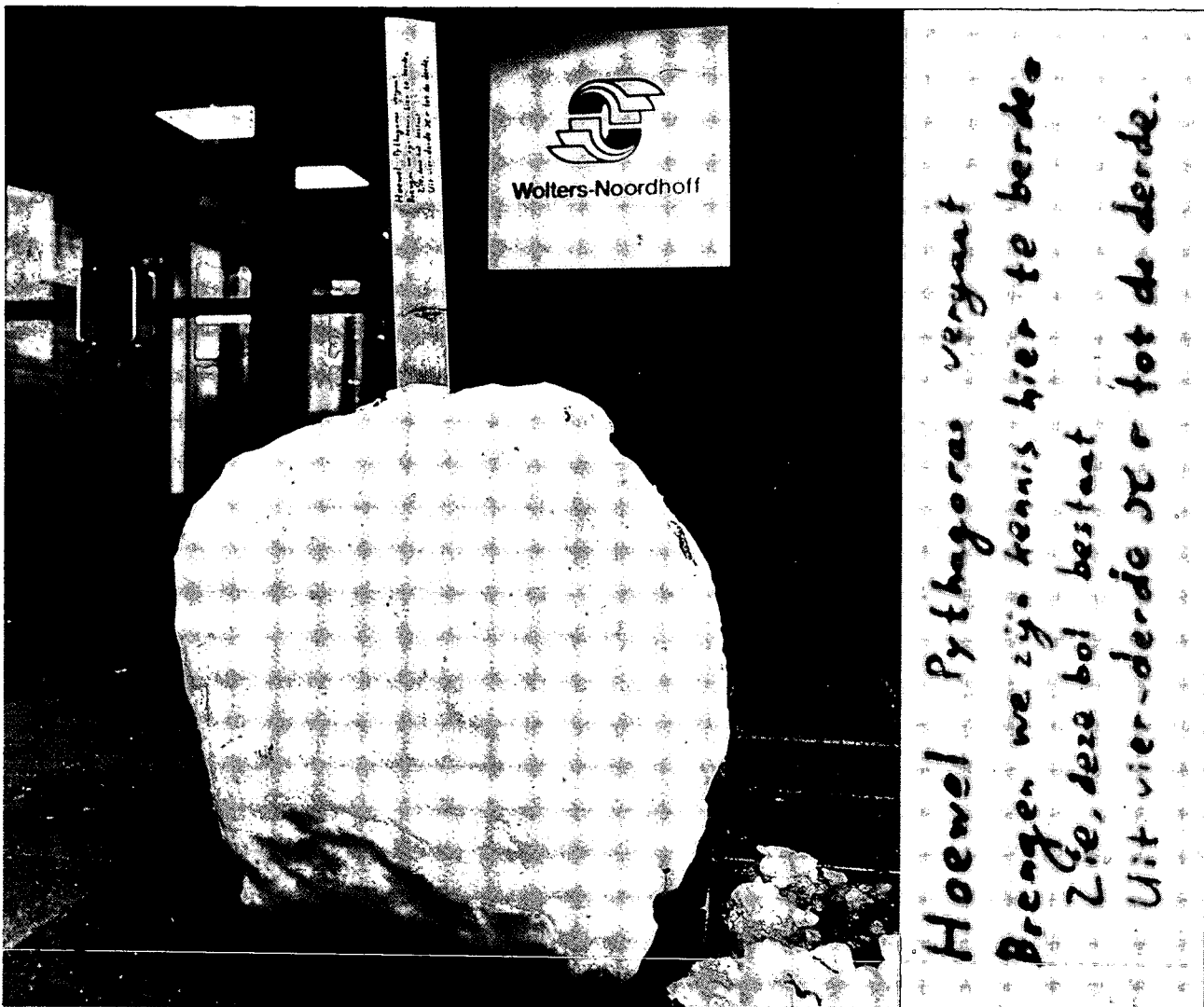


Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

61e jaargang
1985 | 1986
augustus | september



Euclides

1

Pythagoras-special

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Mw I. van Breugel
Drs F. H. Dolmans (hoofredacteur)
W. M. J. M. van Gaans
Dr F. Goffree
L. A. G. M. Muskens
Drs C. G. J. Nagtegaal
P. E. de Roest (secretaris, wnd. eindredacteur)
Mw H. S. Susijn-van Zaale
Dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12,
7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 50,- per verenigingsjaar;
studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de
V.V.W.L. f 35,-; contributie zonder Euclides f 30,-.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met
vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht
bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen,
tel. 08894-11730. Zij dienen met de machine geschreven
te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van
1 1/2. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos
5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is
opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs W. Kleijne, Treverilaan 39,
7312 HB Apeldoorn, tel. 055-550834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille
(buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5,
3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW
leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 42,40. Een collectief
abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 24,65.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567,
9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met
betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend
nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag
leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het
einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers f 7,- (alleen verkrijgbaar na
vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 39731 (Samsy).

ISSN 01.65-0394

Bij het begin van de 61e jaargang

Voor de komende jaargang van Euclides heeft de redactie diverse themanummers op stapel staan.

In het volgende Euclides-nummer staat een impressie over het Tweede Wiskunde Project. Dit is de Nederlandse bijdrage aan een internationaal onderzoek naar de stand van zaken van het wiskundeonderwijs in 32 landen. In het themanummer wordt het project beschreven en geven diverse auteurs er een mening over.

Later in het jaar volgt een themanummer over de wiskundeafdelingen van de lerarenopleidingen. We beschrijven dan de inrichting en de programmering van deze afdelingen vanuit de gedachte dat het voortgezet onderwijs zeker op langere termijn in belangrijke mate beïnvloed wordt door de wijze waarop nieuwe leraren opgeleid worden.

Onlangs is het HAWEX-rapport verschenen. HAWEX is het analogon van HEWET voor de bovenbouw van het havo.

Dit rapport beoogt inhoudelijke veranderingen van het wiskundeonderwijs in het havo plaats te laten vinden in de richting van meer contextrijke en toepasbare leerstof. Aanleiding genoeg om in deze jaargang de schijnwerpers ook op het huidige en het toekomstige wiskundeonderwijs in het havo te richten.

Pythagoras

In het dikke voor u liggende nummer wordt veel aandacht besteed aan het blad Pythagoras. Reden

daarvan is het feit dat Wolters-Noordhoff besloten heeft na 24 jaar de uitgave van Pythagoras te stoppen.

Juist omdat velen van ons als leraar en vaak ook nog als leerling via Pythagoras in aanraking zijn gekomen met de rijkdom en de uitgebreidheid van wiskunde geven we deze speelse terugblik op de periode 1961-1985.

De pythagoras-special is financieel mogelijk gemaakt door WN en is samengesteld door Klaas Lakeman, de huidige eindredacteur van Pythagoras.

Redactie

De Euclides-redactie heeft een belangrijke versterking gekregen door de benoeming van Auke Oosten tot eindredacteur. Auke is een oude bekende en heeft zo'n zeven jaar als redacteur aan Pythagoras meegewerkt.

Wim Kleynhe heeft in verband met zijn benoeming tot inspecteur bij het voortgezet onderwijs afscheid van de redactie genomen. Hij heeft jarenlang in de groep gezeten. Wim is secretaris van de redactie geweest in de tijd waarin die functionaris nog in z'n eentje het werk deed dat tegenwoordig door de hoofdredacteur, de secretaris van de redactie en de eindredacteur samen gedaan wordt. Later heeft hij talloze boekbesprekingen verzorgd. We danken hem hartelijk voor zijn grote inbreng.

Willy Broekema verzorgt na een onderbreking weer de produktie van ons blad bij Wolters-Noordhoff.

De samenwerking met de uitgever en het bestuur van de vereniging was opnieuw plezierig. We hopen dat uw blad een jaar lang steeds goed op tijd bij u in de bus valt.

Namens de redactie
Frans Dolmans, hoofdredacteur.

G. Krooshof/Bruno Ernst

Hans de Rijk
jaargang 1 t/m 24
G. Krooshof
jaargang 1 t/m 5
A. F. van Tooren
jaargang 3 t/m 15
A. B. Oosten
jaargang 6 t/m 13
H. J. Engels
jaargang 7 en 8
G. A. Vonk
jaargang 7 t/m 19
A. J. Elsenaar
jaargang 9 t/m 17
C. van der Linden
jaargang 9
R. H. Plugge
jaargang 9 t/m 12
W. Kleijne
jaargang 13 t/m 21
Henk Mulder
jaargang 14 t/m 24
Jan van de Craats
jaargang 19 t/m 24
Hessel Pot
jaargang 19 t/m 24
Luc Kuijk
jaargang 23 en 24
Klaas Lakeman
jaargang 23 en 24
Leo Wiegerink
jaargang 23 en 24

Pythagoras stelt zich voor!

De tijdgenoten van Pythagoras (hij leefde omstreeks 550 v. Chr.) zouden wel verbaasd geweest zijn, als ze hadden geweten, dat diens naam zou voortleven door de meetkundestelling, die in de kop van dit tijdschrift is afgebeeld.

Misschien zouden ze nog verbaasder zijn geweest, als ze hadden geweten, dat ongeveer 21 eeuwen na het bestaan van hun vereerde leermeester of, zoals anderen hem zagen, die wonderlijke filosoof, een wiskundetijdschrift voor jongeren zich naar hem zou noemen.

Maar hier ligt dan het eerste nummer van dat tijdschrift voor je. Genoemd naar iemand, voor wie de wiskunde behoorde tot het meest wezenlijke van zijn leven. Bijvoorbeeld, omdat de wiskunde voor hem tot uitdrukking bracht de harmonie van het heelal, waarin de Griekse mens zich het middelpunt voelde. Of omdat de ontroering van de muziek der snareninstrumenten een gevolg bleek te zijn van eenvoudige verhoudingen van gehele getallen. Ook omdat de wiskunde een uitdrukking was voor de hem omringende wetmatigheden. Zoals de wetmatigheid van de rechthoekige driehoek uitgedrukt in het simpele, maar veelzeggende $a^2 + b^2 = c^2$.

Voor ons heeft de wiskunde een andere betekenis. Wij worden niet meer ontroerd door de harmonie in het heelal. Wij dringen de zonnestelsels binnen. En de wiskunde is ons daarbij een hulpmiddel, een stuk gereedschap. Gereedschap, dat we nodig hebben op allerlei andere terreinen van ons leven. Dat echter ook slechts gehanteerd kan worden door hen, die het door en door hebben leren kennen. De

behoefte aan mannen en vrouwen, die de wiskunde hebben leren hanteren en kunnen gebruiken in allerlei takken van techniek, wetenschap en handel wordt steeds groter.

Ook voor ons is de wiskunde geworden tot het meest wezenlijke van ons leven. Echter op een andere manier dan voor Pythagoras. Wij kunnen en moeten de wiskunde hanteren, terwijl we er misschien innerlijk koud bij blijven. Voor Pythagoras en zijn volgelingen was de wiskunde in de eerste plaats een zaak van het gemoed en de geest.

We hopen, dat het tijdschrift Pythagoras voor zijn lezers twee doeleinden mag bereiken: belangstelling te wekken voor de wiskunde als gereedschap, dat in ons leven van vandaag onmisbaar is, maar daarnaast ook en vooral de innerlijke vreugde te verschaffen, die verbonden kan zijn aan het denken over wiskundige problemen.



- Iemand heeft een vierkant houten blad, dat 36 cm lang is. Hij moet hieruit rechthoeken zagen van 5 bij 8 cm. De rechthoeken mogen niet uit kleinere stukken samengesteld worden. Nu vraagt hij: Hoeveel rechthoeken kan ik op deze wijze maximaal verkrijgen?
Op hoeveel manieren kan dit?

- Geke Goosen, leerlinge van klas 5B van de Gem. h.b.s. voor meisjes te Groningen zond ons de volgende vraag in:

Hoe kan dit?

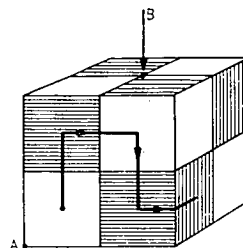
- a. $-45 + 25 = -36 + 16$
- b. Dus $\frac{81}{4} - 45 + 25 = \frac{81}{4} - 36 + 16$
- c. Of $(\frac{9}{2} - 5)^2 = (\frac{9}{2} - 4)^2$
- d. Dus $\frac{9}{2} - 5 = \frac{9}{2} - 4$
- e. Zodat $5 = 4$

- Welke cijfers stellen de letters A, B en C in de volgende optelling voor?

$$\begin{array}{r} AAA \\ BBB \\ CCC \\ \hline BAAC \end{array}$$

Ruimte-puzzels

- 1 Elk zijvlak van een kubus is in vier vierkanten verdeeld.
Kan een tor zó over de kubus lopen, dat hij alle vierkanten maar éénmaal bezoekt?
- 2 Wat is de kortste weg voor de tor om van A (hoekpunt links onderaan) naar B (middenpunt van het bovenvlak) te lopen?



Een wiskundeclub in Haarlem

De heer J. J. A. Harbrink Numan, leraar aan het Lourens Costerlyceum te Haarlem, zond ons een afschrift van een circulaire, die hij bij Pythagoras op zijn school had doen uitreiken. In deze circulaire schijft hij o.a.:

Het denkbeeld is bij mij opgekomen op onze school een 'Wiskundeclub' of 'Studiekring' of welke andere naam ook geschikt is, te stichten.

Begin niet te schrikken van dit woord; de bedoeling is minder erg dan het lijkt. Om te beginnen wil ik aansluiten op artikelen en problemen die in Pythagoras behandeld worden. Ik kan mij voorstellen dat deze artikelen en problemen nadere toelichting behoeven; ik kan mij ook voorstellen, dat sommige artikelen verdere belangstelling opwekken.

Het is uiteraard niet de bedoeling het toch al zware schoolprogramma verder te belasten; eenmaal in de vier of zes weken een bijeenkomst lijkt mij voldoende.

Mocht je er iets voor voelen, zeg mij dit dan. Zelfs met een zeer klein clubje (bijv. 4 personen) lijkt het mij de moeite waard de proef eens te nemen.

De mogelijkheden van de moderne rekenliniaal

Speciaal nummer van Pythagoras 1962

Inleiding

Al vrij vroeg in de loop van zijn geschiedenis kreeg de mens er behoefte aan de verschijnselen om zich heen in getallen uit te drukken. Met deze getallen moest gerekend worden. Oorspronkelijk waren de berekeningen zeer eenvoudig en het aantal mensen, dat zich daarmee bezig hield, was gering. Dat zelfs de eenvoudigste berekeningen zeer tijdrovend waren (men denke aan de Egyptische wijze van vermenigvuldigen en delen en hun ingewikkelde manier van rekenen met breuken) was daarbij geen bezwaar.

In onze moderne maatschappij is dat heel anders: iedereen moet kunnen rekenen en een groot aantal mensen moet zelfs regelmatig vrij ingewikkelde berekeningen uitvoeren. Er zijn nu ook hulpmiddelen om deze berekeningen *snel* te kunnen uitvoeren. Een van de vruchtbaarste en goedkoopste is wel de rekenliniaal. Men moet wat tijd en moeite eraan besteden om de nodige routine te krijgen, maar deze tijd en moeite staan in geen enkele verhouding tot het gemak, dat men een leven lang van dit hulpmiddel heeft.

Om te laten zien, welke rijke mogelijkheden dit instrument heeft, op welke eenvoudige wijze het werkt en op welke wiskundige grondslagen het berust, is dit extra-nummer van Pythagoras geheel aan de rekenliniaal gewijd. Misschien, dat het gebruik van de rekenliniaal, dat in Nederland nog te weinig verbreid is, erdoor gestimuleerd wordt.

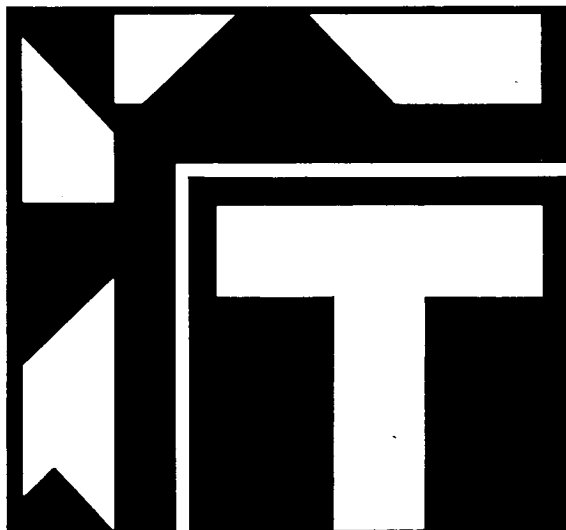
De volgende onderwerpen komen in dit nummer ter sprake:

- 1 Hoe nauwkeurig is een rekenliniaal?

- 2 Het principe van de rekenliniaal. Hoe je er zelf een kunt maken.
- 3 De bouw van de rekenliniaal.
- 4 Een knutselwerkje. Hoe we het bijgevoegde model gebruiken.
- 5 Het aflezen van de schaalverdeling en het schatten van de uitkomst.
- 6 De regel van de gelijke verhoudingen en het verplaatste schalenpaar.
- 7 Delen.
- 8 We lossen vierkantsvergelijkingen op.
- 9 De schalen krimpen in (kwadraten, derdemachten, wortels).
- 10 Pasklaar voor de sinusregel.
- 11 De LL-schalen, een machtig hulpmiddel.
- 12 Rekenlinialen met grote nauwkeurigheid.
- 13 Overige schalen en merktekens.
- 14 De keuze van een rekenliniaal.
- 15 Een grote rijkdom aan mogelijkheden.

'T'-puzzel

Trek met behulp van carbonpapier de vier getekende stukken op stevig karton over. Het is nog beter ze op triplex over te trekken en ze dan uit te zagen. Probeer met deze vier stukken de gegeven figuur 'T' te leggen. Het zal je niet meevallen, maar het kan! Bij een onderzoek bleek dat 40% van de proefpersonen er langer dan 10 minuten voor nodig had. 30% gaf het na 15 minuten speuren geheel op. En jij?



De voorjaarsprijsvraag

Het probleem

Wiskunde studeren betekent voor het grootste gedeelte: nieuwe stof opnemen en verwerken. Het is niet produktief, er worden geen nieuwe methoden gezocht en geen nieuwe problemen aangesneden. De opgaven in de boeken geven je het gevoel van meelopen in een lange stoet: dezelfde vraagstukken zijn reeds door miljoenen vóór jou opgelost en er zullen nog miljoenen na je komen om dezelfde opgaven te maken. Deze toestand is volkomen normaal.

Vergeet echter niet, dat je met de wiskunde-kennis die je nu hebt, óók oorspronkelijk werk kunt doen. Op elk niveau is dat mogelijk, je hoeft er niet mee te wachten tot je een uitgebreide wiskunde-kennis vergaard hebt. Om dit soort werk te stimuleren willen we eenmaal in het jaar een prijsvraag uitschrijven: er wordt een probleem opgegeven, dat op velerlei wijze wiskundig uit te werken is.

Je gaat erop studeren, je tekent, denkt, slaat vele zijwegen in die blijken dood te lopen, tot je eindelijk een of meer vruchtbare aanknopingspunten vindt. Dat is niet het werk van één avond, maar het resultaat van een lange tijd met het probleem rondlopen. Dat is de eerste fase. Dan ga je het gevondene ordenen tot een logisch geheel en schrijft dit op in de vorm van een verhandeling. Deze hoeft zich niet te beperken tot het behandelen van de resultaten, ze kan ook de vruchteloze pogingen beschrijven die aangewend zijn vóór een redelijke oplossing gevonden werd.

Het is duidelijk dat twee verhandelingen over hetzelfde probleem, die vrijwel tot dezelfde oplossing(en) komen, toch nog veel in kwaliteit kunnen verschillen.

Een hotelhouder heeft een klein dakterras met uitzicht naar alle windstreken. De mensen komen daar 's zomers graag om van het fraaie uitzicht te genieten. Vanzelf gaan de bezoekers zich interesseren voor de markante punten in het landschap: in welke plaats staat die kerktoeren? Wat is dat voor een gebouw? Waar loopt die weg naartoe? enz. Ten gerieve van de bezoekers wil de hotelhouder midden op het dakterras een panoramakaart opstellen van de omgeving, zodat ze zelf op kunnen zoeken wat ze in de verte zien.

We zouden de hotelhouder kunnen adviseren een kaart van zijn omgeving te kopen bij de Topografische Dienst, maar die kaart heeft een groot nadeel: ze lijkt helemaal niet op wat de bezoeker van het dakterras ziet. Deze ziet nl. alles wat dichtbij is veel groter en gedetailleerder dan wat veraf is. De afstanden krimpen a.h.w. in, hoe dichter zijn blik de horizon nadert. Hij zou een kaart willen laten maken die ook enigszins deze eigenschap vertoont.

De opgave is nu, een of meer manieren aan te geven, waarop zo'n kaart getekend kan worden uitgaande van een gegeven topografische kaart. Bovendien moet je één van deze manieren praktisch uitwerken, dus zo'n kaart maken voor een bepaalde plaats en voor een zelf gekozen hoogte boven de grond.

Je moet de opdracht zo ruim mogelijk nemen: heb je 4 kaarten nodig op 4 punten van het dakterras, doe dat dan. Wil je een ringvormige kaart, ook goed. Vind je een aardige manier om bijzondere punten op de horizon aan te geven ... verwerk dat er dan in.

Voor de 3 beste verhandelingen worden prijzen van f25,—, f10,— en f5,— uitgelooft.

Zorg er voor dat je verhandeling in goed leesbare vorm tot ons komt: schrijf duidelijk en let ook op de stijl.

De verhandelingen moeten vóór 1 mei 1962 ingezonden worden. (Die uit Nw. Guinea, Suriname en de Nederlandse Antillen vóór 1 juni 1962.)

Een eerste kennismaking met vectoren

Extra nummer voor de tweede jaargang

Inleiding

Simon Stevin (1548-1620) staat in de geschiedenisboekjes meestal vermeld als uitvinder van een zeilwagen en als vestingbouwer voor Prins Maurits. Hij was een veelzijdig man, die ook op het gebied van de wiskunde veel geschreven heeft. We beginnen dit nummer van Pythagoras met het vermelden van zijn naam, omdat hij een der eersten was, die vectoren gebruikte om krachten voor te stellen, hoewel hij de naam 'vector' nog niet invoerde.



Deze werd voor 't eerst gebruikt door de Engelse wiskundige W. R. Hamilton (1805-1865). 'Vector' is Latijn en betekent 'drager'. 'De vector is de drager van het begrip kracht, snelheid, enz.', zal Hamilton waarschijnlijk bedoeld hebben.

De vectoren zijn van groot belang geweest voor de ontwikkeling van de natuurkunde. Ze spelen bijvoorbeeld een belangrijke rol in het beroemde boek 'Electricity and Magnetism' van J.C. Maxwell (1873).

Het is vanzelfsprekend niet mogelijk in de 30 bladzijden van dit extra nummer van Pythagoras meer te geven dan een eerste kennismaking met vectoren. We zullen daarin nauwelijks iets merken van de betekenis van de vectoren voor de natuurkunde. Wel zal het, naar we hopen, duidelijk worden, dat de wiskundige theorie van de vectoren ook in de meetkunde zijn toepassingen kan vinden en daar zelfs heel elegante bewijzen kan verschaffen voor stellingen, die zonder vectoren maar moeilijk te bewijzen zouden zijn.

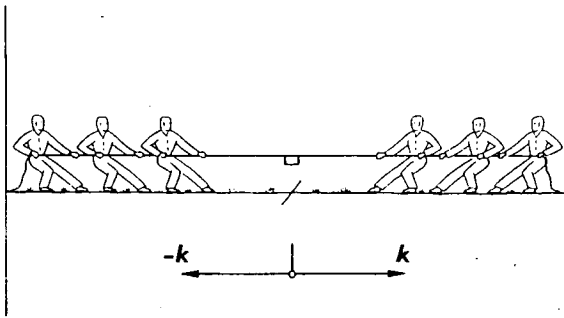
In hoofdstuk I wordt gesproken over het verschil tussen vectoren en getallen. In hoofdstuk II zien we hoe de som van twee vectoren wordt bepaald. In de hoofdstukken III en IV wordt het optellen van meer dan twee vectoren bestudeerd, terwijl in V wordt besproken hoe een vector met een getal wordt vermenigvuldigd. Van de zo ontwikkelde theorie vinden we dan de eerste toepassingen in hoofdstuk VI, waarin wordt onderzocht hoe met behulp van vectoren zwaartepunten gevonden kunnen worden. Om de lezers in de gelegenheid te stellen te toetsen of ze het voorgaande begrepen hebben, zijn in hoofdstuk VII enkele oefeningen opgenomen.

In de laatste tijd is de wiskundige behandeling van de vectoren steeds belangrijker geworden. Er zijn hele theorieën gebouwd op het begrip vector, o.a. de Lineaire Algebra. In dit nummer van Pythagoras proberen we ook iets te laten zien van de kenmerken van deze algebra. Daarom is het rekenen met vectoren (het optellen, het vermenigvuldigen) steeds vergeleken met het rekenen met getallen. We zijn zo gewend aan de regels voor het rekenen met getallen, dat we ons er meestal niet meer van bewust zijn, dat we die gebruiken. Het

vergelijken van het rekenen met vectoren en het rekenen met getallen maakt het ons duidelijk hoe nodig het is, dat we deze regels zorgvuldig formuleren. In hoofdstuk VIII gebeurt dat voor het vermenigvuldigen van vectoren. In hoofdstuk IX volgen weer enkele toepassingen van de in het voorafgaande hoofdstuk gevonden regels, waarbij we zien, hoe fraai sommige meetkundige bewijzen hiermee kunnen worden gegeven. In hoofdstuk X tenslotte wordt even een blik geworpen op het moderne begrip vectorruimte, waarbij het oorspronkelijke begrip vector wel wat op de achtergrond geraakt en vervangen wordt door een stel definities, die ons in de gelegenheid stellen heel uiteenlopende verzamelingen van wiskundige 'dingen' te behandelen, alsof het vectoren waren. In dit hoofdstuk zien we dus iets van de neiging, die in de wiskunde bestaat, om alle onderwerpen steeds abstracter te behandelen.

I Vectorgrootheden en scalaires

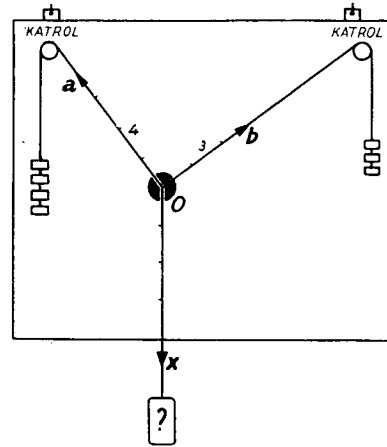
- 1 Touwtrekken was vroeger dikwijls een der programmapunten van feesten, die op nationale feestdagen werden georganiseerd. Onder de aanmoedigende kreten van de omstanders trachtten de beide ploegen elkaar over de streep te sleuren. Wanneer ze echter even sterk waren kon het gebeuren, dat het vlaggetje in het midden van het touw een tijdlang niet van plaats veranderde.



Figuur 1

Dan was er een situatie ontstaan, die in figuur 1 op eenvoudige wijze met twee pijlen is aangegeven. Twee krachten, die van de ene ploeg en die van de andere, hielden elkaar in evenwicht. Ze waren even groot, maar tegengesteld gericht. Daarom staat bij de pijlen in figuur 1 k en $-k$.

- 2 In figuur 2 zijn drie krachten met elkaar in evenwicht. Aan de schijf O zijn nl. drie koorden bevestigd. Aan elk der koorden hangt een gewicht. Daardoor zijn er drie krachten, die proberen de schijf van zijn plaats te trekken. Is het gewicht aan het verticale koord bijv. te klein, dan zal O omhoog glijden.



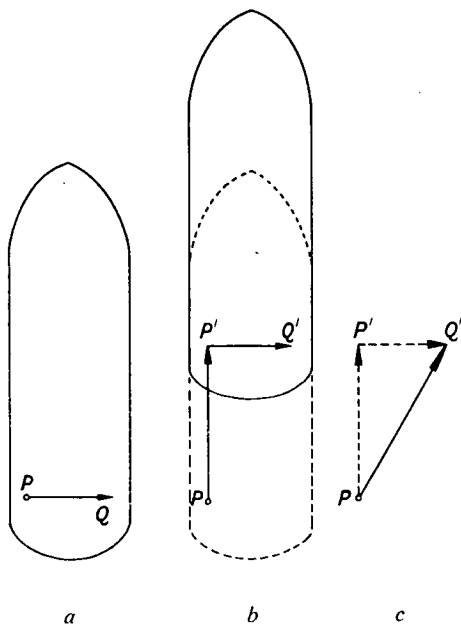
Figuur 2

Elk der krachten is voorgesteld door een pijl. De grootte van de kracht wordt aangegeven door de lengte van de pijl. Zie bijvoorbeeld de pijl, die de kracht van 4 eenheden moet voorstellen. Deze is 4 halve centimeters lang, terwijl de pijl, die de kracht van 3 eenheden voorstelt 3 halve centimeters lang is.

Door proefnemingen kan men laten zien, dat de verticale kracht x 5 eenheden groot moet zijn, wil hij de beide andere in evenwicht houden. In hoofdstuk II-2 zullen we zien, dat deze grootte ook met behulp van de pijlen gevonden kan worden.

- 3 Er zijn, vooral in de natuurkunde, allerlei grootheden, die niet alleen een grootte hebben, maar waarvan ook de richting gegeven moet zijn. Eenvoudige voorbeelden daarvan zijn krachten, snelheden, versnellingen en verplaatsingen. Van de verplaatsingen bekijken we nog eens een voorbeeld:

De Heer A loopt over een schip van P naar Q . In figuur 3a is zijn verplaatsing over het schip aangegeven met de pijl $\overrightarrow{PQ}$.



Figuur 3

Een toeschouwer aan de wal ziet de Heer A lopen, maar bemerkt, dat tegelijkertijd het schip zo vaart, dat op het ogenblik, dat de Heer A in Q gearriveerd is, het punt P op de plaats P' is aangekomen en dus Q in Q' (figuur 3b). Eigenlijk heeft de Heer A zich dus verplaatst van P naar Q' , wat in figuur 3c door een pijl is aangegeven.

Een verplaatsing kan men door een pijl voorstellen, die de richting van de verplaatsing aangeeft en waarvan de lengte een maat is voor de grootte van de verplaatsing. Grootheden, die zo afgebeeld kunnen worden, noemen we *vectorgrootheden*. De pijlen noemen we *vectoren*.

In figuur 3c staat dus getekend de vector $\overrightarrow{PQ'}$. In het vervolg zullen we vectoren soms aanduiden door begin- en eindpunt met hoofdletters te schrijven en daarboven een pijl te plaatsen. Dikwijls zullen we echter een vector met één letter aanduiden. Deze zal dan, om hem te onderscheiden van een letter, die getallen voorstelt, *vet cursief* gedrukt worden. Zo stelt dus a een getal, $\mathbf{a}$ een vector voor.

4 Niet alle grootheden hebben een richting. Denk maar aan temperatuur, de grootte van de bevolking van een stad, het aantal verkeersongevallen in januari, enz. Wel kan men dikwijls een schaalver-

deling maken en de grootte van het getal daarop aangeven of aflezen, zoals bij de thermometer. (In sommige steden zijn op opvallende plaatsen grote schaalverdelingen aangebracht, waarop het aantal verkeersongevallen wordt aangegeven). Grootheden als deze noemt men *scalaire grootheden*.

(Latijn: scale = trap, schaal).

VII Enkele oefeningen

De plaatsruimte in dit nummer of in de volgende nummers van Pythagoras laat niet toe van de oefeningen uitwerkingen op te nemen.

- 1 Teken 3 vectoren van gelijke grootte zo, dat hun som de nulvector is.
- 2 Teken 2 vectoren $\mathbf{a}_1$ en $\mathbf{a}_2$ van gelijke grootte. Wat valt er te zeggen van de ligging van de vectoren $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ en $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$? (Beschouw verschillende liggingen van de gegeven vectoren $\mathbf{a}_1$ en $\mathbf{a}_2$).
- 3 Gegeven zijn 5 vectoren $\mathbf{a}_1$ tot en met $\mathbf{a}_5$ zo, dat hun som de nulvector is. (De 5 vectoren hebben alle verschillende richting). Ga na, dat nu ook $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) + (\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) + (\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5) + (\mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_1) = \mathbf{0}$.
Stel $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{d}_1$; $\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{d}_2$ enz.
Hoe kan men grootte en richting van de vectoren $\mathbf{d}_i$ construeren?
Wat is de meetkundige betekenis van het feit, dat $\sum_{i=1}^5 \mathbf{d}_i = \mathbf{0}$ is?
- 4 Gegeven is een viervlak $D.ABC$. Men kan de vector $\overrightarrow{AB}$ beschouwen als de som van drie vectoren, die in richting en grootte overeenstemmen met ribben van $D.ABC$. Welke? Op hoeveel manieren kan het?
- 5 Gegeven zijn twee vectoren $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ en $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Laat zien, dat ieder punt van het vlak van deze twee vectoren kan worden aangewezen door een vector $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$, waarin λ en μ reële getallen zijn.
- 6 Gegeven is een viervlak $O.ABC$. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. Laat zien, dat elk punt van vlak ABC aangewezen kan worden door een vector

$\overline{OP} = a + \lambda(b - a) + \mu(c - a)$, waarin λ en μ reële getallen zijn.

7 Welke betrekking bestaat er tussen de vectoren a , b , c en d , als hun eindpunten hoekpunten zijn van een parallellogram.

8 Gegeven zijn een vector a en twee rechten l en m , die met a in eenzelfde vlak liggen.

Laat in een figuur zien, dat het mogelijk is de vectoren p_1 en p_2 zo te bepalen, dat $a = p_1 + p_2$, terwijl $p_1 \parallel l$ en $p_2 \parallel m$.

9 Gegeven zijn een vector a en drie niet in één vlak liggende rechten l , m en n . Men kan nu drie vectoren p_1 , p_2 en p_3 vinden zo, dat $a = p_1 + p_2 + p_3$, terwijl $p_1 \parallel l$, $p_2 \parallel m$ en $p_3 \parallel n$.

Laat dat in een figuur zien.

10 Bewijs met behulp van vectoren, dat het meetkundige zwaartepunt van een $\triangle ABC$ samenvalt met het meetkundige zwaartepunt van de driehoek, gevormd door de middenparallelle van $\triangle ABC$.

Kan dat?



Drie variaties op hetzelfde thema

- 1 Zouden er op aarde 2 mensen zijn, die precies hetzelfde aantal haren op hun hoofd hebben?
- 2 Zouden er in een grote bibliotheek 2 boeken moeten zijn, waarin blz. 35 met dezelfde letter begint?
- 3 Een school heeft 400 leerlingen. Is het noodzakelijk zo, dat 2 leerlingen op dezelfde dag jarig zijn?



Denkertjes

- Het is mogelijk op verschillende manieren tussen de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bewerkingstekens te plaatsen, zodat er een berekening ontstaat, waarvan het resultaat 100 is. B.v.

$$1 - (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) + 6 + 7 + (8 \cdot 9) = 100$$

$$\text{Of: } 1^{2345} + 6(7 + 8) + 9 = 100.$$

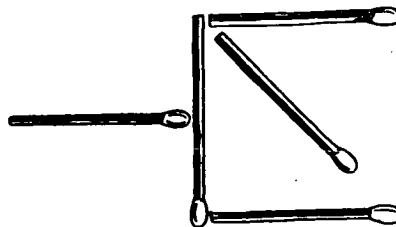
Probeer eens dergelijke mogelijkheden te vinden. De getallen 1 tot en met 9 moeten daarbij hun natuurlijke volgorde houden.

- Welke bijzonderheid geldt voor de drie *ongelijke* getallen a , b en c , als gegeven is $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$? Zijn al die voorwaarden nodig?

- Is er een stel op elkaar volgende natuurlijke getallen a , b , c en d , dat voldoet aan: $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$? Ingezonden door J. H. Schurink, Scheveningen.

Tijdverdrijf

Vier lucifers vormen een stofblik, je weet wel zo'n blik behorende tot het paar 'veger en blik'. De schuinliggende vijfde lucifer is het vuil. Verleg nu twee lucifers zo, dat het vuil naast het blik komt te liggen.



Wiskunde? Nee, maar deze puzzel vraagt precies hetzelfde vermogen om figuren in gedachten een andere structuur te geven als vele planimetrie-opgaven.

Woordenboek

Topologie

uit het Grieks. *Topos* = plaats; *logos* = leer.

Transitief

uit het Latijn. *Transire* = overgaan. Een relatie R heet transitief, als uit aRb en bRc volgt aRc .

Geen Nederlands woord voor 'graph'?

De heer J. W. Perdeck te Amersfoort schrijft: In het nieuwste nummer van Pythagoras wordt op bldz. 22 de 'graph' ingevoerd. Een goede Nederlandse naam zou er niet voor bestaan. Dat is echter onjuist. Op het Mathematisch Centrum in Amsterdam heeft men, vooral op de statistische afdeling, van meet af aan strijd gevoerd tegen de 'Engelse ziekte' en met succes. Eén van de vondsten, al jaren geleden, van Prof. Dr. J. Hemelrijk was het scherpe Hollandse 'KNOOPSEL' voor het nietszeggende Grieks-Engelse woordje 'GRAPH'. Zie bijvoorbeeld het M. C. Rapport S 268 van Ir. A. R. Bloemena: 'Het aselekt kiezen van knopen in een knoopsele.' Het is van 1960.

Antwoord aan de heer Perdeck

Toen we de voorbereidingen troffen voor het plaatsen van de artikelenserie over graphen, hebben we ons over de Nederlandse terminologie laten inlichten door een kenner van de graphentheorie van de Amsterdamse Universiteit. Deze adviseerde ons de term 'graph' te blijven gebruiken. Aangezien ook wij liever Nederlandse dan Engelse woorden gebruiken stellen we het op prijs, dat u ons wijst op het woord, dat de statistische afdeling van het Mathematisch Centrum gebruikt. Des te meer past de mededeling daarvan in dit nummer van Pythagoras, omdat we juist in dit nummer een artikel hebben opgenomen over knopen. Onze lezers bemerken dan dat de knopen inderdaad in de wiskunde een belangrijke rol spelen, al zijn het dan niet altijd knopen in touwtjes. Overigens lijkt het ons het beste, dat we in de artikelen over graphen deze naam maar blijven gebruiken. We zijn er nu al zo aan gewend en hoewel een spreekwoord zegt: 'Beter ten halve gekeerd, dan ten hele gedwaald', we dwalen toch niet zo heel erg, als we onze lezers zelf de keuze laten maken of ze in het vervolg de naam 'knoopsel' willen gebruiken?

Asymptoot

Uit het Grieks. Letterlijk: 'niet ontmoetend'.

Coördinaten

Afkomstig van een uit het Grieks vertaalde Latijnse uitdrukking, die ongeveer betekent: in een bepaalde richting trekken. Het woord 'coördinaten' werd door Leibniz (1646-1716) in de wiskunde ingevoerd.

Cycloïde

van het Griekse woord *kyklos* = cirkel.

Exact

nauwkeurig, volkomen. Van het Latijnse werkwoord *exigere* = ten einde brengen.

Graph

uit het Grieks: *graphein* = tekenen, schrijven.

Inductie

uit het Latijn: *inducere* = heenleiden. In de logica is inductie de redeneermethode, waarbij men uit een aantal bijzondere gevallen tot een algemene stelling besluit. Tegenover inductie staat deductie, *deducere* = afleiden.

Matrix

uit het Latijn: *matrix* = stam, het woord is afgeleid van *mater* = moeder. Het woord werd door Sylvester (1814-1897) in de wiskunde ingevoerd in de betekenis van rechthoekig lettertableau.

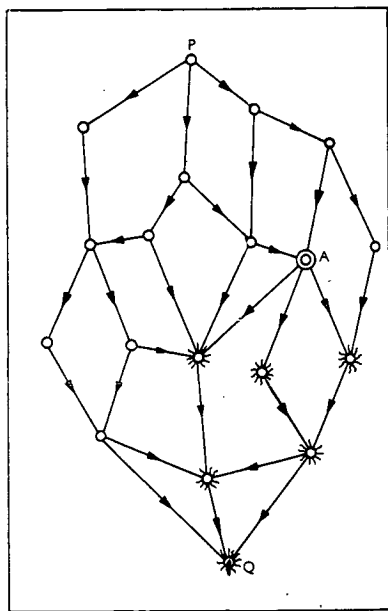
Segment

uit het Latijn: *secare* = snijden.

Een spel met graphen

Prof. Dr. H. Freudenthal

In de figuur is een gerichte, eindige graph met één onderste en één bovenste hoekpunt afgebeeld. Wie het spel met deze graph wil spelen, doet er goed aan deze of een dergelijke graph op grotere schaal over te tekenen. In een *gerichte* graph is in elke kant door een pijl aangegeven in welke richting deze kant doorlopen moet worden. De pijlen in de figuur maken het duidelijk, dat P het bovenste hoekpunt is en Q het onderste. We zullen zeggen, dat een hoekpunt *hoger* ligt dan een ander, als men de kanten van het eerste naar het tweede in de richting van de pijlen moet doorlopen. Vanzelfsprekend ligt dan het tweede hoekpunt *lager* dan het eerste.



Het spel wordt met twee spelers gespeeld. Om beurten zetten ze een schijf (knoop, muntstuk) op een der hoekpunten. *Daardoor blokkeren ze alle lager gelegen hoekpunten.* D.w.z. dat op de geblokkeerde hoekpunten geen schijven meer geplaatst mogen worden. Wordt er bijv. een schijf geplaatst op het hoekpunt A in de figuur dan zijn daardoor alle met een 'zonnetje' voorziene hoekpunten geblokkeerd. De tegenspeler mag daar dus geen schijven meer plaatsen.

Wie gedwongen is het hoekpunt P te bezetten, heeft verloren.

Men kan bewijzen, dat de beginner, als hij goed speelt, altijd kan winnen, hoe de ander ook speelt, en wel geldt dit voor elke gerichte graph met één onderste en één bovenste hoekpunt.

Een oplossing

Ingezonden door H. Maassen

Gegeven: een willekeurige gerichte graph G met een bovenste en een onderste punt.

De graph die ontstaat als men het onderste punt Q van G weglaat, noem ik G' .

Twee spelers A en B (A begint) spelen op G .

Zouden A en B op G' spelen, dan zouden er twee mogelijkheden zijn, die elkaar volkomen uitsluiten en aanvullen:

- 1 Er is een winnende strategie voor A .
- 2 Er is geen winnende strategie voor A , d.w.z. dat B ooit eens een zet kan doen, zodat A niet wint en dus verliest. Zou in G' zich de eerste situatie voordoen, dan kan A de zetten doen in G , die corresponderen met die van de winnende strategie in G' ; van het onderste punt ondervindt hij geen hinder, daar dit reeds na A 's eerste zet geblokkeerd is. Zou in G' de tweede situatie zich voordoen, dan bezet A in G het onderste punt en houdt dan G' over om dit aan B voor te leggen. B moet dan verliezen, omdat hij geen winnende strategie heeft.

Moderne Wiskunde

Op 1 augustus 1968 is in Nederland de Wet op het voortgezet Onderwijs, beter bekend als de Mammoetwet, in werking getreden.

Het is genoegzaam bekend dat de komst en de uitvoering van deze wet niet overal met gejuich gepaard gaan.

In kritische beschouwingen die de laatste maanden veelvuldig in allerlei bladen te lezen zijn geweest komt regelmatig de wiskunde naar voren als één van de vakken die een bijdrage leveren aan de moeilijkheden.

Inderdaad is het wiskunde-onderwijs nogal ingrijpend gewijzigd bij de invoering van de Mammoetwet en blijktbaar wordt dit niet door iedereen als een vooruitgang beschouwd. Althans niet door de bezorgde moeder die een ingezonden stuk plaatste in het augustusnummer van het maandblad *Resonans*, waarin onder meer voorkomt:

We werden heden zeer verblijd
met een boek vol zwaarigheid
'k voelde prompt: 'k Ben uit de tijd
Kroost van mij, dat wordt een strijd

...
Element, Venndiagram
Variabele Rimram,
De mammoet dat geweldig dier
wordt fluks geveld, met veel plezier.

...
Onderzoekt men hier misschien
Of hij 't lekker *niet* kan zien?
Is dit misschien alleen voor knappen,
die al die tekens zo maar snappen?

...
Als poging in te laten zien
dat je met elf of twaalf jaar
maar een Hannes bent of Trien
dan is de zaak volkomen klaar
U bent geslaagd, Proficiat
Het was een koud, een ijskoud bad.

De toon van het gedicht is zodanig dat het ons niet waarschijnlijk lijkt dat deze moeder een fervent lezeres van Pythagoras is. Toch willen we proberen een paar misverstanden op te helderen, al was het alleen maar omdat de inzender wel niet de enige zal zijn die wat moeite heeft met de ontwikkelingen. Ook is het zo dat het gros van de lezers zijn carrière op een school voor voortgezet onderwijs zal zijn begonnen voor het in werking treden van de mammoetwet. De kans is dus groot dat familieleden of burens wel worden ingewijd in de geheimen der 'moderne wiskunde', terwijl dit voor jezelf niet is weggelegd. Een reden te meer om er in Pythagoras eens aandacht aan te besteden.

Allereerst dit: *De mammoetwet en de moderne wiskunde hebben eigenlijk niets met elkaar te maken.*

De modernisering van het wiskunde-onderwijs is een internationaal verschijnsel. In de Verenigde Staten is deze ontwikkeling op gang gekomen na de lancering van de eerste Russische kunstsatelliet in 1957. De toen aan het licht tredende achterstand van de V.S. veroorzaakte een soort schrikreactie, die een drastische herziening van het onderwijs ten gevolge had. Men noemt dit wel het 'Spoetnik-effect'.

In Europa heeft vooral een conferentie in 1959 van de O.E.E.S. (Organisatie voor Europese Economische Samenwerking) een stimulans gegeven aan de modernisering.

Onder meer door de steeds groter worden achterstand van de schoolwiskunde op de wetenschappelijke ontwikkeling van de exacte vakken kunnen we zeggen dat verandering inderdaad echt nodig was. De invoering van de mammoetwet bood in Nederland een goede gelegenheid hiervoor, maar de verandering zou zonder mammoetwet evenzeer zijn gekomen.

Wat houdt nu de 'moderne wiskunde' in?

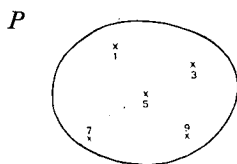
Het voorafgaande zou de indruk kunnen wekken dat het aanpassen aan de vooruitgang van de wetenschap inhoudt dat het allemaal verschrikkelijk moeilijk geworden is. Zou dit zo zijn dan zou het een averechts effect zijn. Eén van de overwegingen bij de invoering van het nieuwe programma is namelijk geweest dat de wiskunde nu eens af moet van het stempel dat het een moeilijk vak is. Niet

alleen voor het 'image', maar ook omdat in de toekomst steeds meer mensen nodig zullen zijn met een goede wiskundige ondergrond. We hopen in het volgende ook een beetje te laten zien dat het allemaal wat meevalt, dat het niet alleen is 'voor de knappen, die al die tekens zo maar snappen'.

De schoolwiskunde bestond voor de lagere klassen altijd uit 'algebra' en 'meetkunde'. Twee vakken die wel wat verband met elkaar hielden, maar die toch een eigen bestaan leidden. De inhoud van beide vakken was honderden, zo geen duizenden jaren oud. Speciaal de vlakke meetkunde was eigenlijk rechtstreeks afkomstig van Euclides, die ongeveer 300 v. C. leefde. De ontwikkeling van de verzamelingenleer, op gang gebracht door de Duitse wiskundige Georg Cantor, ongeveer honderd jaar geleden, is echter zo belangrijk dat opname in de schoolwiskunde niet uit kon blijven.

Het begrip verzameling is zo elementair dat iedereen het kent en er dagelijks mee omgaat. Bijvoorbeeld een lijn is een verzameling van punten en een elftal een verzameling voetballers (of handballers). Dingen die tot een verzameling behoren heten elementen van die verzameling. Een verzameling wordt schematisch wel weergegeven in een figuur die Venn-diagram wordt genoemd. Bij voorbeeld: P is de verzameling getallen 1, 3, 5, 7 en 9. (notatie: $P = \{1, 3, 5, 7, 9\}$)

Venn-diagram: P



Figuur 1

Gewoon een gesloten kromme lijn, met daarin op willekeurige plaatsen de vijf getallen weergegeven in de vorm van een kruisje.

Verzamelingen vormen zo ongeveer het cement waarmee allerlei onderdelen van de wiskunde aan elkaar worden gemetseld.

Hierbij kan men vaak gebruik maken van voorbeelden uit het dagelijks leven: Neem

$P = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ en $Q = \{\text{Anno, Enno, Ibo, Otto, Ubbo}\}$ (de vijf zonen van de heer en mevrouw Halenga). Tussen Q en P bestaat de relatie: ... heeft als leeftijd in jaren ...

Op de eerste open plaats kan een element van Q worden ingevuld, op de tweede een element van P . Dus Anno heeft als leeftijd in jaren 1 (of 3, 5, 7 of 9). We tekenen dit zo



Figuur 2

Uit elk element van Q vertrekt één pijl naar een element van P . (twee pijlen mogen wel hetzelfde eindpunt hebben, met andere woorden: er mag wel een tweeling bij zijn.)

We zeggen nu dat de verzameling Q op de verzameling P wordt afgebeeld. In de algebra kom je afbeeldingen tegen van getallenverzamelingen op elkaar, we noemen het dan functies.

In de meetkunde kun je werken met afbeeldingen van puntverzamelingen op elkaar, zoals bij spiegelen, draaien en verschuiven het geval is.

In vrijwel alle oudere meetkundeboekjes komt een definitie voor zoals:

Twee figuren zijn congruent als ze na verplaatsing kunnen samenvallen.

Met verplaatsing werd dan bedoeld: spiegeling, verschuiving of draaiing, of een combinatie hiervan. Deze *transformaties* werden op zichzelf niet bekeken, in tegendeel er werden snel een vier- of vijftal congruentiekenmerken voor driehoeken opgespoord, waaraan de zaak verder werd opgehangen. In de meeste moderne boeken wordt de meetkunde niet meer opgebouwd via de congruentiegevallen, maar via de transformaties.

Het na elkaar uitvoeren van spiegelingen, draaiingen en verschuivingen kun je een *bewerking* noemen binnen de verzameling van transformaties. Het blijkt dan dat deze bewerking aan de bekende eigenschappen voldoet, waaraan ook bewerkingen in getallenverzamelingen voldoen.

In de verzameling Z van de gehele getallen geldt bijvoorbeeld voor de optelling:

- 1 Bij elk tweetal elementen a en b bestaat een element c , zodat $a + b = c$.
- 2 Voor elk tweetal elementen a en b geldt $a + b = b + a$.
- 3 Voor elk drietal elementen a , b en c geldt $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- 4 Er bestaat een neutraal element, 0 , zodat voor elke a geldt $a + 0 = 0 + a = a$.
- 5 Bij elk element a bestaat een element a' , zodat $a + a' = a' + a = 0$ (We schrijven $a' = -a$.)

Op grond van deze eigenschappen heet de verzameling van gehele getallen een *groep* ten aanzien van de optelling (zelfs een *commutatieve groep*).

Ook het samenstellen van transformaties in de meetkunde leidt tot dit begrip groep. Een voorbeeld hiervan hebben we gegeven in het laatste nummer van de vorige jaargang van *Pythagoras*, terwijl ook het vijfde nummer van de zesde jaargang hieraan was gewijd.

Behalve het begrip verzameling, dat de mogelijkheid geeft meer eenheid in de presentatie van de verschillende onderdelen van de wiskunde te brengen, staan er andere nieuwe onderwerpen op het programma, zoals statistiek, waarschijnlijkheidsrekening en vectoren, terwijl de opname van computerkunde nog wordt overwogen.

Aan al deze onderwerpen is in de loop der jaren meer dan eens aandacht besteed in *Pythagoras*.

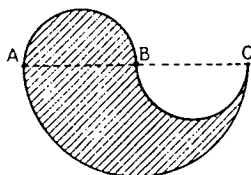
De trouwe lezer van ons blad mag zich dan ook met een gerust hart 'modern' noemen.



Denkertjes

- De rand van deze figuur bestaat uit drie halve cirkels, terwijl $AB = BC$. Verdeel de figuur in twee delen van gelijke oppervlakte.

Ingezonden door J. M. Pekelharing.

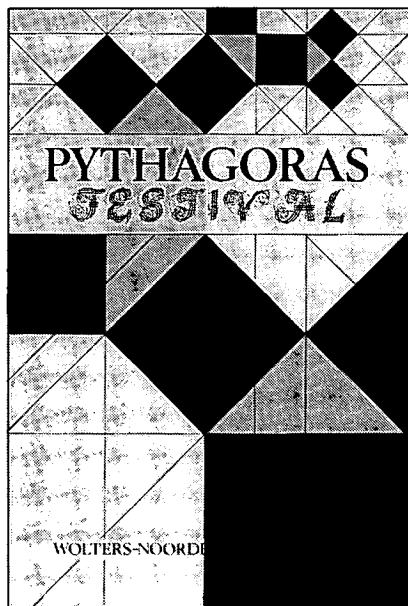


Klantenservice

Pythagorasfestival

Het is niet de gewoonte dat in dit blad boekbesprekingen en recensies worden opgenomen. Ook deze keer maken we daar geen uitzondering op, maar we willen toch melding maken van de verschijning van *Pythagoras-festival*.

Het ligt voor de hand dat we geen oordeel over dit boek zullen geven: Het bevat een aantal bijdragen uit de eerste acht jaargangen van *Pythagoras*. Met deze selectie hebben we een tweeledig doel nagestreefd: te voldoen aan de vraag van leraren en leerlingen naar vroeger verschenen artikelen en de verspreiding van deze artikelen onder een groter publiek.



Bij de keuze van de inhoud is rekening gehouden met de uitslagen van de verschillende enquêtes die we in de loop der jaren onder de lezers hebben gehouden.

De artikelen zijn opnieuw bewerkt en voor zover mogelijk gerangschikt volgens bepaalde thema's, die zo goed en zo kwaad als het ging van een hoofdstuktitel zijn voorzien.

De uitgave is verschenen bij Wolters-Noordhoff nv, de introductieprijs voor abonnees bedraagt f 7,90, bij bestelling voor 1 december 1970, daarna bedraagt de prijs f 10,50.

Prenten van Escher

Tot de onderwerpen die in vroegere jaargangen veel waardering genoten, behoren de besprekingen van een aantal prenten van Escher. Ook nadat we hiermee gestopt waren kregen we nog veel vraag naar deze besprekingen. En geen wonder, houtsneden, houtgravures, lithos en mezzotinten van M. C. Escher vormen een klasse apart en zijn beroemd over de gehele wereld.

We zijn de heer Escher dan ook bijzonder dankbaar dat we ter gelegenheid van het tienjarig bestaan van Pythagoras van een zestal creaties afdrukken op groot formaat aan onze abonnees kunnen aanbieden.

Het zijn de prenten:

Dag en nacht	formaat 81 × 46 cm
Belvedere	formaat 61 × 40 cm
Boven en Onder	formaat 63 × 25 cm
Hol en Bol	formaat 57 × 47 cm
Balkon	formaat 36 × 29 cm
Prententoonstelling	formaat 34 × 34 cm

De eerlijkheid gebiedt te zeggen dat waarschijnlijk niet aan alle aanvragen zal kunnen worden voldaan. De oplage is beperkt, bestellingen worden vanzelfsprekend op volgorde van binnenkomst afgehandeld.

De platen worden in twee series van drie geleverd:

Serie 1: Dag en Nacht, Hol en Bol, Prententoonstelling

Serie 2: Belvedere, Boven en Onder, Balkon

De prijs *per serie* bedraagt: f 6,00.

De boom van Pythagoras

Toen Ir. Bosman op het idee kwam om de stelling van Pythagoras als basis te nemen van een reeks-ontwikkeling van figuren, kostte het hem niet veel moeite de schematische vorm en de buitencontouren van de figuur te berekenen. Hoe deze figuur, de boom van Pythagoras, er werkelijk zou uitzien, bleek pas na meer dan 1200 uur tekenwerk!

Velen die het origineel in kleuren zagen, hebben gevraagd om een goede kleurenreproductie op groot formaat.

De abonnees van Pythagoras kunnen deze kostbare prent bestellen voor f 1,90, zijnde voornamelijk de verpakings- en verzendkosten.

U gelieve de bijgaande kaart in te vullen en in te zenden en gelijktijdig f 1,90 over te maken op postgiro nr. 1308949 ten name van Wolters-Noordhoff nv te Groningen onder vermelding van: 1 ex. Pythagorasboom.



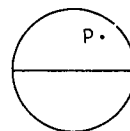
- Een boer heeft 10 bomen. Hoe moet hij ze plaatsen, opdat er 5 rijen van 4 bomen ontstaan?
Ingezonden door R. Kegel, Rotterdam.

- Gegeven is een cirkel met een middellijn (maar niet met het middelpunt) en een punt P. Hoe construeer je, alleen met een liniaal, een loodlijn vanuit P op deze middellijn?

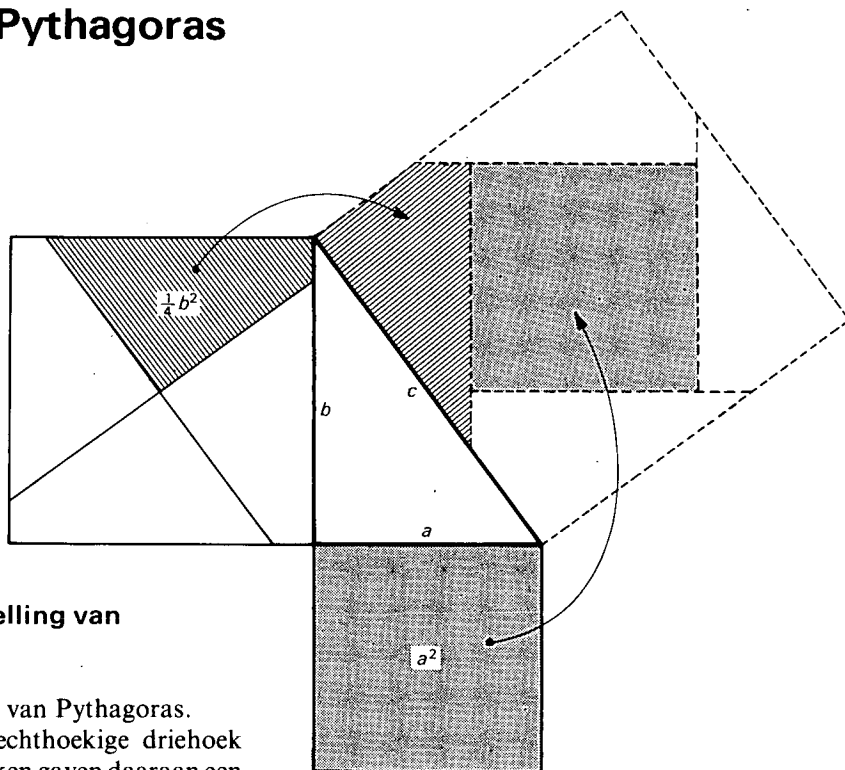
Mag het punt ook buiten de cirkel liggen?

Ingezonden door Hans Brouwers.

Derde klas h.b.s. van het Hendric van Veldeke college te Maastricht.



De stelling van Pythagoras



Knippatroon voor de stelling van Pythagoras

Je kent natuurlijk de stelling van Pythagoras. Deze zegt dat voor elke rechthoekige driehoek geldt: $c^2 = a^2 + b^2$. De Grieken gaven daaraan een meetkundige zin door te stellen: de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde is de som van de oppervlakten van de vierkanten op de rechthoekszijden.

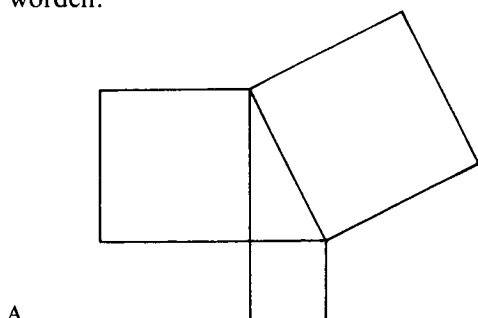
Door knippen zou je kunnen onderzoeken of dat waar is. Hierboven staat het knippatroon.

De verdeellijnen voor het linkervierkant krijg je aldus: neem het midden van dat vierkant en trek een lijn evenwijdig aan de schuine zijde en één loodrecht daarop.

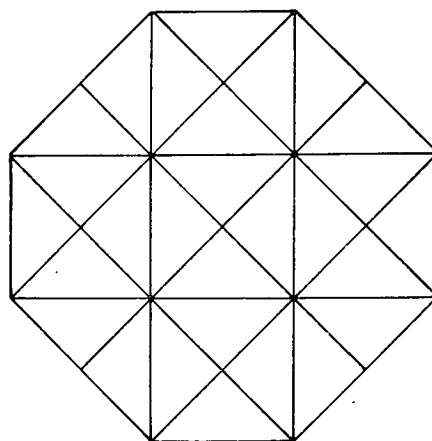
Het schuine vierkant wordt nu duidelijk de som van de beide andere. Door de desbetreffende 5 stukjes te verplaatsen kan het vierkant c^2 gelegd worden.

Hoeveel vignetten?

Hoeveel keren komt de meetkundige voorstelling van de stelling van Pythagoras, zoals in figuur A, maar dan met gelijkbenige driehoeken, voor in de tegel van figuur B?



A



B

Mooie machtensommen

Hessel Pot

$$\begin{aligned}5^2 &= 4^2 + 3^2 \\6^3 &= 5^3 + 4^3 + 3^3 \\15^4 &= 14^4 + 9^4 + 8^4 + 6^4 + 4^4 \\12^5 &= 11^5 + 9^5 + 7^5 + 6^5 + 5^5 + 4^5 \\28^6 &= 23^6 + 22^6 + 21^6 + 20^6 + 18^6 + 16^6 + 15^6 + 13^6 + 12^6 + 9^6 + 7^6 + 6^6 + 5^6 + 4^6 + 2^6 + 1^6 \\102^7 &= 90^7 + 85^7 + 83^7 + 64^7 + 58^7 + 53^7 + 35^7 + 12^7\end{aligned}$$

Getallenrelaties zoals hierboven hebben waarschijnlijk niet méér belang dan dat ze wellicht je nieuwsgierigheid wat prikkelen: Hoe zijn zulke relaties te vinden? Zijn er nog meer? Wat zijn de eenvoudigste? Dit stukje maakt hier een paar opmerkingen over.

De bovenste is overbekend. Maar ook de tweede lijkt de moeite van het onthouden zeker waard!

De splitsingen van 15^4 en van 12^5 zijn rechtstreeks met je rekendoosje te controleren.

Voor de controle van 28^6 en van 102^7 zul je ook wel wat papier nodig hebben.

Voor wat betreft nog hogere exponenten kennen we alleen nog de gigantische splitsingen van 1827^8 in 127 achtestemachten, en van 9339636^9 in 90 negendemachten.

Bij de lagere exponenten zijn er veel meer van dergelijke splitsingen bekend. We geven er hieronder nog een aantal. Daarbij is soms nog één grondtal door een letter vervangen, waarmee we je willen uitdagen dit getal zelf te bepalen.

Welke splitsing is het 'mooist'?

Je kunt hier verschillende maatstaven voor aanhouden:

- 1 In de gegeven voorbeelden is steeds *het te splitsen getal zo laag mogelijk* gekozen. (Gelijke termen rechts sluiten we uit, zoals in: $3^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$.)
- 2 Een andere maatstaf is, om te zoeken naar *een splitsing in een minimum aantal termen*.

Bij de derdemachten is geen reductie mogelijk, maar bij de vierdemachten kan er wél een term af. Bijvoorbeeld in (bepaal zelf a):

$$a^4 = 315^4 + 272^4 + 120^4 + 30^4.$$

Of het voor vierdemachten ook in 3 termen kan, is niet bekend. (Wel als we ook *afrekken* toelaten, bijvoorbeeld $158^4 = 134^4 + 133^4 - 59^4$.)

Bij vijfdemachten blijken er zelfs twee termen af te kunnen:

$$b^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5.$$

Deze splitsing is in 1966 (per computer, wat dacht je!) gevonden. Er werd een twee eeuwen oud vermoeden van Euler mee weerlegd, die meende dat het aantal termen in een dergelijke splitsing altijd *minstens* zo groot is als de exponent. Hier zijn er echter maar 4 termen, bij een exponent 5.

- 3 Ook kun je nog zoeken naar splitsingen met *openvolgende grondtallen*, en dan liefst nog vanaf grondtal 1. Voorbeelden:

$$\begin{aligned}c^2 &= 24^2 + 23^2 + 22^2 + \dots + 2^2 + 1^2 \\d^2 &= 28^2 + 27^2 + 26^2 + \dots + 19^2 + 18^2 \\e^3 &= 14^3 + 13^3 + 12^3 + 11^3 \\f^3 &= 69^3 + 68^3 + 67^3 + \dots + 7^3 + 6^3\end{aligned}$$

(Goed te gebruiken zijn hier de formules $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = [(2n+3)n+1]n/6$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = [(n+2)n+1]n^2/4$, zie 'Somformules', jrg. 20-3.)

Meervoudige splitsingen

Voorbeelden:

$$65^2 = 63^2 + 16^2 = 60^2 + 25^2 = \\ = 56^2 + 33^2 = 52^2 + 39^2$$

$$g^3 = 106^3 + 38^3 + 24^3 = 104^3 + 51^3 + 13^3 = \\ = 96^3 + 72^3 + 12^3 = 90^3 + 72^3 + 54^3 = \\ = 89^3 + 82^3 + 15^3.$$

Enkele van deze splitsingen zijn niet 'primitief', d.w.z. dat ze nog te vereenvoudigen zijn door het uitdelen van een gemeenschappelijke factor.

Oneindig veel

Het vinden van al deze splitsingen is ten dele uiterst moeilijk, maar soms toch ook vrij eenvoudig. De manier om oneindig veel heeltallige oplossingen te vinden voor de vergelijking $z^2 = x^2 + y^2$ is vrij bekend, we geven die hier niet.

Van de vergelijking $t^3 = x^3 + y^3 + z^3$ zijn oneindig veel (maar niet alle!) heeltallige oplossingen te vinden door in de formule

$$a^3(a^3 + b^3)^3 = b^3(a^3 + b^3)^3 + \\ + a^3(a^3 - 2b^3)^3 + b^3(2a^3 - b^3)^3$$

voor a en b gehele getallen in te vullen.

Probeer b.v. $(a, b) = (2, 1)$ of $(a, b) = (2, -1)$. Of misschien kun je er een hele serie door de computer laten uitrekenen.

De juistheid van de formule is eenvoudig aan te tonen door het uitschrijven van de machten.

Negatieve en gebroken exponenten

Voor de exponent -1 geldt nog bijvoorbeeld

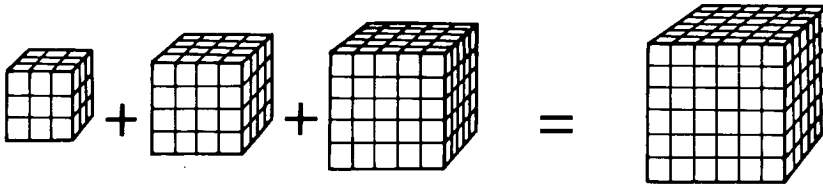
$$2^{-1} = 3^{-1} + 6^{-1}$$

Maar voor andere negatieve exponenten lijken geen splitsingen te bestaan.

Daarentegen is het met *gebroken* exponenten geen kunst. Probeer maar.

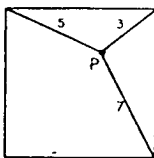
$$18^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}$$

$$54^{\frac{1}{3}} = 16^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$$



Even lekker rekenen

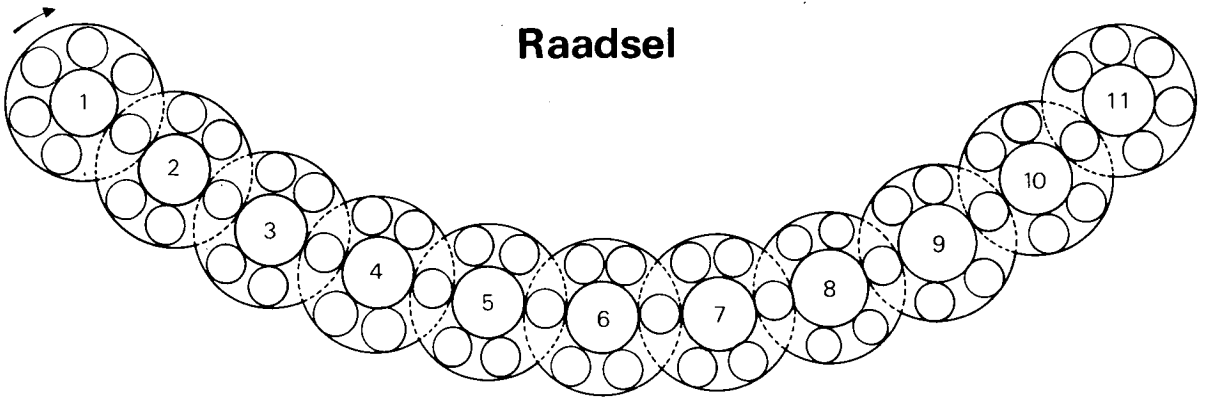
Hoe groot is de zijde van het vierkant?
P mag ook buiten het vierkant liggen.



Goochelen met cijfers

Laat iemand de cijfers van 1 t/m 9 opschrijven, uitgezonderd de 8. Zoek het cijfer op, dat het slordigst geschreven is. Laat dan het getal 12345679 vermenigvuldigen met $9 \times$ dit cijfer. Was het bijv. de 4, dan laat je vermenigvuldigen met 36. De uitkomst bestaat dan uit niets dan viertjes. Kun je dit verklaren?

Raadsel



Rondom ieder van de getallen 1 t.e.m. 11 zijn twee concentrische cirkels getekend en binnen de ring steeds een verzameling van zes kleine cirkeltjes.

Schrijf in negatieve richting in elke ring een woord van zes letters volgens onderstaande omschrijving. In elk cirkeltje één letter. Vind zelf uit in welk cirkeltje de beginletter van een woord behoort.

Wanneer alle elf woorden goed worden ingevuld is in de cirkeltjes op dezelfde rij als de getallen 1 t.e.m. 11 een wiskundig begrip te lezen, dat een belangrijke rol speelt bij veel vergelijkingen.

- 1 Inverse van de vermenigvuldiging.
- 2 Een wiskundige die een logaritmentafel samenstelde.
- 3 Hoek die bij een cosinuswaarde behoort.
- 4 Vermenigvuldigingsgetal.
- 5 Straal.
- 6 Verzameling extreme waarden.
- 7 Nog een verzameling extreme waarden.
- 8 Deelverzameling van de verzameling parallelogrammen.
- 9 Begrip uit de logica.
- 10 Eigenschap van een functie.
- 11 Hoekmaat.



Denkerijes

- Iemand heeft 8 knikkers, waarvan er 7 hetzelfde gewicht hebben, één weegt iets minder. We hebben alleen een balans tot onze beschikking, zonder gewichten. Hoe kunnen we in twee wegingen vinden, welke die lichte knikker is?
Ingezonden door Harry W. Wierda, Haarlem.
- Hoeveel maal passeren de grote en de kleine wijzer van een klok elkaar in een etmaal?
- $\triangle ABC$ is rechthoekig in B. Teken de halve cirkels, die AB, BC en CA als middellijn hebben en die buiten $\triangle ABC$ liggen. Construeer de raaklijnen aan deze halve cirkels, die evenwijdig zijn met AB en BC. Bewijs, dat deze raaklijnen een vierkant insluiten.

Bol en Cirkel

Een globe heeft een middellijn van 10 cm. Door de noordpool steekt een pin naar buiten. We nemen nu een lang dun stuk koord, bevestigen het aan de pin en gaan het om de globe wikkelen. We trekken het koord steeds secuur strak aan en zorgen dat het ook steeds tegen de globe aankomt. We gaan met dit wikkelen door tot we bij de evenaar zijn. Verder tekenen we een cirkel met een middellijn van 10 cm op een vlakke plank, slaan een pin op de plaats van het middelpunt en gaan ook hieromheen van hetzelfde koord wikkelen tot we bij de cirkelomtrek gekomen zijn. De vraag is nu: Hoe verhoudt zich de lengte van het koord dat op de bol zit tot dat, wat op de plank zit?

Veel lezers reageerden op de inhoud van Pythagoras of wendden zich met nogal uiteenlopende problemen tot de redactie. Voor zover mogelijk werden al deze reacties beantwoord, maar zoals menig een wel zal begrijpen, niet gepubliceerd.

Misbruik van Pythagoras

Een hevig verontwaardigde lezer schreef eens:
Tijdens de wiskundeles is mij door de leraar al verscheidene malen strafwerk opgegeven, namelijk het overschrijven van stukjes uit Pythagoras. Nu wil ik u vragen of dat is toegestaan.

De redactie antwoordde met:
Het overschrijven van stukjes uit Pythagoras is niet verboden. Het is wel verboden om ze te verkopen. Je mag dus geen strafwerk door een vriendje laten maken en hem daarvoor betalen.

Pythagoras en het buitenland

Zelfs in het buitenland is Pythagoras niet onbekend.

Zo werden in het Australische zuster tijdschrift 'Function' in de jaren 1982-83 enkele artikelen in vertaling overgenomen.

En wat te denken van de volgende brief die de redactie in 1967 bereikte?

*Mijne Heren,
Het volgende zal u wellicht interesseren omdat er uit blijkt hoe in een plaats dichtbij de Russisch-*

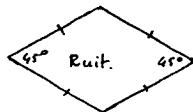
Mongoolse grens het door u uitgegeven 'Pythagoras' bekend is en blijkbaar op prijs gesteld wordt.

In de 'Mathematical Gazette' plaatste ik een oproep waarin ik vroeg wie mij kon helpen aan een paar boeken die nog ontbreken aan mijn grote verzameling op het gebied van de recreatieve mathematica. Een reactie hierop ontving ik uit Semipalatinsk, de hoofdstad van Kazakstan, een Russische deelstaat aan de grens van Mongolië. Een afschrift van deze brief zend ik u hierbij ingesloten. Mij werd daarin een der gevraagde boeken aangeboden, zij het in het Russisch, en in ruil voor twee jaargangen van 'Pythagoras, wiskundetijdschrift'. Ik vind het hoogst merkwaardig dat men daar het door u uitgegeven tijdschrift kent! Ik wil graag tegemoetkomen aan de wens van de man in Semipalatinsk en daarom verzoek ik u 1) mij twee complete jaargangen (bij voorkeur 1965 en 1966) toe te zenden; 2) mij zelf te noteren als abonnee met ingang van de zesde jaargang en 3) mij ook toe te zenden de nummers 5 en 6 van de vijfde jaargang die ik nog mis. Wilt u ...

Onuitroeibaar: puzzeltjes

Het aantal puzzeltjes dat ingezonden werd, was nauwelijks te tellen. Veel daarvan werd gepubliceerd, zeker in de eerste jaargangen. Veel puzzeltjes werden niet goed bevonden, maar soms was er ook wel eens een die per ongeluk bleef liggen, zoals bijvoorbeeld deze.

*Geachte Heer,
Dit is een niet zo simpele opgave.
Probeer*



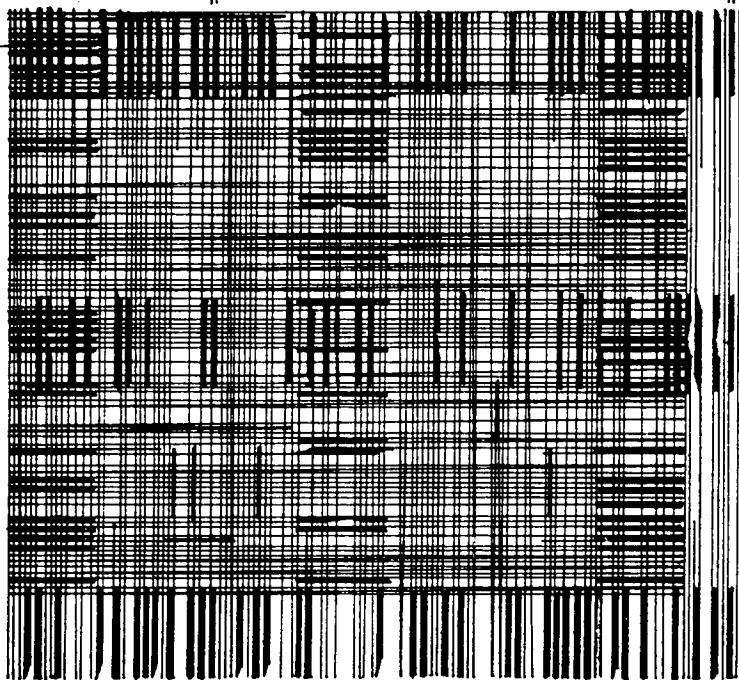
in zo min mogelijk stukken te knippen, zodat



*ontstaat, bij een andere samenvoeging.
Om ook de redactie het genot van wat puzzelen te gunnen stuur ik de oplossing t.z.t.*

C. van Schagen, Leusden

Pi in code



Een gewone girokaart zit vol rechthoekige gaatjes. Hun plaats op de kaart geeft ze een bepaalde betekenis. Voor de machine die ze 'leest' bevatten ze de nodige gegevens; voor de leek vormen ze een geheimschrift.

Soms worden gegevens of een bericht zó veranderd, dat alleen degene die over de sleutel beschikt, het bericht kan ontcijferen. Natuurlijk zijn er altijd mensen die uit nieuwsgierigheid of uit hoofde van hun functie proberen een bericht dat niet voor hun bestemd is toch te lezen. Zij proberen de sleutel te vinden. Dat vereist veel scherpzinnigheid, veel tijd en veel ervaring. Tegenwoordig wordt de computer meestal ingeschakeld bij het ontcijferen van een code. Hoe listiger de ontcijferaars worden des te ingewikkelder maakt men de geheimschriften.

Hieronder vind je in geheimschrift de eerste 23 decimalen van het getal π . Dit fraaie en betekenis-

volle weefsel werd ons gezonden door de heer C. Woortman uit Hoofddorp. Test je scherpzinnigheid en probeer de code te decoderen.

De sleutel van Pi in 23 decimalen

Draai de pagina een kwart slag en kijk schuin over het papier, zodat alle lijnen sterk verkort gezien worden. Je leest dan een deel van een oud-Hollands versje. Het tweede deel van dit versje kun je lezen, als je de bladzijde weer een kwart slag terug draait. Elk woord stelt nu een cijfer voor, namelijk het cijfer dat gevonden wordt door het aantal letters van het woord te tellen. Er is één uitzondering: voor het woordje Pi moet het cijfer 1 worden ingevuld.

In 23 decimalen is

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 264$$

Wiskundige Olympiades in Nederland

- We denken aan de grote vierjaarlijkse sportevenementen in wereldsteden als Helsinki (1952), Melbourne (1956) of Rome (1960).
- We denken aan de voorbereidingen voor Tokio (1964), de inspannende en uitgebreide training, waarmee nu al atleten, zwemmers, bokkers bezig zijn, omdat ze zich voorgenomen hebben een hoge plaats te bereiken en daarmee een zeer eervolle positie in de sportwereld.

En nu dus: Wiskundige Olympiades in Nederland

Dit jaar voor 't eerst en, naar we hopen, elk jaar opnieuw. Het is niet een nieuwe gedachte, die de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde hiermee tot uitvoering brengt. Al sinds omstreeks het jaar 1900 werden deze competities in Hongarije gehouden. Later ook in andere Oost-Europese landen en in de Verenigde Staten. In Polen namen in 1956 ruim 1600 scholieren deel. We zijn benieuwd hoeveel het er in 1962 in Nederland zullen zijn.

Wie mogen er deelnemen, hoe is de organisatie, worden er prijzen uitgelooft?

Deelnemers kunnen zijn de leerlingen van de één na hoogste klassen van de scholen voor v.h.m.o. Hoewel ook leerlingen van andere afdelingen kunnen inschrijven, heeft commissie in het bijzonder gedacht aan leerlingen van de B- en β -afdelingen. De wedstrijd wordt gespeeld in twee ronden. De eerste ronde zal plaats vinden op de scholen op 2 mei 1962. Aan de rectoren, directeurs en docenten

zal hiervoor medewerking gevraagd worden. De winnaars van de eerste ronde komen op 24 oktober in Utrecht samen voor de beslissende wedstrijd. Ze zullen daarbij de gasten zijn van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, die ook hun reiskosten zal vergoeden.

Er zullen voor de winnaars van de tweede ronde prijzen beschikbaar worden gesteld. Maar om deze prijzen gaat het niet in de eerste plaats. Ook bij de Olympische Spelen gaat het niet om de 'gouden plak' alleen, maar om de eer, die men zich verwerft. Zelfs al het feit, uitgenodigd te zijn voor de tweede ronde, is zo eervol, dat dit een aanbeveling kan zijn bijv. bij latere sollicitaties naar betrekkingen of studiebeurzen.

Hoe wordt de strijd gestreden?

Het is begrijpelijk, dat er wiskundige problemen opgelost moeten worden. Ze zullen ten dele bestaan uit denk vraagstukken, die niet uitsluitend tot de schoolwiskunde behoren. Er zal meer een beroep gedaan worden op het gezonde verstand, dan op de beheersing van wiskundige technieken. Het schriftelijk oplossen van de opgaven zal gebeuren in omstandigheden, die doen denken aan het maken van proefwerk- of eindexamenopgaven, maar ... er dreigen geen onvoldoendes, er behoeven geen vrijstellingen veroverd te worden. In alle rust en met inzet van alle krachten kan ieder de poging wagen om een eervolle plaats te verwerven in de wereld van de wiskundig geïnteresseerde jongeren. We vermoeden, dat verscheiden Pythagoraslezers zullen behoren tot de deelnemers.

Wie stellen de opgaven samen?

Er is een commissie ingesteld, die de zorg heeft voor het samenstellen van de opgaven, het beoordelen van het werk, het toekennen van de prijzen, enz. In deze commissie hebben zitting:

PROF. DR. O. BOTTEMA, hoogleraar aan de Technische Hogeschool Delft;

PROF. DR. N. G. DE BRUIJN, hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Eindhoven;

DR. J. T. GROENMAN, directeur van de Rijkshogereburgerschool te Groningen;

DR. C. P. S. VAN OOSTEN, wiskundeleraar aan het Katholiek Gelders Lyceum en docent aan de Gel-

derse Leergangen voor de opleiding voor middelbare akten te Arnhem.

Plaatsvervangd lid van de commissie is:

PROF. DR. J. H. VAN LINT, hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Eindhoven.

Hoe kan men zich aanmelden?

Heel eenvoudig. Bij zijn wiskundeleraar. Deze krijgt alle gegevens of kan daarnaar informeren bij de secretaris van de Onderwijscommissie voor Wiskunde: DR. J. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem.

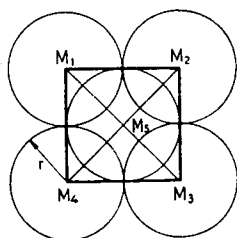
Tenslotte

Als je het erop waagt: Veel succes gewenst!



- Er liggen 4 even grote voetballen tegen elkaar aan, op de grond. Hun middelpunten vormen het vierkant $M_1M_2M_3M_4$. Boven op deze voetballen ligt er nog een van dezelfde grootte. Hoeveel ligt het hoogste punt van de laatste voetbal boven het grondvlak, als de straal der voetballen gelijk is aan r ? De figuur geeft het bovenaanzicht.

Ingezonden door W. J. de Ridder, Den Haag, klas 4B, Chr. Lyc. 'Zandvliet'.



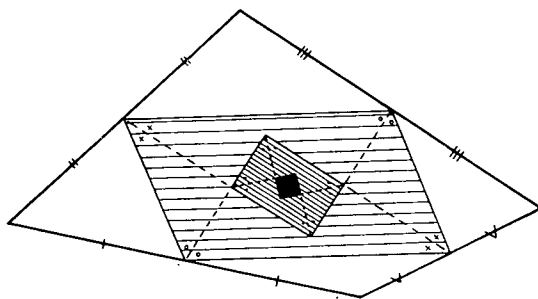
- Men kan tussen de getallen 2, 3, 4 en 5 zo de tekens $-$, $+$, $\times$ of $:$ plaatsen, dat de uitkomst van de berekening 28 wordt. Bijvoorbeeld:
 $(2 \times 5 - 3) \times 4 = 28$.

Probeer dit eveneens met de getallen:

3, 4, 5 en 6 en met 4, 5, 6 en 7 en met 5, 6, 7 en 8.

Ingezonden door Ludo Roemendaal, St. Lievenscollege, Antwerpen.

Altijd weer een vierkant

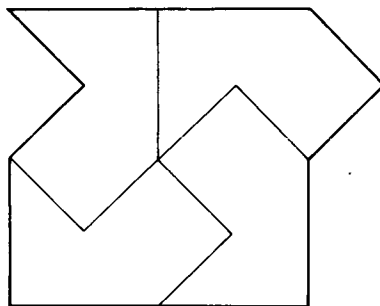


Als we de middens van de op elkaar volgende zijden van een willekeurige vierhoek met elkaar verbinden ontstaat er een parallellogram. De deellijnen van de hoeken van dit parallellogram zijn de zijden van een rechthoek (tenzij het parallellogram een ruit is) en de deellijnen van de hoeken van deze rechthoek zijn de zijden van een *vierkant* (tenzij de rechthoek al een vierkant is). Het is niet moeilijk deze beweringen te bewijzen.

Zijn er nog andere manieren om op een soortgelijke wijze (verbinden van middens van zijden, het trekken van deellijnen, hoogtelijnen, zwaartelijnen, middelloodlijnen) van een willekeurige vierhoek naar een vierkant te komen?

In vijven?

Zoals je ziet is de hier getekende veelhoek in *vier* congruente stukken te verdelen.



Zou dezelfde veelhoek ook in *vijf* congruente stukken verdeeld kunnen worden?

Groningen, april 1970

Aan de schoolverlaters-eindexaminandi

Wij hopen dat u in de afgelopen schooljaren met veel genoegen het wiskundetijdschrift 'Pythagoras' gelezen hebt.

'Pythagoras' lezen hoeft echter niet beperkt te zijn tot uw schooltijd. Ook hierna kunt u abonnee blijven. Indien u meteen onderstaande bon invult en inzendt, bent u verzekerd van een regelmatige toezending van de volgende jaargang.

met vriendelijke groet,
WOLTERS-NOORDHOFF NV

Wiskunde-Olympiade - Nederland 1962

De volgende leerlingen, waaronder zeer vele lezers van Pythagoras, namen aan de tweede ronde op 24 oktober in Utrecht.

1. Amersfoort, Amersfoorts Lyceum
 2. Amsterdam, St. Ignatius College
 3. Amsterdam, Spinoza-Lyceum
 4. Amsterdam, Cartesius Lyceum
 5. Amsterdam, Chr. Lyceum
 6. Amsterdam, West
 7. Amsterdam, Montessori-Lyceum
 8. Apeldoorn, Koninklijke HBS
 9. Arnhem, Stedelijk Gymnasium
 10. Arnhem, Lorentz HBS
 11. De Bilt, Utrechts Lyceum
 12. Culemborg, Christelijke HBS
 13. Drachten, Christelijke HBS
 14. Eindhoven, Lorentz-Lyceum
 15. Eindhoven, St. Joris-College
 16. Eindhoven, Gem. Lyceum
 17. Enschede, Gemeentelijk Lyceum
 18. Den Haag, St. Aloysius-College
 19. Den Haag, Chr. Gymnasium
 20. Den Haag, Joh. de Witt-Lyceum
 21. Den Haag, Christelijk Lyceum
 22. Den Haag, Chr. Lyceum „Zandvliet“
 23. Den Haag, St. Janscollege
 24. Den Haag, Thomas More College
 25. Gronlo, R.K. HBS „Marianum“
 26. Groningen, Gem. Dalton HBS
 27. Haarlem, Coornhert-Lyceum
 28. Haarlem, Chr. Lyceum
 29. „Marnix van St. Aldegonde“
 30. Heerlen, Bernardinuscollege
 31. Heerlen, Grotius Lyceum
 32. Hengelo (O), Gemeentelijke HBS
 33. Hengelo (O), Gemeentelijke HBS
 34. Hengelo (O), Gemeentelijke HBS
 35. 's-Hertogenbosch, St. Janslyceum
 36. Hoogeveen, Menso Alting Lyceum
 37. Hoorn, St. Werenfridus-lyceum
 38. Leeuwarden, Chr. HBS
 39. Leeuwarden, Chr. HBS
 40. Leiden, Chr. Lyceum
 41. Nijmegen, St. Dominicuscollege
- Talsma, J., 6-4-44;
Huikeshoven, Fr. J. M., 10-
Worm, Rudi, 28-12-44.
Keune, Frans Johan, 16-
de Vries, Timon Gerrit, 2-
Stoub, Ger, 28-7-46.
van der Valk, Joke, 11-
Kuypers, J. C., 6-2-45
Brants, Frits Elbert, 1-
Juriens, Gerrit W.
Vossenstijn, Nieg
van Oostrum, P.
Douma, Jan G.
van Gelder, Y.
Pruist, Wim J.
Bollen, Rob
Keizer, Klaas
van der Mey
Toorman, Jan
Reys, Peter L.
Dekker, Jan M.
Furnée, Willem
Hafkenscheid,
Rammeloos, F.
van den Bess
Drenth, Jelt
Steenbrink, I.
Flaming
Goelen, W.
Slaaf, Dirk
Jonker, H.
Louët Fe
Robers, J.
Wevers,
Stehma
Kikker
Snèek,
Bos, J.
de Bo
Nieu
Tern

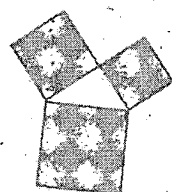
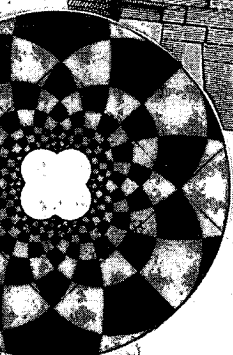
Wiskundetijdschrift voor jongeren

Pythagoras

PYTHAGORAS



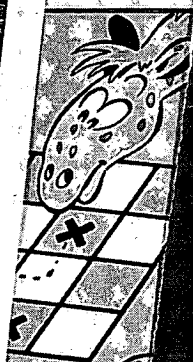
PYTHAGORAS



verschijnt 5 x per schooljaar

Pythagoras

6-45
duard, 26-9-44
45
9-45
44
A.A., 13-5-45
1, 16-9-46
4-46
4-43
4-44
28-1-45
9-2-44
4-45
erard Joh., 10-6-46
15-5-45



BRIEVEN
JE KUNT AAN PYTHAGORAS
Bijvoorbeeld over
WISKUNDE - WAT HOE
'N JONGENSVAK ?
VAN 'N PARADOOL



Adieu Platlander,
tot straks Pythagoras!

PYTHAGORAS
OLYMPIADE!

Papierformaten

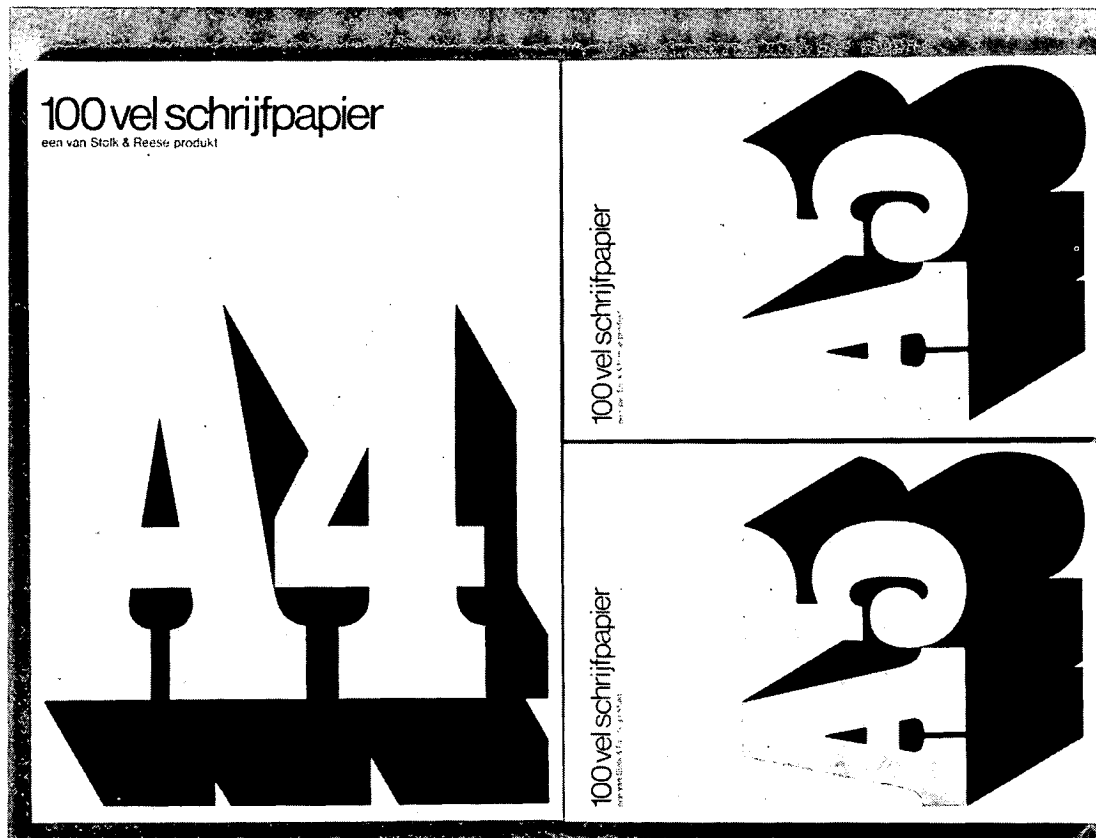
bijvoorbeeld maar eens aan alle munteenheden die er nog zijn. Hoe lang zou het nog duren voor je in de hele wereld met hetzelfde bankbiljet terecht kunt?

Iets waar je bij het begrip 'standaardisatie' vast niet direct aan denkt is het formaat van vellen papier. Toch is ook hier de standaardmaat een feit, al kun je in Nederland nog allerlei oude formaten met schilderachtige namen tegenkomen. Wat denk je bijvoorbeeld van een vel Adelaar? Of voel je meer voor een vel Klein Royaal?

Vanaf de Middeleeuwen – de eerste papiermolen werd in 1144 in Spanje gebouwd – hebben allerlei fabrikanten hun eigen formaten gehanteerd bij de papierfabricage. In onderstaande tabel zijn een aantal hiervan opgenomen, met hun afmetingen in centimeters:

Het standaardiseren van allerlei maten en eenheden is iets waar in internationaal verband nog steeds hard aan wordt gewerkt en waar voorlopig het einde nog wel niet van bereikt zal zijn. Denk

De lengte van A_4 is tweemaal de breedte van A_5



Klein Mediaan	40 × 55
Register Mediaan	42 × 52
Post	44 × 56
Mediaan	47 × 56
Groot Mediaan	47 × 62
Royaal	50 × 65
Klein Royaal	52 × 62
Olifants	62 × 75
Adelaar	75 × 100

De namen van de standaardpapiermaten zijn aanzienlijk prozaïscher. Zij bestaan namelijk uit een rij, met als termen $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$

Een gewoon schrijfblok, zoals je dat bij de kantoorboekhandel koopt, is formaat A_4 , een klein schrijfblok A_5 .

Hoe komt men aan deze rij?



De lengte van A_5 is even groot als de breedte van A_4

Op de foto hierboven zie je dat de lengte van een A_5 -blok even groot is als de breedte van een A_4 -blok. En de lengte van een A_4 -blok is tweemaal de breedte van een A_5 -blok.

Stel een A_5 -blok heeft lengte a en breedte b , dan heeft een A_4 -blok lengte $2b$ en breedte a .

Bovendien blijkt op de foto rechts dat beide blokken gelijkvormig zijn, dus

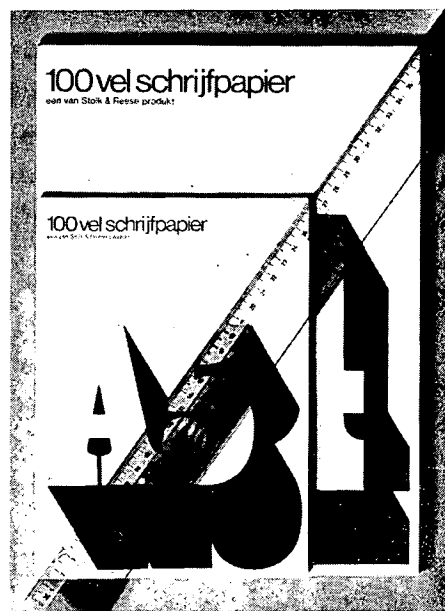
$$\begin{aligned} a : b &= 2b : a \\ \text{dus } a^2 &= 2b^2 \\ a &= b\sqrt{2} = 1,414b \end{aligned}$$

Dit geldt voor de hele rij:

Alle A-formaten zijn onderling gelijkvormig en $\text{opp } A_0 = 2 \text{ opp } A_1 = 4 \text{ opp } A_2 = \dots$

Nu weten we dus hoe de samenhang tussen de termen in de rij is, als we ook nog de grootte van de eerste term kennen zijn we volledig geïnformeerd. Welnu: $\text{opp } A_0 = 1 \text{ m}^2$.

De oppervlakte van een A_4 -schrijfblok is dus $\frac{1}{16} \text{ m}^2 = 625 \text{ cm}^2$. Met het vorenstaande laten lengte en breedte zich nu berekenen, waarbij een rekenliniaal goede diensten kan bewijzen.



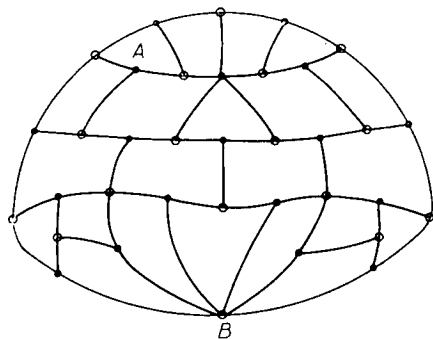
A_4 en A_5 zijn gelijkvormig

De invoering van de A-rij is in Zwitserland, Duitsland en Zweden verder gevorderd dan in ons land. Alleen overheidsinstellingen en diverse ondernemingen hebben gebruik van de A-rij voorgeschreven. Archiven en dergelijke zijn daarbij aangepast.

Wimecos-prijsvraag

De vereniging van leraren in *Wiskunde*, *Mechanica* en *Cosmografie* 'Wimecos' heeft prijzen beschikbaar gesteld voor het oplossen van de volgende puzzels. Deze prijzen bestaan uit een boekenbon van f50,- en twee boekenbonnen van elk f25,-. Voor de oplossing van elke puzzel worden ten hoogste 10 punten gegeven. Wie het hoogste aantal punten bereikt, komt in aanmerking voor de 1e prijs.

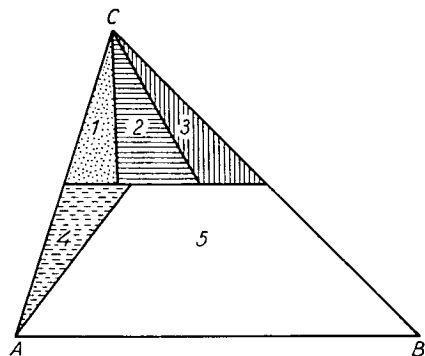
De beide daarop volgende puntenaantallen geven recht op de 2e en de 3e prijs. Mochten er inzenders zijn met een gelijk aantal punten, die voor een der prijzen in aanmerking zouden komen, dan wordt deze onder hen verloot.



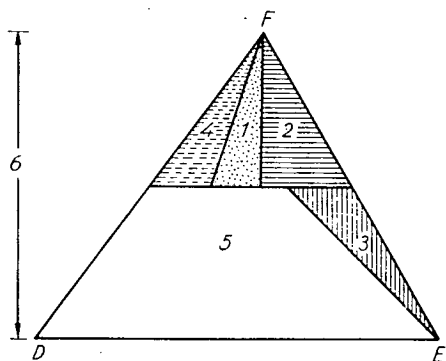
- 1 Op bovenstaande kaart is een wegennet geschetst met wegen, dorpen (o) en gehuchten (●). Iemand wil van A naar B rijden, alleen gebruik maken van de wegen en onderweg alle andere dorpen en gehuchten één maal passeren. Geen enkele plaats (A en B zelf ook niet) mag dus vaker dan één maal worden bezocht. Als dit kan, wordt gevraagd de route aan te geven; kan het niet, dan wordt het bewijs gevraagd, dat het niet kan.

- 2 In de figuren *a* en *b* zijn twee driehoeken ABC en DEF gegeven, beide met basis 8 en hoogte 6. (Ze zijn afgedrukt op $\frac{2}{3}$ van de ware grootte). In $\triangle ABC$ verdeelt de hoogtelijn uit C de basis in twee delen, die 2 en 6 lang zijn. In $\triangle DEF$ verdeelt de hoogtelijn uit F de basis in de stukken $4\frac{1}{2}$ en $3\frac{1}{2}$. De beide driehoeken hebben gelijke oppervlakte en kunnen daarom in een gelijk aantal congruente delen verdeeld worden. In de figuren *a* en *b* zijn ze elk verdeeld in 5 delen, die twee aan twee congruent zijn.

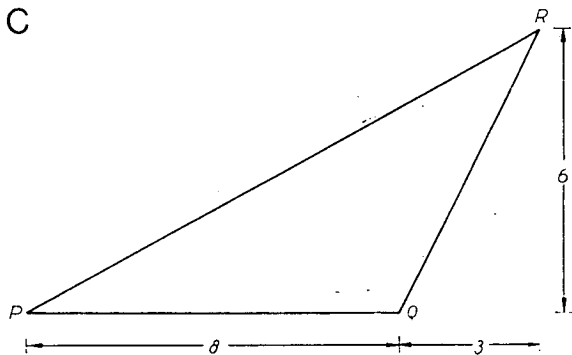
A



B



C



a Tracht de methode volgens welke de driehoeken verdeeld zijn op te sporen en breng deze overzichtelijk onder woorden.

b Pas deze methode toe op $\triangle ABC$ (fig. a) en $\triangle PQR$ (fig. c). Deze moeten dus beide in een gelijk aantal delen verdeeld worden, die twee aan twee congruent zijn. Het aantal delen behoeft daarbij natuurlijk niet 5 te zijn. Teken beide driehoeken zo, dat de aangegeven maten in centimeters worden genomen.

3 Van een getallenrij wordt de n^e term gegeven door de betrekking:

$$t_n = n^2 + n + 24 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Welke termen van de rij zijn ontbindbaar in twee factoren, die

a natuurlijke getallen zijn;

b onderling 1 verschillen?

Uitslag Wimecos-prijsvraag

De eerste prijs kon worden toegekend aan:

Frans J. Keune, leerling Cartesiuslyceum, h.b.s. 5B Amsterdam.

De tweede en derde prijs zijn voor:

R. M. Visscher, leerling Lod. Makeblijde Coll. Gymn. 6 β Rijswijk.

Jan Burema, leerling Praediniusgymn. 5 β Groningen.

Opgave 1

Hoewel het onderscheid tussen dorpen en gehuchten een overbodig gegeven was, kon men er toch gemakkelijk gebruik van maken. Dit deed o.a. *Wilberd van der Kallen* te Bussum. Hier volgt zijn oplossing:

- Uit de kaart blijkt, dat ieder gehucht (behalve A) slechts kan worden bereikt via een dorp.
- Er zijn, buiten A, 17 gehuchten.
- Men moet dus langs 17 dorpen voor men in het laatste gehucht is aangekomen.
- Hierna moet men nog naar dorp B.
- Er moeten daarom minstens 18 dorpen zijn, er zijn er maar 17, dus *het kan niet*.

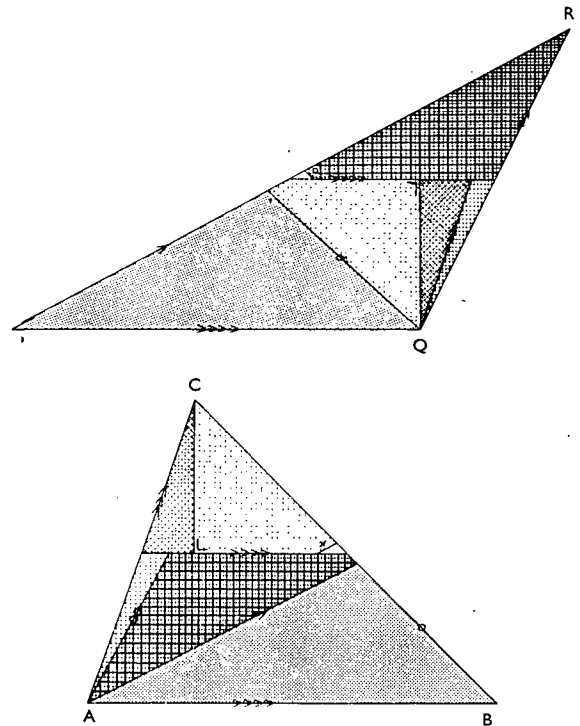
Opgave 2a

Het bleek nogal moeilijk zorgvuldig onder woorden te brengen op welke wijze de verdeling van de beide driehoeken had plaats gevonden. *A. D. Freye* te Harkstede (Gr.) schreef:

- Zorg ervoor dat de bases van de beide driehoeken evenwijdig lopen en dat de toppen van de driehoeken aan dezelfde kant van de bases liggen.
- Trek in elke driehoek de middenparallel, die evenwijdig is met de basis.
- Trek uit de top de loodlijn op de middenparallel.
- Trek door de hoekpunten van de ene driehoek rechten evenwijdig aan de zijden van de andere driehoek.
- Beschouw van deze rechten alleen de lijnstukken, die beginnen in het hoekpunt en eindigen in het snijpunt van de rechte met de middenparallel (of de zijde).

Opgave 2b

We geven hiervan alleen de figuren die door *A. D. Freye* getekend zijn. Er waren ook andere verdelingen mogelijk.



Opgave 3

De volgende oplossing is van J. Wolleswinkel te Wormerveer:

$$\begin{aligned}\text{Stel } n^2 + n + 24 &= r(r + 1) \\ n^2 + n + 24 &= r^2 + r \\ 24 &= r^2 - n^2 + r - n \\ 24 &= (r - n)(r + n + 1)\end{aligned}$$

24 kan ontbonden worden in de volgende stellen factoren:

1 en 24; 2 en 12; 3 en 8; 4 en 6.

Daar r geheel is en $r - n$ en $r + n + 1$ ook geheel moeten zijn, moet n geheel zijn. Dan zijn $r - n$ en $r + n$ beide even of beide oneven, dus $r - n$ en $r + n + 1$ even en oneven of oneven en even.

De mogelijkheden 2 en 12 en 4 en 6 vervallen dus. Er blijven nog twee mogelijkheden over:

$$\begin{aligned}r - n &= 1 & \text{en} & & r - n &= 3 \\ r + n + 1 &= 24 & \text{en} & & r + n + 1 &= 8\end{aligned}$$

In het eerste geval vinden we $n = 11$, in het andere geval $n = 2$.



- Er was ergens een ruit gebroken. Vast stond, dat de schuldige gezocht moest worden onder één der vijf broers van het gezin van de burens. Dus werden deze ondervraagd.

Jan zei: 'Henk of Tom deed het.'

Henk zei: 'Piet en ik deden het geen van beide.'

Tom zei: 'Jullie liegen allebei.'

Klaas zei: 'Nee, één van hen spreekt de waarheid, maar de ander liegt.'

Piet zei: 'Nee Klaas, dat is niet waar.'

Toen de vader van de jongens, een eerlijk man, zijn mening moest geven, zei hij: 'Drie van de jongens spreken altijd de waarheid, maar de andere twee kun je niet altijd vertrouwen.'

Wie brak de ruit?

Altijd deelbaar door 504

- Kies een natuurlijk getal (bijvoorbeeld 7)
- Bereken de derdemacht ($7^3 = 343$)
- Vermenigvuldig met beide burens ($342 \times 343 \times 344 = 40353264$)
- Deel door 504 (?, probeer zelf)

Als je geen fout maakt blijkt deze deling juist op te gaan!

Voor startgetallen a onder de tien kun je met een rekendoosje de deelbaarheid van $(a^3 - 1)(a^3)(a^3 + 1)$ door 504 gemakkelijk vaststellen. Dit resultaat lijkt op het eerste gezicht verrassend. Zou het voor grotere startgetallen ook blijven gelden? De titel hierboven zegt van wel. Heb je er enig idee van, hoe dat te verklaren is? (Aanwijzing: $504 = 7 \times 8 \times 9$. Onderzoek afzonderlijk de deelbaarheid door 8, door 7 en door 9, van $(a^3 - 1)(a^3)(a^3 + 1) = P$, voor alle mogelijke getallen a .)

- Een schipbreukeling, die op een eenzaam eiland beland is, probeert met een zelfgebouwde roeiboot het vasteland te bereiken, dat op 45 km afstand van het eiland ligt. 's Morgens vertrekt hij en het lukt hem een afstand van 12 km af te leggen. 's Nachts slaapt hij in de boot. De volgende ochtend constateert hij met ontsteltenis, dat een sterke stroming hem 9 km in de richting van het eiland teruggedreven heeft. De volgende dagen en nachten gebeurt precies hetzelfde. Eindelijk bereikt hij het vasteland. Wanneer is dat?

(Na hoeveel dagen en hoeveel nachten?)

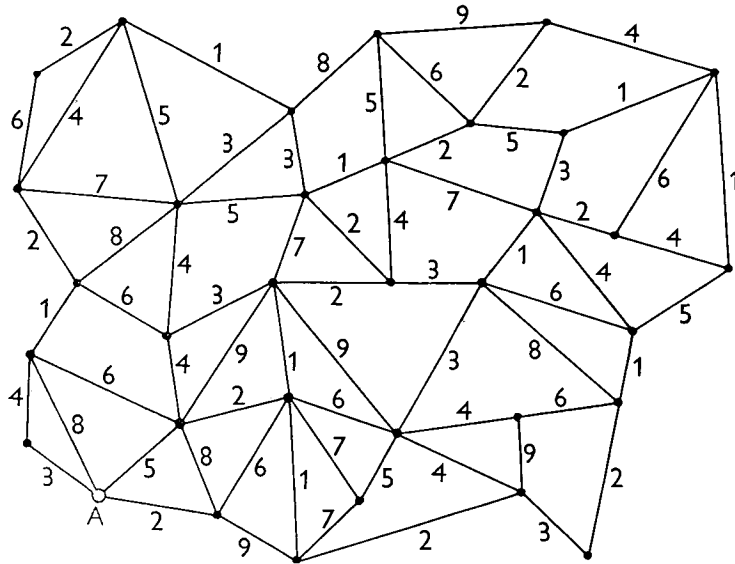
Ingezonden door Roger Bekaert, leerling 5 med.c., St. Lievenscoll. Antwerpen.

- Gegeven een cirkel met een middellijn, maar niet met het middelpunt. Verder is een punt P binnen de cirkel gegeven.

Construeer het spiegelpunt van P ten opzichte van de middellijn, alleen met de liniaal.

Ingezonden door J.H. Schurink, Gymn. 4B, 1e V.C.L., Scheveningen.

De goedkoopste route



Wimecos-prijsvraag

Beschouw bovenstaande figuur als een schematische tekening van een spoorwegnet. De spoorlijnen zijn door lijnstukken aangeduid en de stations zijn de stippen aan de uiteinden van die lijnstukken. Bij elke spoorlijn is een getal geplaatst. Beschouw dat als de prijs van het spoorkaartje voor dat traject.

We bekijken nu alle reizen, die in station A links onderaan beginnen en eindigen in een van de andere stations. Kiest men een bepaald eindstation uit, dan zijn er in het algemeen meerdere routes die naar dat doel leiden. Daarvan moet de 'goedkoopste' bepaald worden.

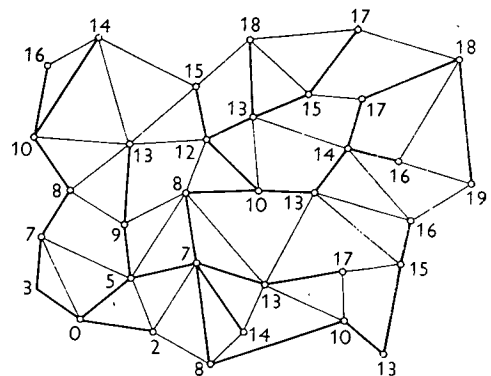
Gevraagd wordt dus in de eerste plaats een *methode*, waarmee men de goedkoopste route kan bepalen van A naar elk van de andere stations. Deze methode moet zo scherp mogelijk onder woorden gebracht worden. In de tweede plaats dient men dan die methode natuurlijk ook toe te passen. Dit leidt tot een figuur, waarin al die goedkoopste routes zijn afgebeeld en waarin *bij elk station* de totale routeprijs vermeld is.

Oplossing

De methode om de gevraagde antwoorden te vinden kan als volgt beschreven worden: Kies een van de verbindingslijnstukken van de figuur uit. Zoek een veelhoek, waarvan het uitgekozen lijnstuk een zijde is. Vergelijk het getal bij de uitgekozen zijde met de som van de getallen bij de andere zijden. Vind je dat het eerste getal groter is dan het tweede, dan poets je de uitgekozen zijde uit. Dit proces wordt herhaald tot er geen veelhoeken meer in de figuur voorkomen.

Het resultaat is onderstaande figuur. De dik getrokken lijnen stellen de gevraagde routes voor. De dunne lijnen behoren eigenlijk uitgepoetst te zijn.

Nu je de routes kent is het vinden van de prijzen niet moeilijk meer; ze zijn in de figuur bij de stippen geschreven.



Elfde Internationale Wiskunde Olympiade, 1969

Nederland ook van de partij

In Roemenië ontstond jaren geleden het plan, een jaarlijks weerkerende internationale wiskundeolympiade te organiseren. Dit land organiseerde dan ook de eerste twee van die krachtmetingen, in 1959 en in 1960. Daarna kwamen achtereenvolgens aan de beurt Hongarije, Tsjechoslowakije, Polen, Rusland, Oostduitsland, Bulgarije, Joegoslavië, Rusland. En afgelopen zomer was dan Roemenië weer gastheer van ruim honderd jongelui met wiskundeknobbels en hun begeleiders. Aan de voorgaande opsomming zie je wel dat deze olympiade voornamelijk een aangelegenheid is van de landen van het oostblok. Maar sinds een paar jaren zenden Engeland, Frankrijk en Zweden afvaardigingen. En dit jaar waren ook Nederland en België vertegenwoordigd.

De Nederlandse ploeg bestond uit de acht jongelui, die in het voorjaar van 1969 de beste resultaten hadden in de eerste ronde van de Nederlandse olympiade. Zij vertrokken begin juli op Schiphol naar Boekarest, in het vooruitzicht een week in die stad te blijven en daarna een week per bus door Roemenië te reizen. En daar tussendoor zouden ze ook nog in totaal zes vraagstukken proberen op te lossen, gedurende twee maal vier uren.

Veel verwachtingen van dat laatste onderdeel van het programma hadden ze niet. Ze wisten namelijk, dat al die deelnemers uit de communistische landen een grondige selectie gepasseerd zijn en een intensieve training hebben gehad. En zij vertrokken volkomen onvoorbereid ...

Het eindresultaat van de olympiade geeft die situatie dan ook duidelijk weer: een laatste plaats voor 'ons', met 52 punten van de maximaal te behalen 320. Onze Belgische burens hadden 53 punten en dus hebben zij hun 'Benelux-overwinning' op een warme avond in Boekarest uitbundig gevierd.

Wij durven niet te beoordelen of deze ervaring een verrijking betekende voor onze vertegenwoordigers of niet. Maar al die andere ervaringen betekenden dat vast en zeker wel. Hun oordeel over het leven in een staatsvorm, die zo veel van de onze afwijkt, berust nu op vele gesprekken met jongeren en op het kijken metijd open ogen. En dat is veel waard.

In 1981 ging het beter

Bij de 22e Internationale Wiskundeolympiade, gehouden van 8-20 juli 1981 in de Verenigde Staten van Amerika, hebben vier Nederlandse scholieren een prijs behaald.

Tweede prijzen waren er voor *Tonny Hurkens* (17 jr, Haps; 37 p.), *Daan Krammer* (16 jr, Hengelo; 36 p.) en *Paul van der Wagt* (18 jr, Warnsveld; 36 p.).

Een derde prijs behaalde *Bart van der Leemput* (18 jr, Vught; 27 p.).

De Nederlandse ploeg kwam op de tiende plaats met 219 punten.



De Nederlandse ploeg met delegatieleider Jan van de Craats voor het standbeeld van Einstein.

Wees zuinig en win een prijs

We organiseren een wedstrijd, waaraan alleen leerlingen van die klassen kunnen deelnemen, waar de vlakke meetkunde een verplicht vak is. Bij je inzending moet je daarom niet alleen naam en adres, maar ook je klas en het schooltype (U.L.O., H.B.S., Gymnasium) duidelijk vermelden.

De wedstrijd bestaat uit twee stukken, waarvan je het eerste hieronder vindt. Je moet je oplossingen inzenden binnen een maand na het verschijnen van dit nummer.

De stichting 'Jeugd en Wiskunde' stelt voor elk van de twee delen van de wedstrijd f50,- aan prijzengeld beschikbaar.

De opdrachten bestaan uit het uitvoeren van meetkundige constructies met passer en liniaal. Andere tekenhulpmiddelen (bijvoorbeeld gradenboog of tekendriehoek) mogen niet gebruikt worden.

Bij zulk een constructie verricht je drie soorten handelingen:

- a het kiezen van een punt telt voor 0 punten;
- b het trekken van een rechte lijn telt voor 1 punt;
- c het trekken van een cirkel of een deel daarvan telt voor 2 punten.

Het tekenen van de gegevens kost geen punten.

Bij elke opdracht is het doel je 'score' zo laag mogelijk te houden; het gaat er dus om zo zuinig mogelijk te construeren. Zo wordt bijvoorbeeld opdracht 1 in vrijwel elk meetkundeboek uitgevoerd volgens een methode, die 7 punten kost (drie cirkels en dan de gevraagde loodlijn). Maar wij kennen een constructie met een score van 5 punten. Jij ook?

Opdracht I

Gegeven zijn een lijn a en een punt A , dat niet op die lijn ligt.

Construeer de loodlijn door A op a .

Opdracht II

Gegeven is een ongelijkbenige driehoek ABC . Construeer van die driehoek de zwaartelijn die door A gaat.

Opdracht III

Gegeven is een ongelijkbenige driehoek ABC . Construeer van die driehoek de zwaartelijnen die door A en B gaan.

Opdracht IV

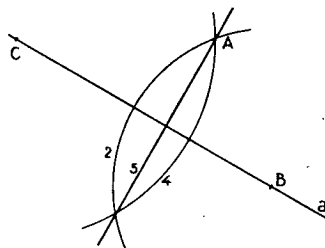
Construeer een vierkant.

Oplossingen

In de figuren is het aantal punten aangegeven.

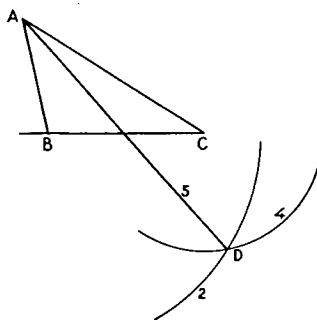
Opdracht I: Laagste score: 5 punten.

B en C zijn de middelpunten van de twee cirkels; ze worden willekeurig op de rechte a gekozen.

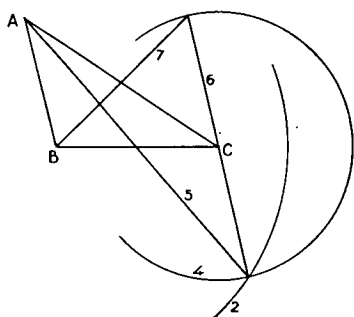


Opdracht II: Laagste score: 5 punten.

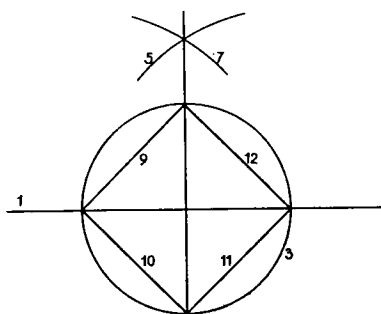
De cirkel, waar 2 bij staat, heeft B tot middelpunt; zijn straal is gelijk aan AC . De cirkel, waar 4 bij staat, heeft C tot middelpunt; zijn straal is gelijk aan AB . Na het trekken van CD en BD zou vierhoek $ACDB$ een parallelogram zijn, omdat de overstaande zijden twee aan twee gelijk zijn. In een parallelogram halveren de diagonalen elkaar en daarom halveert AD de zijde BC en is dus zwaartelijn van driehoek ABC .



Opdracht III: Laagste score: 7 punten.
Het begin van de constructie gaat net eender als bij opdracht II.



Opdracht IV: Laagste score: 12 punten.



Nieuwe opdrachten

Opdracht V

Construeer een driehoek met hoeken van 30° , 60° en 90° .

Opdracht VI

Construeer een regelmatige zeshoek (dat is een zeshoek, waarvan alle zijden gelijk zijn en alle hoeken gelijk zijn).

Opdracht VII

Gegeven is een cirkel met een op die cirkel gelegen punt A.

Construeer de raaklijn in A aan de gegeven cirkel.

Opdracht VIII

Gegeven is een rechte a met een op die rechte gelegen punt A.

Construeer een hoek A van 30° , waarvan een been langs de rechte a valt.



- Is het mogelijk, dat bij een ideaal horloge (d.i. een horloge, dat precies gelijk loopt en waarbij om 12 uur en om 24 uur de grote-, kleine- en secondewijzer precies op elkaar liggen) deze wijzers ook nog op andere tijdstippen dan 12 uur of 24 uur op elkaar liggen?

(Bedoeld is een horloge, waarbij de drie wijzers om hetzelfde middelpunt draaien.)

Ingezonden door D. Kottnerus te Groningen.

- Piet moet naar school en kijkt thuis op de klok hoe laat het is. De klok staat op half negen en daar Piet weet dat deze achter is, gaat hij maar weg. Dat was maar goed ook, want toen hij op school kwam, stond de klok daar op 5 minuten voor negen.

Als de school uitgaat neemt Piet de juiste schooltijd op nl. 12.03 uur en gaat naar huis. Thuis gekomen ziet hij de klok op 12.16 staan. Hoeveel moet hij de klok thuis vooruitzetten om de schooltijd te hebben?

Ingezonden door R. Kegel, leerling klasse 5B, Oldenbarneveldt h.b.s., Rotterdam.

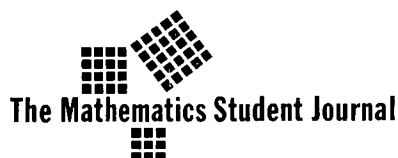
- Iemand heeft twee glaasjes zonder maatverdeling erop. In het ene kan juist 5 cc, in het andere precies 9 cc. Verder heeft hij een overvloed van water. Hoe kan hij met deze twee glazen 2 cc water afmeten?

Ingezonden door J. Leferink, 4b HBS, Roermond.

Archimedes

Anregungen und Aufgaben für Lehrer,
Schüler und Freunde der Mathematik

In een aantal landen verschijnen soortgelijke tijdschriften als *Pythagoras* in Nederland. Uit een viertal hiervan laten we een daarin opgenomen probleem volgen, waarmee we niet willen zeggen dat het weergegevene karakteristiek voor dat tijdschrift zou zijn.



1 *The Mathematics Student Journal* verschijnt vijfmaal per jaar in de Verenigde Staten. In het nummer van november 1969 komt in de rubriek 'Fun with mathematics' het volgende probleem voor: Drie mannen waren eens op reis van Grand Rapids naar Duluth. Het werd laat; ze stopten dus voor de nacht bij een hotel in Hibbing. De kamer kostte hen ieder 10 dollar. Later op de avond kwam de hotelier terug van een reis. Hij keek in het gastenboek en herkende één van de namen als die van één van zijn beste vrienden. Hij gaf daarom de piccolo opdracht 5 dollar aan de mannen terug te geven. Op weg naar de kamer bedacht de piccolo dat drie mannen 5 dollar niet gelijkelijk kunnen verdelen; hij stak dus 2 dollar in eigen zak en gaf de mannen 3 dollar. Dit bracht de kosten voor de kamer terug tot 9 dollar per persoon. En de piccolo had 2 dollar. Maar $9 + 9 + 9 + 2 = 29$. Wat gebeurde er met de 'missing dollar'?

2 *Archimedes*, Anregungen und Aufgaben für Lehrer, Schüler und Freunde der Mathematik, verschijnt al voor het 21e jaar in West-Duitsland. In het nummer van september 1968 van dit (overigens erg moeilijke) tijdschrift komt de volgende deling voor: $LHLHC : LMA = LIE^*$
LMA

EMH * LIE was een belangrijk meetkundige
ELJ uit de vorige eeuw.
LMA = Leer met Archimedes.

SRC
SAC

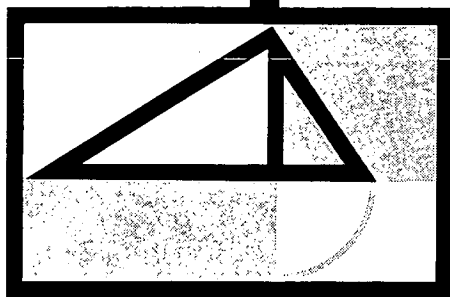
LD

De tien letters nemen de plaatsen in van de tien cijfers.

Wat betekent nu: 1334 6789253034!?

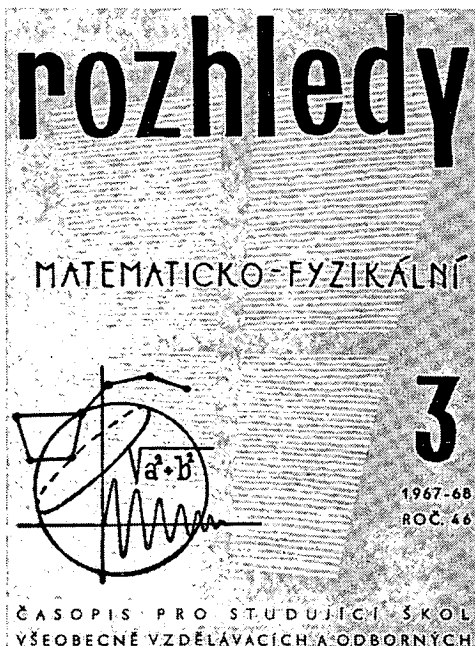
Mathematische
Schüler-
zeitschrift

alpha



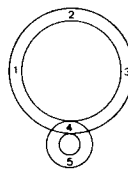
3 *Alpha* verschijnt voor het derde jaar in Oost-Duitsland. In het vierde nummer van 1968 komt de volgende opgave van Professor Frieder Kuhner voor:

Van plaats *A* naar plaats *B* moet 10.000 kg van een bepaald produkt met vliegtuigen van type *F* en type *H* worden overgebracht. Een vliegtuig van type *F* kan 1.000 kg van het produkt vervoeren en heeft daarvoor 3 bemanningsleden en 100 eenheden brandstof nodig, terwijl een vliegtuig van type *H* 500 kg kan vervoeren, waarbij 2 bemanningsleden en 30 eenheden brandstof nodig zijn. In totaal zijn niet meer dan 900 eenheden brandstof en 35 bemanningsleden beschikbaar. De kosten per vlucht bedragen voor een vliegtuig van type *F* 800 mark, voor een vliegtuig van type *H* slechts 500 mark. Welk aantal moet van beide typen vliegtuigen worden ingezet, opdat de totale kosten minimaal zijn?



4 In het Tsjechische *Rozhledy* vonden we de volgende aardige puzzel:

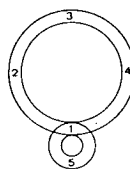
In twee ringen staan de cijfers 1 t/m 5 op de volgende manier:



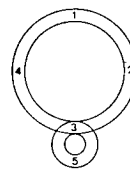
Figuur 1

De cijfers moeten nu worden verplaatst door de ringen: In de grote ring mogen ze een plaats worden opgeschoven met de klok mee of tegen de klok in en in de kleine ring mogen ze van plaats worden verwisseld.

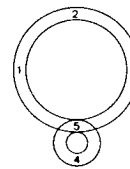
Uitgaande van figuur 1 kunnen zo de situaties van de figuren 2, 3, 4 ontstaan.



Figuur 2

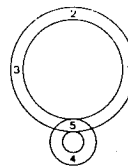


Figuur 3



Figuur 4

De opgave luidt: Vorm, uitgaande van de situatie van figuur 1, de situatie van figuur 5.



Figuur 5

Daarbij moet beurtelings een 'zet' worden gedaan met de cijfers van de grote ring en de cijfers van de kleine ring. Je mag zelf weten met welke je begint.



- Is het mogelijk in een plat vlak vier punten A, B, C, D te kiezen zo, dat er vier scherphoekige driehoeken (BCD, ACD, ABD, ABC) ontstaan?

Wiskunde in blik

Henk Mulder

Als we iets verzenden, zullen we proberen de verpakkingskosten zo laag mogelijk te houden. Steeds meer artikelen worden in blik verpakt, waarbij men meestal voor het blik de cilindervorm kiest.

De vraag luidt dan: hoe kunnen we met zo weinig mogelijk blik, zoveel mogelijk verpakken.

Meer wiskundig wordt de vraag: welke cilinder heeft veel inhoud en weinig oppervlakte.

Om het probleem te kunnen aanpakken, moeten we de opgave nog scherper formuleren.

Het zou zo kunnen: hoe groot moeten de afmetingen van een cilinder gekozen worden om bij een gegeven inhoud, een zo klein mogelijke oppervlakte te krijgen.

Met afmetingen bedoelen we de straal r en de hoogte h ; met totale oppervlakte, die van bodem en bovenzijde en tevens die van de mantel.

Als je deze mantel uitslaat, ontstaat een rechthoek met een hoogte gelijk aan die van de cilinder en een breedte gelijk aan de omtrek van de bodem of bovenzijde.

De oppervlakte van grond- en bovencirkel is πr^2 ; de cirkelomtrek $2\pi r$; de manteloppervlakte $2\pi rh$; de inhoud van de cilinder $\pi r^2 h$.

We moeten dus nu met elkaar vergelijken de inhoud $\pi r^2 h$ en de totale oppervlakte $2\pi r^2 + 2\pi rh$.

We stellen het probleem nog concreter: een cilindervormig blik heeft een inhoud 1 liter (of 1 dm³); bereken r en h zo dat de oppervlakte (de totale hoeveelheid blik) zo klein mogelijk wordt.

We geven de inhoud aan met I en de oppervlakte met O .

Verder stellen we de verhouding $\frac{h}{r} = x$ of $h = xr$.

Dus $I = \pi x r^3$ waarbij we $I = 1 \text{ dm}^3$ gesteld hebben.

Als maateenheden gebruiken we dus 1 dm, 1 dm² en 1 dm³.

De gegevens zijn dus nu:

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi rh \text{ en } \pi r^2 h = 1 \text{ en } h = xr$$

$$\begin{aligned} \text{dus } O &= 2(\pi r^2 + \pi rh) = 2\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{r}\right) = \\ &= 2\left(\frac{1}{xr} + \frac{1}{r}\right) = 2\left(\frac{1+x}{xr}\right) = \frac{2+2x}{xr} \end{aligned}$$

Samenvattend werken we dus verder met:

$$\pi x r^3 = 1 \quad h = xr \quad \text{en} \quad O = \frac{2+2x}{xr}$$

We gaan nu een aantal gevallen onderzoeken om te zien wat het gunstigst wordt.

a stel $x = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{dan } \pi \cdot \frac{1}{3} r^3 &= 1 \quad \text{dus } r^3 = \frac{3}{\pi} = 0,955 \quad \text{dus} \\ r &= 0,986 \text{ dm verder } h = \frac{1}{3} r = 0,332 \text{ dm} \\ \text{en } O &= \frac{2 + \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} r} = \frac{8}{r} = \underline{8,13 \text{ dm}^2}. \end{aligned}$$

b stel nu $x = \frac{1}{2}$ dan vinden we op dezelfde wijze:

$$r = 0,860 \text{ dm en } h = 0,430 \text{ dm en } O = \underline{6,96 \text{ dm}^2}$$

c $\leftarrow$ bij $x = 1$ dan:

$$r = 0,682 \text{ dm en } h = 0,682 \text{ dm en } O = \underline{0,588 \text{ dm}^2}$$

d $\leftarrow$ bij $x = 2$ dan:

$$r = 0,542 \text{ dm en } h = 1,084 \text{ dm en } O = \underline{5,54 \text{ dm}^2}$$

e $\leftarrow$ bij $x = 3$ dan:

$$r = 0,474 \text{ dm en } h = 1,422 \text{ dm en } O = \underline{5,66 \text{ dm}^2}$$

f $\leftarrow$ bij $x = 4$ dan:

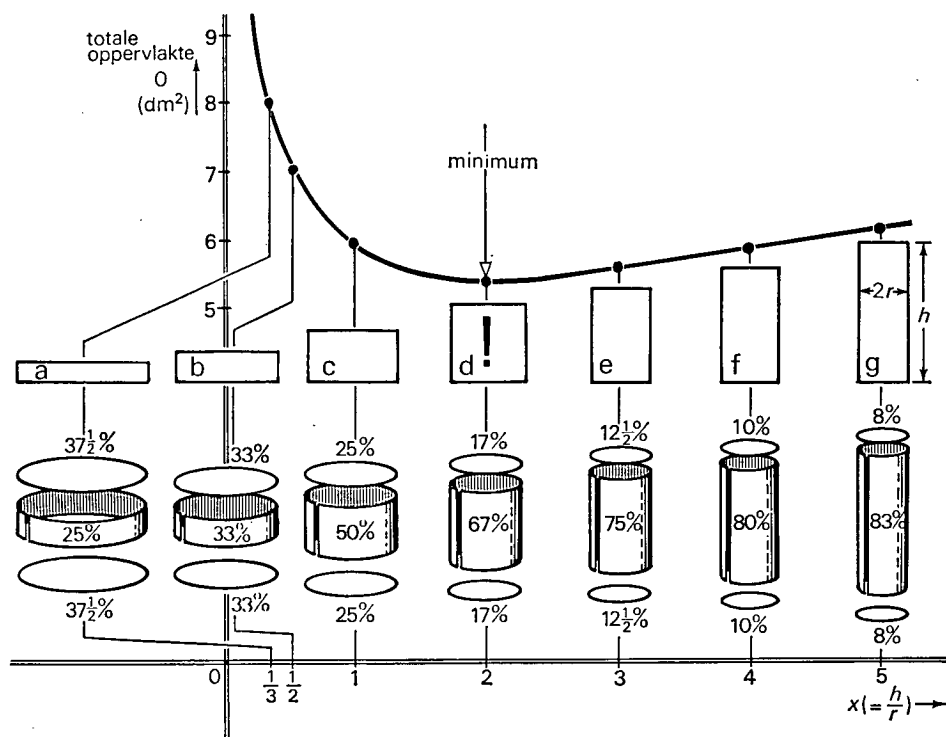
$$r = 0,430 \text{ dm en } h = 1,720 \text{ dm en } O = 5,81 \text{ dm}^2$$

g tenslotte $x = 5$ dan:

$$r = 0,400 \text{ dm en } h = 2,000 \text{ dm en } O = \underline{6,00 \text{ dm}^2}$$

Opvallend is dat bij $x = 2$ de kleinste oppervlakte bereikt wordt. In dat geval geldt $h = 2r$ zodat de doorsnede door de as van de cilinder een vierkant wordt.

In de grafiek is voor de diverse waarden van x de bijbehorende blikvorm getekend en tevens de waarde van de oppervlakte.



De doorsnijding heeft telkens een andere rechthoeksvorm; bij vierkante doorsnijding ontstaat het minimum in de oppervlakte.

Bij alle andere vormen is de oppervlakte dus groter (bij dezelfde inhoud!).

Verder valt in de grafiek op dat de voor $x < 2$ de oppervlakte snel toeneemt; en voor $x > 2$ niet zo snel.

Dat betekent dus: voor plattere blikken gaat een afwijking van de ideale vorm (vierkant) vlug veel geld kosten; bij hogere blikken valt dat juist nogal mee.

Voor al de plattere blikken zijn dus relatief duur.

Er zijn natuurlijk nog andere motieven dan alleen de kosten bij het kiezen van een bepaald model.

Sardines worden juist verpakt in erg platte blikken dan kun je er gemakkelijk met een vork iets uitprikken. Uit een hoog blikje kun je gemakkelijker schenken of drinken.

Tenslotte gaan we nog even na welk percentage van het blik telkens in bodem en deksel en welk deel in de mantel aanwezig is.

Uit de formules lees je gemakkelijk af:

$$O_1 \text{ (ronde schijven)} : O_2 \text{ (mantel)} = r : h = r : xr = 1 : x$$

De percentages zijn in de figuur aangegeven.

Bij platte blikjes zit dus het meeste blik in de beide ronde schijven; bij hogere blikjes juist in de mantel. Voor x naderend naar nul of oneindig nadert de oppervlakte ook naar oneindig.

Als je meer wiskundige kennis hebt, kun je bewijzen, dat het minimum optreedt voor $x = 2$.

Uit de gegevens volgt

$$r^2 = x^{-\frac{2}{3}} \cdot \pi^{-\frac{2}{3}} \quad rh = x^{\frac{1}{3}} \cdot \pi^{-\frac{1}{3}}$$

$$\text{Dus } O = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}})$$

Differentiëren naar x geeft:

$$O' = \frac{2}{3} \cdot \pi^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{-2 + x}{x^{\frac{5}{3}}}$$

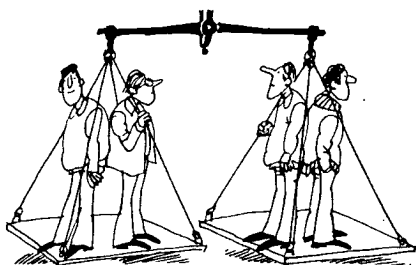
Een extreem treedt op voor

$$\frac{-2 + x}{x^{\frac{5}{3}}} = 0$$

Hierin is $x > 0$

Letten op de tekenwisseling blijkt, dat voor $x = 2$ een minimum wordt gevonden.

Voor vier getallen geldt



I Aad, Ben, Cor en Dik speelden wat op de grote weegschaal van een oude heksenwaag.

Aad en Ben samen gaven juist evenwicht tegen Cor en Dik samen. Aad en Cor wogen samen méér dan Ben en Dik. En Cor bleek lichter dan Dik.

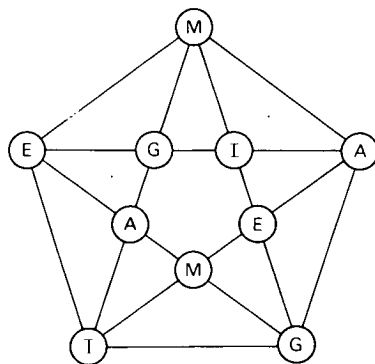
Zet deze knapen in volgorde van gewicht.

(uit: Mathematical Pie, Engeland).

II Voor vier reële getallen a, b, c en d geldt: $ab = 1$ (1) en $ac + bd = 2$ (2). Bewijs: $cd \leq 1$.

(uit: Középiskolai Matematikai Lapok, Hongarije).

Zo magisch mogelijk



Aan de regelmatige vijfpuntige ster, het *pentagram*, zijn vaak allerlei toverkrachten toegekend. De ster zou bijvoorbeeld, op de grond getekend, bescherming bieden aan wie zich erbinnen bevindt.

Hierboven is tweemaal het woord *MAGIE* te lezen, met de letters opvolgend door lijnen verbonden. Verplaats nu de letters in de figuur zo, dat dit woord op méér dan twee manieren te lezen is.

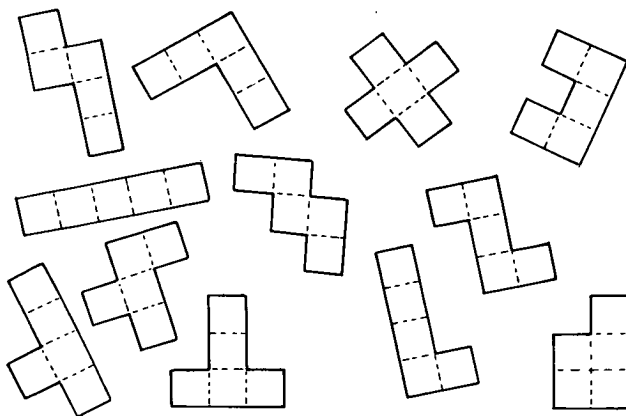
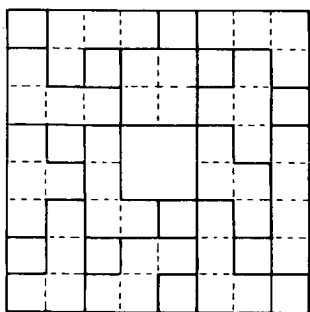
Wat is het maximum aantal?

$$12(4 + 1) = 12 \cdot 5$$

Het vierkant met het gat in het midden is gelegd met twee soorten steentjes:

a vierkantjes

b figuren opgebouwd uit 4 vierkantjes.



Daaronder liggen steentjes opgebouwd uit 5 vierkantjes.

De kunst is nu om de grote figuur met de onderste figuurtjes te beleggen.

Gaat het op meerdere manieren?

(Uit: *KWANT*, het Russische leerlingentijdschrift voor exacte wetenschappen.)

Een graas-probleem

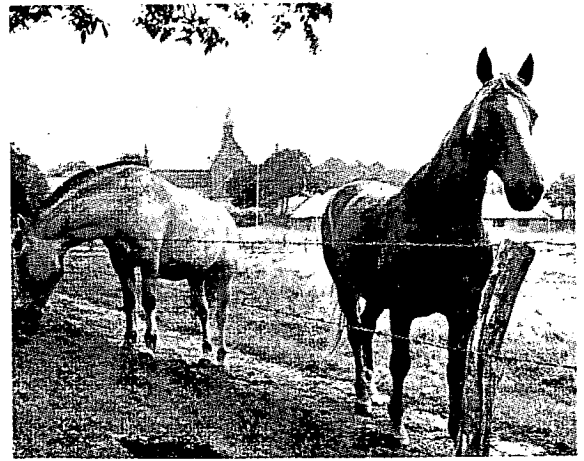
De heer W. A. van der Spek te Mantgum heeft ons door het inzenden van het volgende probleempje weer eens doen beseffen, dat ook na de grote Sir Isaäc Newton het Britse Imperium niet gekampt heeft met het gebrek aan oorspronkelijk denkende wiskundigen. In een Engels rekenboek van 1898 (Arithmetic, by Charles Pendlebury), zo meldt ons de brievenschrijver, is een hoofdstuk gewijd aan problemen betreffende 'pastures with uniformly growing grass'.

Een zo'n vraagstuk luidt:

Als 17 paarden een weide met eenparig groeiend gras kaalgrazen in 30 dagen en 19 paarden dat doen in 24 dagen, hoeveel paarden kunnen daar dan 8 dagen geweid worden als na 6 dagen er 4 worden weggehaald?

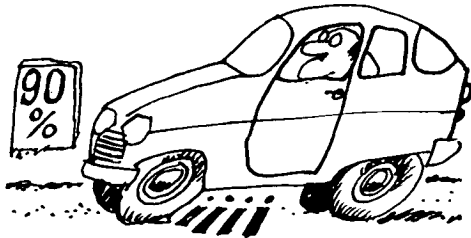
Wie zet er zijn tanden eens in?

Wij niet!



Procentsommen – rotsommen!?

I Kobus Kneus, handelaar in n -de hands auto's, kocht op een morgen twee wagens, voor verschillende bedragen. Dezelfde middag raakte hij ze met wisselend succes weer kwijt, nu beide voor dezelfde prijs. Op de ene maakte hij daarbij een winst van 10%, maar op de andere leed hij juist 10% verlies. **Betekende deze handel voor Kobus winst of verlies?**

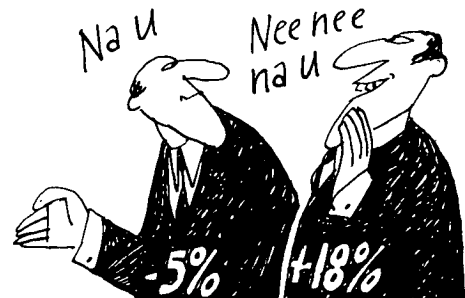


II Een verhoging van de benzineprijs met 10% deed de heer Z. Uinig besluiten vanaf dat moment ook 10% minder kilometers te gaan rijden. **Scheelde hem dat in z'n portemonnee, of niet?**

III Een autoverhuurder berekent mij altijd over de dagprijs eerst de BTW van 18%, en over dat totaal een vaste-klantenkorting van 5%.

Een keer was er een invaller, die volhield dat de correcte manier van berekenen is: eerst de korting toepassen op de kale prijs, en pas over dat verlaagde bedrag de BTW bepalen.

Was ik daar blij mee?



Begin Pythagoras Olympiade



Je kent natuurlijk de Nederlandse Wiskunde Olympiade: een wedstrijd in het oplossen van wiskundige vraagstukken, die elk jaar wordt georganiseerd door de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde. Aan de eerste ronde ervan nemen jaarlijks duizenden scholieren deel. Een klein aantal van hen krijgt een uitnodiging voor de tweede ronde.

De Olympiade in de vorm waarin zij nu bestaat, heeft een aantal bezwaren. Om organisatorische redenen kan er bij de eerste ronde alleen naar antwoorden worden gevraagd. Redeneringen en bewijzen blijven buiten beschouwing. Op deze manier kunnen *rekenfouten* bijvoorbeeld fataal zijn. Bij de tweede ronde wordt er wel naar de motivatie van het antwoord gevraagd, zodat dit nadeel dan niet aanwezig is. Een bezwaar van de beide ronden is dat de oplossingen binnen een zeer beperkte tijdsduur gevonden moeten worden, terwijl echt wiskundig werk het beste in alle rust gedaan wordt. Vaak zie je de oplossing van een probleem pas als je er eens een nachtje over hebt kunnen slapen. Om aan deze bezwaren tegemoet te komen, zal er in de toekomst naast de *Nederlandse Wiskunde Olympiade* ook een *Pythagoras Olympiade* georganiseerd worden. Ook bij deze olympiade moeten en vraagstukken worden opgelost; in elk nummer van *Pythagoras* zullen er drie verschijnen. Je kunt in alle rust thuis aan de oplossingen werken. Er zal steeds ongeveer een maand de tijd zijn om de oplossingen te vinden.

Wedstrijdvoorwaarden

- 1 Alle leerlingen van het voortgezet onderwijs kunnen aan de Pythagoras Olympiade deelnemen door

een oplossing van één of meer van de opgaven in te sturen.

- 2 Papier waarop oplossingen staan, mag slechts aan één zijde beschreven zijn. Voor verschillende opgaven moeten ook verschillende vellen genomen worden.
- 3 Slechts goed leesbare oplossingen worden bekeken. Alle tekstgedeelten moeten helder en duidelijk in goed lopende zinnen zijn geformuleerd.
- 4 Op elk vel moet vermeld staan: *naam, adres, leeftijd, school, schooltype* en *klas* van de inzend(st)er.
- 5 De oplossingen moeten binnen de vermelde inzendtermijn gestuurd worden naar:
Pythagoras Olympiade
Brederode 29
2261 HG Leidschendam
Zorg voor voldoende frankering!

Prijzen

- 1 Bij elke opgave worden onder de inzenders van een goede oplossing twee boekenbonnen verloot.
- 2 Alle opgaven van één jaargang (vijf nummers) van *Pythagoras* vormen te zamen een *ladderwedstrijd*. Elke goede oplossing geeft één punt. De drie inzenders die in één jaar de meeste punten verzamelen, krijgen een extra boekenbon. Bij gelijke puntenaantallen beslist het lot.
- 3 De beste tien van de ladderwedstrijd die niet in een eindexamenklas zitten, krijgen *automatisch* een uitnodiging voor de tweede ronde van de *Nederlandse Wiskunde Olympiade*. Zij behoeven zich dus niet via de eerste ronde te klasseren.

De oplossingen van de opgaven zullen in *Pythagoras* verschijnen. Hierbij zal zoveel mogelijk de oplossing van één van de deelnemers gevolgd worden, eventueel met commentaar van de jury. Zijn er maar weinig goede oplossingen, dan worden de namen van de inzenders vermeld. Als het er veel zijn, dan vermelden we alleen de aantallen.

Naast de vraagstukken van de *Pythagoras Olympiade*, die natuurlijk tamelijk moeilijk zullen zijn, blijven er ook *Denkertjes* van verschillende moeilijkheidsgraad verschijnen. De oplossingen hiervan vind je steeds in het volgende nummer; je moet ze niet insturen!

De oplossingen van de eerste drie opgaven moeten ingezonden worden *vóór 1 december 1979*.



Haasje over

Opgaven Pythagoras Olympiade

- 1 Een dambord heeft 10×10 velden. Een rechthoekig deel van het bord dat bestaat uit een geheel aantal velden heet een *deelbord*.
 - a. Hoeveel deelborden heeft een dambord?
 - b. Hoeveel *vierkante* deelborden heeft een dambord?
- 2 Op de bissectrice van een hoek P bevindt zich een punt Q . Door Q trekt men een lijn l , die de beide benen van de hoek snijdt in de punten A en B .
Bewijs dat de som $s = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}$ niet verandert als men l om Q draait.
- 3 a Bewijs dat voor elk positief getal $r \neq \sqrt{2}$ de uitdrukking $\frac{3r+8}{4r+3}$ een betere benadering is van $\sqrt{2}$ dan r zelf.
b Bepaal positieve gehele getallen a, b, c en d zo, dat voor elk positief getal $r \neq \sqrt{3}$ de uitdrukking $\frac{ar+b}{cr+d}$ een betere benadering is van $\sqrt{3}$ dan r zelf.

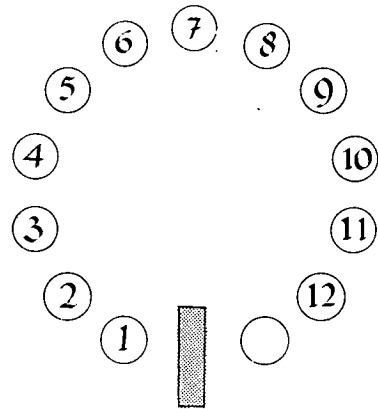


- De som van een aantal natuurlijke getallen (waaronder ook wel gelijke mogen voorkomen) is 20; hun produkt is maximaal. Welke getallen zijn dat?
- Bepaal alle paren natuurlijke getallen, waarvan het produkt gelijk is aan het tienvoud van de som.
- Op een overigens leeg schaakbord wil men een dame van een gegeven veld naar een ander gegeven veld brengen. Als dat niet in één zet kan, dan kan het altijd in twee zetten gebeuren, en zelfs op meerdere manieren. Op hoeveel manieren maximaal?
(Een dame mag horizontaal, vertikaal en diagonaalsgewijs zetten.)

Bart Habers uit Castricum schreef ons een brief over de volgende puzzel:

Twaalf getallen staan in een kring, waarin ook een open plaats en een 'hindernis' is opgenomen. Ze staan kloksgewijs opklimmend gerangschikt. Het is de bedoeling om daarvan te maken kloksgewijs afdalend (de 12 links van de hindernis, waar nu de 1 staat; de 1 op de plaats waar zich nu 12 bevindt; de open plaats op zijn oude plekje rechts naast de hindernis). Om dat doel te bereiken, zijn de volgende zetten toegestaan:

- a Een getal dat zich vlak naast de open plaats bevindt, zonder dat de hindernis daar tussen staat, mag je naar die open plaats verschuiven.
- b Wordt een getal alleen maar door één ander getal van de open plaats gescheiden, dan mag het over dat andere getal naar de open plaats toe springen.
- c Een getal, dat vlak naast de hindernis staat mag tenslotte een reuzensprong maken door eerst over de hindernis en dan over het daarachter liggende getal te zeilen en onmiddellijk daarna op de open plaats te landen.



Van de beginstand uit kan alleen 12 de a-zet doen en alleen 11 de b-zet doen. De c-zet is van de beginstand uit niet mogelijk; als de eerste zet het verschuiven van 12 is, dan kan de tweede zet echter de reuzensprong van 1 zijn.

Bart Habers heeft het doel bereikt na 44 zetten. Zijn vraag is: kan het korter, kan het anders. Probeer het eens.

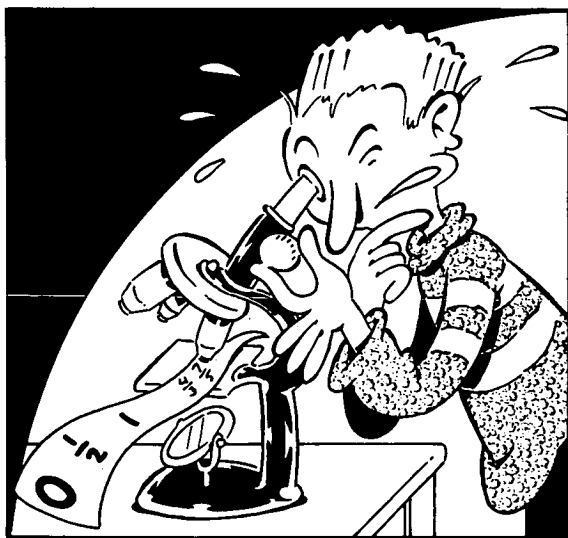
Per microscoop naar $\sqrt{2}$

Leo Wiegerink

Mijn eerste kennismaking met breuken zal ik niet snel vergeten. Daarvoor meende ik alle getallen al te kennen: 1, 2, 3, 4, ... enz. Dat nu taartpunten en pannenkoeken aanleiding gaven tot een heel nieuw soort getallen, zoals $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{5}$, vond ik zeer verrassend. Maar daarna dacht ik opnieuw: 'Nu ken ik echt alle getallen die er zijn'.

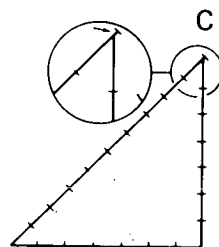
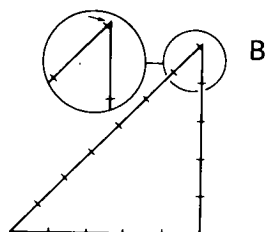
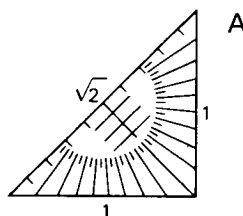
De negatieve getallen die ik later leerde, veranderen daar niet veel aan. Dat waren toch eigenlijk gewone getallen met een 'minnetje' ervoor. M'n overtuiging alle getallen te kennen werd pas weer omvergegooid door de 'wortels', vooral de niet-uitkomende, zoals $\sqrt{2}$. Je schreef eigenlijk iets op dat niet bestond! Dat vond ik heel spannend.

Bij je 'geodriehoek' kom je $\sqrt{2}$ tegen als de verhouding tussen de schuine zijde en een rechthoekszijde.



In deze driehoek geldt ook de Stelling van Pythagoras: $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$. Nu kende Pythagoras deze driehoek ook, maar ... hij kende geen wortels. De enige getallen die hij kende waren 1, 2, 3, 4, ... enz. Wel rekende hij met verhoudingen van deze getallen. Hij wist bijv. dat de schuine zijde en de rechthoekszijde van de geodriehoek ongeveer de verhouding 7 : 5 hadden. Hij wist waarschijnlijk ook dat 10 : 7 een betere verhouding was. Wij zouden zeggen: ' $\sqrt{2}$ ligt in tussen $\frac{7}{5}$ en $\frac{10}{7}$ '.

Pythagoras hoopte nog eens *precies* de juiste verhouding te vinden: in hoeveel kleine stukjes moest je de rechthoekszijde verdelen, zodat je een geheel aantal van deze stukjes ook *precies* op de schuine zijde kon afpassen. Zonder iets over te houden of te kort te komen! We zoeken mee!

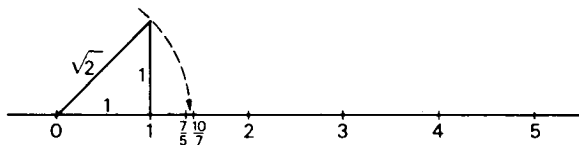


A De geodriehoek, $\sqrt{2}$: lengte of verhouding?

B Het 5-de deel van de rechthoekszijde past **bijna** 7 keer op de schuine zijde. Je komt iets tekort!

C het 7-de deel van de rechthoekszijde past **haast** 10 keer op de schuine zijde. Je houdt iets over!

Eerst leggen we een rechthoekszijde langs de getallenlijn. Die past dus precies tussen 0 en 1. Wanneer we de schuine zijde nu omcirkelen, komen we uit in de grote onbekende van dit verhaal: $\sqrt{2}$.



Aan weerszijden liggen de benaderingen $\frac{7}{5}$ en $\frac{10}{7}$. En nu maar proberen dichterbij te komen. Ik onderzoek met de computer breuken met steeds grotere noemers en vond:

$$\frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{17}{12}, \frac{24}{17}, \frac{41}{29}, \frac{58}{41}, \frac{99}{70}, \frac{140}{99}, \frac{239}{169}, \frac{338}{239}, \dots, \frac{4756}{3363}, \dots$$

en toen liet de computer het afweten!

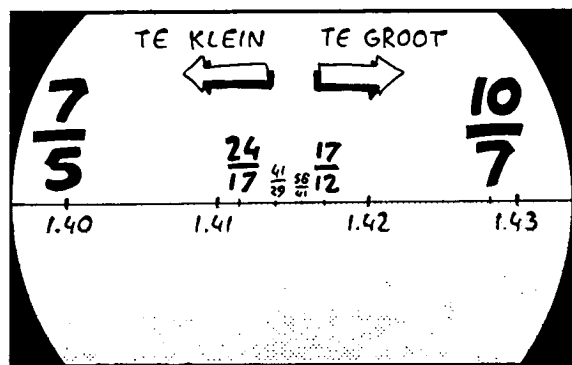
De laatste breuk is al heel goed, kijk maar hoe dicht zijn kwadraat bij 2 ligt:

$$\left(\frac{4756}{3363}\right)^2 = 2 - \frac{2}{11309769}$$

Een beetje te klein dus.

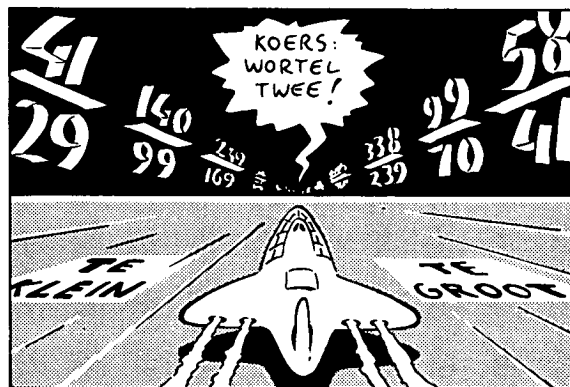
Het microscoopvliegtuig

We richten nu een microscoop op de getallenlijn en proberen $\sqrt{2}$ te ontdekken. Hieronder vind je een uitvergroting van de getallenlijn, waarop de eerste benaderingen van de rij goed zichtbaar zijn.



Steeds vergroten we verder uit. Zien we een breuk die iets te klein is dan sturen we wat bij naar rechts; bij een breuk die te groot is sturen we bij naar links.

Loerend door de microscoop krijgen we het gevoel in een microscoopvliegtuig te zitten dat op $\sqrt{2}$ afvliegt. We zien steeds weer nieuwe breuken met alsmaar grotere tellers en noemers. Zouden we ooit een breuk vinden die precies $\sqrt{2}$ is?

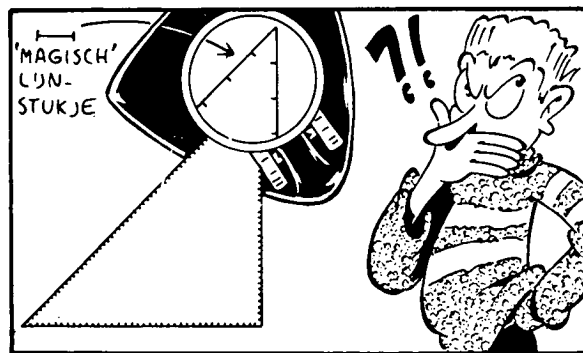


Het magische lijnstukje

Laten we eens aannemen dat het proces eindigt bij een breuk $\frac{p}{q}$, die precies $\sqrt{2}$ is, dus: $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$;

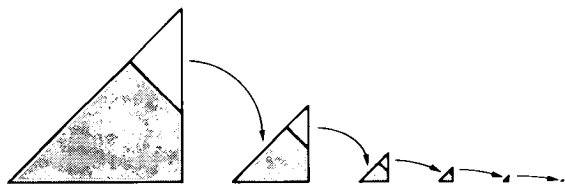
$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Dan eindigt daar de reis met het microscoopvliegtuig! In de meetkundetaal van Pythagoras zouden we moeten zeggen dat de schuine zijde en de rechthoekszijde van de geodriehoek *precies* de verhouding $p : q$ hebben. En dit betekent weer dat er een 'magisch lijnstukje' bestaat, dat *precies* p keer op de schuine zijde past en q keer op een rechthoekszijde.



Voorlopig is dat kleine lijnstukje denkbeeldig. We weten immers niet of p en q bestaan. We doen nu even net alsof het lijnstukje bestaat, en halen een trucje uit: van onze geodriehoek knippen we op een speciale manier een klein driehoekje af met dezelfde vorm. Dat kleine driehoekje is zo gekozen dat datzelfde magische lijnstukje ook precies op de zijden dáárvan een geheel aantal malen is af te passen. Hoe dat moet vertellen we aan het einde van dit verhaal.

Het aardige is nu dat je dit net zo vaak kunt herhalen als je wilt: van het kleine driehoekje kun je op dezelfde manier een nóg kleiner driehoekje afknippen, zodat nog steeds datzelfde magische lijnstuk een geheel aantal malen op de zijden daarvan is af te passen. En zo gaan we maar door.



Conclusie

Zie je al waartoe dit leidt?

Het magische lijnstuk past steeds weer een geheel aantal malen op de zijden van het nieuwe driehoekje. Maar ... op het laatst is dat nieuwe driehoekje nog kleiner dan het lijnstukje zelf! Dat kan dus nooit! *Dat magische lijnstukje bestaat dus helemaal niet!* Dus $\sqrt{2}$ is niet als breuk te schrijven en het microscoopvliegtuig zou alsmáar door moeten blijven vliegen.

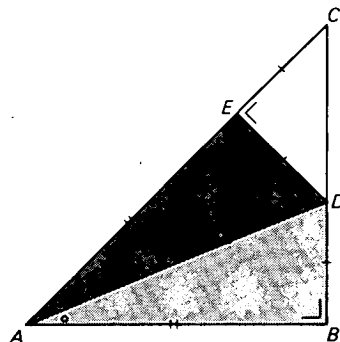
Ik weet niet of Pythagoras deze redenering ook kende. Wel staat vast dat hij tot dezelfde conclusie kwam. Hij had zijn manier om dat onder woorden te brengen: 'Schuine zijde en rechthoekszijde hebben géén verhouding'. Je zult zijn formulering begrijpen als je bedenkt dat een verhouding voor Pythagoras alléén een verhouding van natuurlijke getallen kon zijn.

Het Latijnse woord voor verhouding is *ratio*. Hiervan is het woord 'irrationaal getal' (= niet-rationaal getal) afgeleid: een getal, zoals $\sqrt{2}$, waar geen verhouding bij hoort in de betekenis van Pythagoras.

Overigens was Pythagoras zeer geschokt door zijn ontdekking. In zijn kijk op de wereld vormden natuurlijke getallen de grondslag van alle dingen. De ontdekking van lijnstukken zonder verhouding van natuurlijke getallen gooide die kijk omver. Tenminste, dat zou je denken. In werkelijkheid verbood Pythagoras z'n volgelingen om over het 'irrationale' te spreken! Eén volgeling heeft ooit tóch zijn mond opengedaan, waardoor we dit verhaal konden optekenen ...

Een klein driehoekje afknippen

Geef de hoekpunten van de geodriehoek aan met A , B en C . Trek dan de lijn AD , de deellijn of bissectrice van hoek A . Trek dan DE loodrecht op de schuine zijde. Nu is CED het kleine driehoekje dat afgeknipt moet worden.



Het magische lijnstukje is nu ook een geheel aantal malen op de zijden van CED af te passen, want $AB = AE$, zodat het magisch lijnstukje op AE precies is af te passen. Het past ook een geheel aantal malen op AC , dus eveneens op het verschil EC , dat de rechthoekszijde van het kleine driehoekje vormt.

Verder geldt: $EC = ED = DB$, zodat het magisch lijnstukje ook precies een geheel aantal malen op DB is af te passen. En dus ook op de schuine zijde, DC , van het kleine driehoekje, want dat is het verschil tussen BC en BD .

De verhuishwagen

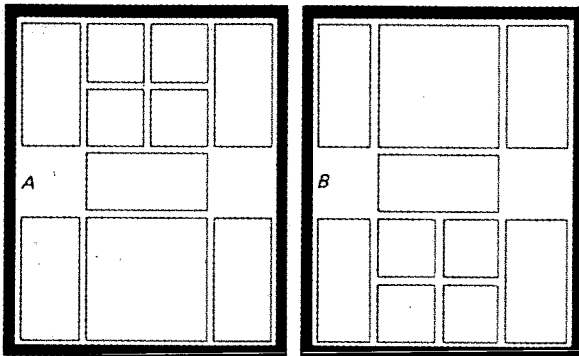
In de verhuishwagen staan de meubels opgesteld volgens figuur A (vier fauteuils, vier kasten en een piano die tweemaal zo veel oppervlakte in beslag nemen, en een tafel die een viermaal zo groot oppervlak in beslag neemt).

Ach, dat is waar ook, de fauteuils moeten er als eerste uit! De verhuizers zeggen: 'Wij tillen niks meer, we hebben 't in onze rug.'

Dus schuiven maar! Ze rijden pas weg als de meubels opgesteld staan volgens figuur B.

Hoe doen ze dat?

Om erachter te komen, heb je al genoeg aan een velletje papier met een veld van 5 bij 4 maal de zijde van de kleine vierkantjes (te weten de fauteuils) en tien losse stukjes papier met de juiste afmetingen. En... geen huiswerk in de komende dagen!



Help de wolf

Wolf en schapen is een bekend spelletje op het dambord. De wolf moet door de linie van de schapen zien te breken. De schapen mogen alleen vooruit, maar de wolf mag vooruit en achteruit.

Als de schapen verstandig spelen, heeft de wolf geen schijn van kans. Daarom verveelt het snel. Je kunt de wolf echter wel helpen. Als je hem bijvoorbeeld in het begin zijn uitgangspositie laat kiezen, kan hij

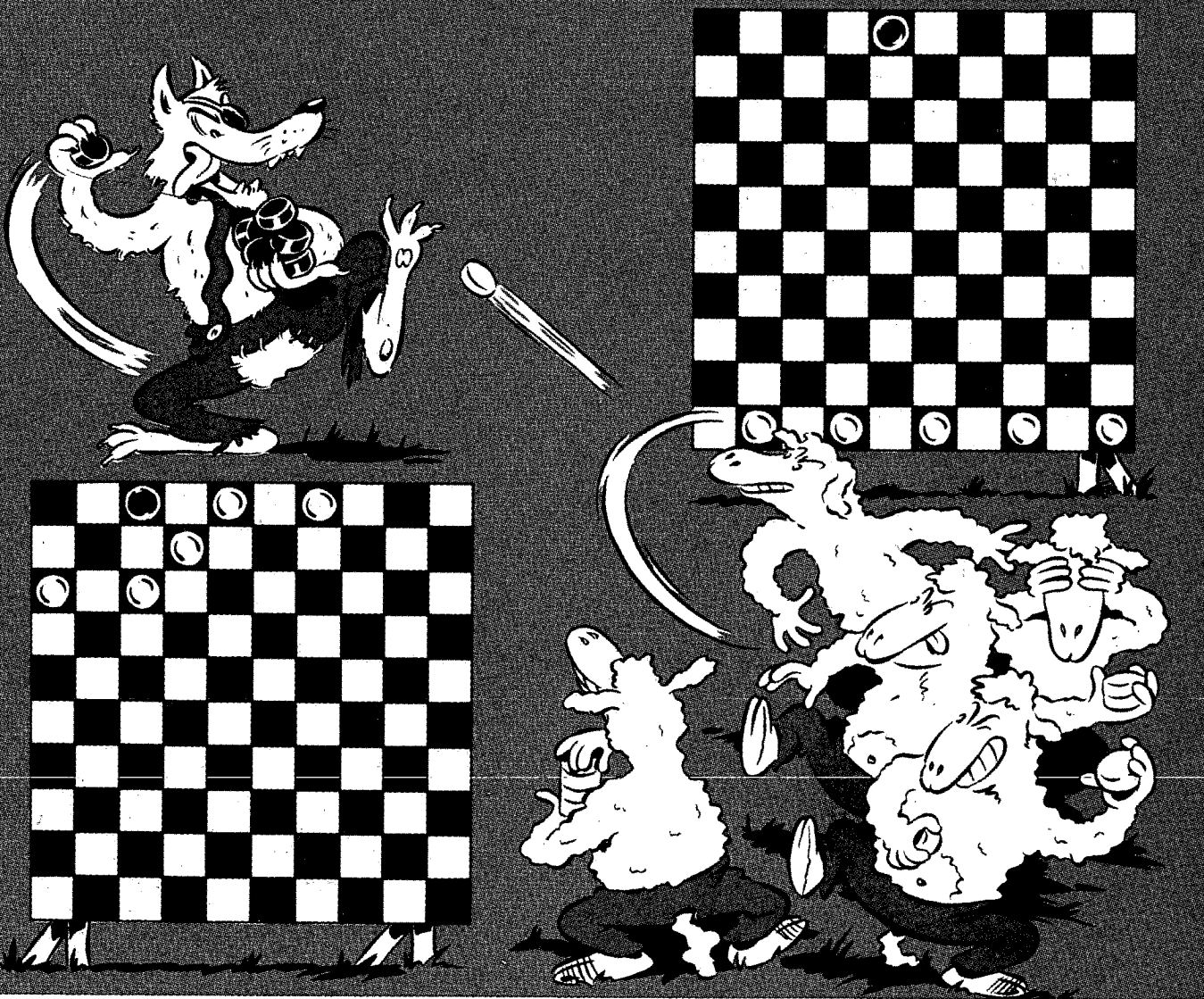
het de schapen heel wat lastiger maken.

Nog beter is het als hij één keer in het hele spel een heurt mag overslaan. Zo wint hij in de hieronder afgebeelde positie (met de schapen aan zet), als hij één keer mag 'passen'.

Zouden de schapen bij verstandig spel ook nu nog altijd kunnen winnen?

Als de wolf in totaal *tweemaal* mag passen, dan kan hij volgens ons in elk geval altijd door de schaapslinie heenbreken.

Probeer het maar!



Jaarvergadering/studiedag 1985

De jaarvergadering/studiedag 1985 wordt gehouden op zaterdag 26 oktober 1985 van 10.00 u tot 17.00 u in het gebouw van de SOL, Archimedeslaan 16, universiteitscentrum De Uithof te Utrecht.

De studiedag wordt voorbereid door de Didaktiekkommissie van de NVvW. Het thema is: **VOORBEELDEN**.

Een uitnodiging aan alle leden en een agenda voor de vergadering staan ook in dit nummer. Uitgebreide informatie over de studiedag volgt in Euclides nr. 2.

Ter gelegenheid van de studiedag wordt een publikatie samengesteld, die aan alle deelnemers wordt toegezonden.

De studiedag is gratis voor leden, niet-leden zijn welkom, van hen wordt een bijdrage van f15,- gevraagd.

Aanmelding kan geschieden door middel van:

een briefkaart;

overmaking van f15,- naar gironr. 143917 t.n.v. NVvW te Amsterdam onder vermelding van 'lunch lid';

overmaking van f15,- onder vermelding van 'deelnemer niet-lid';

overmaking van f30,- onder vermelding van 'lunch niet-lid'.

Men kan zich ook ter plaatse aanmelden: alle prijzen zijn dan f5,- hoger.

Hoorzittingen wijzigingen examen wiskunde havo

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren organiseert op drie plaatsen in Nederland een hoorzitting naar aanleiding van het verschijnen van het voorlopig Rapport van de Werkgroep ter voorbereiding van wijziging van het eindexamenprogramma wiskunde havo. Alle belangstellende wiskundecollegisten worden uitgenodigd één van de zittingen bij te wonen. Het rapport zal half augustus (pas) naar de scholen verzonden worden!

Alle bijeenkomsten zijn van 16.00 u tot 18.00 u in de volgende plaatsen:

Eindhoven

dinsdag 24 september 1985

Technische Hogeschool

Gebouw: Rekencentrum (R.C.), K1

Vanaf station N.S. uitgang noord.

Zwolle

woensdag 25 september 1985

Thorbecke Scholengemeenschap

Dr. van Heesweg 1

Vanaf station N.S. buslijn 2 richting Sophia Ziekenhuis tot eindpunt.

Rotterdam

donderdag 26 september 1985

City College Emmaus Franciscus

Beukelsdijk 91.

Nascholingscursussen informatica voor leraren

In 1985/1986 worden door het PAO-Informatica en andere PAO-organen weer nascholingscursussen informatica voor leraren in het HBO en voortgezet onderwijs georganiseerd. De cursussen worden uitgevoerd door een aantal Hogescholen en Universiteiten in Nederland.

Een overzicht van de cursussen en de betrokken instellingen kunt u aanvragen bij:

PAO-Informatica, Plantage Muidergracht 6,

1018 TV Amsterdam, tel.: 020-522 20 86.

Jaarvergadering/Studiedag 26 oktober 1985

Uitnodiging aan alle leden

Agenda

9.30 u-10.00 u

Aankomst, koffie.

10.00 u-10.30 u

Huishoudelijk gedeelte:

a Opening door de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen.

b Notulen van de jaarvergadering 1984 (zie maartnummer van Euclides, pag. 271).

c Jaarverslagen (zie Euclides).

d Décharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie.

Het bestuur stelt kandidaat: mevrouw G. Visser en de heer L. A. G. M. Muskens.

e Bestuursverkiezing in verband met periodiek aftreden van dr. J. van Dormolen, F. F. J. Gaillard en M. Kindt. Het bestuur stelt de aftredenden kandidaat.

f Voorstel tot uitbreiding van het bestuur van 9 tot 10 leden.

Voor deze uitbreiding stelt het bestuur kandidaat: mevrouw drs. J. van Vaalen.

g Vaststelling van de contributie 1986/1987.

Het bestuur stelt voor de contributie niet te verhogen en vast te stellen op f50,-.

Themageeelte:

Inleiding en aankondiging lokalen voor de groepen.

Pauze, koffie.

Bijeenkomst in groepen.

Lunch.

Lezing door Prof. dr. J. van de Craats:

'Voorbeelden en tegenvoorbeelden'.

Pauze, koffie.

Bijeenkomst in groepen.

Huishoudelijk gedeelte:

h Rondvraag*).

i Sluiting.

*) Degenen die van de rondvraag gebruik wensen te maken worden verzocht hun vragen, zo mogelijk, schriftelijk vóór de lunch aan één van de bestuursleden bekend te maken.

Tot veertien dagen vóór de vergadering kunnen tegenkandidaten voor de agendapunten d, e en f schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.

Wiskunde op maat

U bepaalt als wiskundedocent de inhoud, aard en kwaliteit van uw wiskundelessen. Auteurs en uitgevers van wiskundemethoden kunnen u daarbij slechts behulpzaam zijn met goede schoolboeken. Met de methoden van Wolters-Noordhoff kunt u wiskunde geven zoals u dat wenst.

Moderne wiskunde abcd

Voor lbo en mavo

'Moderne wiskunde abcd' staat voor differentiatie, degelijkheid en doelmatigheid. In eenvoudige taal en met ruim voldoende oefenstof voor alle niveaus van lbo en mavo.

Passen en meten

Voor lbo, mavo en brede scholengemeenschappen

'Passen en meten' biedt oplossingen voor twee belangrijke problemen: de grote verschillen tussen de leerlingen en het gebrek aan motivatie bij veel leerlingen die het nut van de wiskunde (nog) niet inzien.

Sigma

Voor mavo, havo en vwo

Ook de nieuwe delen van 'Sigma' zijn flexibel bruikbaar en berekend op zelfwerkzaamheid. 'Sigma' rekent af met tijdproblemen, biedt degelijke en betrouwbare theorie en een ruime keus aan oefenstof.

Voor de bovenbouw van het vwo zijn er de nieuwe delen voor wiskunde A en B.

Moderne wiskunde

Voor mavo, havo en vwo

Voor de onderbouw is er 'Moderne wiskunde vierde editie': eigentijds in aanpak, vorm en inhoud. Bovendien zijn er gebruikersboeken vol ervaringen en tips van collega's. In het havo en vwo biedt de methode een adequate voorbereiding op de nieuwe delen van 'Moderne wiskunde bovenbouw'.

Wiskunde voor het middelbaar beroepsonderwijs

Voor het mbo

De diverse delen van deze series bieden precies die wiskunde, die er nodig is voor het technisch, het agrarisch, het laboratorium- en streekschool-onderwijs. De wiskundeleergang voor de mts (Pigmans) vormt al jaren een betrouwbaar baken voor het mto-examen.

Opgavenbundels

Voor het voortgezet onderwijs

Nieuw zijn de examenbundels 'Opgaven wiskunde A vwo' en 'B vwo'.

Een vervolmaking van deze serie die al jaren de extra oefenstof biedt die u nodig heeft voor lbo, mavo, havo of vwo.

Voor nadere informatie, catalogi, overige documentatie en beoordelingsexemplaren kunt u zich wenden tot Wolters-Noordhoff.



Wolters-Noordhoff bv

Postbus 58

9700 MB Groningen

Telefoon (050) 22 63 11

Wolters-Noordhoff

Verantwoording

Zoals u wellicht in het laatste nummer van de vierentwintigste jaargang heeft gelezen, heeft Wolters-Noordhoff besloten Pythagoras niet langer uit te geven. Velen van u hebben zich veelvuldig ingezet om abonnees voor dit blad te werven.

Reden voor Wolters-Noordhoff om als blijk van waardering deze Euclides 'Pythagoras-special' mogelijk te maken.

In deze 'Pythagoras-special' vindt u niet zozeer het beste uit Pythagoras. Wel krijgt u door middel van dit nummer hopelijk een indruk van de directe invloed van Pythagoras op het onderwijs in de wiskunde. Een en ander is verluchtigd met een

aantal puzzels en vraagstukken waar u en/of uw leerlingen hopelijk nog enkele genoeglijke (les)uren aan kunnen beleven.

Op het moment van dit schrijven is het zo goed als zeker dat de redactie van Pythagoras erin is geslaagd de uitgave van dit blad elders onder te brengen. De redactie hoopt dan ook dat u na inzage van deze 'Pythagoras-special' overtuigd bent van het nut van Pythagoras, zodat ze wederom een beroep op uw medewerking kan doen.

Amsterdam, juni 1985