

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

60e jaargang
1984 | 1985
december

Euclides 4

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Mw I. van Breugel
Drs F. H. Dolmans (hoofdredacteur)
W. M. J. M. van Gaans
Dr F. Goffree
Drs W. Kleijne
L. A. G. M. Muskens
Drs C. G. J. Nagtegaal
P. E. de Roest (secretaris, wnd. eindredacteur)
Mw H. S. Susijn-van Zaale
Dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12,
7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 50,- per verenigingsjaar;
studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de
V.V.W.L. f 35,-; contributie zonder Euclides f 30,-.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met
vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht
bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen,
tel. 08894-1 17 30. Zij dienen met de machine geschreven
te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van
1 1/2. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos
5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is
opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs W. Kleijne, Treverilaan 39,
7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille
(buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5,
3155 BR Maasland. Gironr 1609994 t.n.v. NVvW
leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 42,40. Een collectief
abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 24,65.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567,
9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met
betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend
nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag
leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het
einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers f 7,- (alleen verkrijgbaar na
vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

Een hoofdstuk zonder huiswerk

Harm Jan Smid, Agnes Verweij

Ons artikel 'Huiswerk voor wiskunde', gepubliceerd in Euclides jaargang 1982/1983 nr. 5 en nr. 6, was voor de wiskundeleraar G. Verhoef uit Middelburg aanleiding om een van zijn klassen aan een experimentje te onderwerpen. In het voorjaar van 1983 heeft hij in een 3 atheneum klas van de Christelijke Scholengemeenschap Walcheren geprobeerd na te gaan wat het effect was van de behandeling van een hoofdstuk uit het leerboek zonder huiswerk. De heer Verhoef vond de resultaten dermate verrassend, dat hij graag in deze richting verder geëxperimenteerd zou hebben als hij niet aan het eind van hetzelfde schooljaar al met de VUT het onderwijs verlaten had.

Omdat er naar zijn idee nog wel het een en ander aan te merken viel op de aanpak van zijn eerste, en tevens laatste, experiment – hij spreekt daarom liever van een proef – wilde hij er in eerste instantie helemaal geen ruchtbaarheid aan geven. Wij vonden het echter jammer als andere wiskundeleraren er geen kennis van zouden kunnen nemen. Gelukkig bleek de heer Verhoef toch bereid te zijn om ons, een jaar na de proef, zijn cijfermateriaal en repetitieopgaven ter inzage te geven. Van de gang van zaken tijdens de proef had hij destijds niet systematisch aantekeningen gemaakt, maar hij kon zich hiervan nog veel herinneren.

Wij zullen hieronder de voorbereiding, de uitvoering en de resultaten van deze proef beschrijven. Tot slot roeren we dan nog wat punten aan die voor anderen, die ook zo'n proef zouden willen uitvoeren, van belang kunnen zijn.

De voorbereiding van de proef

De proef betrof de behandeling van hoofdstuk 3 'Vectoren' uit Getal en Ruimte 3HV2 in een 3e klas atheneum met 28 leerlingen.

De proef werd als volgt opgezet:

- Tijdens de lessen op school zou bovengenoemd hoofdstuk over vectoren behandeld en doorgevoerd worden. Hierbij zou géén huiswerk opgegeven worden.
- In plaats van huiswerk voor dit hoofdstuk zouden de leerlingen thuis een stuk geprogrammeerde instructie over parabolen moeten doorwerken.
- Na het hoofdstuk over vectoren zou hierover een repetitie gegeven worden en een week later nog een repetitie over dezelfde stof. Op de laatste repetitie zou men zich op school en thuis kunnen voorbereiden. Het hoogste cijfer van beide repetities zou gelden.

Deze gang van zaken werd tevoren aan de leerlingen bekend gemaakt en uitgelegd.

Voor de behandeling van het hoofdstuk 'Vectoren' werden evenveel lessen uitgetrokken als in vorige jaren: ongeveer 10.

De leraar bereidde zich voor op een erg duidelijke en vooral volledige uitleg van de benodigde theorie. Er kon immers niet op gerekend worden dat de leerlingen thuis voor zichzelf nog eens de puntjes op de i zouden zetten. Verder maakte hij een zorgvuldige selectie uit de opgaven in het boek en hij vulde deze aan met eigen opgaven. Dit was nodig omdat, nu geen huiswerk opgegeven werd, er heel wat minder oefenopgaven door de leerlingen gemaakt zouden kunnen worden, terwijl er naar zijn idee wel meer behoefte zou zijn aan opgaven voor diagnostisch gebruik.

Er werden twee sets repetitieopgaven opgesteld. De tweede repetitie werd wat anders samengesteld dan de eerste, omdat de leraar vermoedde dat anders door de bespreking van de eerste repetitie en de extra oefening die daarna gepland was er abnormaal veel hoge cijfers zouden vallen.

De uitvoering van de proef

Dat de leerlingen thuis aan geprogrammeerde instructie over parabolen moesten werken, gaf jammer genoeg wat storende problemen. Veel leerlingen konden toch niet goed uit de voeten met het,

helaas ook niet al te beste, materiaal zodat af en toe een deel van een les, of zelfs een hele les, aan bespreking van hun moeilijkheden besteed moest worden. Maar nog afgezien daarvan, wekte het werken aan twee onderwerpen tegelijk – thuis parabolen en op school vectoren – ook op zichzelf al bij veel leerlingen behoorlijk wat wrevel. De heer Verhoef realiseerde zich later dat er op deze manier ook veel te veel van de leerlingen gevraagd werd: in hetzelfde totaal aan les- en huiswerktijd waarin ze anders één hoofdstuk doorwerkten, moesten ze nu twee hoofdstukken onder de knie zien te krijgen. Dat een aantal leerlingen niet zo enthousiast reageerde op de proef, vond hij achteraf dan ook heel begrijpelijk.

De nieuwe leerstof over vectoren werd door de leraar, zoals gepland, steeds uitvoerig besproken. Té uitvoerig, vond collega Verhoef bij nader inzien; hij was elke les wel ongeveer de helft van de tijd zelf aan het woord, terwijl dit anders in zijn les hooguit een derde deel van de tijd, en vaak aanmerkelijk minder, zo was. Dit ging helaas ten koste van de tijd waarin de leerlingen actief met de stof bezig konden zijn, een bezwaar dat des te zwaarder telde nu deze tijd door het gemis aan huiswerk toch al sterk gereduceerd was.

Het werken aan de oefenopgaven in de les werd door de leraar veel meer gestuurd dan anders. Tegen zijn gewoonte in besprak hij nu vaak elk opgaaftje dat gemaakt was direkt na, om daarna pas weer een volgend sommetje op te geven. Hij deed dit, omdat hij het idee had dat het van belang was om de leerlingen in de lessen in gelijk tempo te laten werken, nu tempoverschillen niet door huiswerk opgelost konden worden. De heer Verhoef vond dit achteraf toch geen goed idee; er werd, nu de leerlingen in het keurslijf van gelijk tempo gedwongen werden, veel minder dan anders aan hun persoonlijk initiatief overgelaten. Dat kwam de sfeer in de klas ook niet ten goede, al was moeilijk vast te stellen in hoeverre die, door de leraar als minder prettig ervaren, werksfeer mede te wijten was aan de bovenvermelde onvrede bij de leerlingen over het werk thuis.

De diagnostische opgaven werden, volgens plan, regelmatig gebruikt. De leraar begon de les bijvoorbeeld weleens met een aantal opgaven over de in de vorige les behandelde stof op te geven. Nadat hier een minuut of tien aan gewerkt was werd alles

nagekeken en gaf de leraar waar nodig extra uitleg. De heer Verhoef deed dit zo, omdat hij nu niet zoals gebruikelijk de controle en bespreking van huiswerk kon gebruiken om hiaten in de beheersing van de stof tijdig op te sporen en te bespreken. Deze voor hem en zijn leerlingen nieuwe werkwijze is erg goed bevallen.

Bij de eerste repetitie werd aan de leerlingen gevraagd op te geven hoeveel huiswerktijd ze in totaal toch aan het hoofdstuk 'Vectoren' besteed hadden. Jammer genoeg hebben niet alle leerlingen zo'n opgave gedaan.

In de lessen tussen de twee repetities werd door een aantal leerlingen niet erg serieus meer gewerkt; zij vonden het cijfer voor de eerste repetitie al zó goed dat ze geen moeite meer wilden doen om dit te verbeteren.

Bij de tweede repetitie moesten de leerlingen opgeven hoe lang ze in totaal na de eerste repetitie nog thuis aan het hoofdstuk over vectoren gewerkt hadden.

Deze opgave werd wel door iedereen gedaan.

De resultaten

Voor de 21 leerlingen die bij de eerste repetitie opgaven hoeveel tijd ze in totaal aan huiswerk bij het tiental lessen over vectoren en als voorbereiding op de repetitie besteed hadden, bleek dit neer te komen op gemiddeld ruim een half uur.

Vier van deze leerlingen hadden thuis helemaal geen tijd aan dit werk besteed, acht leerlingen gaven een totaal van 10 tot 15 minuten op. Dit laatste werd door de heer Verhoef geïnterpreteerd als: ze hebben de zaak nog even doorgekeken voor de repetitie. De maximale huiswerktijd, twee uur, die door één leerling werd opgegeven, was nog beduidend minder dan de in normale gevallen hieraan bestede tijd.

Er kon, ook gezien de indruk die collega Verhoef had gekregen van het thuis werken door de zeven leerlingen die hierover niets hadden opgegeven, geconcludeerd worden dat de leerlingen redelijk goed gehoor gegeven hadden aan het verzoek om geen huiswerk over deze stof te maken.

De eerste repetitie werd door 26 van de 28 leerlingen voldoende tot zeer goed gemaakt. Eén leerling haalde een $5\frac{1}{2}$ en één leerling een 4. Het gemiddelde cijfer was bijna 8 –. De heer Verhoef was erg

verrast door deze, vergeleken met de overige resultaten in deze klas, zéér behoorlijke prestatie bij de toch beslist niet te eenvoudige repetitie.

Op grond van de opgave die alle 28 leerlingen deden bij de tweede repetitie, kon berekend worden dat zij gemiddeld nog bijna een uur in totaal aan huiswerk besteed hadden om deze repetitie voor te bereiden.

Het gemiddelde cijfer, bijna 7 —, was echter een volle punt lager dan bij de eerste repetitie, en er waren maar liefst zeven onvoldoendes: van $5\frac{1}{2}$ tot $1\frac{1}{2}$.

Wij hebben geprobeerd een wat reëler beeld van de prestaties bij de tweede repetitie te krijgen door de cijfers van de negen leerlingen die opgaven helemaal geen huiswerk meer gemaakt te hebben buiten beschouwing te laten. Dat deze leerlingen zelfs niet de moeite namen om thuis nog even de aantekeningen door te lezen, maakt het immers aannemelijk dat zij geen serieuze poging gedaan hebben om hun cijfer te verbeteren (wat inderdaad géén van de negen gelukt is). Van de overige 19 leerlingen was het gemiddeld cijfer de tweede keer een 7 en daarmee toch ook, ruim driekwart punt, lager dan hun gemiddelde de eerste keer. Zij hadden eerst één en nu vier onvoldoendes.

De verklaring hiervoor is naar de mening van de leraar dat de tweede repetitie niet alleen, zoals bedoeld, anders maar ook (veel) moeilijker was uitgevallen dan de eerste.

Van enig verband tussen de door de leerlingen afzonderlijk thuis aan voorbereiding op de tweede repetitie bestede tijd enerzijds en de verschillen tussen hun cijfers voor de eerste en tweede repetitie anderzijds was geen sprake, ook niet als we onze berekeningen beperkten tot de 19 leerlingen die wel wat huiswerk gemaakt hadden. Zo was er bijvoorbeeld een leerling die er met twee uur thuis werken in geslaagd was een $5\frac{1}{2}$ op te halen tot een 8, maar een ander, die begonnen was met een 6 — zag vijf uur huiswerk beloond met een 2 voor de tweede repetitie. Natuurlijk laten de aard en de omvang van deze proef het niet toe om hier conclusies aan te verbinden. Alleen verbaasde de afwezigheid van een duidelijke relatie tussen huiswerktijd en prestatieverbetering ons niet, gezien de literatuur over dit onderwerp (zie ook ons artikel 'Huiswerk voor wiskunde').

Terugblik

Het is mogelijk dat, door de aandacht die in het voorafgaande is besteed aan een aantal problemen bij de uitvoering van de proef, de indruk blijft hangen dat het geheel toch als minder geslaagd moet worden beschouwd. Naar de mening van de heer Verhoef is dat echter beslist niet het geval. Zeker een derde van de leerlingen was redelijk tot zeer enthousiast over de proef, een derde deel van de leerlingen had geen bijzondere op- of aanmerkingen en niet meer dan een stuk of acht leerlingen zouden liever niet meer met onderwijs in deze vorm geconfronteerd worden. Natuurlijk is dat aantal nog wel aan de hoge kant, maar met wat meer ervaring van de kant van de leraar en een wat betere opzet en planning van dit soort onderwijs zouden ongetwijfeld veel van de bezwaren van deze leerlingen te ondervangen zijn.

De sterke diagnostische controle kwam aanvankelijk nogal bedreigend over, maar aan het eind van de proef waren vrijwel alle leerlingen lovend over dit onderdeel.

Het meest opmerkelijk blijft toch het feit dat met zo weinig huiswerk zulke goede resultaten, met name voor het eerste proefwerk, behaald konden worden. Dat was niet alleen voor de leraar, maar ook voor de leerlingen een positieve verrassing.

Deze ervaring was voor de heer Verhoef aanleiding om op te merken: 'Ik ben tot de voorzichtige conclusie gekomen — wel heel erg laat — dat ik altijd veel (??) te veel huiswerk opgegeven heb'. En hij vond het erg jammer dat hij niet meer in de gelegenheid zou zijn verder te experimenteren met wat hem na afloop van deze proef veelbelovend leek: het werken met een heel beperkt aantal, zeer zorgvuldig geselecteerde, oefenopgaven en met diagnostische opgaven.

Tot slot

Tot slot van dit artikeltje willen we nog een paar zaken die ons bij deze proef zijn opgevallen aanstippen.

In de eerste plaats was voor ons geheel nieuw het idee van het combineren van huiswerkløze lessen met taken over een ander onderwerp in de vorm van geprogrammeerde instructie. Dit illustreert nog eens hoe moeilijk het voor een leraar is om

huiswerktijd als het ware weg te geven. Uit de beschrijving van de proef blijkt wel dat de combinatie, nog afgezien van de problemen met het materiaal voor de taken, in ieder geval psychologisch geen succes was. En de resultaten bij deze proef geven ook geen aanleiding om in het vervolg zo twee vliegen in een klap te willen slaan.

In de tweede plaats maakt deze proef nog eens duidelijk dat er wel wat vraagtekens gezet kunnen worden bij de mening dat huiswerk noodzakelijk is om het programma af te krijgen. In dit geval, waar nauwelijks huiswerk gemaakt werd, zijn niet meer lessen dan anders aan het hoofdstuk besteed, terwijl de resultaten uitstekend waren.

In de derde plaats is het interessant om eens te kijken naar de veranderingen in de lessen, die door het weglaten van huiswerk hebben plaatsgevonden. Uit de literatuur waren ons wel voorbeelden bekend van gevallen waarin door het weglaten van of anders omgaan met huiswerk ook andere didactische hulpmiddelen een kans gekregen hadden.

Opmerkelijk is dat dat bij deze proef ook zo was: het gebruik van diagnostische opgaven in de lessen was nieuw. Verder hadden wij gedacht dat er door het wegvallen van de huiswerkbepreking tijdens de lessen meer tijd beschikbaar zou komen voor het zelf werken van de leerlingen. Die verwachting is bij deze proef nu juist helemaal niet uitgekomen: de leraar was veel meer dan anders aan het woord. Bovendien trad hij bij het zelf werken van de leerlingen veel sturender op dan gewoonlijk. Hij

heeft dat allebei zelf als een bezwaar gevoeld, maar of de leerlingen dat ook zo ervaren hebben is niet helemaal duidelijk.

Het zou wel sporen met ervaringen uit ons lopende onderzoek, waarbij gebleken is dat een ruime gelegenheid om zelf te werken tijdens de les en de vrijheid om gedeeltelijk zelf te bepalen of je in die tijd veel of weinig doet (en dus of je weinig resp. veel huiswerk overhoudt) erg gewaardeerd werd door 'onze' leerlingen.

Tenslotte merken we op dat het veel minder lang zelf werken van de leerlingen aan het hoofdstuk over vectoren – korter tijdens de lessen, en thuis vrijwel niet – bij deze proef kennelijk niet geresulteerd heeft in slechtere repetitiecijfers. Misschien is het zo dat de leerlingen door het ontbreken van huiswerk weliswaar korter actief met de stof bezig zijn geweest, maar door het sterker sturende leeraarsgedrag wel effectiever.

Het zou interessant zijn om na te gaan hoe de resultaten van zo'n proef uitvallen als er meer eigen inbreng van leerlingen in de lessen is.

Deze proef was natuurlijk geen experiment in de streng wetenschappelijke zin van het woord. Zulke pretenties waren er bij voorbaat al niet. Dat vinden we ook niet zo belangrijk. Veel belangrijker is dat de proef van collega Verhoef zo goed demonstreert hoe je je als leraar tegelijk kritisch en constructief met je onderwijs kunt bezighouden.

Differentiaalvergelijkingen in het vwo II

Paul Drijvers

Naar aanleiding van mijn doktoraalscriptie (zie Euclides 59-1) heb ik op een studiedag van de NVWL en VVWL een voordracht gehouden getiteld 'Differentiaalvergelijkingen in het vwo'. Het is niet gelukt van dit artikel een weergave van die voordracht te maken. Toch hoop ik hier mijn ideeën over de aanpak van differentiaalvergelijkingen op school duidelijk te maken. Ik zal dat doen aan de hand van twee voorbeelden, één van een differentievergelijking en één van een differentiaalvergelijking (afgekort: d.v.). Als besluit zullen de veelbesproken differentiaalvergelijkingen aan de orde komen. De taal die ik in dit artikel gebruik is i.h.a. niet de taal die ik t.a.v. leerlingen zou willen gebruiken. Enkele stukken waarvoor dat wel het geval is, staan tussen „xxx”-tekens.

Een differentievergelijking

Als inleiding op het onderwerp differentiaalvergelijkingen kan een uitstapje naar differentievergelijkingen nuttig zijn. Hier volgt een voorbeeld van het afleiden en oplossen van zo'n differentievergelijking.

„Iemand zet op de bank een bedrag van f100,—. Maandelijks krijgt hij daarover 1 % rente. Maar zodra elke maand de rente is bijgeschreven haalt hij er f15,— vanaf. Hoe ontwikkelt zijn beginbedrag zich in de loop van de tijd?”

Noem het bedrag op de rekening na n maanden a_n .

Dan: voor alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{100}a_n - 15.$$

Dan: voor alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{100}a_n - 15.$$

Dan: de rij $a_0, a_1, a_2, \dots$ is oplossing van:

$$(1) \Delta y_n = \frac{1}{100}y_n - 15$$

$$(2) y_0 = 100$$

De vraagstelling is hier, in meer dan één orzicht analoog aan die bij een differentiaalvergelijking. Men zoekt een functie (in dit geval van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{R}$, een rij) die oplossing is van een vergelijking: Die vergelijking zegt iets over de verandering zegt iets over de verandering of groei van die functie in elk punt.

Vragen die men kan stellen zijn:

- Komt de rekening in de rode cijfers?
- Welk bedrag moet men als beginbedrag op de rekening zetten opdat dit er steeds op blijft staan?
- Hoeveel staat er na n maanden op de rekening?

Het beantwoorden van deze vragen komt – schematisch – op het volgende neer. Voor elk tweetal oplossingen van (1) geldt dat de verschilrij oplossing is van $\Delta y_n = \frac{1}{100}y_n$, de ‘bijbehorende homogene differentievergelijking’. Van deze laatste zijn alle oplossingen eenvoudig te bepalen. Met behulp van een konstante oplossing van (1) kunnen we nu alle oplossingen van (1) opschrijven: als de rij $b_0, b_1, \dots$ oplossing is van (1), dan is er een reëel getal C zodat: voor alle $n \in \mathbb{N}$:

$b_n = 1500 + C(1,01)^n$. Een uitdrukking voor a_n kunnen we nu vinden door een waarde voor C te kiezen zodat $a_0 = 100$.

Let op de analogie met het oplossen van een d.v. Het verschil van twee oplossingen is oplossing van een eenvoudigere vergelijking, die we wel aankunnen. Met de hulp van één (in de wandeling ‘particulier’ genoemde) oplossing kunnen we alle oplossingen van de gevraagde vergelijking geven. Die ‘eerste’ oplossing is soms te vinden door een konstante functie te proberen. Verder is onze vergelijking deel van een beginwaardeprobleem ((1) en (2) samen) dat afgeleid is uit een praktische situatie. Allemaal in overeenstemming met de gang van zaken bij een d.v.

Een differentiaalvergelijking

Differentiaalvergelijkingen zijn a.h.w. de continue equivalenten van differentievergelijkingen. Misschien is dat een mooie aanleiding om iets over het verschil tussen diskreet en continu te zeggen?

De volgende afleiding van een d.v. is vrij moeilijk en zou zeker voorafgegaan moeten worden door eenvoudigere voorbeelden.

„In de Noordzee leeft haring die door mensen gevangen wordt. Nu dreigde er zoveel gevangen te worden dat de haringstand schrikbarend terugliep in de zeventiger jaren. Daarom besloot men jaarlijks nog maar 60.000 ton te vangen (1 ton = 1000 kg). Van het Rijksinstituut voor Visserijonderzoek hoorden wij dat er op 1 augustus '81 690.000 ton haring in de Noordzee zit. Men streeft naar een haringstand van 10^6 ton. Aan ons de vraag: wordt dit ooit bereikt, en zo ja, wanneer?” Noem het totale gewicht van de haringpopulatie t jaar na 1 augustus '81 $f(t)$. We veronderstellen: als er geen vangst zou zijn, zou in evengrote tijdsintervallen de populatie met eenzelfde faktor groeien. Verder nemen we aan dat die 60.000 ton evenredig over het jaar verdeeld gevangen wordt.

De groei in periode $\langle a, a+h \rangle$ is $f(a+h) - f(a)$, maar zou zonder vangst (bij benadering) gelijk geweest zijn aan $f(a+h) - f(a) + 60.000h$. Er is immers tijdens deze periode 60.000h ton gevangen. Uit de veronderstelling van gelijke groeifaktor bij intervallen van gelijke lengte volgt:

$$\begin{aligned} \text{voor alle } h > 0, a \geq 0, b \geq 0: \\ \frac{f(a+h) - f(a) + 60000h}{f(a)} &= \\ = \frac{f(b+h) - f(b) + 60000h}{f(b)} \end{aligned}$$

Dan:

$$\begin{aligned} \text{voor alle } h > 0, a \geq 0, b \geq 0: \\ \frac{1}{f(a)} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + 60000 \right] &= \\ = \frac{1}{f(b)} \left[\frac{f(b+h) - f(b)}{h} + 60000 \right]. \end{aligned}$$

Stel nu dat f een differentieerbare functie is.

Dan: voor alle $a \geq 0, b \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(a)} (f'(a) + 60.000) &= \\ = \frac{1}{f(b)} (f'(b) + 60.000). \end{aligned}$$

Dan: er is een $C \in \mathbb{R}$ zodat voor alle $a \geq 0$:

$$\frac{f'(a) + 60.000}{f(a)} = C.$$

Dan: er is een $C \in \mathbb{R}$ zodat geldt voor alle $a \geq 0$:

$$f'(a) = Cf(a) - 60.000.$$

Biologen schatten de waarde van C voor haring op $\frac{1}{2}$. Het lijkt dus redelijk om te veronderstellen dat f oplossing is van het beginwaardeprobleem:

$$\begin{aligned} (3) \quad y'(x) &= \frac{1}{2}y(x) - 60.000 \\ (4) \quad y(0) &= 690.000 \end{aligned}$$

Vragen hierbij zijn:

- Is er een konstante functie die oplossing is van (3)?
- Voor welke waarden van $y(0)$ zal de haring uitsterven?
- Wordt het streefgetal van 10^6 bereikt en zo ja, wanneer?

Een schets van de oplosmethode: een konstante functie die oplossing is van d.v.(3) is eenvoudig te vinden. Verder is het verschil van twee oplossingen van (3) oplossing van $y'(x) = \frac{1}{2}y(x)$. En van deze laatste d.v. kunnen de leerlingen inmiddels alle oplossingen met domein $[0, \rightarrow)$ aangeven. Met behulp van die konstante oplossing kunnen we nu alle oplossingen van d.v.(3) met domein $[0, \rightarrow)$ opschrijven. De beginvoorwaarde selecteert er daaruit precies één.

De analogie met de differentievergelijking uit het vorige voorbeeld is, lijkt mij, duidelijk.

Dit model houdt geen rekening met seizoensinvloeden. Een seizoensafhankelijkheid zou men erin kunnen verwerken door in d.v.(3) de term $\frac{1}{2}y'(x)$ met een faktor $(1 + \cos 2\pi x)$ te vermenigvuldigen. De methode van oplossen verandert daardoor niet.

Differentialen

Een d.v. die i.v.m. populatiegroei ook van toepassing kan zijn is

$$(5-1) \quad y'(x) = \frac{1}{2}y(x) \frac{M - y(x)}{M}.$$

De exponentiële groei wordt hier geremd door een 'beperkte capaciteit van M plaatsen'. De remfaktor is het relatieve aantal vrije plaatsen.

Men kan deze d.v. oplossen m.b.v. de 'verborgen parameter'. Men bekijkt dan:

$$(5-2) \quad y'(t) = \frac{1}{2}y(t) \frac{M - y(t)}{M} \cdot x'(t).$$

(Het zou hier overigens handiger zijn om y als functie van x te beschouwen.)

Ik vat (5-1) en (5-2) samen tot:

$$(5-3) \quad dy = \frac{1}{2}y \frac{M-y}{M} dx,$$

waarbij 'dx' en 'dy' dus slechts als notatie functioneren.

Deze stellingname bleek op de studiedag goed voor een levendige discussie. Ik wil daarover enkele opmerkingen maken.

- Men is het er, lijkt mij, wel over eens dat differentiaal in het vwo hun ware gezicht niet laten zien. Het zou te ver voeren, ze in essentie te behandelen.
- Persoonlijk heb ik de neiging er dan maar niets over te zeggen. Of men het woord 'differentiaal' laat vallen bij (5-3) is een kwestie van smaak. Het

lijkt mij niet zinvol begrippen te introduceren die verder niet meer gehanteerd worden.

- Natuurlijk, er wordt wat verzwegen wanneer 'dx' en 'dy' slechts notaties zijn. Ik vind dat niet zo'n bezwaar. Wie als docent de wiskunde gedoseerd wil aanbieden, zal dat wel vaker moeten doen.

Tot zover mijn beschouwingen over de differentiaalvergelijking in het vwo. Of deze ideeën in praktijk bruikbaar zijn, zal moeten blijken. In elk geval ben ik zeer geïnteresseerd in reacties van docenten die hiermee ervaring hebben opgedaan.

Paul Drijvers is medewerker van de wiskundeafdelingen van Interstudie NLO in Nijmegen en Interstudie MO in Arnhem.

Boekbespreking

A. Berckmoes, D. De Decker, M. De Decker, H. Goossens, *Inleiding tot de informatica en begrippen van basic*, Vliebergh-Sencieleergangen 1982, Departement Wiskunde K.U. Leuven, Acco, Leuven, 1982, IX + 12 blz., BF 190.

In Vlaanderen neemt de belangstelling voor het gebruik van de computer in het onderwijs snel toe. In sommige scholen is informatica een verplicht onderdeel van het programma, in sommige andere scholen geschiedt onderwijs in informatica alleen nog maar buiten het gewone lesrooster, terwijl er ook nog scholen zijn waar geen informatica gegeven wordt.

Bovenstaand boek is de handleiding van een cursus die gegeven is voor bijscholing van leraren.

We beginnen met de taal, BASIC, te leren. Daarna volgen eenvoudige opdrachten. Eerst opdrachten zonder enige complicatie, zoals het vinden van de wortels van een vierkantsvergelijking. Dan komen lussen aan de orde. Het eerste voorbeeld, het benaderen van een wortel van een vergelijking, levert een lus waar je in principe niet uitkomt. Een mooie demonstratie van een lus, maar we moeten wel snel ervoor zorgen ons in zo'n lus niet te verstrikken. Daarom volgen er opdrachten waarbij men via IF ... GOTO de lus t.z.t. kan verlaten. De machine levert voorts de mogelijkheid lussen onzichtbaar te maken door opdrachten te accepteren als: laat X de waarden 1 tot en met 100 doorlopen. Een ander voorbeeld van een manier om gevallen uit te splitsen is een opdracht van de vorm GOTO 100, 200, 300 ON N, hetgeen betekent: als N = 1, ga dan naar regel 100, is N = 2, ga naar regel 200, en is N = 3, ga naar regel 300.

Het inbouwen van een subroutine geeft de mogelijkheid programma's korter op te schrijven. De eenvoudigste subroutine is een functie. Definiëert men bijv. $FNA(X) = X^3 - X^2$, dan

zal de opdracht FNA(5) te printen voldoende zijn om 100 op het scherm te doen verschijnen.

De machine beschikt over een tamelijk groot aantal bibliotheekfuncties, d.w.z. functies waarvan het functievoorschrift is ingebouwd. Men hoeft alleen maar SIN(0.7), SQR(38), ATN(2), LOG(3.1), EXP(2) te vragen om resp. sin 0,7, $\sqrt{38}$, arctan 2, ln 3,1, en e^2 te zien verschijnen.

Informatica is niet tot wiskunde beperkt. Aan niet-wiskundige toepassingen is dan ook de nodige aandacht besteed. Met name is uiteengezet, tamelijk summier, hoe men met een databestand kan opereren.

Ten slotte leren we nog welke instructies we moeten geven om op overzichtelijke manier op een scherm de gevraagde resultaten te doen verschijnen.

Het boekje is uitnemend geschikt voor mensen die, zoals uw recensent, in het vak verre van doorkneed zijn. Didactisch is het een wonderlijk geheel waarover menig didacticus zijn wenkbrauwen zou fronsen. Iets nieuws wordt op aanvankelijk onbegrijpelijke wijze geponeerd. Eerst daarna volgt de uitleg. Zoiets als de zwemleraar die eerst zijn leerling in het water gooit (zonder hengel) en hem dan zegt wat hij doen moet. De methode werkt echter uitstekend. Gezien de opzet om in kort bestek veel uit te leggen, verdient deze methode hier stellig de voorkeur boven al die methoden waarover didactici hun wenkbrauwen in rust laten. Wel is de compacte presentatie oorzaak dat de niet ervaren lezer van tijd tot tijd graag een vraag zou stellen. Dat is mij dan ook verschillende malen overkomen.

Al met al een zeer lezenswaardig geheel.

P. G. J. Vredenduin

Wat is een buigpunt?

W. Molendijk

Heeft de grafiek van de functie $f: x \rightarrow |x^2 - 1|$ buigpunten? Zie figuur 1. Volgens de definitie in een aantal gangbare methoden heeft de grafiek van deze functie wel buigpunten bij $(1, 0)$ en $(-1, 0)$. Maar er is eerder sprake van een 'knik'-punt dan van een buigpunt! Het lijkt dus in strijd met wat we intuïtief onder een buigpunt verstaan.

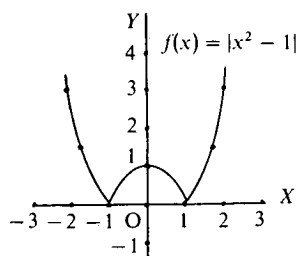
Waar ontstaan de problemen?

Continuïteit in het buigpunt is uiteraard vereist. Zou je ook differentieerbaarheid eisen, dan is er geen probleem: de grafiek van $f(x)$ heeft dan geen buigpunten. Maar de differentieerbaarheid kunnen we niet in zijn algemeenheid vereisen, omdat het dan mis gaat bij de verticale buigraaklijn (zie figuur 2): daar is de functie in het buigpunt niet differentieerbaar.

Hoe definiëren onze leerboeken het buigpunt?

I Schuh: Leerboek der hogere algebra (Thieme) p. 130:

Men zegt nu, dat de kromme in A een **buigpunt** heeft; de raaklijn in A wordt **buigraaklijn** genoemd (fig. 18). Voor een **buigpunt** in het punt $A(x = a)$ is dus nodig $f''(a) = 0$. Voldoende is dit echter niet. Is bovendien $f'''(a) \neq 0$, dan is er een buigpunt, is $f'''(a) = 0, f^{(4)}(a) \neq 0$ dan niet, enz.



Figuur 1

Daar hoeven we verder niet over te praten! De verticale buigraaklijn is hier al niet mogelijk. In mijn collegedictaten van vroeger kan ik niets vinden over het buigpunt.

II Moderne Wiskunde deel 9v (derde druk) p. 220:

Dit betekent dat de afgeleide functie in het punt B van stijgend overgaat naar dalend. In het punt B heeft de afgeleide functie dus een extreme waarde.

We noemen in dat geval het punt $B(b, f(b))$ een **buigpunt** van de grafiek. De raaklijn in dat punt heet **buigraaklijn** van de grafiek. In figuur 10.7 gaat in B de grafiek van „hol naar boven” over in „bol naar boven”. In een buigpunt kan ook het omgekeerde het geval zijn.

We zeggen dat $(b, f(b))$ een buigpunt van de grafiek van f is, als er twee open intervallen $\langle a, b \rangle$ en $\langle b, c \rangle$ bestaan, zo dat f'' in één van die intervallen stijgend en in het andere dalend is. Zoals je in opdracht 6 zult zien is het niet noodzakelijk dat f differentieerbaar is in b .

Wat is hier de definitie? De tweede zin? Dan moet f differentieerbaar zijn in B . Maar dat hoeft niet blijkens de laatste zin. Dus de voorlaatste zin. Maar dan wordt continuïteit niet vereist!

In de samenvatting van het hoofdstuk komt het buigpunt niet meer aan de orde.

Voor Moderne Wiskunde heeft de grafiek van $f(x) = |x^2 - 1|$ wel buigpunten.

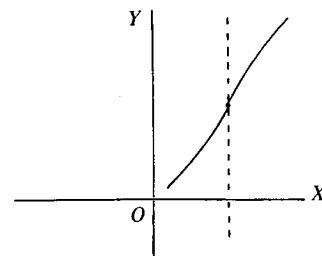
III Sigma ⁵/₆ analyse p. 127 en 129 (eerste herziene editie):

Stelling 6.6

Als de functie f minstens tweemaal differentieerbaar is op een interval I en als voor elke $x \in I$ geldt:

$f''(x) > 0$, dan keert de grafiek van f in I de bolle kant naar beneden.

$f''(x) < 0$, dan keert de grafiek van f in I de bolle kant naar boven.



Figuur 2

Definitie 6.3 buigpunt

Het punt $A(a, f(a))$ is een buigpunt van de grafiek van de functie f , als f continu is voor $x = a$ en als de grafiek van f aan één zijde van A de bolle kant naar boven keert en aan de andere zijde naar beneden.

Wordt in stelling 6.6 een open of een gesloten interval bedoeld? Waarom in definitie 6.3 zulke vage taal ('bolle kant naar boven') als daarvoor in stelling 6.6 de zaak 'afgesproken' is? Duidelijker was in de definitie geweest: 'als de tweede afgeleide in $x = a$ van teken verandert'. Ook dan geldt: Volgens Sigma heeft de grafiek van $f(x) = |x^2 - 1|$ wel buigpunten.

IV Meijer: *Zeker Weten*, Wiskunde I voor examen-kandidaten VWO (Van Walraven) p. 27 en 28:

Definitie

f is continu bij $x = a$. Dan heeft f een buigpunt bij $x = a$ als de functie overgaat van convex $\rightarrow$ concaaf, of van concaaf $\rightarrow$ convex.

Stelling

Als f'' van teken wisselt bij $x = a$ en f is continu bij $x = a$ dan heeft f een buigpunt bij $x = a$.

Als f een buigpunt heeft dan wisselt f'' van teken.

Opmerking

Vaak wordt f'' nul bij de tekenwisseling, het nul worden van f'' is echter géén criterium voor de existentie van een buigpunt.

Hier zien we de niet tevoren afgesproken begrippen convex en concaaf.

Volgens Meijer heeft de grafiek van $f(x) = |x^2 - 1|$ wel buigpunten.

V Getal en Ruimte 5/6 V I (achtste druk) p. 108:

Algemeen geldt

Een grafiek heeft een buigpunt als de richtingshoek α van de raakklijn een extreme waarde heeft ($-\frac{1}{2}\pi < \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$, red.).

Maar op blz. 97 vonden we al: hoe groter de richtingshoek, hoe groter de richtingscoëfficiënt van een lijn.

Dus bij een extreme waarde van α hoort een extreme waarde van de richtingscoëfficiënt, dus ook van f' .

Stelling V-7:

De grafiek van f heeft een buigpunt voor $x = a$, als $f'(x)$ een extreme waarde heeft voor $x = a$.

Hier wordt heel subtiel gebruik gemaakt van de richtingshoek in de definitie, en zo wordt de verticale buigraakklijn gered. Daarbij is het immers moeilijk spreken van een extreem in de richtingscoëfficiënt.

Nu heeft de grafiek van $f(x) = |x^2 - 1|$ geen buigpunten, omdat er niet sprake is van een raakklijn.

Het best sluit de definitie van Getal en Ruimte aan bij de eisen die wij intuïtief stellen aan een buigpunt.

Waar het om gaat is natuurlijk: wat is de definitie, die gebruikt wordt voor de examenopgaven? Graag zie ik deze vraag door een bevoegde instantie beantwoord!

Bovenstaande functie stelt de definitie aardig op de proef. Verkapter zit hetzelfde probleem in het volgende vraagstuk:

Van $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is de functie f gegeven door

$$\begin{cases} f(x) = 2e^x & \text{voor } x \leq 0 \\ f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) & \text{voor } x > 0 \end{cases}$$

Bepaal a , b en c als gegeven is, dat de grafiek van f een buigpunt heeft met x -coördinaat 0.

Een leuk vraagstuk voor uw volgende schoolonderzoek over functies! Of toch niet?

Drs. W. Molendijk is leraar wiskunde aan de RSG Harderwijk sinds 1973.

Naschrift

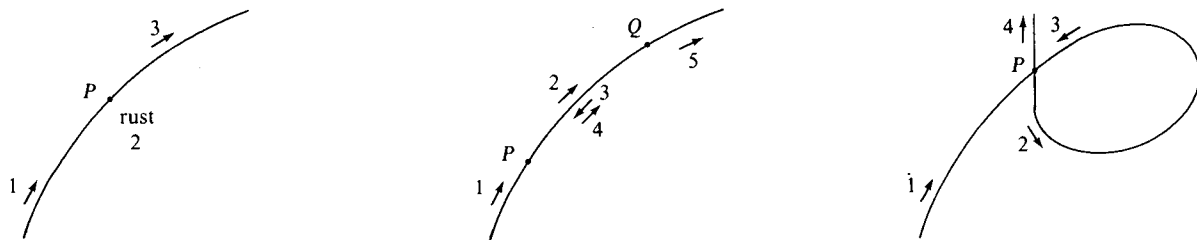
Met veel belangstelling heb ik het artikel van collega Molendijk gelezen. In een begeleidend schrijven aan het bestuur van de NVvW vraagt hij of dit bestuur via zijn contacten met bevoegde instanties antwoord zou weten te krijgen op de vraag: welke definitie van buigpunt wordt toegepast bij het opstellen van normen bij examenopgaven? Een goed gebruik is, dat het bestuur dergelijke vragen in eerste instantie doorspeelt naar de nomenclatuurcommissie en zo kwam de vraag bij mij terecht.

1 Wat is een buigpunt?

Ik wil beginnen het als een uitdaging op te vatten zelf een definitie van een buigpunt op te stellen, althans een poging daartoe te wagen. Het lijkt me dan nodig eerste eerst een definitie van een kromme te geven. En dat valt niet mee. Ik probeer het.

Definitie: Een (vlakke) kromme is het beeld van een interval (of een vereniging van eindig veel intervallen) bij een continue afbeelding van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^2$.

De toevoeging 'of een vereniging van een eindig



Figuur 3

aantal intervallen' is nodig om ervoor te zorgen dat ook bijv. een hyperbool tot de krommen gerekend wordt. De definitie heeft verschillende aantrekkelijke kanten. Doordat $\mathbb{R}$ totaal geordend is, is duidelijk wat onder het doorlopen van een kromme verstaan wordt, zonder dat we daarbij een beroep op de voorstelling doen. We kunnen daardoor spreken over een linker en een rechter omgeving van een punt van de kromme. We kunnen dubbelpunten 'ontrafelen' en hebben dan geen moeite meer met het definiëren van de twee raaklijnen in zo'n punt.

Helaas heeft hij ook zwakke kanten. De afbeelding moet zich fatsoenlijk gedragen. Een paar voorbeelden van onfatsoenlijk gedrag, in figuur 3.

Links blijft het beeldpunt een tijdlang op zijn plaats.

In het midden keert het op zijn schreden terug om daarna berouwvol weer verder te gaan.

Rechts gedraagt het zich wild bij een dubbelpunt: in plaats van rechtdoor te gaan, verandert het abrupt van richting.

Ik neem aan dat de afbeelding zich 'fatsoenlijk' gedraagt en zal noch mezelf, noch de lezer vermoeien met een exacte omschrijving van wat hiermee bedoeld is. Als de lezer lust heeft, is het leuk voor hem het zelf te proberen.

Nu de definitie van raaklijn aan een kromme in een punt. Ik geloof dat daarover geen onenigheid zal ontstaan en sla hem dus over.

We naderen de kern: wat is een buigraaklijn? Ik probeer het met de volgende definitie.

Definitie: Onderstel een kromme k heeft in een punt P een raaklijn l . Als er op de kromme een linker omgeving van P en een rechter omgeving van P bestaan die aan verschillende kant van l liggen, dan heet l buigraaklijn in P aan k . (Met omgeving is gereduceerde omgeving bedoeld: P telt niet mee.) Helaas doet de definitie het niet. Kijk maar in figuur 4.

Zowel in de linker als in de rechter figuur zou volgens deze definitie l een buigraaklijn in P aan k zijn.

We moeten dus nog een middel vinden om keerraaklijnen en buigraaklijnen te onderscheiden. Het verschil ligt voor de hand. Trek een van l verschillende lijn m door P . Bij een buigraaklijn liggen dan de linker en een rechter omgeving van P nog steeds aan verschillende kant van m , bij een keerraaklijn niet.

Wie nu nog een precieze definitie van een buigraaklijn wenst, wil ik het plezier wel doen.

Definitie: Als l raaklijn in P aan de kromme k is en als voor elke lijn m door P geldt: er is op de kromme



Figuur 4

een linker en een rechter omgeving van P die ter weerszijden van m liggen, dan heet l buigraaklijn van k in P .

Verhelderend is deze formulering niet en zeker niet aan te bevelen voor schoolgebruik.

En ten slotte het antwoord op de gestelde vraag:

Definitie: Het punt P heet een buigpunt van de kromme k , als k in P een buigraaklijn heeft.

2 Consequenties voor het onderwijs

Ik zou willen onderscheiden:

- a buigpunten van krommen die door een parameter-voorstelling gegeven zijn;
- b buigpunten van grafieken van functies.

Over het eerste soort buigpunten is een artikel te vinden in Euclides 52 (1976-77), blz. 108-109 van drs. A. H. Nieuwenhuis, getiteld 'Buigpunt ja, buigpunt nee?' Een reactie daarop verscheen in Euclides 53 (1977-78), blz. 13-16 van drs. M. S. R. Nihom met als titel 'Buigpunten? Ja!'. Uit deze artikelen blijkt dat het onderwerp buigpunt van een in parametervoorstelling gegeven kromme tot moeilijkheden aanleiding kan geven. In het kort gezegd komen deze moeilijkheden daarop neer dat men door het toepassen van bepaalde rekenmethoden sommige punten ten onrechte als buigpunten kwalificeert, terwijl het bij nauwkeuriger beschouwing keerpunten blijken te zijn.

Enige tijd later werd door de CEVO (toen nog CVO geheten) besloten dat op het eindexamen wiskunde I 'geen vragen zullen gesteld worden over het opsporen van buigpunten van krommen die gegeven zijn door een parametervoorstelling'. Zie het Vademecum, blz. 35.

Door dit besluit zijn we van een kopzorg bevrijd en kunnen ons beperken tot de grafieken van functies. De geijkte methode om hier de buigpunten op te sporen is het bepalen van de extremen van de afgeleide functie.

Is hiermee de kous af? Niet helemaal. We vinden zo nog niet de verticale buigraaklijnen. Daarbij schuilt nog een addertje onder het gras. Verticale raaklijnen aan een grafiek kunnen buigraaklijnen, het kunnen echter ook keerraaklijnen zijn. Hoe kunnen we deze onderscheiden?

De raaklijn in $(a, f(a))$ aan de grafiek van f is een verticale buigraaklijn als $\lim_{x \uparrow a} f'(x) = \infty$ en

$\lim_{x \downarrow a} f'(x) = \infty$ of als deze beide limieten $-\infty$ zijn;

deze lijn is een keerraaklijn als van deze limieten de een ∞ en de ander $-\infty$ is.

Zo heeft de grafiek van $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ een verticale buigraaklijn in de oorsprong en de grafiek van $x \rightarrow \sqrt{|x|}$ een keerraaklijn.

Merkwaardig is dat het laatste bolwerk van de definities van een buigpunt, die uit Getal en Ruimte, hier ook nog schipbreuk lijdt. Volgens deze definitie zou namelijk de oorsprong buigpunt zijn van de grafiek van $x \rightarrow \sqrt{|x|}$.

3 Moeten bevoegde instanties ingrijpen?

De nomenclatuurcommissie is geen bevoegde instantie. Deze commissie heeft echter steeds nauw samengewerkt met de CEVO en met haar voorgangers. De commissie kwam met aanbevelingen, de CEVO nam deze eventueel over. Was dat het geval dan werden de aanbevelingen bindende uitspraken. Vandaar dat het Uittreksel uit het rapport van de nomenclatuurcommissie, dat men in het Vademecum vindt op blz. 39 tot en met 48-2, bindend is voor de CEVO.

Een voorbeeld ter toelichting. Volgens sommige schoolboeken was een functie in een randpunt van haar domein per definitie niet continu, volgens andere kon dat wel het geval zijn. Gevolg daarvan was dat volgens deze schoolboeken het niet resp. wel mogelijk was dat een functie in een randpunt van haar domein differentieerbaar is. Uit het veld kwam de vraag naar voren aan welke van de beide opvattingen men zich moest houden. De nomenclatuurcommissie kwam met een voorstel, liet dit toetsen door het wetenschappelijk onderwijs en legde het toen de CEVO voor. Deze nam het over. Het resultaat vindt men in het Vademecum op blz. 48-1. Om de schoolboeken de gelegenheid te geven zich aan te passen, werd besloten: 'Tot en met 1984 zal de normering zo geschieden, dat degenen die een andere continuïteitsdefinitie hanteren, daarvan geen nadeel ondervinden'. Inderdaad is het verschillende keren noodzakelijk gebleken bij het opstellen van examenopgaven hiermee rekening te houden en ze zo te redigeren dat eenduidige normering mogelijk werd. Ik vermeld dit om duidelijk te maken dat in voorkomende gevallen met grote zorgvuldigheid te werk gegaan wordt.

Nu het onderhavige geval. Moeten bevoegde in-

stanties ingrijpen? De situatie vertoont principiële verschillen met de voorgaande. Ik dacht dat alle leraren, en alle schrijvers van schoolboeken in het bijzonder, best weten wat een buigpunt is en dat hierover geen meningsverschil heerst. Het blijkt soms moeilijk te zijn precies onder woorden te brengen wat men bedoelt. Hierbij worden fouten gemaakt. De door Molendijk geciteerde definities bevatten aperte fouten. In Nederland doen we

principeel niet aan staatsdidactiek, aan verplichte keuring van schoolboeken en dergelijke. Het is dan ook niet de taak van overheidsinstanties fouten in schoolboeken op te sporen. Dat moeten de schrijvers en de gebruikers zelf doen. Het is goed als dat gebeurt en het artikel van Molendijk levert daartoe een waardevolle bijdrage.

P. G. J. Vredenduin

Boekbesprekingen

Leben und Werk von John von Neumann, herausgegeben von T. Legendi und T. Szentiványi, uit het Hongaars vertaald door Rozsa Nienhaus, Bibl. Inst., Mannheim/Wien/Zürich, 1983, 151 blz., DM 32,-.

Het boek bestaat uit een zestal opstellen over Von Neumann, geschreven door zes verschillende auteurs.

John von Neumann werd geboren in Budapest in 1903 en overleed in 1957. Hij was veelzijdig begaafd en uitermate scherp van verstand. Op wiskundig terrein is hij bekend door zijn axiomatisering van de verzamelingenleer (d.m.v. klassen). Verder heeft hij fundamenteel werk verricht op andere gebieden van de wiskunde, zoals functionaalanalyse, meetkunden met oneindige dimensie, algebraïsche structuren. Hij was echter niet in hoofdzaak abstract-wiskundige. Van belang zijn zijn bijdragen op het gebied van de quantummechanica, de wiskundige economie en vooral de mechanische rekentechniek. Vier van de zes opstellen gaan dan ook over de werkzaamheden van Von Neumann op dit gebied. Eén van deze artikelen is van speciaal belang, omdat het geschreven is door iemand die nauw met Von Neumann samengewerkt heeft, n.l. H. H. Goldstine. Deze samenwerking dateert uit de beginfase van de ontwikkeling van de technieken van het mechanisch rekenen. Het is geen toeval dat deze ontwikkeling begon gedurende de tweede wereldoorlog. Een drijvende kracht ging daarbij uit van de Amerikaanse krijgsmacht. Het grote nut (!) van de rekenapparatuur is geweest dat deze de berekeningen uitvoerbaar maakte die noodzakelijk waren voor de constructie van de atoombom. Computerdeskundigen zullen met belangstelling de vele uiteenzettingen over het prille begin van de computer lezen.

Een afzonderlijk artikel is gewijd aan het werk van Von Neumann op het gebied van de operations research. Minimaxproblemen, numerieke oplossing van problemen uit de speltheorie en lineaire optimalisering zijn onderwerpen waaraan Von Neumann gewerkt heeft.

Wie het boek doorleest, krijgt een globaal inzicht in het veelzijdige werk van deze geleerde.

P. G. J. Vredenduin

Drs. A. Kaldewaij en Dr. J. van Tiel; *Voortgezette wiskunde*; Uitg. Bohn, Scheltema & Holkema; Utrecht.

De vier delen van deze voortgezette wiskunde geven de wiskunde-stof bestemd voor het hoger technisch onderwijs. De boeken, aansluitend bij de wiskundekennis op havo- en mts-niveau, proberen de kloof tussen wiskunde en de beroepsgerichte vakken te overbruggen door te tonen hoe men in de praktijk met wiskunde omgaat. De schrijvers stemmen hierop dan ook hun methode af: veel uitleg en weinig bewijzen in strikt wiskundige zin. Veel voorbeelden van het gebruik en de toepassing van wiskundige methoden zijn opgenomen. De schrijvers hebben zich consequent aan het bovenstaande, zoals opgenomen in het voorwoord, gehouden. Daardoor zijn er naar mijn smaak vier uitstekende leerboeken ontstaan. In elk deel wordt telkens een afgeronde hoeveelheid stof gepresenteerd:

Deel 1. Differentiaalrekening en integraalrekening: functies en relaties; limieten; differentiëren; exponentiële en logaritmische functies, benaderingen, partieel differentiëren; nulpuntsbepalingen; integreren; complexe getallen; berekening van integralen; functies van meer variabelen; vectorfuncties; meervoudige integralen.

Deel 2. Differentiaalvergelijkingen en de Laplace-transformatie.

Deel 3. Vectorrekening en matrixrekening: vectorrekening; stelsels lineaire vergelijkingen; matrixrekening; vectoranalyse.

Deel 4. Fourier-theorie en systeemtheorie: Fourierreeksen; Fourierintegralen; convolutie; discrete signalen.

In ieder deel zijn vele opgaven opgenomen. De antwoorden zijn achterin vermeld hetgeen de gebruikswaarde ten goede komt, evenals de in ieder deel opgenomen registers.

Samenvattend: uitstekende leerboeken die naast het onderwijs waarvoor ze in de eerste plaats geschreven zijn, hun weg stellig zullen vinden in vele andere opleidingen.

W. Kleijne

Over het verdelen van aangeslibd land Een brugklas projekt

Jan van Maanen

1 Enkele gegevens vooraf

Mijn onderwijs in de onderbouw (gymnasium) heeft twee gezichten. Enerzijds is het zeer konventioneel en gebaseerd op de meest droge en degelijke wiskundemethode die Nederland rijk is. Anderzijds bestaat het uit korte projekten in groepswerk, die op onverwachte wijze terugkijken op de klassikaal behandelde stof of die vooruitwijzen naar wat komen gaat. Een projekt dat in de brugklas zeer aansloeg beschrijf ik hieronder.

Thema voor dit projekt was het volgende probleem, dat ik tegenkwam bij mijn onderzoek van de geschiedenis van de wiskunde:

Twee burenen hebben aangrenzende percelen land aan een rivier. De rivier zet door aanslibbing aan hun percelen nieuw land aan, dat vruchtbaar en dus kostbaar is. Wiens bezit wordt dat nieuwe land, en als het over de twee burenen verdeeld wordt, hoe moeten dan in het nieuwe land de grenzen getrokken worden?

De jurist Bartolus schreef in 1355 een traktaat over dit probleem en kwam tot de konklusie dat hij alleen met behulp van de meetkunde een oplossing kon geven. Het konstrueren van de grenzen in het nieuwe land in allerlei door middel van landkaarten gegeven situaties vormde de hoofdmoot van het projekt. Maar voordat het projekt zelf aan de orde komt, volgt eerst enige informatie over de juridische en historische aspekten van het verdelingsprobleem. Ook Bartolus en zijn werk komen daarbij aan de orde.

2 Juridische en historische aspekten van het verdelingsprobleem

Het verdelingsprobleem is oud (het klassieke Romeinse recht had er al rechtsregels voor), maar de Falkland-krisis laat zien hoe aktueel het nog is. Het beschermen van Engelse burgers en Engels grondgebied was voor de Engelsen namelijk maar een van de motieven om oorlog te voeren. Want de nabijheid van de Falklandeilanden bij de Zuidpool en de konventie dat het grondgebied van Antarctica (met nog ongekende bodemschatten) verdeeld wordt over landen afhankelijk van de afstand van die landen tot het Zuidpoolgebied zal een minstens zo belangrijk motief geweest zijn.

In het Romeinse recht werd aanslibbing beschouwd als *accessio*, aanwas. Voor aanwas gold het algemene verdelingsprincipe:

de aanwas aan iets dat mijn eigendom is, is zelf ook mijn eigendom.

Een kalf van mijn koe, vruchten aan mijn boom en aanslibbing aan mijn land zijn dus volgens dit principe mijn eigendom.

In deze zin liet de jurist Gaius zich al rond 160 na Chr. uit in zijn *Institutiones*, het oudste vrijwel volledig overgeleverde leerboek van het Romeinse recht. Latere rechtsbronnen die bepalend zijn geweest voor de totstandkoming van het huidige recht (de *Digesten*, de *Instituten* van Justinianus, beide ontstaan rond 530, en de middeleeuwse kommentaren daarop door de *Glossatoren*) gaan op dezelfde wijze te werk als Gaius.

Een nieuwe aanpak geeft Bartolus, die als eerste ingaat op het fundamentele probleem dat ontstaat als je aanslibbing als *accessio* ziet: als eenmaal vastgesteld is aan wiens oude land een stuk grond aangewassen is dan kan het algemene verdelingsprincipe voor *accessio* gehanteerd worden, maar hoe stel je zo iets vast? Dat is aanzienlijk moeilijker dan in het geval van vruchten aan een boom of het kalf van een koe.

Bartolus realiseert zich dat dit een wiskundig probleem is.

3 Bartolus

Bartolus, naar zijn geboortestreek meestal aangeduid als Bartolus de Saxoferrato, werd in 1313

geboren bij Ancona in Italië. Hij was van boerenafkomst maar kon studeren omdat zijn ouders een zekere mate van welstand hadden. Na zijn rechtenstudie in Perugia en Bologna promoveerde hij eind 1334 in deze laatste plaats en kwam, onder andere in Pisa, in rechterlijke functies terecht. Zijn werk viel in Pisa zodanig op dat hij daar in 1339 bij de uitbreiding van de universiteit benoemd werd tot hoogleraar in de rechten. In 1343 stapte hij over naar de universiteit van Perugia, waar hij bleef tot zijn dood in 1357.

Hij was zeer populair, gaf talrijke juridische adviezen en stond bij studenten in hoog aanzien wegens zijn keuze van onderwerpen, die hij bij voorkeur bij de praktijk en de aktualiteit liet aansluiten. Zijn commentaren op het Romeinse *Corpus Iuris* en de uitwerking daarvan in allerlei traktaten, die in vele afschriften en na de uitvinding van de boekdrukkunst al snel in tientallen edities beschikbaar waren, zijn mede bepalend geweest voor de latere wetgeving. Ze werkten bijvoorbeeld door in de *code Napoléon* en daarmee in de moderne wetgeving over de gehele wereld.

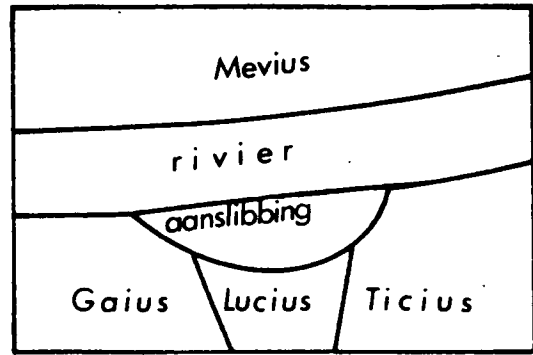
Tijdens een vakantie aan de Tiber zag Bartolus in de praktijk dat de verdeling van aangeslibd land de aanleiding was tot juridische problemen. Het onderwerp liet hem niet los, en hij besloot er een verhandeling (*Tractatus Tyberiadis* of *Tractatus de fluminibus*, d.w.z. 'over de Tiber' of 'over de rivieren') over te schrijven.

De tekst begint op de gebruikelijke wijze, namelijk met het citeren van de rechtsregel uit de oude bronnen die toegelicht gaat worden, in dit geval:

'Wat de rivier door aanslibbing aan onze akker heeft afgezet, wordt krachtens het algemeen geldende recht door ons verworven.'

Hierna volgen ellenlange omschrijvingen van de in de regel voorkomende begrippen (rivier, aanslibbing, ons, ...), en dan opeens stelt Bartolus:

'Omdat ik over de verdelingen van aangeslibd land verscheidene problemen gezien heb, die ik naar mijn mening onmogelijk kan behandelen zonder dat de materie voor het oog aanschouwelijk is, daarom heb ik voor het oog verhelderende figuren toegevoegd, waarmee ik die dingen wil uiteenzetten waarover algemene onwetendheid bestaat. En daarbij zal ik een aantal meetkundige redeneringen gebruiken.'



Figuur 1

Ik zal Bartolus hierin volgen en ook een aantal hopelijk verhelderende figuren toevoegen. De potentiële conflicten worden duidelijk in figuur 1. Welk deel van de aanslibbing is nu aangewassen bij de akker van Gaius, en welke delen bij Lucius en Ticius? Lucius zal ongetwijfeld voorstellen om de oude grenzen te verlengen, maar Gaius en Ticius zullen het daarmee zeker niet eens zijn. Blijkbaar is er een meetkundig criterium nodig waarmee uit de vorm van de bestaande gebieden de grenzen in het nieuwe gebied bepaald worden. Bartolus beseft dat, en kiest als criterium het *ius propinquitatis* ofwel recht van nabijheid, dat voor ons neerkomt op:

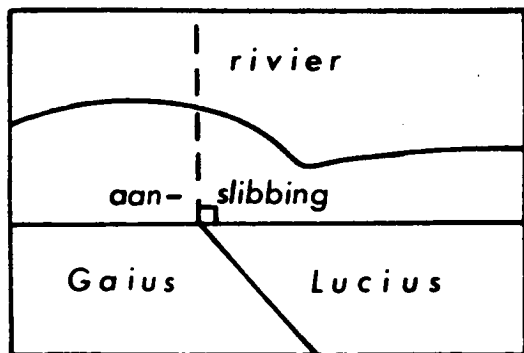
Een punt in het nieuwe land beschouw je als aangeslibd bij de meest nabij gelegen oude akker.

Het probleem grenzen in het nieuwe land te konstrueren kan dus modern als volgt geformuleerd worden:

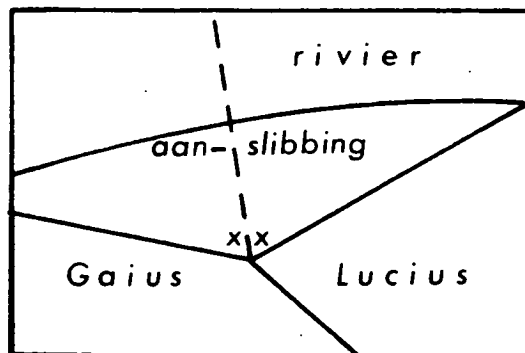
In een vlak zijn twee gebieden A en B gegeven. Konstrueer de verzameling van de punten waarvan de afstand tot A gelijk is aan de afstand tot B.

Bartolus past dit verdelingsprincipe toe op talrijke kaartjes met aanslibbingen en verhoogt daarbij stap voor stap de moeilijkheidsgraad. Hij begint met het meest elementaire geval: de oude oever bestaat uit lijnstukken.

In dat geval wordt de grens gevormd door de loodlijn op de oude oever (fig. 2) of de bissectrice van de hoek in de oude oever (fig. 3). Dat het tweede geval het eerste bevat ziet Bartolus overigens niet. Lucius' voorstel om de grenzen recht door te verlengen zal dus in geen van de drie



Figuur 2



Figuur 3

bovenstaande situaties (fig. 1, 2 en 3) gehonoreerd worden.

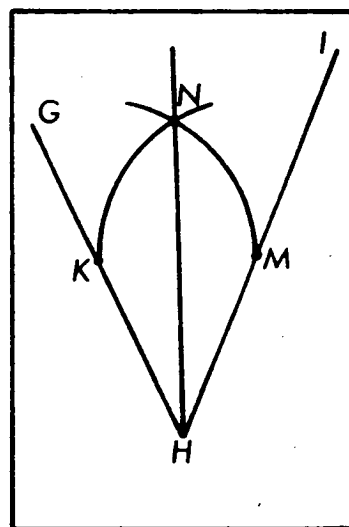
Uitgebreid worden nu de Euclidische passer- en liniaalkonstrukties van loodlijn en bissectrice beschreven, hetgeen leidt tot voor een juridische tekst hoogst ongebruikelijke passages als (zie fig. 4):

‘Teken twee lijnen, GH en HI , die samenkomen in een punt H , waarboven je de lijn (d.w.z.: de gevraagde bissectrice; j.v.m.) wilt trekken. Laat ik dan aan beide kanten op die lijnen een punt maken op gelijke afstand (d.w.z.: van H ; j.v.m.): K , M . Laat ik vervolgens in K de voet plaatsen van de passer, die ik open tot aan M en die ik draai naar de kant waarboven ik de lijn wil trekken. Laat ik vervolgens de voet van de passer in punt M plaatsen en hem openen tot aan punt K en hem op gelijke wijze ronddraaien, dan snijden die twee cirkels elkaar in punt N .’

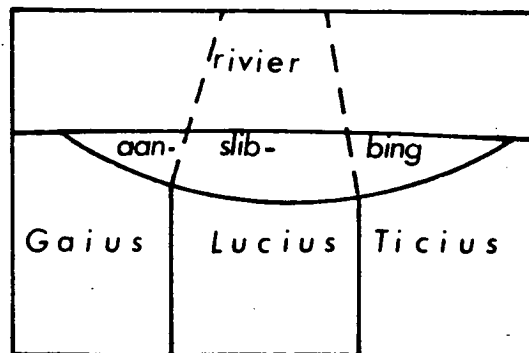
Lijn HN is dan de gevraagde bissectrice.

Figuur 5 laat deze passage zien in het door mij gebruikte handschrift van het traktaat (van de woorden ‘ponas duas lineas’ aan het eind van regel 12 tot en met ‘se perfindunt in puncto .n.’ in regel 18; interessant is ook Bartolus’ verwijzing naar Euclides’ *Elementen* I, 10 in regel 11).

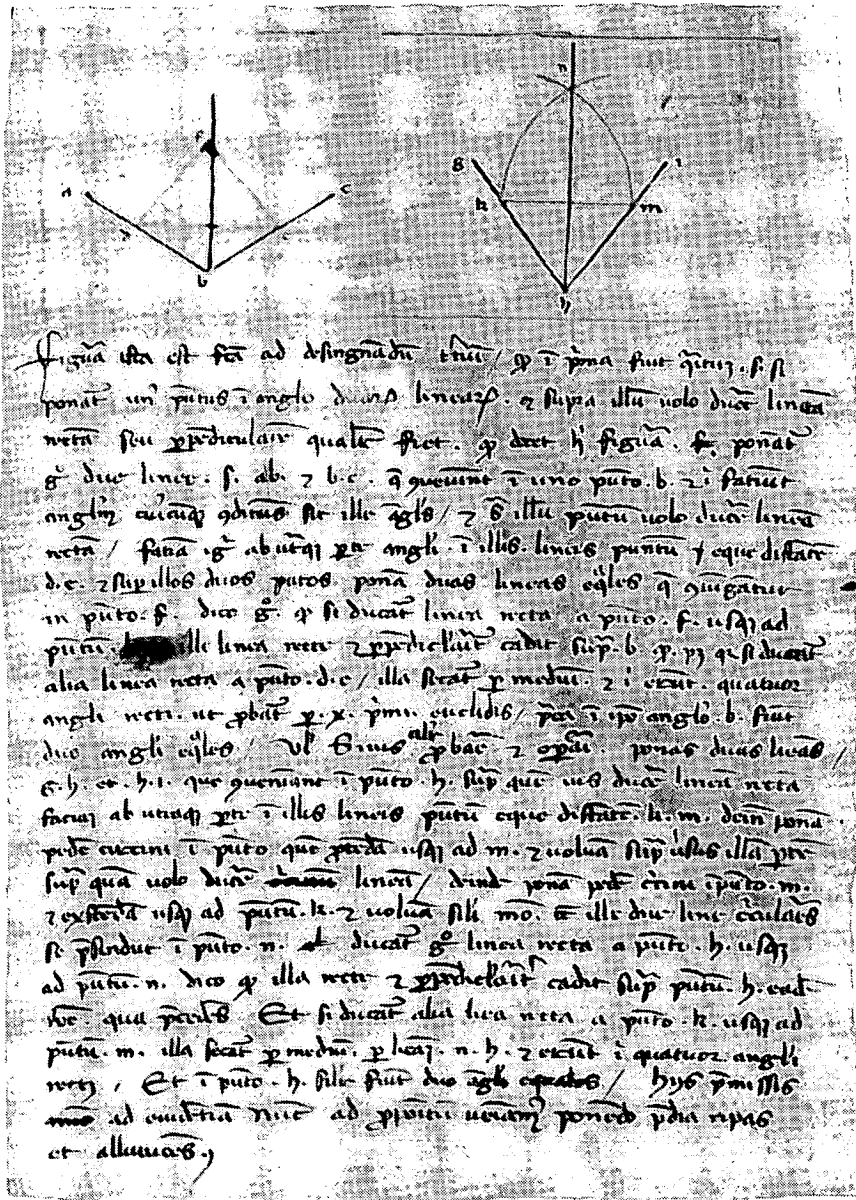
Het volgende geval dat Bartolus doorneemt is: de oude oever is een cirkelboog (fig. 6). De grenzen in de aanslibbing worden nu gevormd door de stralen van de gegeven cirkel; de lijnen die de eindpunten van de oude grenzen verbinden met het middelpunt van de cirkel. Nu moet Bartolus dus in staat zijn om bij een gegeven cirkelboog het middelpunt van de cirkel te konstrueren, en ook hiervoor wordt de Euclidische konstruktie gegeven, zoals wel blijkt



Figuur 4



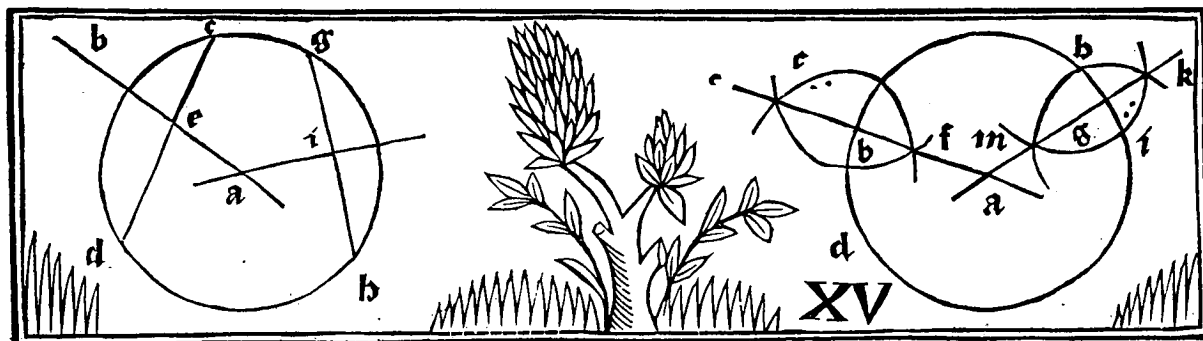
Figuur 6



Figuur 5 Bartolus' konstruktie van de bissectrice. Bibl. Vat.: Barb. Lat 1398 f. 164^r; gereproduceerd met de vriendelijke toestemming van de Prefect van de Bibliotheca Vaticana

uit figuur 7, die voorkomt in een van de oudste gedrukte uitgaven van het traktaat. De ingewikkelder situaties die hierna bij Bartolus de revue passeren zijn samengesteld uit de bovenstaande bouwstenen: oude oevers die bestaan uit

een combinatie van lijnstukken en cirkelbogen. Willekeurig gekromde oevers behandelt Bartolus niet, maar de stap naar een algemene definitie van de normaal in een punt van een kromme is niet ver meer.



Figuur 7

We zullen de bespreking van het traktaat hierbij laten. Er zou nog veel over te zeggen zijn (bijvoorbeeld over Bartolus' wiskundige stijl, over de vraag in hoeverre we hier nu met toegepaste wiskunde te maken hebben en in hoeverre het traktaat een beeld geeft van de wiskundige kennis van een ontwikkelde leek in de middeleeuwen), maar dat wordt een studie op zichzelf, en in eerste instantie gaat het hier om achtergrondgegevens bij het project.

4 Het project

Wat wilden we met het project?

- * een voorbeeld geven van het maatschappelijk belang van de wiskunde ('je kunt er conflicten tussen mensen mee oplossen');
- * leerlingen leren om samen te werken bij het oplossen van open, puzzelachtige problemen;
- * werken aan de integratie van vakken, hier wiskunde en Latijn, en motiveren wat het belang van die vakken is (ook voor Latijn werd dat opeens zeer duidelijk: zonder kennis van het Latijn was het werk van Bartolus verborgen gebleven)

en meer vakmatig:

- * leerlingen een praktische toepassing geven van zojuist behandelde theorie;
- * leerlingen een aantal konstrukties met passer en liniaal laten uitvinden;
- * leerlingen de gevonden konstrukties laten toepassen op een aantal 'juridische' verdelingsproblemen. Kortom, het was een te overladen programma voor één serie lessen, en daarom werd het project gesplitst in twee delen, gescheiden door een periode

van ongeveer twee maanden 'gewoon' werken met het boek. In het eerste deel kwamen alleen p&l-konstrukties (passer- en liniaalkonstrukties) aan de orde, het tweede deel was aan Bartolus gewijd.

Aan de p&l-konstrukties werden aan het einde van het tweede trimester drie lessen besteed. Ideale linialen zonder schaalverdeling werden geleverd door de verfhandel in de vorm van roerhoutjes (f 0,10 per stuk; bij aankoop van verf gratis, maar ons huis zat nog goed in de verf), één per groepje van ongeveer drie leerlingen. Verder had elk groepje één passer en vellen niet gelinieerd papier ter beschikking. De instructie was dat bij elke opdracht eerst overlegd werd hoe de tekening gemaakt zou kunnen worden, dat per opdracht slechts één leerling mocht tekenen, dat bij de tekening de naam van de maker vermeld werd en dat na elke opdracht het tekenaarschap roulerende. Hieronder volgt als voorbeeld een aantal van deze opdrachten.

Teken een lijnstuk.

Er zijn twee gelijkzijdige driehoeken waarvan het getekende lijnstuk een zijde is. Teken deze driehoeken met p&l.

Je hebt nu een vierhoek gekregen met één diagonaal. Bereken de hoeken in deze figuur. Teken de tweede diagonaal van de vierhoek. Hoe groot zijn de hoeken die er in de figuur bijgekomen zijn?

Teken zomaar een scherpe hoek.

Teken met p&l de bissectrice van deze hoek.

(Aanwijzing: teken eerst met p&l een gelijkbenige driehoek waarvan de getekende hoek de tophoek is. Brengt de vorige opdracht je nu op een idee?)

Teken een lijn l en een punt P; P ligt niet op l. Teken met p&l de lijn door P loodrecht op l. (Aanwijzing: kun je met p&l een gelijkbenige driehoek tekenen waarvan P de top is en waarvan de andere hoekpunten op l liggen?)

Teken zomaar een scherphoekige driehoek. Teken met p&l de hoogtelijnen van deze driehoek.

Voor sommige groepjes waren de aanwijzingen voldoende om zelfstandig de konstrukties te ontwikkelen. Andere groepjes hadden vanzelfsprekend extra aanwijzingen nodig. Maar overheersend was het beeld van de enthousiaste werkers, die druk pratend en gebarend de ene uitvinding na de andere deden, en zich zo een heel skala van elementaire p&l-konstrukties eigen maakten. Voor de meesten (onder wie de 'meester') een zeer geslaagde week.

Tot slot volgt hier een beschrijving van het eigenlijke projekt: vijf lessen in het derde trimester over Bartolus' verdelingsprobleem: 2 uur Latijn, waarop ik hier niet uitgebreid zal ingaan, en 3 uur wiskunde. De instructies aan de groepjes waren dezelfde als bij het eerste deel (p&l-konstrukties), de werkwijze was dus bekend.

Het projekt werd aan het einde van een 'gewone' les geïntroduceerd met een kort verhaaltje over Bartolus en het verdelingsprobleem. De leerlingen kregen ter lezing en overdenking een stencil mee naar huis waarop een uitvoerige versie van het vertelde stond, min of meer overeenkomend met § 1, 2 en 3 van dit artikel, maar zonder de formulering van Bartolus' verdelingsprincipe *ius propinquitatis*. Hier volgt een fragment uit deze leerlingentekst.

Het probleem waarover Bartolus schreef, was het volgende.

Er is een rivier (Lat.: *flumen*), en aan die rivier hebben allerlei mensen landerijen. Maar rivieren zijn grillig. Soms kiezen ze een nieuwe bedding, of ontstaat langs de oever aanslib-

bing. Zo ontstaat dus nieuw land.

WIENS BEZIT WORDT NU DAT NIEUWE LAND?

Als de mensen daarover via overleg een beslissing kunnen nemen, is er natuurlijk niets aan de hand. Maar als ze er ruzie over krijgen, moet de rechter tussen beiden komen. Daarover schreef Bartolus in 1355 zijn 'Verhandeling over de Tiber' (Lat.: *Tractatus Tyberiadis*).

Daarnaast bevatte het stencil het programma voor de komende lessen:

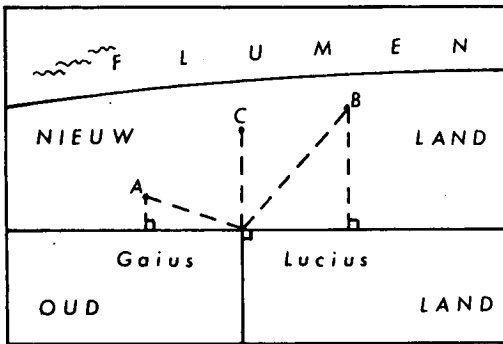
Wat gaan jullie hiermee doen?

1. eerst aan de hand van een aantal vragen bedenken wat jullie de meest rechtvaardige manier vinden om het nieuwe land te verdelen;
2. dan een klein stukje Latijn lezen, waarvoor je eerst het oude schrift moet ontcijferen, om te zien hoe Bartolus hierover zelf schreef;
3. daarna bekijken volgens welke algemene afspraak Bartolus nieuw land zou verdelen, en
4. tot slot een paar gerechtelijke uitspraken doen door de regel van Bartolus (die tegenwoordig nog steeds gebruikt wordt) toe te passen.

Verder stonden op het stencil de eerste twee opdrachten: een aantal kaartjes zoals in figuur 1 met daarbij de vraag om de meest rechtvaardige verdeling van het aangeslibde land in te tekenen en de vraag of het nieuwe land wel zonder meer over de bezitters van het oude land verdeeld zou moeten worden.

Het werk aan deze twee opdrachten besloeg de helft van de eerste les. Daarna kreeg elk groepje Bartolus' verdelingsprincipe te lezen:

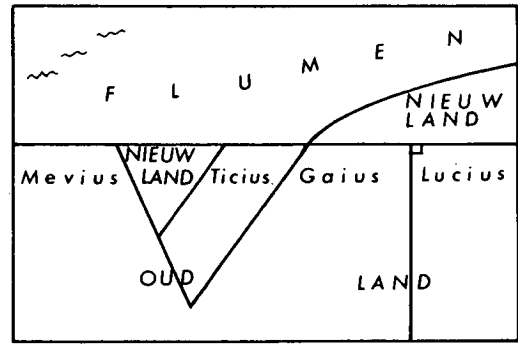
NIEUW LAND WORDT EIGENDOM VAN DE EIGENAAR VAN HET MEEST NABIJ GELEGEN OUDE LAND.



Figuur 8

De graspol bij A komt bij het land van Gaius, want hij ligt dichterbij het land van Gaius dan bij het land van Lucius.

De graspol bij B komt bij het land van Lucius. De graspol bij C ligt op de grens, want hij ligt even ver van het oude land van Gaius als van het oude land van Lucius.

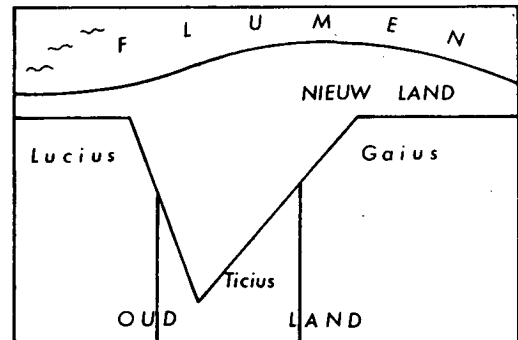


Figuur 9 Kaartje opdracht 3

te worden, maar dat was ook niet de bedoeling. Het ging hier in eerste instantie om het contact met de bron van het verdelingsprobleem en het besef dat je dat contact alleen dan zonder hulp van anderen kunt leggen als je zelf Latijn kent.

5 Achteraf beschouwd

Het Bartolus-project is in deze vorm alleen mogelijk op scholen met een gymnasiale opleiding. Maar zonder het taalkundig onderdeel lijkt het me nog steeds zeer bruikbaar. Het mist in dat geval de charme van het directe contact met de historische bronnen, maar het verhaal van de middeleeuwse jurist die de hem voorgelegde conflicten alleen met behulp van de wiskunde kan beslechten en de daarop volgende wiskundige opdrachten blijven zeer intrigerend. Een afdoend bewijs daarvoor lijkt me het feit dat sommige leerlingen die het project deden en die nu in de tweede klas zitten, nog steeds tijdens meetkundelessen op Bartolus terugkomen. Wat de wiskundige inhoud van het project betreft: meer dan puntverzamelingen in $\mathbb{R}_2$ en het begrip



Figuur 10 Kaartje opdracht 5

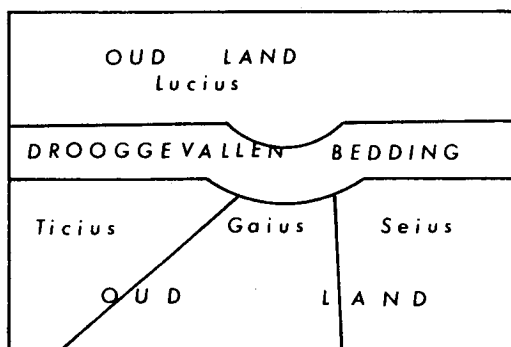
Hierna werd de groepjes gevraagd dit verdelingsprincipe met gebruikmaking van p&l-konstrukties op allerlei problemen toe te passen, die ik voor een deel aan Bartolus zelf ontleend had. Hiervoor was nog $2\frac{1}{2}$ les ter beschikking.

De figuren 9, 10 en 11 vormen een greep uit de kaartjes die de groepen ter beoordeling voorgelegd kregen.

De laatste opdracht van het project (nr. 11) was een evaluatievraag: is Bartolus' verdelingsregel praktisch, is hij eerlijk, wat vind je nu van de Falkland-oorlog en hoe vond je deze opdrachten.

Intussen was in de twee uren Latijn Bartolus' eigen tekst aan bod gekomen. Toen de leerlingen na de eerste wiskundeles het belang van de p&l-konstruktie van de bissectrice gemerkt hadden, kregen ze de beschrijving van de bissectricekonstruktie te zien zoals Bartolus die geeft.

Eerst werd hun gevraagd de tekst van de passage te ontcijferen uit fotokopieën van het handschrift en de gedrukte tekst uit 1510-1511, materiaal dus zoals hierboven afgebeeld is in de figuren 6 en 7. Daarna kregen ze een uitgetikte versie van de Latijnse tekst met een vertaling (zoals in § 3 hierboven) eraan, aan de hand waarvan de tekst doorgenomen werd. Het Latijn was natuurlijk veel te moeilijk om door brugklassers zelfstandig vertaald



Figuur 11 Kaartje opdracht 9

afstand is er niet voor nodig, zodat het binnen het bereik van elk schooltype ligt.

Van de talrijke didactische aspecten wil ik tot slot de betekenis van de geschiedenis van de wiskunde voor het wiskundeonderwijs noemen. Op allerlei punten in het onderwijs kun je laten zien waarom mensen wiskundige theorie ontwikkelden en hoe ze deze toepasten. Wiskunde blijkt dan voor leerlingen opeens iets anders te zijn dan een verzameling abstracte begrippen en stellingen waar je maar doorheen moet bijten.

Wiskunde is ooit door mensen bedacht, aan de hand van problemen zoals Bartolus' verdelingsprobleem, en de door hen gevonden oplossingen

zijn daarna soms tot standaardprocedures, tot stellingen geworden. Leerlingen zien op deze manier dat wiskunde ook een zaak van mensen is, en niet alleen van formules en figuren. Niets werkt zo motiverend als dat inzicht, dat natuurlijk langs veel wegen te bereiken is, maar waartoe inpassing van de geschiedenis van de wiskunde een belangrijke bijdrage kan leveren.

Dit artikel dankt zijn totstandkoming aan Mr. L. C. Winkel (vakgroep rechtsgeschiedenis van de Universiteit van Amsterdam), die in de Bibliotheca Vaticana te Rome gefascineerd werd door meetkundefiguren in een Bartolushandschrift, en die mij op het spoor van het verdelingsprobleem zette. Ook voor de verdere raad en daad waarmee hij mij daarna behulpzaam was, ben ik hem zeer dankbaar.

Verder ben ik de classici Drs E. M. J. van Houte, Drs F. G. W. Schouten en mijn ex-sektiegenoot Dr J. C. S. P. van der Woude erkentelijk voor hun medewerking om het project op school vorm te geven.

Dit artikel is de uitwerking van een voordracht, gehouden op 15 oktober 1983 te 's-Hertogenbosch voor het Genootschap voor de Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde, Natuurwetenschappen en Techniek GeWiNa.

Bibliografie

Handschrift Bibliotheca Vaticana Barb. lat. 1398 157-170.
Bartolus de Saxoferrato, *Opera Omnia* deel 5, Lyon 1510-1511 (aanwezig in de Universiteitsbibliotheek te Amsterdam).
J. L. J. van de Kamp, *Bartolus de Saxoferrato*, dissertatie Amsterdam 1936.

Mededelingen

Wiskunde-didactiek conferenties

Te houden in het conferentie-oord 'De Bosrand' te Ede, steeds van donderdag 10.00 uur tot zaterdag 13.30 uur.

Het landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde (Lerarenopleidingen, Ned. Ver. van Wiskundeleraren, OW&OC en SLO) organiseert ook dit schooljaar weer didactiekconferenties voor wiskundeleraren (zowel 3^e, 2^e als 1^e graads), op 28, 29 en 30 maart 1985.

Aanmeldingsformulieren zijn reeds verzonden naar alle scholen. Contactpersoon: L. Kuijk, tel. 04490-1 10 66 (werk).

IGPME

De jaarlijkse conferentie van de International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME) zal in 1985 gehouden worden in Nederland en wel van 22-26 juli te Noordwijkerhout.

Deze IGPME bestaat uit onderzoekers uit een groot aantal landen. Het programma omvat plenaire lezingen, werkgroepen en korte voordrachten.

Inlichtingen en First Announcement kunnen verkregen worden bij de vakgroep OW & OC, RUU, tav. Mw B. Dekker, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.

Ellips en hyperbool in doorhangend touw

Henk Mulder

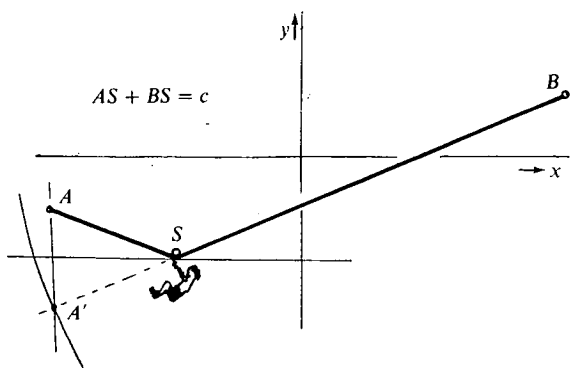
Op een zomerkamp maken we een kabelbaan over de rivier de Ourthe in de Ardennen. Het startpunt is B , een verankering in de rotswand; eindpunt is A , een stevige boom. Het leek niet moeilijk om uit te leggen dat de katrol over het touw een ellips beschrijft, omdat $AS + BS$ voortdurend een zelfde waarde houdt, laten we zeggen c (fig. 1).

De katrol blijft tenslotte hangen in het laagste punt S . Dit is tevens het punt waar de raaklijn horizontaal loopt.

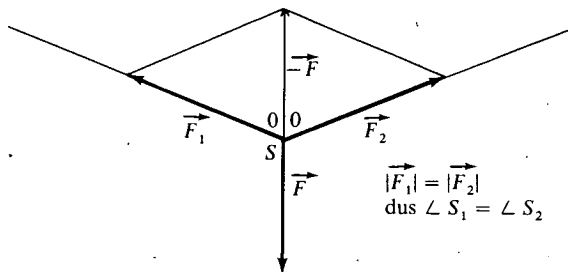
Waar ligt dat punt?

Is punt S , bij gegeven ligging van A en B te construeren?

Een volgende eigenschap van dit punt S is dat de hoeken die AS en BS met de vertikaal maken, even groot zijn. Men kan dit opvatten als een eigenschap van de ellips; het volgt ook uit fysische wetten. De spanningen in de touwdelen AS en BS zijn steeds even groot. Het gevolg is dat het parallellogram van



Figuur 1 Constructie van het laagste punt



Figuur 2 Krachtenparallellogram

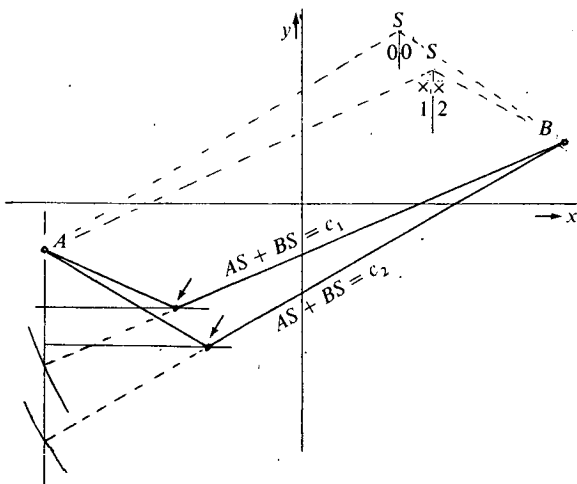
de krachtsvectoren in S een ruit wordt (fig. 2). Daardoor geldt dan: $\angle S_1 = \angle S_2$.

Constructie

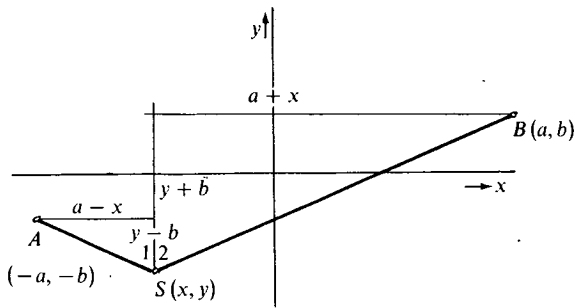
Ten gevolge van deze eigenschap is het mogelijk de positie van S bij gegeven waarde van c te construeren. Cirkel daartoe bijvoorbeeld vanuit punt B de lengte c om op de vertikaal door A ; het snijpunt zij A' (fig. 1). Verbind vervolgens A' met B . Trek dan de middelloodlijn van AA' en snijdt deze met $A'B$. Zo wordt punt S gevonden. Ongetwijfeld herkennen we hier de bekende spiegelconstructie.

Hyperbool

Interessant lijkt om de positie van S te volgen bij variabele waarden van c . We zoeken dan de verzameling van punten S met de eigenschap: $\angle S_1 = \angle S_2$.



Figuur 3 Verzameling van punten S



Figuur 4 Waar ligt S bij gegeven A en B?

In fig. 4 is af te lezen:

$$\tan S_1 = \frac{a-x}{y-b} \quad \text{en} \quad \tan S_2 = \frac{a+x}{y+b}$$

waaruit volgt: $\frac{a-x}{y-b} = \frac{a+x}{y+b} \wedge y \neq b \wedge y \neq -b$

Kruislings vermenigvuldigen levert de hyperbool

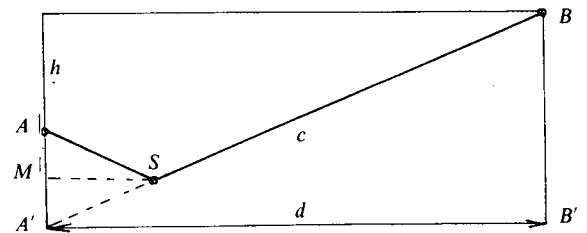
$$xy = ab \wedge y \neq b \wedge y \neq -b \text{ (fig. 5).}$$

Bijzondere gevallen

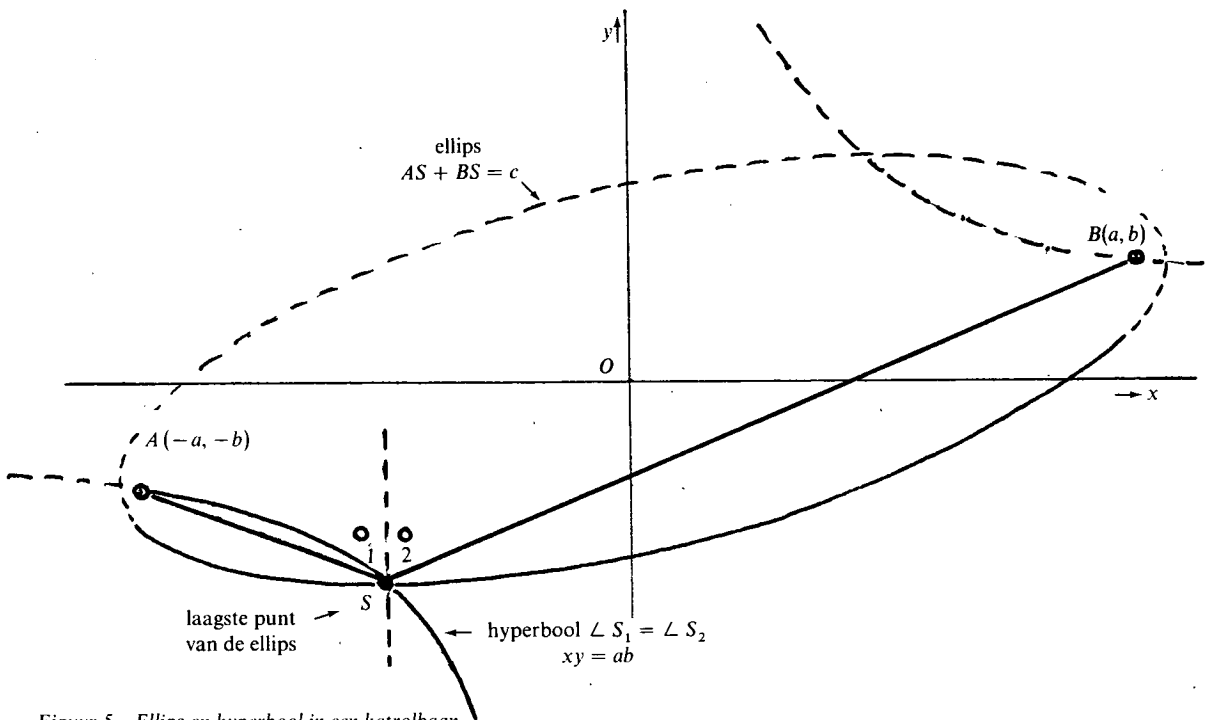
Voor het geval van de katrolbaan is van deze orthogonale hyperbool maar één tak bruikbaar en nog wel alleen het stuk rechts van A.

Als A en B op gelijke hoogte liggen ($b = 0$) wordt de middelloodlijn van AB één oplossing en de andere de lijn AB zelf (met uitzondering van de punten A en B). Dat zijn dan de lijnen $x = 0$ en $y = 0$ en dat zijn dan juist de asymptoten van onze hyperbool. En zo zien we experimenteel dat de asymptoten van $xy = ab$, zelf weer als een ontaalde hyperbool beschouwd kunnen worden.

Samenvattend is het dus zo dat het onderste punt van de katrolbaan het snijpunt is van een ellips met A en B als brandpunten en de hyperbool $xy = ab$.



Figuur 6 Rekenmodel



Figuur 5 Ellips en hyperbool in een katrolbaan

Rekenmodel

Via de constructiemethode is het nu ook niet moeilijk meer om de verdeling $AS : BS$ op het touw uit te rekenen (fig. 6). We gaan daarbij uit van de touwlengte $c = AS + BS$, van het hoogteverschil h

tussen A en B en hun horizontale afstand d .

Nemen we als voorbeeld: $c = 52$, $h = 10$ en $d = 48$. Daaruit volgt dan: $BB' = 20$ en dus $AA' = 10$ en $AM = 5$. Omdat $\triangle MSA \sim \triangle B'A'B$ vinden we $AS = 13$ en $BS = 39$.

Mededelingen

Jaarvergadering van de VVWL

De jaarvergadering van de VVWL vindt plaats op zaterdag 9 februari 1985 op de campus van het Rijksuniversitair Centrum Antwerpen (RUCA), Auditorium T 105, Groenenborgerlaan 171, 2020 Antwerpen.

10de NVWL-VVWL-studiedag

Op zaterdag 23 maart 1985 houden de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Vlaamse Vereniging Wiskunde-lers hun 10de gezamenlijke studiedag, in het Koninklijk Atheneum Kapellen, Streeppstraat 2.

Leesportefeuille

Sinds 1979 heeft de heer A. Hanegraaf de leesportefeuille van onze vereniging verzorgd. Met ingang van 1 januari 1985 zal de heer F. M. W. Doove deze activiteit van de heer Hanegraaf overnemen.

Het bestuur van onze vereniging dankt de heer Hanegraaf bijzonder voor het vele werk dat hij voor de leesportefeuille en dus ook voor de vereniging heeft verricht en wenst de heer Doove veel succes bij de verzorging van de portefeuille.

Nadere gegevens over de portefeuille kan men vinden in het 'Vademecum voor de Wiskundeleraar'.

Het adres van de heer F. M. W. Doove is: Severij 5, 3155 BR Maasland.

J. Maassen

Examen wiskunde I.o.

De staatssecretaris van onderwijs en wetenschappen brengt ter kennis van belanghebbenden, dat zij die in 1985 willen deelnemen aan het examen voor de akte wiskunde I.o., zich tussen 1 en 15 februari 1985 –uitsluitend per briefkaart– dienen aan te melden bij de voorzitter van de examencommissie, de heer N. J. Zimmerman, Schumannstraat 2, 7604 EZ Almelo. Op de brief-

kaart moeten de naam van de kandidaat, alsmede zijn of haar volledig adres (dus met postcode) worden vermeld.

Het schriftelijk gedeelte van het examen zal plaatsvinden op 23 en 24 april 1985 en het mondeling gedeelte voor zover mogelijk, in de eerste week van de zomervakantie van het gebied waar de kandidaat woonachtig is.

Met nadruk wordt er op gewezen, dat aanmeldingen die na 15 februari 1985 binnenkomen, niet meer in behandeling kunnen worden genomen.

Het examengeld voor 1985 bedraagt f 270,-. Dit tarief geldt onder voorbehoud van vaststelling van het betreffende Koninklijk Besluit.

U wordt tijdelijk vrijgesteld van betaling van het examengeld. Zodra het examengeld definitief is vastgesteld ontvangt u bericht aangaande de storting van het examengeld.

Mogelijk ten overvloede zij vermeld, dat de kandidaten een beroep kunnen doen op de regeling Tegemoetkoming Studiekosten deeltijd-studerenden, als nader uiteengezet in de Staatscourant van 17 mei 1984, nr. 96.

Kalender

(zie voor nadere informatie ook altijd de 'Mededelingen' in dit nummer en in voorafgaande nummers)

1985

wo 6 feb:

za 9 feb:

28 feb t/m 2 mrt:

wo 6 mrt:

vr 22 mrt:

23 mrt:

28 t/m 30 mrt:

za 30 mrt:

wo 3 apr:

wo 15 mei:

22 t/m 26 juli:

vr 13 sep:

bestuursvergadering NVvW, Utrecht
jaarvergadering VVWL, Antwerpen

B-conferentie, Ede

bestuursvergadering NVvW, Utrecht
eerste ronde Ned. Wisk. Olympiade

gem. studiedag NVvW, VVWL, Kapellen
(B)

E-conferentie, Ede

landelijke dag Vrouwen en Wiskunde
bestuursvergadering NVvW, Utrecht

bestuursvergadering NVvW, Utrecht
conferentie IGPME, Noordwijkerhout
tweede ronde Ned. Wisk. Olympiade

1986

11-16 aug:

ICOTS II, Victoria BC, Canada

Een volle bak.

Jan van Maanen

Alleen het natuurkundelokaal is groot genoeg om ze alle 34 een plaats te kunnen geven, 4 rijen van 8 en dan nog wat inschuiven voor de laatste twee.

Wiskunde 1 in klas 5.

Differentiëren, om maar eens iets te noemen.

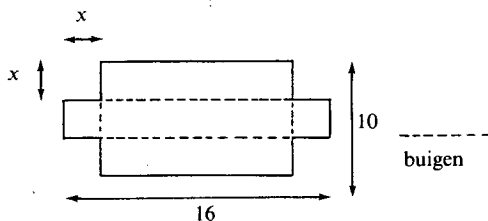
In de dubbele betekenis van het woord: ze moeten uiteindelijk allemaal afgeleide functies kunnen bepalen en gebruiken, maar de een leert dat vanzelf, de ander neem je aan de hand. De een hoort je liefst zo min mogelijk, de ander komt altijd uitleg te kort. En zo zijn er 34 enen en anderen.

Differentiëren dus. Tweestromenland.

Gevraagd: een intrigerend probleem waaraan de een zelfstandig kan werken terwijl de ander onder mijn hoede de sommen 17 tot en met 25 doorneemt. Zie hier een poging.

Eerste versie

Iemand heeft een rechthoekig metalen plaatje van $10 \times 16 \text{ cm}^2$. Door bij elk van de hoekpunten een even groot vierkant uit te snijden, te buigen en te solderen maakt hij uit het plaatje een bakje. Wat is de maximale inhoud van dat bakje?



Het overbekende bakje, in welk boek vind je het niet? De afmetingen van het plaatje zijn voor het gemak gespiekt uit *Levende Wiskunde* van Hans Steur (p. 178).

Maar toch keur ik de eerste versie al bij voorbaat af: niet intrigerend genoeg. De 10 voor wie het probleem bestemd is rekenen in een kwartier uit dat de inhoud

$I(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x)$ is met

$I'(x) = 12x^2 - 104x + 160$. $I'(x) = 0$ voor

$x = 2$ en voor $x = 6\frac{2}{3}$, zodat $I_{\max} = I(2) = 144$.

Punt. Graafwerk en gepuzzel zijn niet nodig; niet geschikt. Op zoek naar een

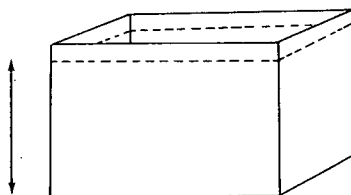
Tweede versie

Zelfde plaatje van $10 \times 16 \text{ cm}^2$, wederom vierkantjes uitsnijden, daarna buigen en solderen, maar nu de vraag: De persoon in kwestie wil in het bakje 150 cc water kwijt. Kan dat?

Goedgekeurd. De ± 10 aan het werk, een aantal in samenwerking, de overigen op eigen houtje. De rest van de klas, onder wie ik zelf, gaan bezig met som 17 en 18.

Na 10 minuten komt de eerste van de 10 met de mededeling 'Het gaat niet. Er is 6 cc water te veel.' Intussen zijn wij (de anderen en ik) midden in som 18, dus ik moet me beperken tot een cryptisch: 'Ja, als je zo onzuinig bent met je materiaal, dan lukt het inderdaad niet. Maar hoe zit het als je de uitgesneden vierkantjes niet weggooit, maar ook gebruikt?' In schaktermen: studeerkamerwerk, een 'nieuwje'.

Wij verder met 18, de 10 verder met hun probleem, dat nu begint te boeien.



Je zou 4 maal 4 cm^2 weggooien. Als je deze 16 cm^2 aan de bovenkant van het bakje toevoegt,

win je aan inhoud. De lengte van de bovenrand is $2 \cdot 6 + 2 \cdot 12 = 36$ zodat de hoogtewinst $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ is. De inhoud wordt dan $I = I_{\max} + \frac{4}{9} \cdot 6 \cdot 12 = 144 + 32 = 176$.

Vlak voor het eind van de les deelt één van de 10 trots mee dat de 'iemand' zijn 150 cc water ruim kwijt kan.

Volgende les verder.

Begin van de volgende les. Sommen 26 tot en met 36 (31 en 34 overslaan). En voor de 10 de vraag

Door omstandigheden zit de iemand nu opeens met 180 cc. Hij is ten einde raad.

Weer geen zet uit het boekje. Het middenspel. Maar pas bij de volgende zet blijkt de opzet:

Wie zegt dat het bij hergebruik van de vierkantjes slim is om ze $2 \times 2 \text{ cm}^2$ groot te maken.

Over tot de order van de dag. Voor mij en de 24: som 26 en volgende. Voor de 10:

Je snijdt $4 \cdot x^2$ weg.

$$\begin{aligned} \text{Dus } I(x) &= I_{\text{oud}}(x) + I_{\text{extra}}(x) = \\ &= (10 - 2x)(16 - 2x) \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ x + \frac{4x^2}{2(10 - 2x) + 2(16 - 2x)} \right\} = \\ &= \frac{-4x(x^3 - 26x^2 + 209x - 520)}{13 - 2x} \end{aligned}$$

Later blijkt dat op dit punt bij de 10 de wegen zich gesplitst hebben. Sommigen houden het helemaal voor gezien en stappen over naar som 29. Een deel (de praktisch ingestelden?) zegt:

Maak een tabel van $I(x)$ in de buurt van $x = 2$. $I(2,4)$ blijkt al meer dan 180,6 te zijn. Klaar.

De theoreten (3 in samenwerking) menen dat er gedifferentieerd moet worden:

$$\begin{aligned} I'(x) &= \dots \text{ veel gereken } \dots = \\ &= \frac{-6x^4 + 156x^3 - 1432x^2 + 5424x - 6760}{(13 - 2x)^2} \end{aligned}$$

Wie haalt het in zijn/haar hoofd om een dergelijke functie te laten differentiëren? Ik, me min of meer aansluitend bij de zachte hand des tijds, zou niet durven. Maar het verschil is dat hier de leerlingen zelf uitmaken wel werk er gedaan moet worden. Het is niet *mijn* som, maar *hun eigen* probleem (en ze werken alsof hun leven ervan afhangt). En dat alles zie ik dan nog slechts tussen de bedrijven door, en even snel aan het eind van de les.

De laatste finesses van de oplossing via het bepalen van I' worden door Mathijs aangebracht. Na de les komt hij overleggen hoe hij nu verder moet gaan om $I'(x) = 0$ op te lossen. Als de vraag niet op het moment was gekomen waarop de volgende klas het lokaal alweer komt bevolken en waarop Mathijs eigenlijk naar scheikunde moet, had ik hem mooi de enerverende geschiedenis van het oplossen van hogeregraads vergelijkingen kunnen vertellen: dat wiskundigen in Italië aan het eind van de 15de eeuw zich de vraag zijn gaan stellen of ze een algemene oplossingsmethode voor vergelijkingen van graad 3 en hoger konden vinden, dat dat in het begin van de 16de eeuw voor de derdegraads vergelijking lukte (de formule van 'Cardano'), dat Ferrari vlak daarna in staat was om het algemeen oplossen van de vierdegraads vergelijking te herleiden tot het oplossen van derdegraads vergelijkingen, dat Ferrari's oplossing door haar onhanteerbaarheid meer van theoretisch dan van praktisch belang is; en dat uiteindelijk in de 19de eeuw de Noor Abel bewees dat een algemene oplossing voor vergelijkingen van graad 5 en hoger met wortelvormen althans niet mogelijk is.

Maar de tijd voor dit verhaal ontbreekt, jammer genoeg, dus ik beperk me tot een snelle suggestie voor het oplossen van $I'(x) = 0$.

De oplossing van $I'(x) = 0$ moet op grond van de formulering van het probleem tussen 0 en 5 liggen. $I'(0) < 0$ en $I'(5) > 0$ en I' is continu op $[0, 5]$, dus ergens op $\langle 0, 5 \rangle$ moet I' van teken wisselen.

Reken dan $I'(2\frac{1}{2})$ uit, en kijk of de tekenwisseling op $\langle 0, 2\frac{1}{2} \rangle$ of op $\langle 2\frac{1}{2}, 5 \rangle$ valt. En zo voort.

Mathijs knikt en gaat naar scheikunde. Aan het

begin van de volgende les toont hij het resultaat van zijn langdurige berekeningen:

$I'(x) = 0$ voor $x \approx 2,41$, en het bakje kan dus ruim 180 cc water aan.

Degenen die een tabel van funktiewaarden van I hadden gemaakt hadden dat al een les eerder gevonden. Hier is de theorie (eerst I' berekenen) mooi, maar niet praktisch, zo konstateren we.

Maar het einde is nog niet in zicht. Er kan nog meer bij, zowel water als wiskunde. Omdat het toch het begin van de les is, besluit ik met de hele klas na een korte schets van het probleem en de resultaten van de 10 een duik in de geschiedenis te nemen (wederom een zet uit de studeerkamer).

Als je je nu eens niet zou beperken tot een rechthoekig bakje, maar als het bakje gebogen zou mogen zijn (een kom), wat zou dan de maximale inhoud zijn? Ik vertel dat dit lijkt op een probleem dat lange tijd zeer aktueel was in de wiskunde:

Wat is, bij een gegeven oppervlakte, het lichaam met maximale inhoud (3-dimensionaal) of wat is, bij een gegeven omtrek, de gesloten figuur met maximale oppervlakte (2-dimensionaal).

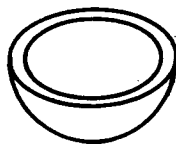
In de geschiedenis staat deze vraag bekend als het 'isoperimetrisch probleem' (isos, gelijk, en perimeter, omtrek).

Het antwoord op de vraag ligt voor de hand (dat het in de ruimte de bol en in het vlak de cirkel is bedenkt de klas zonder veel aarzelen), maar toch heeft het bewijs, zo vertel ik, zeer veel voeten in de aarde gehad.

Het probleem stamt al van de Grieken, het antwoord ook, maar een bewijs werd pas in de 19de eeuw gegeven.

Terug naar het water.

Stel: je hebt een plaatje metaal van $16 \times 10 \times 0,1 \text{ cm}^3$ en je kunt het vervormen tot een kom in de vorm van een halve bol met een dikte van 0,1 cm. Hoeveel water gaat er in?



O ja, wat was de inhoud van een bol ook alweer? $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Dit nieuwe probleem vindt weer aanhang. De werkwijze is al bijna vertrouwd: terwijl het merendeel van de klas het bespreken van het huiswerk volgt, en zich buigt over buigpunten, zit een aantal leerlingen verwoed te schetsen en te rekenen. Protesten 'dat het probleem niet kan omdat je een derdegraads vergelijking krijgt' blijken ongegrond. Gelukkig is er niet veel huiswerk te bespreken, dus ik kan me dit keer ook eens met de puzzelaars bezighouden.

Een aantal van hen blijkt er overigens alweer uit te zijn:

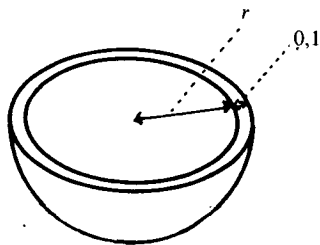
De inhoud van de bolschil is $16 \times 10 \times 0,1 \text{ cm}^3$.

Noem de 'binnenstraal' r , dan is de 'buitenstraal' $r + 0,1$, zodat $\frac{2}{3}\pi\{(r + 0,1)^3 - r^3\} = 16$

$$\Leftrightarrow 0,3r^2 + 0,03r + 0,001 = \frac{24}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow 300r^2 + 30r + (1 - \frac{24000}{\pi}) = 0.$$

Dit geeft $r \approx 5,0$ en $I_{\text{halve bol}} \approx 261,8 \text{ cc}$.



Wat lijkt dat verdacht veel op

$$I(r + \Delta r) - I(r) \approx \text{Oppervlakte bolschil} \cdot \Delta r$$

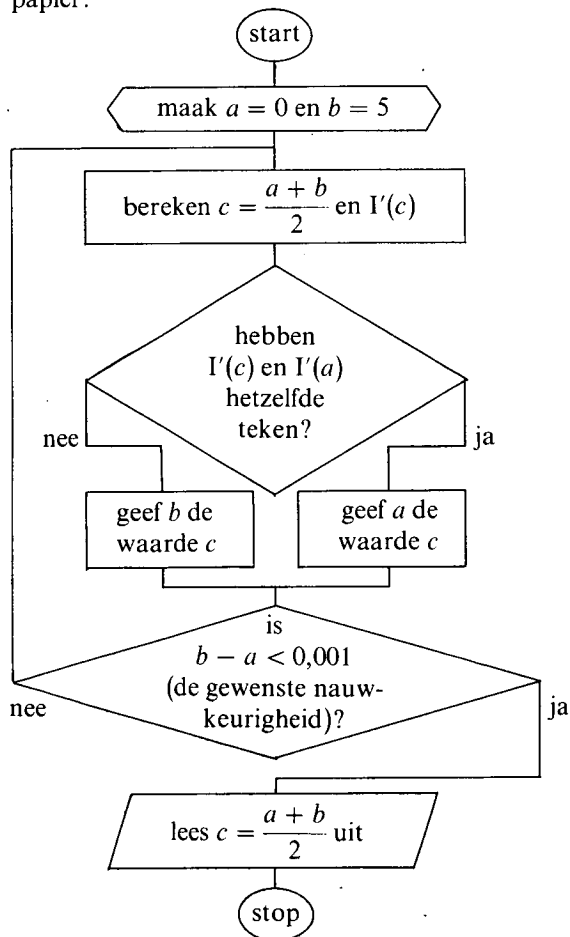
en op differentialen, zie ik nu ik dit opschrijf. Zo mis je kansen en zit je blijkbaar altijd te kort in je studeerkamer. Maar goed, 261 cc gaat er op deze wijze dus ook nog in.

Verbazing, want dat is toch bijna tweemaal zoveel als de maximum inhoud van het allereerste bakje.

Nog één punt staat er op mijn programma en dat is om Mathijs, die nog in het pre-programmeertijdperk groot wordt en die zo bloedig funktiewaarden van

$$I'(x) = \frac{-6x^4 + 156x^3 - 1432x^2 + 5434x - 6760}{(13 - 2x)^2}$$

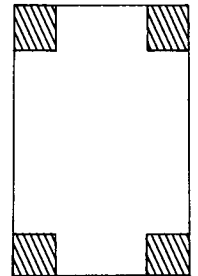
heeft zitten uitrekenen, de kracht van het programmeren van standaardberekeningen te laten zien. In een pauze verschijnt stapje voor stapje het volgende procedé voor het oplossen van $I'(x) = 0$ op het papier:



Mijn programmeerbare rekenmachine, die dit programma standaard bevat, lost vervolgens $I'(x) = 0$ op in driekwart minuut. Frustrerend? Jawel. Maar daardoor misschien extra instructief.

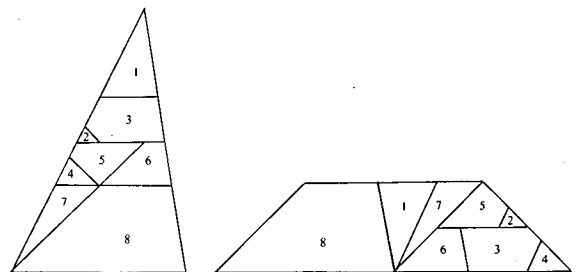
Nog één gemiste kans tot besluit. Hergebruik van de vier uitgesneden vierkantjes is een mooi plan, maar is het eigenlijk wel mogelijk om 4 vierkantjes van $2,41 \times 2,41 \text{ cm}^2$ zo te verknippen dat je er een rechthoek mee kunt 'leggen' met zijden

$$2 \cdot 11,18 + 2 \cdot 5,18 = 32,72 \text{ en } \frac{4 \cdot (2,41)^2}{32,72} \approx 0,71$$



(het reepje dat uiteindelijk op de bovenrand van het bakje bijgesoldeerd moet worden)?

Dat is een meetkundig probleem: gegeven twee veelhoeken met dezelfde oppervlakte. Is het mogelijk om met een eindig aantal sneden de ene veelhoek in kleinere veelhoeken te verdelen waarmee de andere veelhoek precies te overdekken is?



Wat er aanvankelijk uit ziet als een soort Tangram-spelletje, blijkt al snel tot fundamentele problemen over het begrip oppervlakte en tot het vierde hoofdstuk uit Hilbert's *Grundlagen der Geometrie* te leiden.

Een antwoord op de vraag? Dat kost nog het nodige studeerkamerwerk, maar in mijn studeer-

kamer moet ik nu eerst andere dingen gaan doen:
een repetitie bedenken, 'gewone' lessen voorberei-
den,

Met dank aan minister Deetman, zonder wie deze
volle bak er niet geweest was.

't Is a favourite project of mine
A new value of π to assign.
I would fix it at THREE
For it's simpler you see
Than three point one four one five nine.

Boekbespreking

P. van Beek, Th. H. B. Hendriks, *Optimaliseringstechnieken, Principes en Toepassingen*.

In dit boekwerk worden de belangrijkste optimaliseringstechnieken beschreven op een wiskundig zeer verantwoorde manier zonder in al te veel formalismen te vervallen. Aan de hand van een aantal praktische problemen worden in hoofdstuk 1 de verschillende optimaliseringstechnieken beschreven. In hoofdstuk 2 wordt kort de benodigde lineaire algebra opgesomd.

In hoofdstuk 3 wordt zeer uitgebreid de lineaire programmering besproken. Op algemene wijze worden begrippen als toegelaten basisoplossingen en spiloperaties geïntroduceerd, waarbij veel matrixnotatie wordt gebruikt. Vervolgens worden de simplexmethode, de duale simplexmethode en de herziene simplexmethode belicht. Bij de laatste methode blijkt het voordeel van de algemene opzet: de methode wordt eenvoudig afgeleid uit eerdere resultaten. Gevoeligheidsanalyse m.b.t. parameters van het probleem wordt uiteengezet. Interessant voor de toepasser is, dat wordt ingegaan op de beschikbare programmatuur alsmede de matrix generator en reportwriter voor efficiënte datamanipulatie en gebruikersvriendelijke in- en uitvoer. Aan het eind van hoofdstuk 3 wordt de lezer nog een korte blik gegund in de keuken van de beroemde ellipsoïde methode van Khachiyan.

Hoofdstuk 4 is gewijd aan het transportprobleem. Gebruikmakend van de speciale structuur van het probleem wordt de simplexmethode gemodificeerd tot de transportalgoritme.

In hoofdstuk 5 is het de beurt aan de geheeltallige lineaire programmering. Behandeld worden de snede methode van Gomory en de Branch-and-Bound methode volgens Dakin. Wederom wordt ingegaan op beschikbare programmatuur. Hoofdstuk 6 behandelt de deterministische en stochastische

dynamische programmering. De link tussen beide methoden wordt gelegd via de begrippen perfecte en imperfecte informatie. Ook worden zekerheidsequivalenten besproken m.b.t. planningsproblemen.

Een aantal technieken om niet-lineaire programmeringsproblemen op te lossen worden uiteengezet in hoofdstuk 7. Zowel nulde orde als hogere orde methoden komen aan bod: o.a. Newton-methoden, Lagrange-multiplificatoren, Hooke and Jeeves en Kuhn-Tucker.

Het boek wordt besloten met 46 opgaven met (summiere) oplossingen van een aantal. Tevens is een korte literatuurlijst opgenomen.

De algemene indruk van het werk is goed. Zowel wiskundig georiënteerden als praktijkmensen zullen iets van hun gading vinden. Voor de laatste groep is het prettig dat iedere methode bondig wordt samengevat. Voor alle lezers is het prettig, dat iedere methode uitgebreid wordt geïllustreerd aan de hand van een uitgewerkt voorbeeld. Wel zouden wat meer gerichte literatuurverwijzingen (i.p.v. 'men raadplege de literatuur') een lezer, die wat dieper op de stof wil ingaan, sneller op weg helpen. Voor de praktijkmensen zou het interessant zijn geweest als ingegaan was op aggregatie- en decompositietechnieken voor grote LP-problemen. Wellicht iets voor een volgende druk?

De schrijvers hebben het boek voornamelijk geschreven voor niet-wiskundigen. Voor hen kan met name hoofdstuk 3 (LP) wat zwaar zijn door de abstracte wiskundige opzet. De overige hoofdstukken hebben een wat minder streng karakter. Ik acht het boek zeer geschikt voor een cursus Operations Research technieken voor wiskundigen, informatici, econometristen en heao-inf.-studenten.

A. G. de Kok

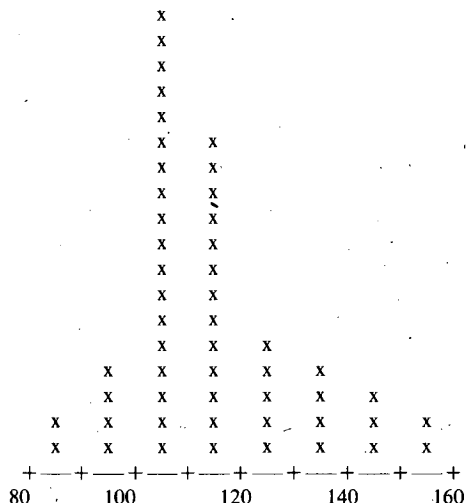
Steel-en-bladdiagram

Pieter Terlouw

IQ-meting bij een vijftigtal Nederlanders in 1980 leverde de volgende (ongeordende) resultaten:

106 103 117 103 116 96 102 130 83 107
127 118 114 117 108 115 119 147 109 142
99 141 125 88 104 132 124 114 127 136
111 96 108 112 153 136 106 108 111 101
105 110 101 120 101 106 98 118 106 100

Vraagstukken in het voortgezet onderwijs die gebruik maken van deze gegevens bevatten frequent de vraag: Teken een histogram met klassebreedte 10 van deze gegevens. Voor zo'n histogram zie Figuur 1.



Figuur 1 Een histogram van IQ's gemeten bij 50 Nederlanders in 1980. Voorbeeld: Een kruisje in de kolom 110-120 vertegenwoordigt het IQ van één persoon en daarvoor geldt: $110 \leq IQ < 120$.

Een moderne techniek om zo'n histogram weer te geven is het steel-en-bladdiagram. (Stem-and-leafdiagram; zie Figuur 2.)

8	38
9	6689
10	011123345666678889
11	0112445677889
12	04577
13	0266
14	127
15	3

Figuur 2 Een steel-en-bladdiagram van IQ's gemeten bij 50 Nederlanders in 1980. Voorbeeld: De rij 12|04577 vertegenwoordigt de IQ's 120, 124, 125, 127 en 127.

Voordelen van het steel-en-bladdiagram zijn nogal in 't oog lopend. (Modus én mediaan zo af te lezen; door het in figuur brengen gaan in dit geval geen gegevens verloren,) Aanbevelenswaardig derhalve, mijns inziens, voor elke vorm van voortgezet onderwijs.

Korrel

Naar aanleiding van de korrel over Vrouwen en Wiskunde in Euclides 59, nr 5, blz. 273, deelt Frank Laforce, voorzitter van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars, ons het volgende mee.

Hij vergelijkt met elkaar het totaal aantal wiskunde-studenten in wat wij zouden noemen de pre-doctorale fase, met het aantal vrouwelijke studenten daaronder. De cijfers zijn:

	totaal aantal studenten	w.o. vr.
UIA (Universitaire Instelling Antwerpen)	36	18
VUB (Vrije Universiteit Brussel)	51	29
RUG (Rijksuniversiteit Gent)	39	20
totaal	126	67

Met betrekking tot de regentaten (tweedegraders) heeft hij niet de beschikking over officiële cijfers, maar weet wel dat minstens 50% meisjes zijn.

Piet Vredenduin

Boekbesprekingen

David M. Kroenke; *Organisatie, informatie en computers*; Uitg. Academic Service, Den Haag; 524 blz.; f 60,-.

Een zeer belangwekkend werk over computers en informatiesystemen. Om het karakter van dit boek duidelijk te laten uitkomen, zal ik hier de korte karakteristieken van de hoofdstukken, zoals ze in het boek zijn opgenomen, laten volgen.

Hoofdstuk 1. Het belang van kennis van de computer en automatisering. Pieter Hooft, een computergebruiker bij DE GOUDEN EEUW, wordt verzocht mee te doen aan een automatiseringsproject. Hij weet niet hoe. Intussen weet Eline Vere van PLACEBO wel hoe ze het systeem dat ze wil, moet opzetten.

Hoofdstuk 2. Het vastleggen van een begripkader voor bedrijfsinformatiesystemen: het model met de vijf componenten. Dit kader wordt gebruikt om een voorbeeld te beschrijven: het collegeroostersysteem.

Hoofdstuk 3. Hoe kunnen computersystemen bedrijven van nut zijn? Een overzicht vanuit het gezichtspunt van de manager. Systeemkenmerken in de belangrijkste functiegebieden van het bedrijfsleven.

Hoofdstuk 4. Alpina heeft hulp nodig. Door hun groei zijn de bestaande systemen ongeschikt. Te veel fouten in klantenrecords en voorraadkosten zijn te hoog. Ze denken dat een computer kan helpen. Hoe moeten ze verder?

Hoofdstuk 5. Een van Alpina's alternatieven: een sequentieel bestandssysteem. Sequentiële apparatuur, gegevensweergave, record overeenstemmende algoritmes, controle totalen en nog meer. Toepassing op Alpina's systeem t.b.v. het klantenbestand.

Hoofdstuk 6. Een tweede alternatief voor Alpina: een direct toegankelijk bestandssysteem. Direct toegankelijke apparatuur, gegevensorganisatie, programma's voor directe toegang, bijzondere problemen t.a.v. kopieer- en herstelwerk en nog meer. Toepassing op Alpina's systeem t.b.v. het klantenbestand.

Hoofdstuk 7. Wat moet Alpina doen? Het documenteren van de alternatieven en de keuze van één alternatief. Hoe Alpina haar systeem ontwikkelt. Het vergroten van de staf, systeemontwerp, een paar problemen ontwikkelen en testen, de stuurgroep gaat accoord met implementatie en dan ...

Hoofdstuk 8. Wagner verkrijgt een dochteronderneming in Roelofarendsveen. Hoe kan de informatievoorziening snel verbeterd worden? Het gebruik van de computer in De Kaag. Eigenschappen van 'teleprocessing systemen', de vijf componenten. Vreemde begrippen en een interessant probleem: het laatste artikel twee keer verkopen!

Hoofdstuk 9. Waarom kan de bank dit adres niet corrigeren? Problemen van gedupliceerde gegevens. Vastleggen van relaties tussen records. Nieuwe manieren om gegevens te benaderen en

wie mag wat doen met welke gegevens? De noodzaak van een gegevensbeheerder.

Hoofdstuk 10. De computer naar de gebruiker brengen. Configuraties van computers en op afstand laden van programma's. Verspreiding van gegevens, kopiëren, verdelen en enkele zeer interessante problemen (waarvan sommige onopgelost blijven). De problematiek van verspreid personeel.

Hoofdstuk 11. Charles Babbage maakte 100 jaar geleden al de vergissingen die vandaag worden begaan. De eerste computers; de eerste ondernemers. IBM gaat voorop met een bedrijfsgerichte filosofie. Computergeneraties en computers vandaag en morgen.

Hoofdstuk 12. Harry Jansen, een ambitieuze en creatieve werknemer ervaart zich en voelt zich ondergewaardeerd. Hij vindt een plaatsje als een moderne Robin Hood (denkt hij). Andere voorbeelden. Computerfraude en wat eraan te doen. Het vastleggen van goede systeemcontroles. Hoe Harry werd gepakt.

Hoofdstuk 13. Computers als zegen en vloek. Hoe computers het bedrijfsleven beïnvloeden. Toepassingen in de non-profit sector. Beheersing van de computereffecten d.m.v. wetgeving en kennis.

Hoofdstuk 14. Een elektronische schrijfmachine? Ja en het begin van een revolutie. Tenslotte, na 400 jaar, worden de kantoren geautomatiseerd. Een papierloos kantoor? Misschien in het kantoor waar u met pensioen gaat.

Hoofdstuk 15. Componenten van microcomputers, RAMs, ROMs, PROMs enzovoort. Ontelbare nieuwe mogelijkheden voor bedrijfsproducten. Ondernemers let op! POS, OCR, MICR en nog meer.

Hoofdstuk 16. Het pasklaar maken van universele machines voor speciale functies. Uitgangscodes, werkcode, en laadprogramma's. De rol van het hoofdbesturingssysteem: jobs-, taken- en gegevensbeheer.

Hoofdstuk 17. De fundamentele programmeringscyclus. Beginnen bij de uitvoer, vervolgens de invoer, dan de verwerkingsfasen. Instrumenten voor het uitdrukken van de logica: gestructureerde stroomschema's en pseudocode.

Hoofdstuk 18. Welke taal moet HOENKO gebruiken? Een emotionele kwestie, waarbij veel op het spel staat. Kenmerken van toepassingen in het bedrijf, de wetenschap, systemen en daarbuiten. Talen die daarbij passen.

Eigenlijk is het boek voor iedereen van belang. Het leest bijzonder prettig. Kennis van computers of van automatisering is voor het begrijpen van dit boek niet vereist. Een bijzonder boek dat ik van harte aanbeveel.

W. Kleijne

Dr. H. J. van den Herik; *Computerschaak, schaakwereld en kunstmatige intelligentie*; Academic Service; 630 blz., f 65,-.

Dit boek, ontstaan als proefschrift aan de TH te Delft, begint in hoofdstuk 0 'Preliminaria' met een aantal opmerkingen die ten doel hebben de lezers 'vertrouwd te maken met enkele begrippen die in deze verhandeling zullen voorkomen'.

Dat betreft achtereenvolgens het begrip computer, het schaakspel en een schaakcomputer, kunstmatige intelligentie (AI) en het schaakgrootmeesterschap. In deze eerste bladzijden geeft de schrijver de definitie van AI-onderzoek die de grond vormt voor zijn onderzoek:

'AI-onderzoek is inzicht trachten te verkrijgen in de principes die mogelijkerwijze ten grondslag liggen aan de menselijke intelligentie, met behulp van computerprogramma's en programma-technieken, die zoveel mogelijk gekonstrueerd zijn op basis van een theorie over de veronderstelde werking van het menselijk denken'.

Hiervan uitgaande komt hij tot een AI-(computer)programma en de werking daarvan.

In dit geheel worden de relaties naar de filosofie, en met name de epistemologie niet vergeten: het is van groot belang dat men zich rekenschap geeft van het kennismodel waarbinnen en waaraan men werkt.

Na beschrijving van de probleemstelling (hoofdstuk 1) wordt in hoofdstuk 2 een zeer leeswaardige beschrijving gegeven van de ontwikkeling van het computerschaak. Duidelijk wordt hierdoor dat het bij een AI-schaakprogramma gaat om een representatie van de kennis van een schaakgrootmeester.

De hoofdstukken 3 en 4 bevatten de eigenlijke kern van het onderzoek. Het is bekend dat bij schaakcomputers het centrale probleem gelegen is in het eindspel. Deze studie geeft een analyse en programmering van een eindspel koning, paard, pion tegen een koning. In de laatste hoofdstukken laat de schrijver vele schakers en computerdeskundigen middels interviews aan het woord. Enerzijds om te weten te komen hoe schakers van diverse niveaus tegen het fenomeen computerschaak aankijken, anderzijds om zicht te krijgen op een aantal toekomstverwachtingen over en perspectieven van computerschaak, de schaakwereld en het AI-onderzoek.

AI met al een opmerkelijke studie, die ik ieder die belang stelt in de genoemde onderwerpen van harte kan aanbevelen.

W. Kleijne

G. Bodifée, *Natuurwetenschappelijk zakboekje 1983-1984*, uitg. Bohn, Scheltema & Holkema, f 29,50.

Het boekje 'wil een praktisch vademecum zijn ten behoeve van studerende, gebruikers en beoefenaars van de wetenschap en algemeen belangstellenden'. Er zijn vele gegevens en formules opgenomen op het gebied van de natuurkunde, scheikunde, biologie, astronomie en de wiskunde. Het geheel is vooral afgestemd op de hogere cyclus van het algemeen secundair onderwijs in België. Zonder iets te willen afdoen van de waarde op zich van dit boekje, is door genoemde afstemming de gebruikswaarde in Nederland beperkt. Bovendien is op het Nederlandse vwo het z.g. Binas-boekje algemeen in gebruik.

Het boekje geeft erg veel informatie, gerangschikt in de volgende rubrieken: eenheden en notaties, natuurkundige grootheden, de elementen, materie en straling, verbindingen, fysische eigenschappen van materialen, scheikunde, biologie, astronomie, wiskunde. Er is bovendien een rubriek Nobelprijzen opgenomen, waarin tevens een lijst met namen van alle Nobelprijswinnaars met een korte omschrijving van het bekroonde werk. Een register van trefwoorden sluit het boekje af.

W. Kleijne

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

522 Van mijn vriend Gaspard Bosteels, erevoorzitter van de VVWL, kreeg ik in januari 1984 onderstaande nieuwjaarswens, zonder verder commentaar.

9	36	74	101	18	45	83	121	27	65	92
63	90	7	34	72	110	16	54	81	119	25
117	23	61	99	5	43	70	108	14	52	79
50	88	115	32	59	97	3	41	68	106	12
104	21	48	86	113	30	57	95	1	39	77
37	75	102	19	46	84	111	28	66	93	10
91	8	35	73	100	17	55	82	120	26	64
24	62	89	6	44	71	109	15	53	80	118
78	116	33	60	98	4	42	69	107	13	51
22	49	87	114	31	58	96	2	40	67	105
76	103	20	47	85	112	29	56	94	11	38

Het vierkant prikkelt uiteraard de nieuwsgierigheid.

- Vind, zo volledig mogelijk, de structuur van dit getallenvierkant. Er zit meer in verborgen dan men aanvankelijk vermoedt.
- Ontwerp een methode om dergelijke vierkanten te construeren.
- Fabriceer nu op analoge wijze een nieuwjaarswens voor 1985.

Oplossingen

523 Een weg AB is 35 km lang. Drie wandelaars en een auto bevinden zich in A . De wandelaars willen zo snel mogelijk naar B komen. De auto kan daarbij de wandelaars vervoeren, echter slechts één tegelijk. De auto rijdt 9 maal zo snel als de wandelaars lopen. Neem aan, dat instappen, uitstappen en keren geen tijd kost. Hoeveel km rijdt de auto?

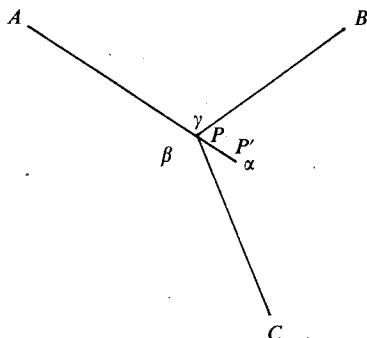
Zelfde vraag voor n wandelaars. (B. Kootstra)

519 Onderstaande 16 punten moeten door een wegennet van minimale lengte verbonden worden. De afstand van twee naburige punten is 1. Gevraagd de lengte van dit wegennet.



Verbinden we de punten door wegen die elkaar niet snijden in een punt dat van deze 16 verschilt, dan is het wegennet minimaal 15 lang.

Onderstel nu dat in een punt dat van deze 16 verschilt, enkele wegen samenkomen. Voorlopig nemen we aan dat het er 3 zijn. In P komen samen de wegstukken AP , BP en CP .



Verleng AP met een (infinitesimaal) stuk $PP' = ds$. Dan is

$$(AP' + BP' + CP') - (AP + BP + CP) = ds + \cos \beta ds + \cos \gamma ds$$

Voorwaarde ervoor dat de som van de weglengten in P optimaal is, is

$$1 + \cos \beta + \cos \gamma = 0$$

Analoog vinden we dat ook vereist is

$$1 + \cos \alpha + \cos \beta = 0$$

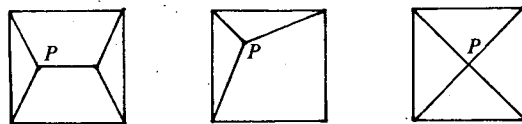
$$1 + \cos \alpha + \cos \gamma = 0$$

Waaruit we vinden

$$\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ$$

Analoog vinden we dat een ander aantal samenkomende wegstukken gelijke hoeken met elkaar moeten maken.

We vinden zo, als we één vierkantje beschouwen, de volgende mogelijkheden.



De weglengte binnen het vierkant is in de drie gevallen resp.

$$1 + \sqrt{3} = 2,732, \quad \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6} = 1,932, \quad 2\sqrt{2} = 2,828$$

Dit geeft een besparing vergeleken met de weg 'buitenom' van resp.

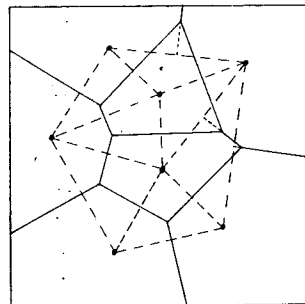
$$3 - 2,732 = 0,268, \quad 2 - 1,932 = 0,068, \quad 3 - 2,828 = 0,172$$

In het eerste geval is de besparing dus het grootst (ook als we in aanmerking nemen dat het in het tweede geval slechts om twee zijden van het vierkant gaat).

We kunnen nu nog proberen patronen te vinden waarbij het om meer dan één vierkant tegelijk gaat. Het wordt langdradig daarop uitvoerig in te gaan; ik volsta met op te merken dat het niets oplevert.

We kiezen dus voor het eerste patroon. Dit brengen we aan in een minimaal aantal vierkanten, dus in de vier hoekvierkanten en in het middelste. De totale weglengte wordt dan $5(1 + \sqrt{3})$.

520 In een vierkante kaas zitten puntvormige gaten. Verdeel de kaas in convexe veelhoeken die elk precies één gat bevatten. Breng eerst de convexe omhullende aan van de gaten. Verdeel deze veelhoek door middel van een triangulatie. Elk gat is eindpunt van een aantal zijden van driehoeken van deze triangulatie. Teken de middelloodlijnen van deze zijden. Deze sluiten, eventueel samen met een deel van de rand van de kaas, een convexe veelhoek is. De verzameling van deze veelhoeken is een verdeling die aan de vraag voldoet. Zie figuur.



Een doelbewuste keuze!

Een wiskundemethode kies je niet van de ene op de andere dag. Je moet er jaren mee vooruit. Daarom gaat aan de keuze vaak een langdurig proces vooraf: sectieberaad, het opstellen van criteria waaraan de methode moet voldoen, informatie inwinnen en ga zo maar door.

Een ding is zeker... als het om de keuze van een wiskundemethode gaat speelt Educaboek altijd een rol.

Want Educaboek beschikt momenteel over een uitgelezen aantal methodes, elk met een eigen identiteit, geschreven door groepen vooraanstaande docenten.

Getal en Ruimte

Een gerenommeerde methode, die de onderwijsontwikkelingen op de voet volgt en zich geregeld vernieuwt. Compleet voor mavo-havo-vwo (incl. een nieuw A- en B-programma).

Vraag de nieuwe, gratis Documentatie aan.

HEWET wiskunde

Wiskunde voor de bovenbouw van het vwo.

Deze uitgave is gebaseerd op het wiskundemateriaal dat in het kader van het HEWET-experiment door de vakgroep OW & OC werd ontwikkeld.

De Wageningse Methode

Met ingang van schooljaar 1985/86 brengt Educaboek een speciale editie voor de onderbouw havo/vwo uit die rechtstreeks aansluiting geeft op het HEWET-materiaal. Een methode die reeds werd beproefd op vele scholen.

Wiskunde Afgerond

Een serie boekjes ter voorbereiding op het examen wiskunde op C- en D-niveau. Diagnostische toetsen met uitleg, oefenstof, differentiatie op twee niveaus.

Uitgekiend!

Gedifferentieerde rekenmethode met een zeer laag instapniveau. Snel en efficiënt achterstanden in rekenen ophalen.

De nieuwe wiskunde catalogus 1985 is verschenen. Hebt u deze niet ontvangen? Bel dan (03450) 71 880.



Educaboek

Postbus 48
4100 AA Culemborg
Tel. (03450) 71 911

Inhoud

H. J. Smid, A. Verweij: Een hoofdstuk zonder huiswerk 149

P. Drijvers: Differentiaalvergelijkingen in het vwo II 153

W. Molendijk: Wat is een buigpunt? 156

J. van Maanen: Over het verdelen van aangeslibd land. Een brugklasproject 161

H. Mulder: Ellips en hyperbool in doorhangend touw 169

J. van Maanen: Een volle bak 172

P. Terlouw: Steel- en bladdiagram 177

P. Vredenduin: Korrel 177

Boekbesprekingen 155, 160, 176, 178, 179

Mededelingen 168, 171

Kalender 171

Recreatie 179

Adressen van auteurs

P. Drijvers, Kronenburgsingel 317,
6511 AV Nijmegen

J. van Maanen, Pieter de Hoogstraat 15,
3583 RG Utrecht

W. Molendijk, Urkmeen 35,
3844 JS Harderwijk

H. Mulder, Geertbroeksweg 27,
4851 RD Ulvenhout

H. J. Smit, T.H. Delft, Julianalaan 132,
2628 BL Delft

P. Terlouw, Meeuwerderweg 92,
9724 EW Groningen

A. Verweij, T.H. Delft, Julianalaan 132,
2628 BL Delft

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148,
6865 HN Doorwerth

WIS SET

- ☆ volledige wiskundeprogramma's voor het VWO
- ☆ afgestemd op de HEWET
- ☆ overzichtelijke behandeling van wiskunde A en wiskunde B
- ☆ een ruime keuze aan originele opgaven
- ☆ geschikt voor elke didactische aanpak

Reeds verschenen:

- WISSET voor 4 VWO
 - bijbehorend boek met uitgewerkte antwoorden en grafieken
- De vervolgdelen A en B voor 5 VWO verschijnen voorjaar '85. Alle delen (óók voor 4 VWO!) verschijnen vanaf heden met stevige kapt en binding.

Een briefkaartje naar:

WISSET

Korund 2 1703 CV Heerhugowaard (telefoon: 02207 - 1 60 20)
en wij houden U op de hoogte van onze uitgaven.