met angst in het hart 's avonds de hemel afspuren om te zien of de maan al groen geworden is.

'De maan is van groene kaas' is onwaar.

'De maan is van groene kaas $\rightarrow$ de duivel is president van de V.S.' is dus waar.

Maar wie nu denkt dat 'de maan is van groene kaas' impliceert ($\Rightarrow$) 'de duivel is president van de V.S.', gaat abusievelijk naar de hemel kijken.

Ik heb in het voorgaande proberen uiteen te zetten dat de natuurlijke betekenis van 'als ... dan' ieder bekend is, maar dat de mathematische uitbreiding tot

als p dan q – betekent – p impliceert q

te moeilijk voor leerlingen is. Ik heb nu vaak zien gebeuren, dat men trachtte de leerlingen aan te praten, dat

als p dan q
 de bewering is met waarheidstabel 1101. En dat probeert de leerlingen ervan te overtuigen dat deze interpretatie van 'als p dan q ' in overeenstemming is met de natuurlijke betekenis ervan. Ik moet bekennen dat ik me hieraan zelf ook wel schuldig gemaakt heb. Dat dit kunststukje een acrobatische toer is waarbij men gedoemd is zijn nek te breken, is hoop ik nu duidelijk geworden.

7 Slotconclusie

Aan te raden is vast te houden aan de oorspronkelijke betekenis van 'als p dan q '. Voor de leerling is dit hetzelfde als ' p impliceert q '. Ingewijden weten, dat ' p impliceert q ' een ruimere betekenis heeft en ook die gevallen omvat waarin $\neg p$ geldig is. Deze gevallen kan men beter vermijden.

Voor schoolgebruik is ' p impliceert q ' wat zwaarwichtig. Men kan beter zeggen: uit p volgt q . Gebruik is hiervoor de symbolische schrijfwijze $p \Rightarrow q$ te hanteren.

Naast het symbool $\Rightarrow$ is dan geen behoefte aan het symbool $\rightarrow$. Het verschil in betekenis tussen deze twee symbolen is voor de leerling veel te moeilijk. Men kan $\rightarrow$ rustig missen. En daarmee natuurlijk ook de waarheidswaardentabel van $p \rightarrow q$, die, zoals we gezien hebben, toch maar verwarrend werkt. Trouwens waarom zouden we waarheidstabellen gebruiken in de wiskunde, een wetenschap die officieel deductief is en waarin waarheid dan geen rol speelt?

De axiomatische propositiologica is voor schoolgebruik natuurlijk volmaakt ongeschikt. En zo blijft er van de logica maar weinig over dat de moeite van het doceren waard is. Van essentieel belang is wel, dat men correct leert denken. Maar daarvoor is niet nodig dat men eerst de regels van de logica leert en die dan gaat toepassen. Integendeel, het hantieren van het natuurlijke verstand is van meer belang.

termen uit de propositiologica	termen uit deze paragraaf
uitspraak	bewering
geldig	tautologisch
$\neg$, $\vee$, $\wedge$ resp. $\rightarrow$	$\neg$, $\vee$, $\wedge$ resp. $\rightarrow$

Bij dit vertaalmechanisme gaan geldige uitspraken over in tautologische beweringen. Men kan dit nagaan door te constateren dat dit voor A3-6 het geval is en dat als p en q tautologische beweringen zijn, ook $p \rightarrow q$ een tautologische bewering is. Omgekeerd kan ook bewezen worden dat uit elke tautologische bewering door terugvertaling een geldige bewering ontstaat.

Men kan de beweringenlogica uit deze paragraaf een semantische interpretatie noemen van de propositiologica.

Opmerkelijk daarbij is dat 'waar' en 'onwaar' geen vertaling zijn van termen uit de propositiologica. Begrijpelijk, want betekenis en daarmee 'waar' en 'onwaar' (al of niet in overeenstemming zijn met de werkelijkheid) komen in de propositiologica niet voor. 'Tautologisch' daarentegen wel. Want een tautologische bewering is waar onafhankelijk van de betekenis van de erin voorkomende termen.

Hoe zullen we nu 'als ... dan' gebruiken in de beweringenlogica? Afspraak is, dat

'als p dan q ' hetzelfde betekent als ' p impliceert q ' en ook hetzelfde als ' $p \rightarrow q$ is geldig'.

Ons vertaalmechanisme zegt dat met ' $p \rightarrow q$ is geldig' correspondeert ' $p \rightarrow q$ is tautologisch'.

Daarom spreken we ' $p \rightarrow q$ is tautologisch' ook wel uit: als p dan q .

Ik probeer nu de resultaten nog eens op een rijtje te zetten. p impliceert q (als p dan q) wil zeggen dat er een deductief verband bestaat tussen p en q . Symboolsch wordt dit vaak weergegeven door: $p \Rightarrow q$.

De semantische vertaling hiervan is: ' $p \rightarrow q$ is tautologisch'.

' $p \rightarrow q$ ' daarentegen is de bewering die onwaar is als p waar en q onwaar is, en anders waar. De waarheid van $p \rightarrow q$ berust dus uitsluitend op het al of niet waar zijn van p en q en heeft niets te maken met enigerlei deductief (of andersoortig, zoals oorzake-lijk) verband tussen p en q .

Een wiskundeprojekt in Hamburg

F. Visser

Op uitnodiging van de Hugo de Groot-stichting is de auteur samen met twee bestuursleden van deze stichting, een schoolleider en een student in april j.l. naar Duitsland geweest om daar enkele projecten betreffende hoogbegaafden te bekijken en er wat meer bijzonderheden over te vernemen. Eén der projecten was het 'Mathematik Project' aan de universiteit van Hamburg. Uitvoeriger heet het project 'Identifizierung und Förderung mathematisch besonders befähigter Schüler'.

Doelstellingen

Wat wil men bereiken met iets dat onder zo'n mooie naam vaart? Daartoe heeft men verschillende doelstellingen geformuleerd, zoals:

- ontwikkeling van methodes om wiskundig zeer begaafde leerlingen op te sporen,
- ontwikkeling en toetsing van onderwijsmateriaal dat onafhankelijk is van de normale leerstof,
- onderzoek naar de ontwikkeling van de leerlingen die aan de cursus deelnemen (o.a. veranderingen in schoolprestaties, doorzettingsvermogen en motivatie),
- onderzoek naar de begaafdheidsstructuur en begaafdheidsontwikkeling van de uitgekozen leerlingen.

'Talentenjacht'

Hoe komen leerlingen uit Hamburg en omgeving in dit projekt terecht? Eén maal per jaar, ongeveer van af Pasen, worden de leerlingen van Hamburgse

Gymnasia en Gesamtschulen aan een tweetal tests onderworpen. Dat gebeurt op vrijwillige basis, in het algemeen op aanraden van de leraar of door persoonlijke aanmelding.

De ene test is een Duitse bewerking van een Amerikaanse test; deze bestaat uit 60 multiple-choice vragen. De andere is door de projectgroep zelf ontwikkeld en bestaat uit open vragen. (Er is overigens een nauwe samenwerking met diverse onderzoeksinstellingen op dit gebied uit de Verenigde Staten).

In 1983 waren er 192 aanmeldingen, waarvan de 42 besten werden uitgekozen. In 1984 waren er 294 deelnemers, waarvan er 65 werden geselecteerd. De verhouding meisjes: jongens is 1:4.

De cursus

Wat houdt de cursus in, wat wordt er gedaan? Op hun vrije zaterdagmorgen verzamelen de leerlingen zich rond 9.00 uur bij één der afdelingen van de Hamburgse universiteit, om daar tot ± 12.30 uur met een wiskunde-opgave bezig te zijn. Het eerste half uur is plenair. De docent en de leerlingen kunnen nog wat opmerkingen kwijt over de opgave van de vorige keer. Hoewel de leerlingen geen huiswerk krijgen, wordt het verder nadenken over een opgave wel gestimuleerd. Vondsten en ontdekkingen passeren snel de revue, waarna vervolgens het nieuwe vraagstuk (zeer kort!) aan de orde wordt gesteld.

Daarna wordt de groep gesplitst in groepjes van 5 à 6 personen, die elk het nieuwe probleem onder handen (soms letterlijk) nemen. De opmerkingen en verschillende aan de orde komende gezichtspunten worden door een docent in een protocol bijgehouden.

Om 12.00 uur komt de groep weer bij elkaar om van de docent de oplossing van het probleem te vernemen. Daarbij mag door de groepen kritiek worden geleverd op de gevolgde methode van andere groepen. Opvallend was overigens dat deze wiskundig begaafde leerlingen soms niet uit de voeten konden met merkwaardige produkten en breuken. Dat was maar dom rekenwerk, zeiden ze.

De leerstof

Welke 'verrijkingsstof' wordt de leerlingen aangeboden? In het algemeen bedenkt men voor de leerlingen wiskundige problemen die voor hen interessant, leerzaam en zinvol zijn en daarbij de prettige bijkomstigheid dat ze gebruikt kunnen worden. Men kiest de problemen uit de grafentheorie, combinatoriek, getallentheorie en meetkunde, maar soms wordt ook een strategiespel gebruikt. De keuze van een probleem gebeurt op zodanige wijze dat uitbreiding tot een heel probleemgebied tot de mogelijkheden behoort of het zelfstandig ontwikkelen van een kleine wiskundige theorie toelaat – waarbij de leerlingen uiteraard zelf de onderzoekers zijn.

De mensen achter en in het project.

De leiding van het project ligt in handen van vier hoogleraren, waarvan twee uit de vakgroep psychologie, één uit de vakgroep pedagogiek en één uit die der wiskunde. Daarnaast zijn er nog twee wetenschappelijke medewerkers, negen vakdocenten wiskunde en zeven studenten die de leerlingen op hun reis langs de wiskundige en andere problemen begeleiden.

En dan de leerlingen zelf natuurlijk. Wat vinden zij ervan? Wie en wat zijn zij?

De toegelaten leerlingen hebben een IQ van 140 of hoger. Dit komt erop neer dat het om leerlingen gaat die een hoge algemene begaafdheid hebben, dus niet alleen wiskundig hoogbegaafd zijn. De leerlingen voelen zich op de cursus in het algemeen prima thuis, hetgeen ook blijkt uit de geringe afvalpercentages: van de oudste groep (14, 15-jarigen) zijn er slechts vier afgevallen, van de jongere groep (12, 13-jarigen) nog maar twee.

Uit antwoorden op vragen onzerzijds bleek dat de leerlingen het erg plezierig vinden om samen opgaven te maken, nieuwe ideeën te krijgen, zelf na te denken in plaats van schools bezig te zijn; de wiskunde-opgaven op school worden door hen 'inslapertjes' genoemd!

Ter versteviging van de onderlinge band wordt een blad uitgegeven, waarin zij zelf gemaakte problemen kunnen publiceren. Uiteraard is er in het blad ook ruimte voor computerprogramma's. Jaarlijks

wordt er op een volkshogeschool een week voor alle leerlingen georganiseerd – en ook dan wordt er één dagdeel per dag iets aan wiskundeproblemen gedaan.

Tenslotte

Talent groeit niet vanzelf, het moet gestimuleerd worden door de omgeving. Door het ontbreken van stimulansen ontstaan verveling, spijbelen, onlustgevoelens, gedragsstoornissen enz. Onder andere vanuit die optiek is dit project van de grond gekomen. Een zeer waardevol project mijns inziens.

Maar of het er in Nederland ooit van zal komen ...? Wij zouden immers ook wel eens iets voor onze hoogbegaafden kunnen doen!

Noot van de redactie bij Een nieuw leerplan wiskunde in Vlaanderen

In het huidige programma van de Vlaamse Basisschool komen de volgende onderwerpen voor:

Verzamelingen

Het begrip verzameling, bepalen van een verzameling door opsomming of door omschrijving, de symbolen $\in$ en $\notin$, de lege verzameling ($\emptyset$).

Venn diagrammen.

Deelverzameling, de symbolen $\subset$ en $\not\subset$.

Vereniging, doorsnede en verschil van twee verzamelingen.

Relaties

Eenvoudige relaties uit de ervaringswereld van het kind kunnen voorstellen door een graf (pijlvoorstelling).

Roostervoorstelling van een relatie, grafieken (bijv. van recht-evenredige grootheden).

De omgekeerde relatie kunnen bepalen.

Uit de pijlvoorstelling van een relatie kunnen aflezen of deze reflexief, antireflexief, symmetrisch, antisymmetrisch, transitief is.

Eenvoudige relaties kunnen samenstellen.

De termen functie, afbeelding, bijjectie, permutatie, equivalentierelatie en orderrelatie kunnen gebruiken (klasse 6).

(Het klinkt allemaal erg formeel. De bedoeling is echter dat deze onderwerpen niet formeel, maar aangepast aan de wereld van het kind gepresenteerd worden.)

Bovenstaande onderwerpen, die een essentieel onderdeel vormen van het oude programma, komen in het huidige programma van het VSO niet meer expliciet voor.

De onderwerpen uit de getallenleer en uit de meetkunde die in het basisonderwijs aan de orde komen, komen daarentegen in het VSO-programma wel expliciet voor.

Een nieuw leerplan wiskunde in Vlaanderen

Albert Snauwaert

Een belangrijke wijziging van het leerplan wiskunde in de eerste graad van het Vernieuwd Secundair Rijksonderwijs in Vlaanderen kon niet ontsnappen aan het belangstellende oog van de redactie van *Euclides*. Vandaar de vraag daarover een, in de mate van het mogelijke, objectief verslag te schrijven. Wat volgt is dus een poging om aan die vriendelijke wens tegemoet te komen.

Vooreerst moet duidelijk gesteld worden dat het uitsluitend om het Rijksonderwijs gaat. Wat reilt en zeilt op het vlak van het wiskunde curriculum in het gesubsidieerd provinciaal, gemeentelijk en vrij secundair onderwijs komt hier dus niet ter sprake. Ik denk te mogen zeggen, dat er in de verschillende Vlaamse netten vrijwel naast en niet met elkaar wordt gewerkt, zodat er vrij divergerende leerplannen het licht zien.

Het gaat dus om het Rijksonderwijs. Alle secundaire rijksinstellingen behoren tot het zogenoemde type 1, dit wil zeggen het Vernieuwd Secundair Onderwijs (kort het VSO). Dit over zes jaar lopend VSO (van 12 tot 18 jaar) omvat drie graden elk van twee jaar.

De eerste graad bevat het eerste en het tweede leerjaar secundair onderwijs. In het eerste jaar is er, naast een algemeen vormende afdeling A, ook een afdeling B, die ingericht wordt voor leerlingen die een aangepast onderwijs nodig hebben. In het tweede jaar is er, naast de algemeen vormende afdeling A, ook de start van het beroepsonderwijs. Aangezien de wiskunde in de afdeling B en in het beroepsonderwijs vrij beperkt is (maar didactisch zeer grote problemen stelt), zal ik me beperken tot het nieuwe leerplan in de algemeen vormende afdeling.

Vanwaar de noodzaak de vigerende leerplannen 'bij te sturen'?

De oorzaak was eenvoudig: de leerlingen die hun secundaire studies aanvatten in het schooljaar 1984-85 hadden voor het eerst allen zes jaar Vernieuwde Wiskunde in de Basisschool (van 6 tot 12 jaar) achter de rug. Het was dan ook normaal rekening te houden met hun kennis opgedaan i.v.m. verzamelingen, bewerkingen met verzamelingen, relaties en de nieuwe visie op de meetkunde. In feite had een soort boekhoudkundige operatie kunnen volstaan om de overgang basisonderwijs – secundair onderwijs te harmoniseren. Onvoorwaardelijke voorstanders van 'Moderne Wiskunde' hadden het wellicht zó gezien of althans gehoopt: voort kunnen bouwen op de kennis opgedaan in de Basisschool betekende tijdwinst en dus de mogelijkheid om in de loop van het secundair onderwijs verdere onbegane (moderne) paden te betreden. Een vlugge blik op het voor het ogenblik reeds voorhanden zijnde leerplan wiskunde voor de eerste graad leert reeds dat aan die verwachtingen zeker niet zal worden voldaan.¹

Terwijl het experiment 'Vernieuwde Wiskunde' in de Basisschool plaats vond werd in het secundair onderwijs de balans gemaakt van wat in de 'Moderne Wiskunde' zo allemaal niet meeviel qua rendement en assimilatie door de leerlingen. En er werd natuurlijk ook rekening gehouden met gelijklopende internationale bevindingen. Ik meen objectief te mogen vaststellen, dat de 'moderne' klok wel degelijk wat achteruit werd gesteld. Zeker wat het inhoudelijke betreft. En didactisch gezien gaat het wellicht om een volledige ommezwaai: inderdaad, zoals in vrijwel alle naburige landen, werd het axiomatisch aanbieden van de leerstof uit de Middenschool, d.i. het eerste en het tweede leerjaar, verbannen.

Wat betreft die nieuwe mentaliteit schrijven de 'Didactische opties' in het leerplan het volgende voor:

Uit de leerstof en de expliciete doelstellingen moge blijken dat er geopteerd werd voor een actieve betrokkenheid van de leerlingen in het verloop van het leren. De didactische verwerking zou het best stoelen op de basisprincipes van de experimentele wetenschappen: het gericht waarnemen, het formuleren van een mogelijke structuur in de waargenomen objecten, het

eventueel styleren van die objecten, het zelf construeren van objecten in die stijl, het formuleren van hypothesen i.v.m. de structuur, het kritisch onderzoeken van die hypothesen en het proberen 'bewijzen' van het al of niet juist zijn van de vermoedens.

De vrees voor mededelend-onderwijs en de mogelijk daaruit volgende woordkramerij vanwege de leerlingen is ook duidelijk aanwezig:

Het leerresultaat dat bereikt wordt na eigen zoeken, coördineren en veralgemenen, is duurzamer en gemakkelijker reproduceerbaar dan resultaten die louter worden medegedeeld.

De didactische ommezwaai laat zich vooral gelden in de meetkunde. Daarop wordt alvast gealludeerd in de 'Didactische opties':

Iedere leerling kan op een of ander niveau deelnemen aan de exploratie van zijn leefmilieu en er probleemsituaties uit halen die een aanloop kunnen zijn tot het formuleren van wiskundige kernen. Ook de elementen uit de schoolervaringen behoren tot de verzameling van de mogelijke vertreksituaties. In die zin werd o.a. bewust gekozen om ervaringen met de metrische meetkunde zo vlug mogelijk te integreren.

Zo vlug mogelijk betekent hier *in concreto* dat onmiddellijk aan metrische meetkunde wordt gedaan en dat van het onderscheid tussen affiene en metrische eigenschappen geen gewag meer wordt gemaakt.

Het leerplan is veel uitvoeriger opgesteld dan dit totnutoe het geval was.

In een 'Inleiding' wordt eerst de beginsituatie ingeschat. Ten behoeve van de leraren secundair onderwijs wordt geschetst welke de nieuwe wiskundige kennis is die nu theoretisch mag verwacht worden vanwege de leerlingen die de Basisschool doorlopen hebben. Vervolgens komen de 'Didactische opties' die hierboven bijna volledig geciteerd werden. Er wordt verwittigd voor mogelijke communicatiestoornissen door verschil in taalgebruik of taalniveau tussen de leraar en de leerlingen, tussen de leerlingen onderling en ook in het algemeen tussen de omgangstaal en de wetenschappelijke taal.

De belangrijkste rubriek is uiteraard de 'Leerstof' d.i. de zakelijke opsomming van de items die *moeten* worden onderwezen. De volgorde is niet

dwingend. En tenslotte volgend de 'Doelstellingen', waarin de items uit de Leerstof nog eens opnieuw, maar wel uitvoeriger en vooral operatief geformuleerd worden.

Er blijft me een idee te geven van de leerstof, die dus voor de eerste twee jaren reeds vastligt.

Voor het eerste jaar vinden we als titels

Getallenleer,

Meetkunde

en Coördinatenmeetkunde.

Het zal de attente lezer onmiddellijk opvallen dat de leer van de verzamelingen en de relaties als dusdanig niet meer vermeld wordt. De bedoeling is deze punten niet meer als te onderwijzen items te beschouwen maar ze te gebruiken waar het past. Dit blijkt o.m. uit de aanhef (kadertje in de tekst die de opsomming van de rubrieken meestal vooraf gaat) voor het eerste onderwerp van de getallenleer, met name de natuurlijke getallen: '... de in de basisschool aangeleerde terminologieën en reken technieken *alsook de verworven noties uit de verzamelingenleer* (niet cursief in de tekst) opfrissen, uitdiepen en aanvullen'.

De in $\mathbb{N}$ aangeleerde rekentechnieken en eigenschappen moeten vervolgens geëxtrapoleerd worden naar $\mathbb{Z}$ en tenslotte naar $\mathbb{Q}$. Het hoofdstuk over de rationale getallen wordt discreet afgesloten met paragraaf 4:

4. Het bestaan van niet-rationale getallen

a. Invoering en schrijfwijze

b. De verzameling van de reële getallen als vereniging van de verzameling van de rationale en de irrationale getallen.

In de 'Doelstellingen' worden dienaangaande geen verdere inlichtingen meer gegeven.

De aanhef voor de meetkunde spoort eveneens aan de in de Basisschool verworven *noties uit de verzamelingenleer* (niet cursief in de tekst) op te frissen, uit te diepen en aan te vullen.

In de 'Doelstellingen' wordt de volgende werkwijze voorgeschreven:

Door middel van manipuleren, tekenen, construeren, ... zullen de leerlingen de begrippen en de relaties ontdekken. Er zullen dus geen losstaande lessen over deze begrippen en relaties worden gegeven.

Via begripsvorming zal men komen tot een duidelijke omschrijving van de kenmerkende eigenschappen.

De enige transformatie van het vlak die uitdrukkelijk moet worden behandeld is de loodrechte spiegeling. Er wordt wel vermeld: symmetriemiddelpunt van figuren, wat toch impliciet verwijst naar puntspiegelingen. Verder volgt een studie van vlakke figuren, de cirkel, de driehoek, de vierhoek, de regelmatige veelhoek. Tegelijk en liefst ingebouwd in vorige onderwerpen moeten 'de basisbegrippen uit de meetkunde "geleidelijk ontdekt of herontdekt, ingevoerd of herhaald en uitgezuiverd worden"'. Het gaat om de begrippen vlak, punt, rechte, halfvlak, onderlinge stand van rechten, lijnstukken en hoeken.

Blijft tenslotte de coördinatenmeetkunde. Dit is, in die klas, een nieuw onderwerp. Mocht u die naam nog niet ontmoet hebben, dan suggereert ze toch dat aan meetkunde gedaan wordt met behulp van coördinaten. In Vlaanderen wordt die bedrijvigheid traditioneel 'Analytische meetkunde' genoemd, wat naar het schijnt, ook geen goede benaming is. Eëndimensionaal volstaat een abscis als coördinaat, tweedimensionaal een koppel (geordend paar) getallen. De inleidende zin in de 'Leerstof' zegt dat het de bedoeling is een brug te slaan tussen de getallenleer en de meetkunde. Het gaat dus om een, vooral didactisch gezien, heet hangijzer. Het is wellicht het duidelijkst de doelstellingen te citeren:

De plaats van een punt (een figuur) in het geijkte vlak (xOy -vlak, red) kunnen bepalen.

Het begrip coördinaat kunnen gebruiken.

Koppels kunnen optellen en aftrekken (ook met lettervoorstelling) en grafisch kunnen voorstellen. Het verband met een verschuiving inzien.

Een koppel kunnen vermenigvuldigen met een reëel getal (ook met lettervoorstelling) en grafisch kunnen voorstellen. Het verband met een homothetie inzien.

De grafiek van een relatie in het geijkte vlak kunnen tekenen (punt na punt constructie) met voorschriften als:

$y = 5x$; $y = 2x - 1$; $y = x^2$; $y > x$; $y \leq x$; y is een deler van x ($x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$).

Het begrip verschuiving werd gefundeerd in de Basisschool. Het begrip homothetie niet. Het gaat

uiteeraard om twee affiene transformaties. Alles laat vermoeden dat het leerplan hier het wegvallen van de studie van de affiene meetkunde, die in haar val het vectorrekenen meesleurde, enigszins wil compenseren. Het beoogt duidelijk op langere termijn (het derde leerjaar?) het begrip vectorruimte geleidelijk op te vullen.

Het leerplan voor het tweede observatiejaar omvat nu alleen de 'Leerstof' en de 'Doelstellingen'. De inleiding en de didactische opties gelden dus voor de eerste graad.

De titels luiden dit keer:

Getallenleer

Onderzoek van eigenschappen

Veeltermen in één onbepaalde met numerieke coëfficiënten

Vergelijkingen en ongelijkheden

Coördinatenmeetkunde

Vlakke meetkunde

Ruimtmeetkunde

In de getallenleer wordt vooral de theorie van de machtsverheffing en de worteltrekking verfijnd. Wordt ook behandeld de verenigbaarheid van de gelijkheden en ongelijkheden met de hoofdbewerkingen en tenslotte doen de verhoudingen en evenredigheden (die in de 'Moderne Wiskunde' teloor waren gegaan) opnieuw hun intrede.

Met het onderzoek van eigenschappen van bewerkingen worden die eigenschappen bedoeld die het begrip structuur moeten helpen stichten: het in- of uitwendig-zijn, het overal gedefinieerd-zijn, het commutatief-zijn, het associatief-zijn, het bestaan van een neutraal element, het bestaan van symmetrische elementen.

Over de theorie van de veeltermen valt niets opvallends te melden. De leerlingen moeten de vier hoofdbewerkingen kunnen uitvoeren. Het kunnen berekenen van de getalwaarde van de corresponderende veeltermfunctie wordt ook onderstreept. De coördinatenmeetkunde houdt het bij de algebraïsche en grafische voorstellingen van deelverzamelingen van de geijkte rechte en het geijkte vlak en het aflezen van grafieken.

Er is een pauze in het stichten van het begrip vectorruimte. Maar de vlakke meetkunde profiteert van het stichten van het begrip homothetie in de coördinatenmeetkunde van het eerste leerjaar. De aanhef van het hoofdstuk 'Vlakke meetkunde' neem ik integraal over:

Aan de hand van de onderstaande rubrieken komen tot een eerste classificatie van de belangrijkste transformaties van het vlak tot een initiatie in het bewijzen van elementaire eigenschappen omtrent gelijkheden van lijnstukken en gelijkheden van hoeken.

Van de transformaties wordt verwacht dat de leerlingen ze vooral grafisch kunnen uitvoeren en herkennen. De leerlingen moeten zich ook bewust zijn van het eventueel behoud van evenwijdigheid van rechten, lengte, hoekgrootte, oppervlakte.

Via het samenstellen van loodrechte spiegelingen wordt het begrip isometrie ingevoerd, met als bijzondere gevallen de verschuiving, de draaiing en de puntspiegeling. De congruentie van figuren ligt nu in het bereik. Wat de driehoeken betreft, worden nu ook de congruentiekenmerken opgesteld. De 'klassieke' bewijsjes met behulp van congruentie staan dus opnieuw ter beschikking en er kan ook meer algemeen gesteund worden op de transformatiemeetkunde. Ten opzichte van de 'Moderne Wiskunde' is het krachtige en meestal elegante vectorrekenen echter (voorlopig) niet meer voorhanden. In het tweede observatiejaar is het nieuwe onderwerp de ruimtemeetkunde.

Die keuze ligt in de lijn van de didactische opties die stoelen op een exploratie van het leefmilieu. Het is wellicht zo dat de leerlingen een grotere dagelijkse ervaring hebben met het 3-dimensionale dan met het 2-dimensionale. Ook die ervaringen worden best begeleid. Een meer ontwikkeld ruimtelijk inzicht is praktisch onmisbaar voor de leerlingen die in de tweede cyclus opteren voor de technische richting.

Voorts was er ook een veel te grote kloof tussen de ruimtemeetkunde van de Basisschool en de ruimtemeetkunde van het zesde leerjaar secundair onderwijs, die dan nog slechts in een beperkt aantal afdelingen aan bod komt. Veel leerlingen doorlopen heden ten dage dus het secundair onderwijs zonder zich in de ruimte te begeven (!). Aan die ruimtemeetkunde wordt dan nog in brede kringen verweten dat ze het ruimtelijk inzicht niet meer voldoende ontwikkelt omdat ze uitgaat van de theorie van de vectorruimten. Dit is een boeiend twistpunt, maar daar gaat het nu niet over.

Wat wordt voorgeschreven in 'Ruimtemeetkunde'?

1. Het classificeren van ruimtelichamen volgens verschillende criteria.
2. Het opsporen van symmetrieën in ruimtelichamen.
3. Het toepassen van formules voor oppervlakte en inhoud in aanverwante vraagstukjes.

De criteria volgens dewelke de ruimtelichamen moeten worden gerubriceerd, worden uitvoerig besproken in de 'Doelstellingen'.

Tot daar dan mijn poging tot een zakelijk verslag over het nieuwe leerplan wiskunde in de algemeen vormende afdeling van de eerste graad van het Rijksonderwijs in Nederlandstalig België. Ik ben er mij van bewust dat door het leggen van accenten op een of ander item van het curriculum zo'n verslag niet helemaal objectief kan zijn. Maar ik hoop, dat ik geen waarde-oordelen heb laten doorschemeren. Mocht dit verslag nu echter aanleiding geven tot commentaar vanwege de lezers van *Euclides*, dan denk ik dat dit in Vlaanderen op veel belangstelling zou worden onthaald.

Noot

- 1 Zie 'Noot van de redactie' op pagina 152.

Over de auteur:

Albert Snauwaert is leraar wiskunde aan het Koninklijk Atheneum te Ieper, lid van de studiecmissie vernieuwing leerplannen wiskunde, redactielid van Wiskunde en Onderwijs en bestuurslid van de VVWL.

Amsterdams wiskundige ontbindt snel met de computer

Henk Nieland

Onlangs heeft de Amsterdamse wiskundige prof. dr. H. W. Lenstra jr. een nieuwe manier gevonden om getallen te ontbinden in factoren. De meeste getallen kunnen nu op de computer veel sneller worden 'gefactoriseerd' dan voorheen. Acht jaar geleden kwam het factoriseren in de schijnwerpers toen er een praktische toepassing werd gevonden in de kryptografie (het coderen van boodschappen). Sindsdien is dit onderdeel van de wiskunde weer behoorlijk in beweging. Lenstra: 'Het is heel goed mogelijk dat er over een jaar of tien geen kunst meer aan is om elk groot getal snel te ontbinden in factoren. Misschien doen de kryptografen er goed aan om nu al te gaan omzien naar andere methoden om te vercijferen.'

Sleutel

Kinderen leren al vroeg getallen in factoren te ontbinden $210 = 21 \times 10 = 7 \times 3 \times 5 \times 2$. Je breekt het te ontbinden getal als het ware in steeds kleinere stukken, totdat je stuit op getallen die niet meer verder deelbaar zijn, de 'priemgetallen', in dit geval dus 2, 3, 5 en 7. Sommigen raken in de ban van het spelen met getallen en stellen zich dan zo op het oog weinig zinvolle vragen als: hoe ontbind ik een getal dat uit vijfhonderd enen bestaat: 1111...1? Factoriseren is echter niet zo maar een spelletje. Het geeft meer inzicht in de eigenschappen van getallen en raakt daarmee het hart van de wiskunde. Grote wiskundigen als Euclides in de vierde eeuw vóór Christus en Gauss in de negentiende eeuw vonden het al belangrijk genoeg om er zich intensief mee bezig te houden. In onze eeuw ver-

flauwde de belangstelling omdat er weinig nieuws uit kwam.

In 1977 werd echter in Amerika een interessante toepassing gevonden. De wiskundigen Rivest, Shamir en Adleman vonden een codeer/decodeermethode uit (sindsdien RSA-systeem genoemd) die erop is gebaseerd dat je een boodschap als het ware 'verzegelt' door middel van een zeer groot getal dat het produkt is van twee eveneens zeer grote priemgetallen (van ca. 100 cijfers). Het zegel kan iedereen zien, maar is alleen te verbreken als je die twee priemgetallen kent. Daarvoor moet het zeer grote getal in factoren worden ontbonden. Bestaat dit getal bijvoorbeeld uit ca. tweehonderd cijfers, dan doen de huidige computers over die ontbinding nog meer dan honderd jaar.

Strategie

De nieuwe methode van Lenstra vormt geen bedreiging voor het RSA-systeem. Lenstra: 'De versnelling die met mijn methode wordt bereikt komt omdat globaal de kleinste priemfactoren er het eerst mee worden gevonden. Een willekeurig gekozen getal bevat in het algemeen betrekkelijk kleine priemfactoren. Met mijn zoekstrategie haal je die er meestal veel sneller uit dan met de andere gangbare methoden die de priemfactoren in willekeurige volgorde vinden. Dit betekent wel dat mijn methode niet effectief is voor getallen die bij de RSA-codering worden gebruikt, omdat dat juist geen willekeurige getallen zijn: zij bestaan uit twee grote priemfactoren.'

Een manier om de delers van een getal te vinden is gewoon alle priemgetallen op het rijtje af (2, 3, 5, 7, ...) proberen. Dat is echter een langzame strategie. In de loop der tijd zijn er snellere zoekmethodes ontwikkeld. Het geheim van Lenstra's versnelling ligt in het gebruik van 'elliptische krommen'. De bijbehorende theorie stamt uit de jaren veertig. Tot nu toe waren de voor het factoriseren gebruikte methoden gebaseerd op wiskunde uit de vorige eeuw. Lenstra's werk opent misschien de weg naar het gebruik van nog andere moderne wiskundige technieken, waardoor het ontbinden in factoren een eenvoudig karwei kan worden. (De Letter W)

longitudinale planning

van het

reken & wiskunde onderwijs

in

nederland

Onder deze titel hebben de besturen van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs (NVORWO) een gemeenschappelijk rapport samengesteld over de afstemming van het totale reken- en wiskunde-onderwijs van 4 tot 18 jaar.

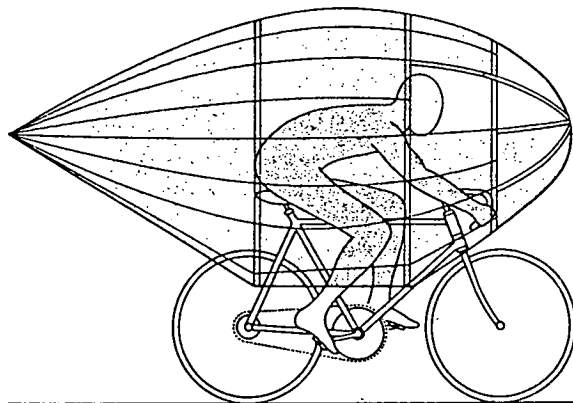
Allereerst wordt het verschil tussen de mechanistische en de realistische aanpak in het reken- en wiskunde-onderwijs uiteengezet. Bij mechanisme vallen de steekwoorden 'trucs' en 'kale sommen' op terwijl het realisme gesteld kan worden onder 'inzicht' en 'toepassingen'. Uit het rapport komt naar voren dat het realistische rekenonderwijs op de basisschool steeds meer terrein wint. Tevens is de inhoud van het wiskunde-onderwijs aan de bovenkant veranderd. Het eindexamen vwo is thans geënt op het speciaal ontwikkelde HEWET-materiaal, dat net als bij het realistische rekenonderwijs sterk toepassingsgericht is. Voor het havo vallen deze veranderingen op korte termijn te verwachten. Het tussengebied, mavo en lbo, komt hierdoor in de knel. Het wiskunde-onderwijs op mavo/lbo heeft namelijk een heel formeel karakter en is nauwelijks gericht op toepassingen. Dit leidt tot aansluitingsproblemen. Allereerst naar boven toe, waar de nieuwe wiskundeprogramma's voor havo en vwo gelden. Maar ook in de aansluiting tussen basis- en voortgezet onderwijs zullen fricties gaan optreden. Dit laatste onder meer doordat er in Nederland geen consensus bestaat over het eindniveau van het basisonderwijs. Er worden in het rapport duidelijke argumenten aangedragen voor de noodzaak van een goede afstemming op elkaar van de programma's bij de verschillende

overstappunten. Deze zijn van voorbeelden voorzien, waarbij vooral de magere vormgeving en opbrengsten van de mechanistische zienswijze op rekenen en wiskunde duidelijke taal spreken.

Om tot een oplossing van deze 'bottlenecks' te komen geven de NVvW en de NVORWO een drietal adviezen aan de Minister en zijn beide Staatssecretarissen:

- 1 Een startidee om met alle belanghebbenden tot een oplossing van het probleem van het eindniveau van het basisonderwijs te komen.
- 2 Intensivering van de vakgerichte opleiding en nascholing voor rekenen/wiskunde op de pabo en de nlo.
- 3 Instelling van een begeleidingscommissie 'Voortgezet rekenen en wiskunde 12-15 jaar'. Hierdoor zou zo spoedig mogelijk op het (doen) maken van concreet materiaal voor het mavo/lbo aangestuurd moeten worden. Tevens zou dit programma op korte termijn effecten moeten hebben tot wijziging van de mavo- en lbo-examens.

Exemplaren van het rapport zijn te verkrijgen door het overmaken van f 15,- per exemplaar (inclusief verzendkosten) op postrekening 143917 t.n.v. Ned. Ver. van Wiskundeleraren te Amsterdam onder vermelding van 'Long.planning'. Leden van de NVORWO en de NVvW betalen f 10,- per exemplaar.



Mededelingen

Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde Didactiek- conferenties

Alle conferenties, dus zowel C, D, E als F (zie de mededelingen in nummer van deze jaargang) kunnen doorgaan. Er zijn nog enkele plaatsen vrij. Aanmeldingsformulieren telefonisch aan te vragen bij L. Kuijk, 04490-1 10 66.

Ik was wiskundeleraar

In tegenstelling tot een eerder bericht kan het nieuwe boek van dr. Fred Goffree 'Ik was wiskundeleraar' besteld worden door overschrijving van f 10,- naar gironr. 143917 t.n.v. N.V.v.W. te Amsterdam, onder vermelding van 1 ex. boek Goffree.

De Penningmeester van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

CEVO Centrale examencommissie vaststelling opgaven schriftelijke examens lbo-mavo-havo-vwo Informatie C ID-examens 1986 Wiskunde

In 1986 wordt het wiskunde-examen voor LBO en MAVO beperkt tot één zitting van twee uren. De kandidaten krijgen één opgavenboekje waarin een twintigtal meerkeuzevragen en drie open opgaven zijn afgedrukt. De meerkeuzevragen betreffen in 1986 traditionele vierkeuzevragen met één antwoord goed; de drie open opgaven bestaan totaal uit zes à zeven vragen.

Alle vragen samen bestrijken zo goed mogelijk de gehele leerstof. (In 1986 worden voor het C-niveau in het CSE geen vragen over goniometrie gesteld). Het examen is zo samengesteld dat de meerkeuzevragen in een uur gemaakt kunnen worden, evenals de open vragen; de kandidaat kan uiteraard zelf de tijd indelen en kiezen in welke volgorde hij/zij de vragen beantwoordt. Om tijd te besparen zijn bij veel vierkeuzevragen weer tekeningen afgedrukt: deze dienen bij het uitwerken van de vragen benut te worden (als hulpmiddel). Beide onderdelen (meerkeuzevragen en open vragen) wegen bij de beoordeling even zwaar.

Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs Interne differentiatie in heterogene brugklassen bij wiskunde

Zojuist is verschenen het boek: 'Interne differentiatie in heterogene brugklassen bij wiskunde/Een empirisch-exploratief on-

derzoek naar de realisering en de resultaten van 'wiskunde voor iedereen' op een middenschool en een brede scholengemeenschap'. Het is het tweede interimrapport van het project 'Interne Differentiatie wiskunde-onderwijs 12-16 jarigen'. De uitvoering hiervan berustte bij de Vakgroep Onderwijskunde Utrecht (VOU) van de Rijksuniversiteit Utrecht. Onderzoekers waren: drs. R. Dekker, drs. P. Herfst, dr. J. Terwel (projectleider) en drs. D. van der Ploeg. Het boek is te bestellen door overmaking van f 32,50 op gironummer 4170900 t.n.v. SVO Den Haag, onder vermelding van de titel en het volledig verzendadres.

Vereniging Universitaire Lerarenopleiding in Nederland

Het jaarlijks congres van de VULON vindt in 1986 plaats op 27 en 28 februari in Epe. Congresthema: 'Veranderingen in onderwijs en samenleving. Een uitdaging voor de lerarenopleiding.' Congresbrochure en paperoproep zijn op aanvraag verkrijgbaar bij: Secretariaat Congrescommissie VULON, t.a.v. mw. G. Sjouw p/a SOLO, Herestraat 57a, 9711 LC Groningen. Tel. ('s ochtends) 050-11 8399/8325.

Pedagogisch didactisch instituut voor de leraarsopleiding Conferentie Wiskundendidactiek

Op 27, 28 februari, 1 maart 1986 wordt er in Ede een Open Conferentie Wiskundendidactiek gehouden. Er is gelegenheid tot het geven van/meedoen aan voordrachten, werkgroepen, studiegroepen. Nadere inlichtingen bij het Pedagogisch-Didactisch Instituut voor de Leraarsopleiding van de RU Utrecht, Heidelberglaan 2, 3584 CS Utrecht (of telefonisch bij de secretaresse Ria Becx, 030-53 3776).

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen
en correspondentie over deze rubriek
aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Oplossingen

529 Gevraagd werd de volgende constructies uit te voeren met behulp van liniaal en niet-verstelbare passer. Hieronder de methode die door Georg Mohr gevolgd werd.

De cirkels hebben alle als straal de door de niet-verstelbare passer vastgelegde afstand. De cijfers geven de volgorde van de bewerkingen weer.

I. WERCK-STUCK.



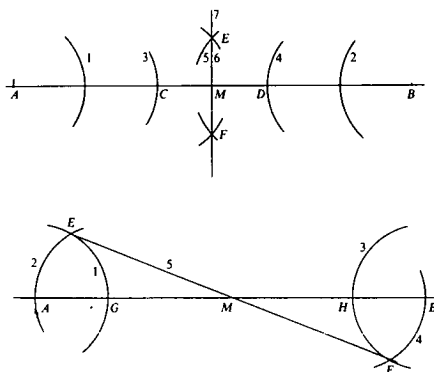
En voorgegeve rechte liny *AB* in twee gelijke deelen te deelen.

't Werk.

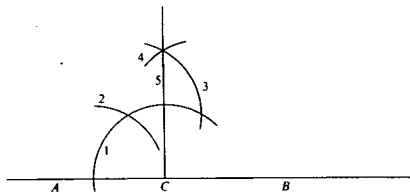
Soo men heeft gestelt eenige malen, uyt de eynden *A* en *B* de gegeve opening (als het van nooden is) in de liny *AB*, tot dat *CD* korter is als de gegeve opening, ende dan de kruys-snedden gemaect uyt *C* en *D*, als *E* en *F* daer door een rechte liny getrocken, de welke doorsnijdt *AB* in het midden in *M*.

Anders.

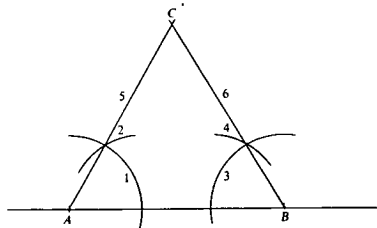
Stelt in *AB* de gegeve opening *AG* gelijk *BH* uyt *A* en *B* tot in *G* en *H*, hier uyt de bogens beschreven met de selvige opening, de eene boven de ander onder de liny *AB*, ende uyt *A* en *B* daer in gestelt de gegeve opening *AE* en *BF*, soo men nu treckt de rechte liny *EF*: die sal dan *AB* in 't midden in *M* doorsnijden na begeren.



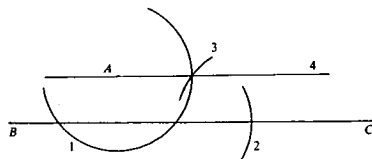
2 Construeer door *C* de loodlijn op de liny *AB*.



3 Construeer op lijnstuk *AB* een gelijkzijdige driehoek *ABC*.

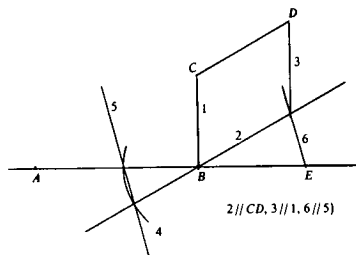


4 Construeer door *A* een lijn evenwijdig aan de liny *BC*.



Mocht de cirkel om *A* de liny *BC* niet snijden, dan richten we een loodlijn in een punt *P* op de liny *BC* op. Daarop passen we lijnstukken $PW_1, Q_1Q_2, \dots$ af, totdat de loodlijn in Q_n op de liny PQ_1 de cirkel wel snijdt.

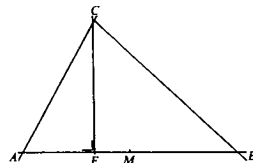
5 Verleng lijnstuk *AB* met een lijnstuk *BE* waarvoor $BE = CD$.



6 Constructie van de vierde evenredige.

Breng de drie gegeven lijnstukken in het gelid door middel van de vorige constructie. Daarna op de gebruikelijke manier de vierde evenredige vinden.

7 Construeer een driehoek met gegeven zijden.



$$\text{We weten dat } AF = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

M is het midden van de zijde *AB*. Dan is

$$MF = \frac{1}{2}c - AF = \frac{a^2}{2c} - \frac{b^2}{2c}$$

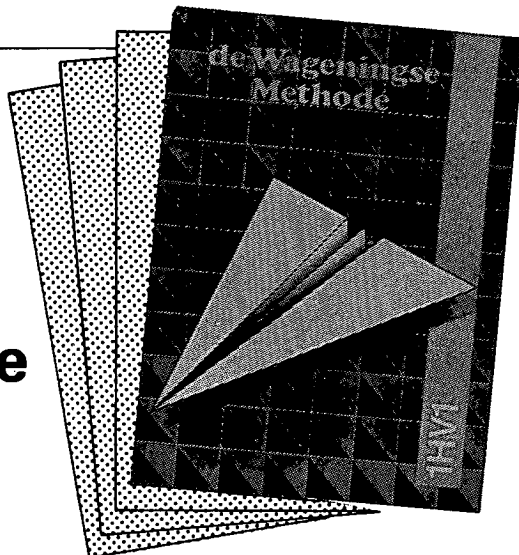
Met behulp van 1 vinden we *M* en met behulp van 6, 2 en 5 dan punt *C*.

We moeten nu nog één hobbel nemen. Om de lezer in de gelegenheid te stellen die zelf te nemen de volgende opgave.

533 Construeer met behulp van liniaal en niet-verstelbare passer de middelevenredige tussen twee gegeven lijnstukken. Bewijs dat elke constructie die met liniaal en passer uitgevoerd kan worden, ook uitgevoerd kan worden met liniaal en niet-verstelbare passer.

Zojuist
verschenen

De Wageningse Methode



Van deze wiskundemethode, ooit ontwikkeld door docenten van het Wageningse Lyceum in samenwerking met het IOWO, brengt Educaboek een editie in boekvorm* uit.

Zojuist is deel 1HV1 verschenen (voor klas 1 havo/vwo).

Voor eind 1985 is het leerstofpakket voor klas 1 havo/vwo compleet. In het voorjaar 1986 verschijnt het materiaal voor klas 2.

De Wageningse Methode:

- anticipeert op hedendaagse denkbeelden m.b.t. verantwoord wiskunde-onderwijs
- stelt de bevordering van het wiskundig inzicht centraal
- motiveert de leerling door de grote werkelijkheidswaarde van de problemen
- kiest de zelfwerkzaamheid van de leerling als uitgangspunt

De boekeditie sluit rechtstreeks aan op het HEWET-materiaal, ontwikkeld door de vakgroep OW & OC (ook een Educaboek-uitgave).

Een editie voor het mavo is in voorbereiding.

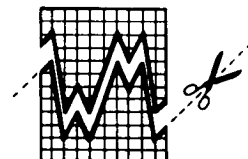
De Wageningse methode deel 1HV1/L. v.d. Broek / 1e druk / ISBN 9011 00731X / f 23,50

Voor nadere informatie of een beoordelingsexemplaar:



Educaboek

Postbus 48
4100 AA Culemborg
Tel. (03450) 71 880



Inhoud

P. G. J. Vredenduin: In memoriam Johan H. Wansink 129

Harrie Broekman en Johan M. J. Weterings: Gesloten vragen binnen de wiskunde: *nee* 130

J. Perrenet: Een transfertest voor wiskunde 137

P. G. J. Vredenduin: Als ... dan 145

F. Visser: Een wiskundeproject in Hamburg 151

A. Snauwaert: Een nieuw leerplan wiskunde in Vlaanderen 153

H. Nieland: Amsterdams wiskundige ontbindt snel met computer 157

Mededelingen 136, 144, 158

Boekbespreking 136

Recreatie 159

Longitudinale planning van het reken & wiskunde onderwijs in Nederland 158

Adressen van auteurs

H. G. B. Broekman, PDI, RU Utrecht, Heidelberglaan 2, 3584 CS Utrecht

H. Nieland, p.a. Dienst Wetenschapsvoorlichting, N.Z. Voorburgwal 120, 1012 SH Amsterdam

J. Chr. Perrenet, Groenburgwal 11, 1011 HR Amsterdam

A. Snauwaert, Sint Jacobsstraat 73, B-8900 Ieper, België

F. Visser, Parkstraat 47, 1506 WC Zaandam

P. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth

J. M. J. Weterings, Elzas 44 3524 RX Utrecht