

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

60e jaargang
1984|1985
oktober

Euclides 2

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Mw. I. van Breugel
Drs F. H. Dolmans (hoofdredacteur)
W. M. J. M. van Gaans
Dr F. Goffree
Drs W. Kleijne
L. A. G. M. Muskens
Drs C. G. J. Nagtegaal
P. E. de Roest (secretaris)
Mw H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice)
Dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12,
7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 50,- per verenigingsjaar;
studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de
V.V.W.L. f 35,-; contributie zonder Euclides f 30,-.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met
vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht
bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen,
tel. 08894-11730. Zij dienen met de machine geschreven
te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van
1 1/2. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos
5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is
opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs W. Kleijne, Treverilaan 39,
7312 HB Apeldoorn, tel. 055-550834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille
(buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5,
3155 BR Maasland. Gironr 1609994 t.n.v. NVvW Leespor-
tefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 42,40. Een collectief
abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 24,65.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567,
9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met
betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend
nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag
leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het
einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers f 7,- (alleen verkrijgbaar na
vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

ISSN 01.65-0394

Geachte abonnee,

Door technische storingen ontvangt u hierbij nummer 2 van *Euclides* later dan normaal. Ook de nummers 3 en 4 zullen later verschijnen dan gepland.

Wij verwachten u binnen veertien dagen nummer 3 te kunnen zenden en nummer 4 zal medio januari op de post gaan.

Wij bieden u onze excuses aan voor dit ongerief.

Met vriendelijke groeten,

Wolters-Noordhoff bv

The mathematics teacher and new developments*

Alan J. Bishop

When I was invited to give this talk I was delighted to accept, for three reasons. Firstly because I respect Holland and the Dutch way of doing things, secondly because I like very much what is happening here in mathematics education, and thirdly because I am very interested in the proposed topic.

I have been involved in mathematics teacher education in various ways for the last 17 years and I have seen many new developments emerge in mathematics teaching in that time. But what I want to focus on today is the *process* of development, not on the new ideas themselves, and I want to begin with some developmental 'horror' stories.

Among the developments was Modern Mathematics and one saw thousands of teachers required to attend 'Professor Up-to-date's' lectures on set theory, matrices, vectors etc. I have seen attempts to programme pupils through what was unashamedly called Programmed Learning. I have seen various types of 'teacher-proof' texts – which are so written that the pupils will learn, no matter how bad the teacher is! I have seen attempts to develop a technology of instruction in which the teacher is treated as merely one of a set of possible 'instructional delivery system'. More recently I have seen sets of workcards and worksheets, with many additional materials, all as part of attempts at individual work schemes where the teacher 'sees himself as the person who puts out the cards, sheets, apparatus; marks the exercises, corrects the tests, fills in the assignment forms, maintains

classroom discipline. 'I am no longer a teacher' he says 'I miss hearing the sound of my own voice'; 'I miss teaching from the blackboard'¹.

- More relevantly, and more personally, here are some classroom situations which I have witnessed:
- a I visited one classroom where the overhead projector was locked away in a cupboard 'because we don't have a spare bulb if the one in it breaks'.
 - b A primary headmistress informed me that 'We are a Cuisenaire school, we don't believe in using other materials'.
 - c A secondary teacher, teaching multiplication of matrices was unable to answer a pupil's question about why this topic was being taught.
 - d Nuffield mathematics (a British primary project which used much material and apparatus) was used in one school on Friday afternoons only.
 - e In one secondary classroom calculators were not permitted 'because the pupils all have different ones'.
 - f The microcomputer could not be used by the pupils 'because it is very expensive' – only the teacher used it.

Now I am not wanting to make a joke at these teachers' expense, because I want to sympathise with them. I also want to draw attention to the complex relationship between a teacher and a new idea, and I want to suggest that these stories all show the results of bad development procedures. Furthermore I, personally, reject those developments which do not recognise the teacher's individuality, the teacher's humanity, or the essential motives and desires of the teacher.

Thinking about those developments which I've mentioned, and about those stories, it is no wonder that many teachers become cynical. It is no wonder that many so-called developments have not changed things very much in some teachers' classrooms. Anyone who has ideas *imposed* on them will always try to find ways of avoiding that imposition.

What we surely have learnt from our past mistakes is that the only way to encourage mathematics teaching to develop is by encouraging mathematics teachers to develop. The strength of any educational system lies with its teachers and that system is only as good as its teachers.

* Voordracht gehouden op 12 november 1983 op de jaarvergadering van de NVvW te Utrecht.

So, I could have called my talk 'Developing Mathematics Teachers' but that sounded too instrumental so I didn't use it. Nevertheless my hypothesis today is that mathematics teaching will develop in relation to how the teachers develop – if there is no encouragement of teachers to develop *through* a new idea, then that idea will not develop in mathematics teaching.

What then do I look for in *good* developments, in helping teachers to develop through a new idea? In brief, I look for partnership, cooperation, and the possibilities of teamwork amongst all who are involved in mathematics teaching. In more detail, I would like to consider two different groups of people. Firstly those, involved in development, who are *not* the teachers – what would I look for with them?

Firstly, they must recognise that there are no solutions in education. It is *not* like mathematics. There are no right answers and no best method. There are no universal prescriptions which can apply to all teachers. Every teacher is a unique individual working in an unique context with an unique set of pupils. Each classroom group has its own history which will help to shape developments within that classroom.

Another aspect to realise is that teachers work within a set of frame factors, some of which they may 'perceive' and therefore have some control over (like pupil's ability at mathematics) but most are out of control (limited time for learning, large numbers, examination systems etc.). Still others exist within the classroom (multiple objectives, 'noisy' conditions, social influences, evaluative atmosphere, etc.) and may or may not be modifiable by the teacher.

As Lortie² says 'Teachers have a built-in resistance to change because they believe that their work environment has never permitted them to show what they can really do. Many proposals for change (therefore) strike them as frivolous ...' (p. 235).

If therefore the new developments on offer are not concerned with affecting any of the teachers' perceived frame factors, then the teachers *must* be given the opportunity to discuss and argue about the *value* of that development. It must also be

remembered that 'value' will be perceived, or imagined, before it is supported by practice.

However convinced teachers may be of the potential value of any new development, they still need room for manoeuvre, room to devise their own micro-curricular adaptations, room to make their *local* decisions within the global structure. In other words, those who are not the teachers must not simply impose a detailed scheme which the teachers merely put into operation (as with any 'instructional delivery system'). Which means

not presenting prescriptions but possibilities
not details, but the 'essence' or the spirit
not fully elaborated, but partially realised
not rigidly structured, but a loose skeleton.

What then should I say to the teachers involved in development? First of all it is necessary to realise that educational change and development is *inevitable*, because education exists in a time dimension, and cannot be fixed. It is subject to many outside pressures, from society, from parents, from employers, from mass media, and these all 'help' to shape educational goals, contexts and processes. Secondly it is therefore very important to be *open* to change and development, to be aware of ideas and possibilities and to be prepared to consider new developments. Kelly's theory of Personal Constructs³ is, I find, very interesting here. He discusses the philosophy of constructive alternativism and argues that we only develop by experiencing contrast, which forces us to reconstruct our perception of the situation. He talks of people who suffer from a disease which he calls 'hardening of the constructs' and his strongly humanistic psychology encourages us to constantly test out our constructions and modify them if necessary.

A corollary is that teachers should be actively involved in developments, whether the discussion concerns potential values, or processes, or contexts, the teacher's perspective must be strongly represented. Within the 'team' idea, teachers must be strong negotiators for their subjective goals, even if they and others can share the same objective goals of improving mathematics education for all.

The differences between the teacher's work context and that of others in the team must be openly presented. The social 'arena' of the classroom must be perceived by those who do not work in classrooms. If a new development 'feels' wrong in that context and in that arena, then that feeling must be described, discussed and analysed. The teachers situation must be clearly understood by all.

The most appropriate position for the teacher to take is that of a 'collaborative researcher'. The teacher is in the fortunate position of being able to try out, and experiment with, a new idea and no-one else is in that position. Perhaps it sounds very dramatic to suggest that every teacher should be a researcher, but that is one of the aims of the Association of Teachers of Mathematics in the U.K. and we have had much successful experience with that idea. Through more formally established groups, like the Teachers Research Group, and informal collaborations on particular ideas, like microcomputers, heterogeneous groups, visualization in geometry, many teachers in the U.K. have developed a strength which has enabled their ideas to be felt in a much wider context⁴. A group of highly professional researchers is no substitute for a self-monitoring, investigating education profession.

Experimenting with new ideas can be fascinating and rewarding, and research activity such as this is the means by which we all grow professionally. The problem with many developments in the past was that teachers did not always develop with, and through, the new ideas. That need not, and should not, be allowed to happen these days.

So, to conclude, let me reiterate my scenario for successful developmental work in mathematics education. I look for a team, working in collaboration. I look for strong individuals within that team. I look for genuine recognition of their different contexts and exposition of those differences. I look for research and enquiry, and a healthy respect for the others' views.

We have a saying in English that 'no man is an island' and in educational development, 'no one is an expert'. We must work together with the understanding that despite our differences we have

at least one thing which we can share – our ignorance. We must never be afraid to admit that 'we don't know'.

Notes

- 1 This quotation is from '*Affective consequences for the learning and teaching of mathematics of an individualised learning programme*'. July Morgan, University of Stirling, Stirling, Scotland, 1977.
- 2 D. C. Lortie, 1975, '*Schoolteacher – a sociological study*', University of Chicago Press, Chicago, USA.
- 3 George A. Kelly, 1963, '*A theory of personality – the psychology of personal constructs*', Norton, New York, USA.
- 4 The work of the Research Group is described in a publication '*Focus on Teaching*', from A. T. M., King's Chambers, Queen Street, Derby, DE1 3DA. Several ATM members contributed to the Cockcroft Committee's Report on Mathematics teaching in the U.K., called '*Mathematics Counts*', H.M.S.O., London, 1982.

Alan Bishop is docent aan de leraarsopleiding wiskunde van het Department of Education van de universiteit Cambridge.

Ontvangen

Wiskunde aan de man gebracht, een onderzoek naar seksongelijkheid in wiskundeschoolboeken.

Een verslag gemaakt door Henny van Zanten, Pieter Sijsma, Ritsert Jansen en Yde Venema, wiskundestudenten aan de Rijksuniversiteit Groningen. Het verslag is gemaakt in het kader van het vak Wetenschap en Samenleving.

Exemplaren van het verslag zijn te verkrijgen bij de genoemde projectgroep, WSN-gebouw Rijksuniversiteit Groningen, Postbus 800, 9700 AV. Groningen.

Leerstijlaspecten ; veld(on)afhankelijkheid II

Harrie Broekman

In het eerste deel van dit artikel gaf ik aan wat onder veldafhankelijkheid verstaan wordt, 'veldafhankelijke mensen zijn zwak in het onderscheiden van delen, die in het waarnemingsveld zijn ingebed.' Tevens werden een aantal 'verborgen-figuren' tests besproken, waarmee de mate van veld(on)-afhankelijkheid gemeten wordt.

In de paragraaf 'Problemen in het onderwijs, enkele suggesties' kwam o.a. naar voren dat veldafhankelijken meer dan veldonafhankelijken moeite hebben met het aanbrengen van structuur, zich moeilijker concentreren, sterker afhankelijk zijn van waarde-oordelen van anderen, meer moeite hebben met het zelf verantwoordelijkheid dragen voor hun handelen en erg gesteld zijn op sociale contacten met medeleerlingen en docenten.

De meer veldafhankelijke leerlingen zouden geïndien zijn met een op interactie gerichte aanpak en met een stapsgewijze opbouw van leerstof. Onder het kopje 'Gebruiken van ieders sterke punten' zal ik daar een aantal voorbeelden van geven. Middels enkele verwijzingen en een uitgebreid voorbeeld zal ik tevens enige aandacht schenken aan het 'visuele aspect'.

Gebruiken van ieders sterke punten

Heel vaak hebben we de neiging om iemands zwakke punten te verbeteren en vergeten we de sterke punten uit te bouwen.

Veldafhankelijke leerlingen zijn sterker bij groepsdiscussies en groepswork (met een voorstructurende docent): we zouden daar op aan kunnen

sluiten met een op interactie gerichte aanpak.

Veldafhankelijke leerlingen hebben voorkeur voor gestructureerd aangeboden leerstof: we zouden daar op aan kunnen sluiten door de leerstof stapsgewijs op te bouwen.

Een op interactie gerichte aanpak kunnen we soms herkennen in leermateriaal (opdrachten die samen uitgevoerd moeten worden etc.), maar vooral ook in de manier waarop klassegerekenen en onderwijsgerekenen gevoerd worden. Belangrijk daarbij is de manier waarop omgegaan wordt met de sfeer in de klas.

De leerlingen (én de leraar!) moeten zich veilig voelen, waardoor ze zich kunnen uiten, halve gedachten naar voren kunnen brengen en fouten durven bespreken.

Voorbeeld A1²

Een brugklasser vroeg hoe hij op papier een hoek kon tekenen even groot als de getekende hoek in het boek (zonder geodriehoek). De leraar maakte er een klasprobleem van door een hoek op het bord te tekenen en te vragen hoe deze naar een andere plaats overgebracht kon worden. Een gevolg hiervan was een enthousiast probeerende groep leerlingen, waarbij de leraar er voor zorgde dat iedereen zich kon uiten.

Voorbeeld A2

In een 5 vwo was het de gewoonte dat een leerling die vastgelopen was in een huiswerksom op het bord kwam schrijven (tekenen) wat hij/zij wel had. Het probleem van niet verder kunnen werd daarna een klasprobleem. Gezamenlijk werd besproken wat er wel/niet klopte, etc., etc.

Voorbeeld A3

Na enige uitleg is er op het bord komen te staan

$$\frac{1}{x^{-2}} = x^2.$$

Een leerling reageert (verwonderd!) met 'dat moet toch $-x^2$ zijn?!' Leraar: 'Waarom?' Leerling: 'je moet die min toch ergens laten.' Leraar: 'hé, dat is een punt jongens. Daar moeten we eens even over praten. Waar blijft die min?' ...

Het helpen van (veldafhankelijke) leerlingen door stapsgewijze opbouw bij het aanleren van begrippen

wordt sterk aanbevolen door o.a. Skemp, Van Dormolen en Van Hiele.

Hierbij kunnen we denken aan opbouw over een aantal jaren verspreid, maar vooral ook aan opbouw van een klein stuk leerstof, zoals uit de volgende voorbeelden moge blijken.

Voorbeeld O_1

Lange lijnen in de leerstof (ordening), zoals bijvoorbeeld t.a.v. vergelijkingen. Open bewering, oplossen door proberen, oplossen van eerste graadsvergelijkingen door optellen/afrekken en daarna door vermenigvuldigen/delen, stelsel eerste graadsvergelijkingen, tweede graadsvergelijkingen, etc., etc.

Voorbeeld O_2

De indeling van een hoofdstuk, zoals b.v. 'Rekenen met negatieve getallen' in Sigma 1^m. § 6.1. Welke soorten getallen kennen we? § 6.2. ... § 6.18. Vragen.

Voorbeeld O_3 (Uit: Getal & Ruimte 2M2 1975)

In het hoofdstuk V 'Vergelijkingen' wordt begonnen met het bespreken van de regel

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0. \text{ Daarna volgt:}$$

§ 2. Het oplossen van hogeregraadsvergelijkingen

Met 'hogeregraadsvergelijkingen' bedoelen we vergelijkingen van de tweede of hogere graad.

Voorbeelden van tweedegraadsvergelijkingen zijn:

$$x^2 = 4;$$

$$x^2 - 2x = 8;$$

$$4x - 10 = 2 - x^2;$$

$$2x^2 + 1 = 2x + 1.$$

Voorbeelden van derdegraadsvergelijkingen zijn:

$$x^3 = 8;$$

$$x^3 - x^2 = 4;$$

$$2x - 1 = x^3.$$

Vroeger is al opgemerkt, dat de methode voor het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen niet geschikt is voor alle soorten vergelijkingen.

Voor hogeregraadsvergelijkingen moeten we een andere methode volgen.

We leren deze methode aan de hand van enkele voorbeelden.

Na voorbeeld II volgt:

Onthoud voor het oplossen van hogeregraadsvergelijkingen:

- 1 breng alle termen naar één lid (zodat in het andere lid 0 komt);
- 2 ontbind de veelterm in dat ene lid;
- 3 gebruik de equivalentie: $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

Voorbeeld O_4 (Uit: van A tot Z deel M-1b)

23. Vergelijkingen

- 1 het zoeken van een origineel

De functie $x \rightarrow 5x$ heeft als voorschrift 'vermenigvuldig met 5'.

Als het origineel 2 is dan is het beeld 10.

Als het beeld 50 is dan is het origineel 10.

- a Wat is bij deze functie het origineel als het beeld 525 is?
- b Wat is bij deze functie het origineel als het beeld -10 is?

Je vindt het origineel terug door de inverse functie toe te passen.

De inverse van de functie 'vermenigvuldig met 5' heeft als voorschrift 'deel door 5'.

Je kunt ook schrijven $x \rightarrow \frac{x}{5}$.

- c Wat is in woorden het voorschrift bij de functie $x \rightarrow x + 8$?
- d Wat is bij deze functie het origineel als het beeld 15 is?
- e Wat is bij deze functie het origineel als het beeld 3 is?
- f Wat is bij deze functie het origineel als het beeld -2 is?

Je vindt het origineel terug door de inverse functie toe te passen.

De inverse van de functie 'tel er 8 bij' heeft als voorschrift 'trek 8 af'.

Je kunt ook schrijven $x \rightarrow x - 8$.

- g Wat is in woorden het voorschrift bij de functie

$$x \rightarrow \frac{x}{3}?$$

Naast het zorgen voor een stapsgewijze opbouw, kan ook het gebruikmaken van *materialen*³ en een *duidelijke typografie* de leerlingen helpen door de bomen het bos te blijven zien. En speciaal voor de veldafhankelijken: in het bos de bomen.

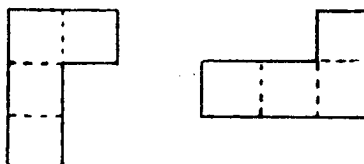
De volgende voorbeelden kunnen dit verduidelijken.

Voorbeeld T1 (uit M.W. 4e druk, deel 1)

Vierlingen en vijfelingen.

- 14 Van vier vierkantjes kun je vierlingen maken.

De vierlingen die je hier getekend ziet, zijn gelijk.

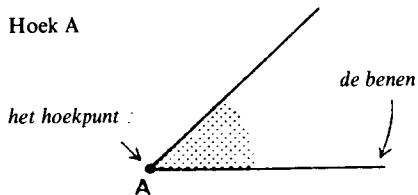


Als je één van deze twee uitknipt en hem omkeert, kun je hem precies op de andere laten passen. Teken nu alle verschillende vierlingen. Doe het niet zomaar in het wilde weg. Probeer een werkplan te vinden.

- 15 Teken een vierkant 4 bij 4. Verdeel het vierkant in vier vierlingen, die alle vier dezelfde vorm hebben. Kun je het op meer dan één manier?

Voorbeeld T2 (uit 'de Wageningse Methode' deeltje 9)

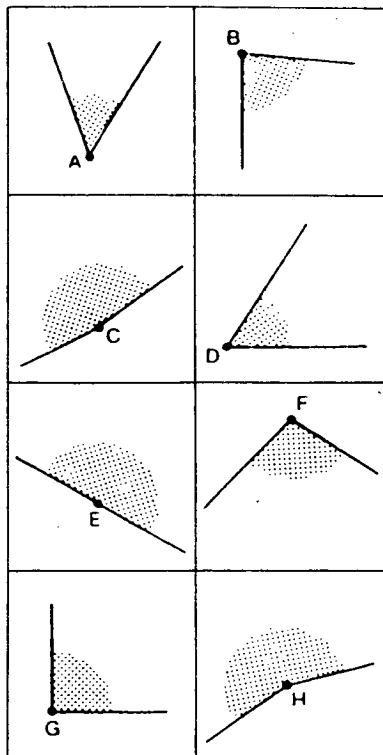
Hoek A



Korter opgeschreven:

$\angle A$

($\angle$ betekent dus *hoek*)



Hierboven zijn acht hoeken getekend. Zet die hoeken in volgorde naar grootte; begin bij de kleinste (meest spitse) hoek. Gebruik – zo nodig – doorzichtig papier.

Bij het tekenen van hoeken volstaan we meestal met:



We bedoelen dan deze hoek:



En niet deze veel grotere hoek:



Voorbeeld T3 (uit 'Wiskunde Doen!' MAVO 1)

•		
	x^2	
		$+6$

Gevraagd wordt $x^2 + 5x + 6$ te ontbinden in factoren. In het schema kun je x^2 en $+6$ zo neerzetten.

•	x	
x	x^2	
		$+6$

Je krijgt x^2 door x te vermenigvuldigen met x . Dit kun je in het schema invullen.

•	x	$+1$
x	x^2	$+x$
$+6$	$+6x$	$+6$

$6x + x = 7x$
klopt niet

Het getal 6 kun je ontbinden in de factoren 1 en 6 en in de factoren 2 en 3. Beide mogelijkheden zet je in het schema. Het getal 6 moet je in dit geval ontbinden in de factoren 2 en 3 want anders krijg je uit het schema niet $5x$.

•	x	$+3$
x	x^2	$+3x$
$+2$	$+2x$	$+6$

$2x + 3x = 5x$
klopt

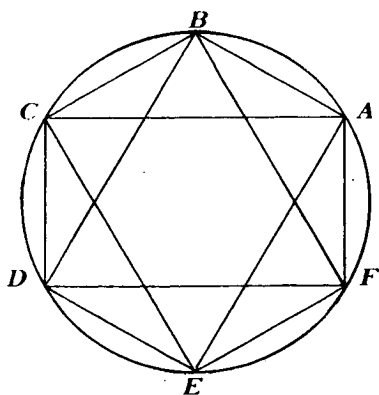
Uit het schema zie je dat $x^2 + 5x + 6$ ontbonden in factoren is $(x + 2)(x + 3)$.

Het visuele aspect

In de laatste drie voorbeelden speelt het visuele – door het samengaan van een ‘plaatje’ en een ‘praatje’ – een grote rol. Behalve met de veld(on)afhankelijkheid hebben we hier te maken met een meer of minder visueel ingesteld zijn. Dit is een ander belangrijk leerstijlaspect, dat reeds aan bod gekomen is in het artikel ‘Visualiseren helpt’ (Eucl. 59, nr 6)⁴ en ook in het volgende voorbeeld een rol speelt.

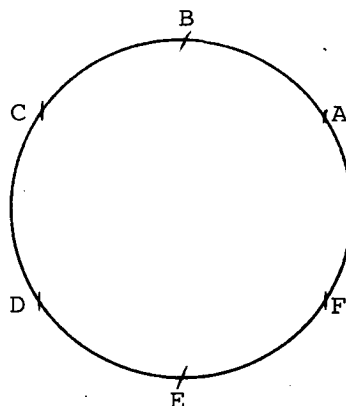
Voorbeeld

Welke figuren (begrensd door rechte lijnen) kun je herkennen in het volgende plaatje? Noem ook hun aantal.



Figuur 1

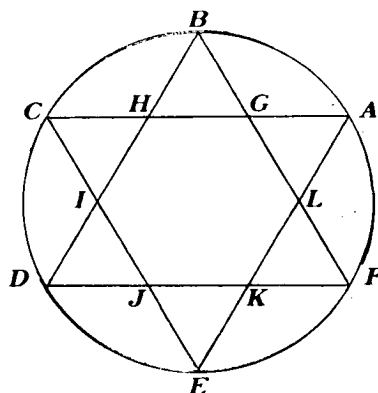
Degene die door al die lijnen geen driehoeken, rechthoeken etc. meer ziet kan bijvoorbeeld met de volgende figuur beginnen.



Figuur 2

Verbind A met C, C met E en E met A. Wat voor driehoek is $\triangle ACE$?

Verbind nu B met D, D met F en F met B. Wat voor driehoek kun je nu ontdekken? Hoeveel van ieder? Zie je ook een regelmatige zeshoek?



Figuur 3

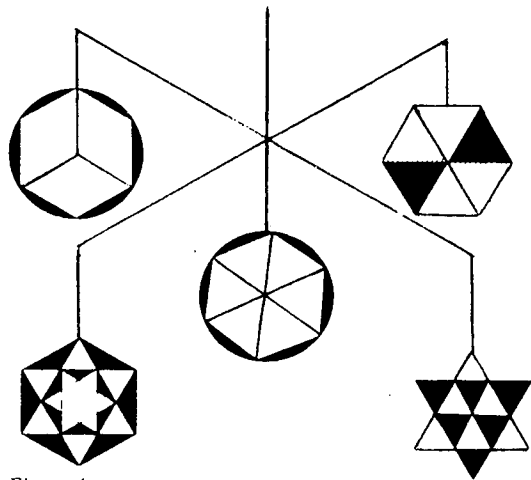
Verbind vervolgens A met B, B met C, etc.

Er ontstaan nu een grote zeshoek, rechthoeken, trapezia, ruiten en een heleboel driehoeken. Zoek ze op en tel ze.

Overleg eerst even met je buurvrouw(man) hoe jullie het zullen aanpakken.

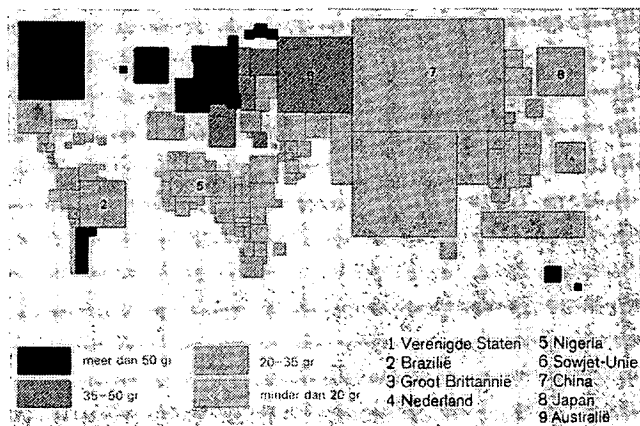
Opmerking: ook door de 13 delen van deze figuur (geen gebogen lijnen!) te nummeren, of figuurtjes uit te knippen en op de figuur te leggen, zullen lang niet alle leerlingen de 44 figuren vinden. Als dat wel het geval is, kunt u ook nog de lijnstukken AD en CF gaan trekken en dan gaan rekenen, of gewoon leuk kleuren.

Een groepje leerlingen werkte met dun karton, een schaar en een paar draden en kwam toen tot het volgende resultaat. Ziet u daar wiskunde in voor uw veld(on)afhankelijke leerlingen?



Figuur 4

Vraag: Hoeveel moeite zullen veld(on)afhankelijke leerlingen hebben met het volgende voorbeeld uit Geo-geordend? (Basisboek MAVO/HAVO/VWO)



Figuur 5 Het eiwitgebruik in de wereld. Dierlijk eiwitgehalte in grammen in het dagelijks voedsel per inwoner (Uit: MSA). Op deze kaart is de grootte van het land niet getekend op grond van de oppervlakte, maar van het aantal inwoners. Daarom zijn bijvoorbeeld Nederland en Australië even groot.

Samenvattend

Veldonafhankelijkheid – de mogelijkheid om in allerlei situaties de relevante ‘figuur’ duidelijk te onderscheiden van de achtergrond, etc. – is van groot belang voor het goed kunnen volgen van (wiskunde-)onderwijs.

Tot op zekere hoogte lijkt er – vooral in de eerste jaren van het voortgezet onderwijs – nog enige invloed uitgeoefend te kunnen worden op de mate van veldafhankelijkheid. Essentieel daarbij is het dat de leerling inzicht krijgt in zijn eigen sterke en zwakke kanten, maar vooral ook dat we proberen meer in te spelen op de sterke kanten van alle leerlingen door afwisseling van werkvormen, verschillende wijzen van leerstofaanbieding e.d.⁵

Noten

- 1a Een aantal leerlingen zijn in het voordeel doordat de docent in zijn onderwijsstijl (on)bewust aansluit bij de leerstijl van de leerlingen.
- b Gezien vanuit de brede doelstelling ‘algemene vorming’ is het onjuist om alleen te werken aan het verder verbeteren van de sterke punten van een leerling. Wat hier gesteld wordt ‘gebruik de sterke punten’ is daarmee niet in strijd.
- 2 De voorbeelden A1,2,3 zijn afkomstig van resp. de leraren Paul Dekkers, Pieter Janssen en Arthur v/d Hurk.
- 3 Zie voor (leer)psychologische achtergrond hierbij b.v. Carel van Parreren ‘Leren door handelen’, uitgeverij Van Walraven b.v. (1983), de brochure van Joop van Dormolen en Bert Zwaneveld ‘Handelen om te begrijpen’, of het sterk praktijkgerichte boek van Bram Lagerwerf ‘Wiskunde Onderwijs Nu’ W.N. 1982.
- 4 1. Voorbeelden zijn tevens te vinden in ‘Oneindig min oneindig en nul maal oneindig’ Eucl. 58 nr. 9 en in ‘Grafieken en functievoor-schriften’ Eucl. 59 nr. 3.
2. De psychologe Dr. M. Boekaerts van de Katholieke Hogeschool te Tilburg deed en doet veel onderzoek naar de wijze van opnemen en opslaan van informatie. Zij ontwikkelde o.a. een vragenlijst coderingsvoorkeur met vragen als ‘Ik herinner mij eerder wie iemand is’
 - a) als ik zijn naam hoor
 - b) als ik (een foto van) zijn gezicht zie.
3. Over het gebruik van materialen en plaatjes bij het bewijzen handelt het artikel van Van Dormolen ‘Leren wat bewijzen is’ in Eucl. 59 nr. 7, p. 325 e.v.
- 5 Hiervoor pleit m.n. F. Vester in zijn boek ‘Hoe wij denken, leren, vergeten’. Boek van de maand, april 1976.

Leren en reflecteren in het wiskunde-onderwijs I

Fred Korthagen

1 Inleiding

Onder wiskundeleraren is het boekje 'Wiskundig denken' van Skemp (1973) redelijk bekend. In dit boekje zijn een aantal basisprincipes over het leren van wiskunde beschreven die in de jaren zeventig duidelijk invloed hebben gehad op de wiskunde-didaktiek.

Veel minder bekend is het omvangrijkere boek 'Intelligence, learning and action' van Skemp (1979). Hierin is een veel diepgaander theorie beschreven, waarin duidelijke verbanden gelegd worden tussen het denken en het handelen van de mens.

Misschien is het laatstgenoemde boek minder bekend geworden onder wiskundeleraren, omdat het niet uitdrukkelijk over wiskunde-onderwijs gaat. Ik ben er echter van overtuigd dat Skemps theorie juist voor wiskundeleraren van belang is. Dat heeft o.a. te maken met de centrale rol die het *reflecteren* in die theorie speelt.

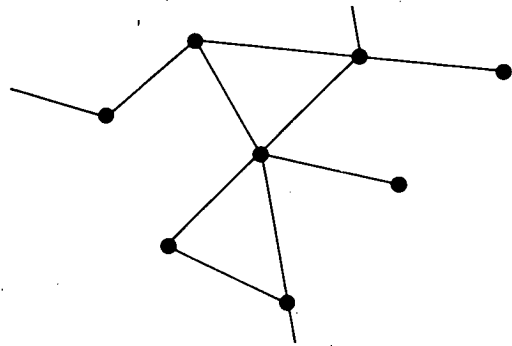
Ik wil proberen niet alleen wat kernpunten uit Skemps boek te lichten, maar bovendien te laten zien welke betekenis zijn theorie kan hebben voor de leraar in de klas. Omdat het niet goed mogelijk bleek dat allebei binnen het bestek van één Euclides-artikel te doen, zal ik me eerst beperken tot het bespreken van de theorie. In een volgend Euclides-nummer ga ik in op de betekenis van die theorie voor de onderwijspraktijk.

Veel van het onderstaande wordt overigens ook behandeld in mijn proefschrift (Korthagen, 1983), waarin het als basis is gebruikt voor een model voor de opleiding van leraren.

2 Het kaartmodel

Een kernbegrip is *cognitief schema*. Voor de lezer die niet bekend is met het boekje 'Wiskundig denken' zal ik dit begrip eerst uiteenzetten.

Een taxichauffeur die geregeld in Amsterdam van de ene plek naar de andere rijdt, heeft een vrij gedetailleerde plattegrond van de stad in zijn hoofd. Iemand die de stad slechts oppervlakkig kent, kan ook een plattegrond in zijn hoofd hebben, maar die is veel grover: hij kent enkele vaste punten (bijv. een kerk, het concertgebouw, een park, etc.) en de verbindingswegen daartussen; schematisch (fig. 1).



Figuur 1

De taxichauffeur zal niet alleen over meer verbindingen beschikken tussen de knooppunten, maar ook zullen de gebieden *tussen* de verbindingswegen opgevuld zijn: hij kent ook de kleinere dwarsstraten en dwarsstraten van dwarsstraten.

Bij beide personen is sprake van een cognitieve structuur: er is een samenhangend geheel van kennis aanwezig. Zo'n cognitieve structuur wordt aangeduid met de term *cognitief schema*, soms kortweg *schema* genoemd. De taxichauffeur heeft een schema dat tamelijk *rijk* is.

Het begrip schema is ook nuttig bij de beschrijving van iemands wiskundige kennis. We moeten wiskundige begrippen dan als de 'knooppunten' opvatten en de relaties tussen de begrippen als 'verbindingswegen'.

We bekijken het schema 'tweedegraadsfuncties en -vergelijkingen'. Dit schema zal bij de één veel rijker zijn dan bij de ander (bij velen is een dergelijk schema zelfs geheel afwezig). Voorbeelden van

mogelijke begrippen uit dit schema zijn: tweede-gradsfunctie, parabool, nulpunt, discriminant, tweedegraadsvergelijking, oplossing van een vergelijking, etc. Het al of niet aanwezig zijn van deze begrippen zegt echter nog niet alles over de kennis van die persoon over het onderwerp. Er kan nog een groot verschil bestaan tussen de ene persoon en de ander t.a.v. de relaties *tussen* die begrippen. Zo zullen veel leerlingen die wel over de genoemde begrippen beschikken, toch niet altijd even gemakkelijk een vraag als de volgende kunnen beantwoorden:

voor welke t heeft de functie $x \rightarrow x^2 + tx + 9$ twee verschillende nulpunten?

Oplossing van dit probleem vereist o.a. dat men over de volgende relaties beschikt:

nulpunten	oplossingen	
tweedegraads-	van de	
functie f	vergelijking	discriminant
	$f(x) = 0$	

Van Hiele heeft erop gewezen dat er sprake is van een wezenlijk ander denkniveau als het individu de relaties tussen de begrippen als object van beschouwing kiest. Inderdaad is er dan sprake van een ander schema: wat eerst relaties *waren*, zijn de begrippen van het nieuwe schema geworden. Zo kan men de relaties die er bestaan tussen de hoeken en de zijden van een rechthoekige driehoek beschrijven m.b.v. goniometrische functies. Als men verbanden gaat leggen tussen die goniometrische functies (bijv. bij het bewijs dat de cosinus de afgeleide is van de sinus), dan komt men op een hoger niveau. Helaas is het in het onderwijs vaak

zo, dat de leraar wel op dit niveau praat, maar de leerling (nog) niet op dit niveau denkt... (Wie zijn schema over de niveautheorie wil uitbreiden kan terecht bij Van Hiele (1973, 1979/80), Lagerwerf (1982) en Korthagen (1980/81).)

3 Het zoomlens-principe

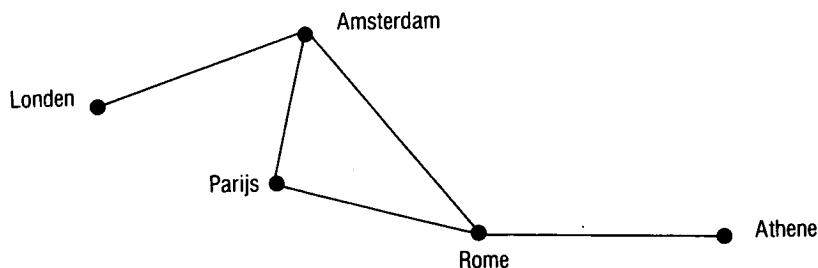
Er is nog een facet van het functioneren van schema's dat aandacht verdient. Ik begin met een voorbeeld.

De taxichauffeur die een rijk schema van Amsterdam heeft, gebruikt de rijkdom van zijn schema in het geheel niet als hij nadenkt over de manier waarop hij per vliegtuig naar London, Parijs, Rome of Athene kan reizen. Op dat moment roept hij een geheel andere cognitieve kaart op, waarbij deze steden de knooppunten zijn (fig. 2).

Zijn schema van Amsterdam is dus a.h.w. ineengekrompen tot één punt. Hij kan echter naar believen dit punt weer 'opblazen', bijv. als hij per auto van zijn huis naar het vliegveld wenst te gaan.

Skemp spreekt over *inzoomen* wanneer de persoon let op de details uit een schema. Er is sprake van *uitzoomen* als de persoon let op de grote lijnen of misschien zelfs een geheel schema als één begrip hanteert. De termen in- en uitzoomen zijn ontleend aan de film: er is sprake van inzoomen als de opnamehoek van een lens verkleind wordt.

Elke wiskundeleraar kent het volgende didactische probleem. Een leerling komt niet uit een opgave. Je gaat hem of haar helpen en komt terecht bij een detail-probleem; voor een bepaalde tussenstap is bijvoorbeeld het rekenen met breuken nodig. Er wordt ingezoomd op dit detailprobleem en het wordt opgelost, maar nu is de leerling al lang het



Figuur 2

zicht kwijt op de grote lijnen van de oplossingsmethode. De 'goede' leerling kan vaak en de grote lijnen in de gaten houden en tegelijk op de details letten. Zo'n leerling heeft bijv. overzicht over de verschillende methoden om tweedegraadsvergelijkingen op te lossen, maar ziet ook snel aan de coëfficiënten in een vergelijking welke methode in een concreet geval het handigst is.

Een heel schema kan trouwens als één begrip worden gehanteerd. In het rijksleerplan komt de term 'congruentie' voor als 'begrip'. Wiskundeleraars kunnen er over praten of ze het onderwerp vóór of na de kerstvakantie behandelen. Er is dan sprake van uitzoomen m.b.t. dat begrip, hoewel deze leraren in staat zijn er een heel schema bij op te roepen als dat nodig is. Skemp trekt dan ook de conclusie dat begrippen en schema's niet totaal verschillend van aard zijn: *'Sometimes one classification is better, sometimes the other, according to purpose. A scheme can be thought of as a concept with interiority'* (Skemp, 1979, p. 141). Zo heeft Van Hiele erop gewezen dat de term 'ruit' slechts de aanduiding van een gestalte kan zijn, maar ook een hele verzameling eigenschappen (relaties tussen begrippen) kan vertegenwoordigen. Ook Freudenthal (1973, 1978) wijst op het verschijnsel dat hierboven met de term zoomlens-principe is aangeduid. Hij spreekt over *lokaal* en *globaal perspectief* om aan te geven dat de aandacht op details resp. op het geheel gericht kan zijn. (Vgl. ook Meester, Schoemaker & Vedder, 1980, p. 32-35.)

4 Stuursystemen

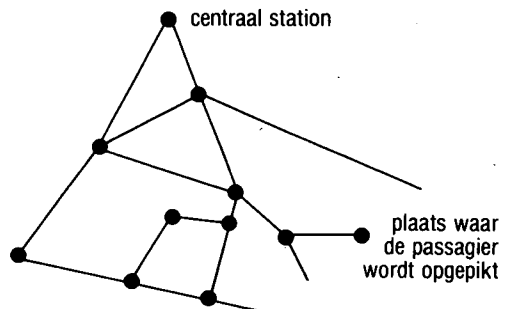
De betekenis van kennis komt pas naar voren op het moment dat de persoon die deze kennis heeft, er wat mee *doet*.

De taxichauffeur onderscheidt zich van zijn passagier (met oppervlakkige kennis van de stad) doordat hij de taxi snel en efficiënt naar de plaats van bestemming weet te dirigeren. De wiskundeleraar onderscheidt zich van zijn leerlingen doordat hij (aanvankelijk) veel sneller en beter allerlei vraagstukken over tweedegraads-functies en -vergelijkingen oplost.

De kennis die iemand heeft, stelt hem of haar dus in staat om sneller en efficiënter bepaalde doelen te bereiken. Dit is een belangrijke functie van begrip-

pen en schema's voor de mens: zij helpen bij het handelen. Begrippen en schema's zijn dan ook vaak van levensbelang. Het is voor een klein kind dat op straat speelt, van essentiële betekenis dat het een naderende auto snel herkent als auto (ook als deze een afwijkende vorm heeft ten opzichte van de auto's die het kind al eens gezien heeft) en dat het de auto (in een schema) verbindt met een begrip als 'gevaar'.

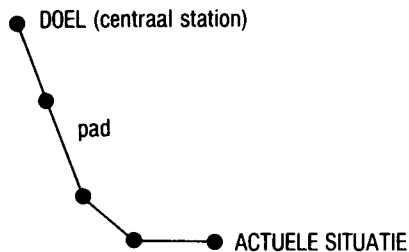
Hoewel schema's in dienst staan van het bereiken van doelen, is het individu zich niet altijd even bewust van die doelen. Zo zal de taxichauffeur er niet voortdurend bij stilstaan dat zijn werk o.a. gericht is op het doel 'de kost verdienen'. Waarschijnlijk is hij zich wel bewust van een doel als 'de passagier naar het centraal station brengen'. Bekijken we de manier waarop de taxichauffeur zijn schema van Amsterdam gebruikt om dit laatste doel te bereiken, dan vallen een aantal zaken op. Van speciale betekenis in dit schema worden de plaats waar hij zijn passagier oppikt en het doel van de rit (het centraal station) (fig. 3).



Figuur 3

Vervolgens helpt het schema hem om een actieplan te ontwikkelen: de relaties uit het schema representeren diverse routes en de taxichauffeur kiest hiervan de meest geschikte route tussen begin- en eindpunt.

Ik voer nu enkele termen in. Ik noem de situatie waarin de chauffeur zich bevindt bij het oppikken van de passagier de *actuele situatie* (in het Engels *present-state*). Het centraal station is zijn *doel* (*goal-state*) en hij kiest m.b.v. zijn schema een *pad* (*path*) van de actuele situatie naar het doel (fig. 4). Tijdens het doorlopen van het pad verandert de actuele situatie natuurlijk voortdurend. Na een paar minuten rijden is de situatie (fig. 5).

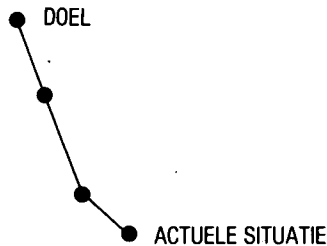


Figuur 4

Het is duidelijk dat de taxichauffeur tijdens het doorlopen van het pad voortdurend de actuele situatie m.b.v. zijn schema vergelijkt met zijn doel. Daardoor wordt aan zijn handelen richting gegeven. Het gehele (voor een groot deel innerlijke) systeem dat maakt dat de taxichauffeur zijn doel bereikt, noemen we een *stuursysteem* (*director system*).

De belangrijkste componenten van zo'n systeem zijn:

- 1 Een tot actieplan getransformeerd cognitief schema (geoperationaliseerde kennis).
- 2 Een orgaan dat voortdurend de actuele situatie waarneemt (bijv. de ogen van de taxichauffeur).
- 3 Een orgaan dat voortdurend de actuele situatie vergelijkt met het doel m.b.v. component 1.
- 4 Een orgaan dat zorgt voor de daadwerkelijke besturing van het doel (bijv. de handen en voeten



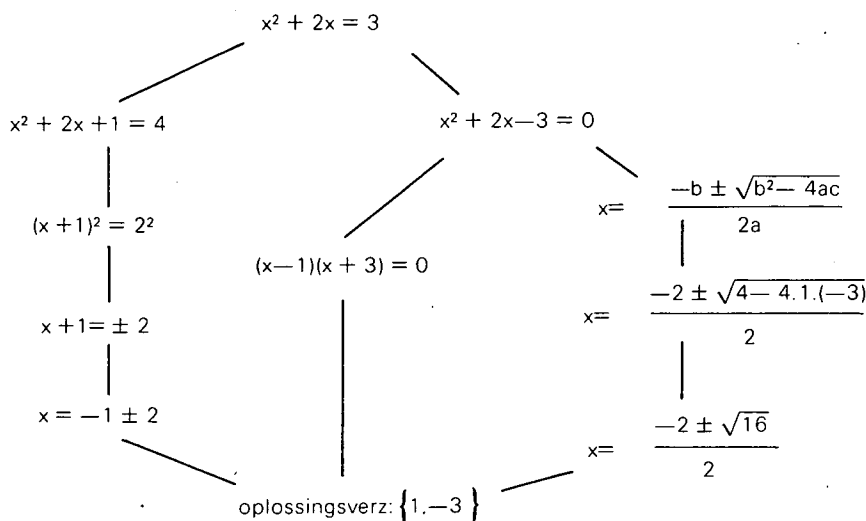
Figuur 5

van de taxichauffeur).

Gezamenlijk zorgen deze componenten voor een voortdurende terugkoppeling (feedback).

Skemp (1977/78) geeft een voorbeeld dat betrekking heeft op het oplossen van de vergelijking $x^2 + 2x = 3$. Iemand met een rijk cognitief schema betreffende tweedegraadsvergelijkingen heeft weinig moeite met het vertalen van dit schema naar een actieplan voor het oplossen van de vergelijking. Zelfs kan hij uit verschillende paden kiezen die van de actuele situatie (vergelijking onopgelost) naar het doel (vergelijking opgelost) leiden. (Zie fig. 6, die is overgenomen van Skemp, 1977/78.)

Skemps theorie maakt ons er nog eens van bewust dat het beschikken over een rijk schema op zichzelf nog niet voldoende is voor het adequaat oplossen van een wiskundig probleem. De persoon moet



Figuur 6

ook in staat zijn om zichzelf tijdens het oplossingsproces voortdurend te controleren m.b.v. zijn schema. Ik spreek in dit geval over *interne feedback* ter onderscheiding van de bijsturing waar de leraar (of een medeleerling!) voor zorgt (*externe feedback*).

5 Inzicht en vaardigheid

Het bovenstaande brengt ons in de buurt van de begrippen 'inzicht' en 'vaardigheid'. Ik wil Skemp's theorie nu in verband brengen met die begrippen. In het laatste voorbeeld in de vorige paragraaf (over het oplossen van de vergelijking $x^2 + 2x = 3$) komt in het bijzonder naar voren dat een rijk schema zorgt voor grotere *flexibiliteit*: de persoon kan uit verschillende paden kiezen die van de actuele situatie naar het doel leiden. Iemand met een rijk schema over tweedegraadsvergelijkingen zal ook gemakkelijk problemen kunnen oplossen die afwijken van het standaardtype tweedegraadsvergelijkingen.

Concluderend kunnen we zeggen dat iemand met een rijk schema in veel nieuwe situaties over veel verschillende paden kan beschikken. Dit geldt bijv. ook voor de taxichauffeur: bij een verkeersopstopping op de gekozen route naar het centraal station kan hij gemakkelijk zijn plan wijzigen en een andere route kiezen.

Van Dormolen (1975) stelt, in navolging van Van Hiele (1973), dat iemand inzicht toont als '*hij adequaat en intentioneel kan handelen in situaties die voor de betrokkene nieuw zijn. In het geval van vaardigheid komt daar nog bij dat de betrokkene zijn handelingen binnen redelijke tijd kan uitvoeren*'.

Er liggen duidelijke verbanden tussen deze definities en de stuursystementheorie. De definitie van inzicht wordt in onze terminologie: Iemand toont *inzicht* als hij in nieuwe situaties op grond van een cognitief schema een geschikt pad kiest tussen die

actuele situaties en het doel. In het geval van *vaardigheid* komt daar nog bij dat de betrokkene dit pad redelijk snel en efficiënt kan doorlopen. (Dit betekent in feite dat het terugkoppelingsmechanisme in staat is snel en adequaat te reageren op geringe afwijkingen van het pad.)

6 Leren en reflecteren

Verbetering van de kwaliteit van stuursystemen is van belang, omdat het individu daardoor een groter aanpassingsvermogen aan de omgeving verworft. Ik noem dit proces *leren*.

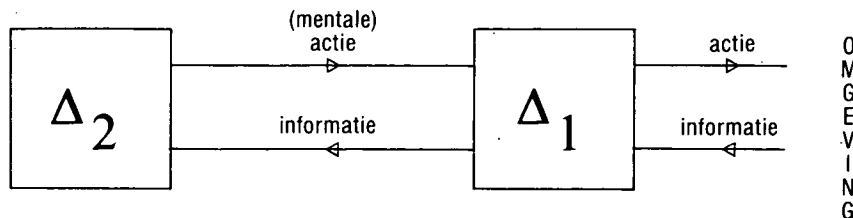
Waardoor wordt het leren zelf nu gestuurd?

Aangezien het in het geformuleerde model essentieel is dat doelen bereikt worden door toedoen van stuursystemen, ligt het voor de hand om een tweede (intern) stuursysteem te onderscheiden dat als doel heeft de kwaliteit van het eerste systeem te verhogen. Anders geformuleerd: dit tweede systeem streeft er naar het eerste stuursysteem in een positie te brengen waarin het in meer situaties zijn doel kan bereiken.

De zaak kan als volgt schematisch worden voorgesteld (fig. 7).

Delta-één (Δ_1) is het stuursysteem dat zorgt voor de directe handeling van het individu in de fysische werkelijkheid (het regelt het bereiken van doelen in de interactie van het individu met zijn omgeving), bijv. het stuursysteem dat de taxichauffeur in staat stelt op juiste wijze zijn route te kiezen en te blijven volgen.

Delta-twee (Δ_2) is een zuiver mentaal stuursysteem dat het delta-één-systeem als geheel in de gewenste richting stuurt. Dat betekent dat delta-twee zorgt voor het beter functioneren van delta-één. De taxichauffeur zou zich bijv. kunnen realiseren dat hij slecht bekend is in een nieuwe buitenwijk van de stad. Als hij besluit de kaart te gaan bestuderen om



Figuur 7 (Naar Skemp, 1980 a en b)

zijn kennis te verbeteren, dan is dat een actie die door het delta-twee-systeem geïnitieerd is: delta-twee stelde verbetering van delta-één als doel en koos een pad naar dat doel, n.l. bestudering van de kaart. Verder bewaakt delta-twee tijdens het bestuderen dat er inderdaad op dat uiteindelijke doel (verbeterde kennis van de buitenwijk) wordt aangestuurd.

Ook bij delta-twee behoort een cognitief schema. Het is een schema van de manier waarop delta-één functioneert. Het is dit delta-twee-schema dat (tot actieplan getransformeerd) de leidraad vormt voor de verbetering van het delta-één-systeem.

Kort samengevat luidt het basisprincipe van het delta-één/delta-twee-model dus: *de kwaliteit van een stuursysteem (delta-één) kan doelgericht veranderd worden door een tweede stuursysteem (delta-twee)*. Daarbij moet men niet vergeten dat het delta-twee-schema over de kwaliteit van het delta-één-systeem soms erg grof is; een leerling die gewerkt heeft aan tweedegraadsvergelijkingen heeft wellicht nauwelijks een beeld van wat hij nu wel en niet kan m.b.t. dit onderwerp. Veel leren vindt dan ook plaats zonder bewust denken op delta-twee-niveau. Is dit wel het geval, dus wordt er bewust nagedacht over het functioneren op het delta-één-niveau, dan spreek ik van *reflectief denken (reflecteren)*. Reflectief denken kan betrekking hebben op het eigen denken, op het voelen, op het handelen, alsook op het willen (op de doelen). Indien het leidt tot een door het delta-twee-systeem gestuurde verandering van delta-één, dan spreek ik van *reflectief leren*.

Zoals elke door een stuursysteem geleide handeling, vertoont ook het reflectieve leren de kenmerken doelgerichtheid en efficiëntie. De mate van efficiëntie hangt af van de kwaliteit van het delta-twee-systeem; de hierboven genoemde leerling met een zeer grof delta-twee-schema zal zelfs nauwelijks in staat zijn tot reflectief leren. Hier liggen directe consequenties voor het onderwijs: door het bevorderen van reflectief leren wordt het leerproces doelgerichter en efficiënter.

Het is duidelijk dat reflectief denken nogal wat mentale activiteit van het individu vergt. Zonder er op deze plaats al te zeer over uit te weiden, wil ik nog wel wijzen op de functie van symbolen bij dit proces. In het vak wiskunde is bijv. heel duidelijk hoe symbolen haast tot concrete objecten worden

waarmee men kan opereren. Als iemand bijv. de vergelijking $x^2 + 2x = 3$ heeft opgesteld als de wiskundige vertaling van een fysisch probleem, dan zal hij bij het oplossen van die vergelijking niet steeds denken aan de relatie tussen de gebruikte wiskundige symbolen en de daarmee corresponderende fysische werkelijkheid. Daardoor wordt het oplossen van de vergelijking gereduceerd tot een delta-één-activiteit: de wiskundige symbolen zijn de 'objecten' waarmee 'handelingen' worden uitgevoerd. Deze niveau-reductie is overigens een aspect van het gebruik van taal in het algemeen: door taal worden begrippen 'hanteerbaar' gemaakt. (wordt vervolgd)

Referenties

- Van Dormolen, J.: *Vaardigheden, 1001 redenen waarom leerlingen geen (goede) routine hebben*. Brochure van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, 1975.
- Freudenthal, H.: *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, 1973.
- Freudenthal, H.: *Weeding and sowing, preface to a science of mathematical education*. Dordrecht, 1978.
- Van Hiele, P. M.: *Begrip en inzicht*. Purmerend, 1973.
- Van Hiele, P. M.: 'Nivo's in de argumentatie'. In: *Euclides* 55 (1979/80), p. 121-127.
- Korthagen, F. A. J.: 'Wiskundeonderwijs en nivotheorie'. In: *Euclides* 56 (1980/81), p. 310-316.
- Korthagen, F. A. J.: *Leren reflecteren als basis van de lerarenopleiding, een model voor de opleiding van leraren, in het bijzonder wiskundeleraren*. 's-Gravenhage, 1983 (SVO-reeks, nr. 67).
- Lagerwerf, B.: *Wiskundeonderwijs nu*. Groningen, 1982.
- Meester, F., Schoemaker, G. & Vedder, J.: *Rekening houden met individuele verschillen*. Brochure van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, 1980.
- Skemp, R. R.: *Wiskundig denken*. Utrecht/Antwerpen, 1973 (Aula).
- Skemp, R. R.: 'Inzicht, planning en het bijbrengen van routine'. In: *Euclides* 53 (1977/78), p. 397-408.
- Skemp, R. R.: *Intelligence, learning and action*. Chichester (etc.), 1979.

Bepalen van kansen

P. G. J. Vredenduin

1 Subjectieve kansen

Ter oriëntatie eerst *subjectieve snelheden*.

Deze trein rijdt erg hard.

De oude man liep langzaam, twee jaar geleden liep hij nog veel vlugger.

Met grote snelheid kwam de auto de bocht door.

Kijk die mier eens een vaart hebben.

Zij snelde mij tegemoet.

Allemaal subjectieve uitspraken over snelheid, d.w.z. allemaal uitspraken waarin de spreker een impressie wil weergeven die een bepaalde beweging op hem maakt. Ze zijn doeltreffend bij intersubjectieve communicatie. Hoorder en spreker begrijpen elkaar.

Aan de andere kant hebben ze een zekere vaagheid gemeen. Als een agent vindt dat de auto met ontoelaatbaar grote snelheid de bocht doorkwam, rijst de vraag: hoe hard reed de auto? Met het antwoord 'erg hard' zijn we dan niet meer tevreden. De grootte van de snelheid moet op objectieve wijze vastgelegd worden en dit geschiedt door deze in een getal uit te drukken. We bedenken een voorschrift om dit te doen en houden ons daaraan. De subjectieve uitspraken over snelheid hebben nog een merkwaardig kenmerk. Ze maken gebruik van een diversiteit van taaluitingen, i.c. erg hard, langzaam, veel vlugger, grote snelheid, vaart, snelde. Heel geschikt om verscheidenheid van impressies weer te geven, maar onhandig als het om objectieve precisering gaat.

Nog een voorbeeld: *subjectieve tijdsduur*.

Het wachten heeft lang geduurd.

Ik kom direct.

Het was in een ommezien gebeurd.

Momentje alstublieft.

De film was erg boeiend. Hij duurde wel lang, maar de tijd was om voordat je het wist.

Nog eventjes, we zijn er haast.

Weer een veelheid van taaluitingen. En ook nu rijzen de problemen, zodra je vraagt: hoe lang duurt het? Dan moet de tijdsduur in een getal uitgedrukt worden en moeten we een methode ontwerpen om dit te doen.

Zo zijn er talloze voorbeelden te bedenken. Veel kwaliteiten hebben de eigenschap *gradueel* (continu) te veranderen, zoals geluidssterkte, lichtsterkte, kleurintensiteit, gladheid, hardheid, grootte, zwaarte, warmte. In de omgangstaal worden impressies betreffende deze kwaliteiten weergegeven. Wenst men precisering, dan is uitdrukken in een getal noodzakelijk. En is het tevens raadzaam zich van bloemrijke taal te onthouden.

Nu de *subjectieve kansen*.

Vanavond kans op onweer.

Er is grote kans dat Ajax zondag wint van B.

Ajax zal zondag wel winnen.

Vermoedelijk wint Ajax volgende week van C ook, maar dat is niet zo zeker.

Borg bereikt stellig de tweede ronde, de derde ook wel, het is waarschijnlijk dat hij de finale bereikt, maar dan zal het erom spannen.

Naar alle waarschijnlijkheid valt de regering morgen.

Bij zo'n sterke storm lopen oude bomen kans om te waaien.

Het is praktisch uitgesloten dat hij beter wordt.

Een teruggang van de economie ligt ook volgend jaar voor de hand.

Nederland had geen schijn van kans bij het wereldkampioenschap voetballen. Over vier jaar zal Nederland waarschijnlijk weer kansloos zijn.

Een aardige bloemlezing van al of niet verkapte uitspraken over kansen. Weer zullen spreker en hoorder elkaar goed begrijpen. Maar prik niet door en vraag: hoe groot is de kans? Dan zijn er afspraken nodig volgens welke je de kans in een getal uitdrukt.

Subjectieve kansen kunnen aanleiding geven tot subjectieve onenigheid. Aardig is het voorbeeld van de moeder met de zeven dochters. Een moeder heeft zeven dochters en nog geen enkele zoon. Ze is

in verwachting. Wordt het volgende kind nu eindelijk een zoon? Het kan net zo goed een zoon als een dochter worden, zegt de een. Welnee, zegt de ander, deze vrouw is kennelijk gepredisposeerd om dochters te krijgen. Het zal dus wel weer een dochter worden. Leuk om ruzie over te maken. Maar stellig ook leuk om te onderzoeken of er vanuit theoretisch oogpunt iets verstandigs over te zeggen valt.

Reden voor ons over te schakelen op kanstheorie.

2 Verschillende methoden om kansen te bepalen

a *De methode van Laplace.* Deze gaat ervan uit dat we te maken hebben met een aantal gelijkwaardige gevallen. De kans op een gebeurtenis wordt dan gedefinieerd als het quotiënt van het aantal gunstige en het aantal mogelijke gevallen.

b *De frequentie methode.* Helaas laat de methode van Laplace ons soms in de steek. Dobbelstenen hoeven niet homogeen te zijn. Als een dobbelsteen niet homogeen, of zoals men meestal zegt 'niet zuiver' is, dan hebben we geen gelijkwaardige gevallen. Hoe bepalen we dan de kans op het gooien van 6 met deze steen?

We laten het experiment beslissen. We werpen een groot aantal keren, bijv. 100 keer, en tellen het aantal gegooiden 6'en. Is dit 26, dan zeggen we dat de kans op het gooien van 6 met deze dobbelsteen

$$\frac{26}{100} \text{ is.}$$

Dus: is er n keer geworpen en is daarbij k keer 6 gegooid, dan is de kans op het gooien van 6 gelijk aan $\frac{k}{n}$.

We zijn hier in de praktijk bezig en niet in de wiskunde. We verrichten een meting. In een meetresultaat zit een meetfout. Als we een lengte meten en we vinden 10,47, dan is dit slechts bij benadering juist. Om groter zekerheid te krijgen verrichten we de meting een aantal keren, bijv. 10 keer, en nemen het gemiddelde van de uitkomsten. De fout in de uitkomst wordt daardoor verkleind. Ik wil hier geen foutentheorie bedrijven en laat het hierbij.

Terug naar de dobbelsteen. Er is 100 keer geworpen en 26 keer 6 gegooid. De uitkomst $\frac{26}{100}$ voor de

kans op 6 behelst een meetfout. Om groter nauwkeurigheid te verkrijgen verrichten we het experiment 10 keer en bepalen het gemiddelde van de 10 uitkomsten. In plaats daarvan kunnen we (als we niet op de spreiding in de 10 uitkomsten letten) ook ineens 1000 keer werpen en de relatieve frequentie van het voorkomen van 6 in deze serie worpen bepalen.

Conclusie: *De betrouwbaarheid van het resultaat wordt groter, als men een langere serie experimenten verricht.*

c *De bayesiaanse methode.* Deze methode is weinig bekend. Ze heeft aantrekkelijke kanten. Ik wil er daarom uitvoeriger bij stilstaan. Ze berust op het theorema van Bayes. Omdat dit theorema sommigen niet of minder goed bekend is, leg ik de inhoud ervan eerst uit.

Een voorbeeld. Er zijn 12 laadjes. In 4 laadjes zitten 1 zilveren en 3 gouden munten, in 3 laadjes 2 zilveren en 2 gouden, en in 5 laadjes 3 zilveren en 1 gouden munt.

Ik trek een munt. Het is een gouden. Wat is de kans dat hij getrokken is uit een laadje (1, 3), d.w.z. uit een laadje met 1 zilveren en 3 gouden munten?

Er zijn drie mogelijke oorzaken: het trekken uit een laadje (1, 3), (2, 2), (3, 1).

Als ik in het wilde weg (aselect) een laadje trek en daaruit een munt, dan is de kans dat oorzaak (1, 3) werkt $\frac{4}{12}$, de kans dat (2, 2) werkt $\frac{3}{12}$, en de kans dat (3, 1) werkt $\frac{5}{12}$.

De kans op het trekken van een gouden munt is in deze drie gevallen resp. $\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{4}$, $\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{4}$ en $\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4}$.

Er is een gouden munt getrokken.

De kans dat oorzaak (1, 3) gewerkt heeft, dus dat de munt uit het laadje (1, 3) getrokken is, is dan

$$\frac{\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{4} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4}}$$

Met behulp van frequentieoverwegingen kan men dit als volgt plausibel maken. Onderstel er wordt n keer getrokken (n groot). Dan zal in 'ongeveer' $\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{4}n$ keer uit (1, 3) een gouden munt getrokken worden, in 'ongeveer' $\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{4}n$ keer uit (2, 2), en in 'ongeveer' $\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4}n$ keer uit (3, 1). De breuk geeft dus aan het aantal keren dat de gouden munt uit (1, 3) getrokken is, gedeeld door het aantal keren dat er een gouden munt getrokken is.

De kans dat oorzaak (2, 2) gewerkt heeft, is

$$\frac{\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{4}}{\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{4} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4}}$$

De kans dat oorzaak (3, 1) gewerkt heeft, is

$$\frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{4} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4}}$$

Nu algemeen. *Er zijn n mogelijke elkaar uitsluitende oorzaken $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.*

De kans dat oorzaak σ_i werkt, is p_i .

De kans dat, als oorzaak σ_i werkt, resultaat R optreedt, is q_i .

Het resultaat R treedt op.

De kans dat oorzaak σ_i gewerkt heeft, is dan $\frac{p_i q_i}{\sum p_i q_i}$.

Dit is het theorema van Bayes.

We gebruiken dit theorema als we het resultaat van een bepaald experiment kennen en we daaruit willen afleiden hoe groot de kans is dat een bepaald oorzaak gewerkt heeft.

Nu een voorbeeld om de bayesiaanse kansbepaling te demonstreren.

Onderstel we hebben een urn waarin zich knikkers bevinden. Ik weet dat er 3 knikkers in zijn en dat deze elk groen of rood zijn. Dat is alles. Er zijn dus 4 samenstellingen mogelijk, nl. 0 groene knikkers en 3 rode, 1 groene knikker en 2 rode, 2 groene knikkers en 1 rode, 3 groene knikkers en 0 rode.

In het geval (0, 3) is de kans op het trekken van een groene knikker 0,

in het geval (1, 2) is deze kans $\frac{1}{3}$,

in het geval (2, 1) is deze kans $\frac{2}{3}$,

in het geval (3, 0) is deze kans 1.

Zolang ik geen enkele informatie heb, zijn al deze 4 gevallen (voor mij) even waarschijnlijk. Op elk is de kans dus $\frac{1}{4}$.

Nu trek ik een knikker. Deze blijkt groen te zijn. Wat is de kans dat de oorzaak ($i, 3 - i$) gewerkt heeft?

Het theorema van Bayes geeft uitkomst. Volgens dit theorema is de kans dat de oorzaak ($i, 3 - i$) gewerkt heeft

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{i}{3}}{\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3}} = \frac{i}{6}$$

Doordat we informatie gekregen hebben zijn de kansen op (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0) niet meer gelijk, maar resp. 0, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$.

We leggen de knikker terug en trekken opnieuw een knikker. Deze is weer groen. Bayes levert nu, dat de kans dat de oorzaak ($i, 3 - i$) gewerkt heeft, is

$$\frac{\frac{i}{6} \cdot \frac{i}{3}}{0 \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{3}} = \frac{i^2}{1^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{1}{14} i^2$$

Zo kunnen we doorgaan. Elke nieuwe informatie modificeert de kansen op de verschillende mogelijke oorzaken.

Men moet even aan het ongewone van deze kansbepaling wennen. Denkt men er rustig over na, dan zijn de uitgangspunten van deze methode eigenlijk erg plausibel. *Zolang men aangaande de verschillende mogelijkheden geen enkele informatie heeft, is er geen reden de ene waarschijnlijker te achten dan de andere. De kansen erop worden daarom gelijk gesteld. Naarmate meer informatie verkregen wordt, veranderen deze kansen. Ze hangen af van de verkregen informatie.*

Kennen we de kansen op de oorzaken, dan kunnen we daaruit de kans op een bepaald resultaat afleiden.

Na het eenmaal trekken van een groene knikker waren de kansen op de oorzaken (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0) resp. 0, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$.

De kans op het trekken van een groene knikker is dan

$$0 \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{3} = \frac{14}{18}$$

Meer algemeen:

als

de kans op het werken van oorzaak σ_i gelijk is aan p_i ,

de kans op resultaat R als σ_i werkt, gelijk is aan q_i ,

dan is

de kans op resultaat R gelijk aan $\sum p_i q_i$.

3 Vergelijking van de drie methoden

a De methode van Laplace. Dit is een typisch wiskun-

dige methode. Er wordt uitgegaan van gevallen waarvan er sommige gelijkwaardig zijn. Wat voor gevallen dit zijn is irrelevant. En onder welke voorwaarde gevallen gelijkwaardig genoemd worden is eveneens irrelevant. *Deze irrelevanties maken de theorie tot een wiskundige theorie.*

Zoals zoveel wiskundige theorieën is de Laplace-theorie op de werkelijkheid toepasbaar. Zodra je in de praktijk zegt welke gevallen je beschouwt en welke daarvan gelijkwaardig genoemd worden, kun je de Laplace-theorie toepassen.

Men kan zich afvragen of er in de werkelijkheid wel gelijkwaardige gevallen bestaan. Strikt genomen bestaan die niet. Maar als men wiskunde op de realiteit wenst toe te passen, moet men vereenvoudigende aannamen kiezen. Men noemt dit de realiteit mathematiseren. Bij het toepassen van de Laplace-theorie moet men de realiteit eerst in die zin mathematiseren, dat men bepaalde gevallen, zoals het gooien van 1, 2, 3, 4, 5, 6, als gelijkwaardig beschouwt.

Andere voorbeelden van gelijkwaardige gevallen zijn het gooien van kruis of munt, het trekken van een kaart, de roulette, het rad van avontuur.

Soms moet men speciale maatregelen nemen om gelijkwaardige gevallen te creëren, zoals bij het *aselect* kiezen. *Aselect* kiezen wil niets anders zeggen dan: zo kiezen dat het gerechtvaardigd wordt de theorie van Laplace toe te passen.

b De frequentie methode. Als het in de praktijk niet lukt gelijkwaardige gevallen aan te wijzen, nemen we onze toevlucht tot de frequentie methode. Het voorbeeld van de 'valse' dobbelsteen is al gegeven. Andere voorbeelden zijn kansen die afgeleid worden uit statistieken, zoals overlevingskansen.

Ook in die gevallen waarin Laplace wel gebruikt kan worden, kan men in principe de frequentie methode toepassen.

In tegenstelling tot de Laplace-methode is de frequentie methode empirisch.

c De bayesiaanse methode is ook een empirische methode. Deze methode heeft twee opvallende kenmerken.

1 Men kan haar alleen maar toepassen, als men reeds bepaalde kansen kent. In ons voorbeeld moesten we eerst de kansen kennen dat men een groene knikker trekt uit een urn met 3 knikkers waaronder 0, 1, 2 resp. 3 groene. Deze kansen waren bepaald met de methode van Laplace.

2 Het heeft alleen zin de bayesiaanse methode toe te passen, als men de structuur van de realiteit niet kent. Weet men bijv. dat in een urn 7 groene en 8 rode knikkers zijn, dan weten we al dat de kans op het trekken van een groene knikker $\frac{7}{15}$ is en kan de bayesiaanse methode ons niets nieuws meer leren.

d Nu nog een praktische vraag. U heeft een grote populatie met twee soorten objecten, bijv. gave en beschadigde. U wilt weten (bij benadering) welk percentage objecten beschadigd is. Wat doet u?

Telkens een object kiezen, kijken of het beschadigd is en turven? Dus de frequentie kansen bepalen?

Telkens een object kiezen, kijken of het beschadigd is en dan de bayesiaanse kansen berekenen?

Of een steekproef nemen en dan op grond van die steekproef de grenzen bepalen waartussen het percentage beschadigde objecten ligt met inachtneming van een bepaalde betrouwbaarheid?

De laatste manier is de gebruikelijke. Welke kans-theorie wordt hierbij toegepast? Men zorgt ervoor dat de keuze van de steekproef *aselect* is. Dan wordt de *steekproeftheorie* toegepast. *Deze is gebaseerd op binomiale verdelingen, dus om kort te gaan op de Laplace-definitie van kansen.*

Opmerking. Men zou in principe ook frequentieel te werk kunnen gaan. Men bepaalt dan experimenteel een kans. In elke waarnemingsuitkomst zit een fout. De uitkomst is niet zinvol als geen informatie gegeven wordt over de grootte van deze fout. Daarvoor moet men *foutentheorie* gebruiken. *Deze berust op kansverdelingen die gebaseerd zijn op Laplace-kansen.*

M.m. geldt hetzelfde voor de bayesiaanse kansbepaling.

Hieruit blijkt hoe fundamenteel de Laplace-theorie is.

4 De axioma's van Kolmogorov

De Laplace-kansen, de frequentie kansen en de bayesiaanse zijn fysische begrippen. Men kan op basis van elk van deze kansbegrippen kanswetten afleiden en met kansen rekenen. De wiskundige ziet dit gebeuren en vraagt zich af: hoe wordt met kansen gerekend? Hij stelt een wiskundige kans-theorie op. Wat kansen zijn is voor hem irrelevant. Wat alleen voor hem van belang is, is de vraag: als ik eenmaal kansen ken, hoe kan ik daar dan door berekening

andere kansen uit afleiden? Om deze vraag te beantwoorden, heeft Kolmogorov een axiomatisch gefundeerde kanstheorie ontworpen.

Hier volgt zijn *axiomastelsel*.

V is een eindige verzameling en P een functie die aan elke deelverzameling van V een reëel getal toevoegt. De functie P voldoet aan de volgende drie axioma's:

A1 Voor elke $A \subset V$ geldt: $P(A) \geq 0$.

A2 $P(V) = 1$.

A3 Voor elke $A, B \subset V$ geldt:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

De functie P noemen we dan een *kansfunctie*.¹

Uitgaande van deze axioma's bouwt Kolmogorov een deductieve theorie op: de mathematische kanstheorie.

Nu terugkoppelen naar de drie kanstheorieën. Eerst die van Laplace. Voor Laplace-kansen gelden A1 en A2. Het axioma A3 is de somregel; ook deze geldt voor Laplace-kansen. Omdat voor Laplace-kansen de axioma's A1-3 gelden, gelden ook alle daaruit afgeleide eigenschappen ervoor.

Nu de frequentie theorie. Voor frequentie kansen gelden A1 en A2. Ook geldt A3, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt.

Neem een waarnemingsrij die bestaat uit worpen met een dobbelsteen. De relatieve frequentie van het gooien van 1 en 2 is resp. f_1 en f_2 . De relatieve frequentie van het gooien van 1 of 2 is dan $f_1 + f_2$. Hieruit blijkt dat de somregel van kracht is.

Voor de frequentie kansen gelden dus A1-3 en dientengevolge mag ermee gerekend worden volgens de regels van de mathematische kanstheorie. Ten slotte gelden A1-3 ook voor bayesiaanse kansen. Dat de somregel daarvoor geldt, is nog niet aangetoond. Hierop kom ik nog terug.

Omdat in de drie kanstheorieën A1-3 gelden, kan men met de drie soorten kansen op dezelfde manier rekenen. Iets dat a priori helemaal niet vanzelfsprekend was, want de drie kansbegrippen zijn op geheel verschillende manieren gedefinieerd.

5 Initiële kansen

In de drie kanstheorieën bepalen we op grond van de voor die theorie geldende definitie (afpraak) kansen. Ik wil dit de initiële kansen noemen. Hebben we de initiële kansen eenmaal vastgesteld, dan

worden er in de drie theorieën volgens dezelfde regels nieuwe kansen uit afgeleid. Blijft over de vraag: *zijn de initiële kansen conform de drie definities aan elkaar gelijk?*

Ik wil de vraag aan de hand van een voorbeeld concreter stellen. De Laplace-kans op het gooien van 6 met een homogene dobbelsteen is $\frac{1}{6}$. Vinden we voor de frequentie kansen om met deze dobbelsteen 6 te gooien ook $\frac{1}{6}$? En voor de bayesiaanse kansen eveneens?

We gaan het proberen. We vergelijken eerst Laplace-kansen en frequentie kansen. We werpen 60 keer met de dobbelsteen. We hebben daarbij 12 keer 6 gegooid. De procentuele afwijking van $\frac{1}{6} \cdot 60$ is 20%.

We werpen 600 keer. Daarbij is 96 keer 6 gegooid. Procentuele afwijking van $\frac{1}{6} \cdot 600$ is nog maar 4%. Intuïtief voelen we aan: als we steeds vaker werpen, wordt deze procentuele afwijking steeds kleiner en komt op de duur vlak bij 0.

Intuïtie geeft nog geen zekerheid. We gaan terug naar de kanstheorie. Uit de axioma's volgt:

Onderstel de kans dat experiment E als resultaat R heeft, is gelijk aan p . Voer het experiment n keer uit en noem het aantal keren dat daarbij R optreedt, k . Dan geldt voor elke $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$$

In woorden: *de kans dat de relatieve frequentie van R meer dan een willekeurig klein bedrag ε van p afwijkt, nadert tot 0 als $n \rightarrow \infty$.*

Een mooi resultaat, maar toch houd ik een onbestemd gevoel dat er nog iets hapert. Wat heeft dit theoretisch verkregen resultaat over kansen te maken met een gebeuren dat zich in de realiteit afspeelt? Storen de worpen met de dobbelsteen zich aan deze theoretische kanswet? Hoe slaan we de brug van theorie naar realiteit?

Ik kan hierop niet anders dan een voor pure mathematici teleurstellend antwoord geven.

We leven in de overtuiging, dat dingen waarop een zeer kleine kans bestaat, niet zullen gebeuren. Of, om het iets pregnanter te zeggen: ze treden zo zelden op dat we daar in de praktijk geen rekening mee houden. Zo leven we en we bevinden ons er wel bij. Wie deze overtuiging heeft, acht het praktisch

zeker, dat de relatieve frequentie van het gooien van 6 met een zuivere dobbelsteen op de duur niet significant van $\frac{1}{6}$ afwijkt. Of, om het meer algemeen te stellen: dat *de werkelijkheid zich gedraagt conform de Laplace-kansen, mits men voldoende lange series experimenten neemt*.²

Voor de mathemateek een teleurstellend antwoord. Hij wil theoretische, dus absolute zekerheid. Het spijt me, maar die bestaat buiten de wiskunde niet. Het is maar erg gelukkig dat de realiteit zich conform de kansen gedraagt. Was dat niet het geval, dan was de kanstheorie een waardeloos geheel. Als het feit dat de kans op 6 gooien gelijk is aan $\frac{1}{6}$, niets zou zeggen omtrent het gedrag van de dobbelsteen als men ermee gooit, dan was deze uitspraak van praktische betekenis ontbloomt.

We hebben nu gezien dat de initiële Laplace-kansen gelijk zijn aan (althans niet significant verschillen van) de frequentie kansen. En dus dat algemeen geldt, ook voor afgeleide kansen: *Laplace-kans = frequentie kansen*.

Nu nog de bayesiaanse kansen. Maar daarover liever later.

Ik wil eerst een voorbeeld geven waarin de achtergrond van de bayesiaanse definitie duidelijker wordt.

6 De moeder met de zeven dochters

Een moeder heeft zeven dochters en geen enkele zoon. Ze is in verwachting. Zal het achtste kind nu eindelijk een zoon worden? De kans hierop is $\frac{1}{2}$, zeggen de aanhangers van Laplace.

Deze vrouw is gepredisposeerd dochters te krijgen. Het zal vermoedelijk weer een dochter worden, zeggen anderen.

Laten we het probleem eens nader analyseren. Het krijgen van een zoon en een dochter zijn gelijkwaardige gevallen. Wie dit niet voetstoots aanvaardt, moet toegeven dat de praktijk uitwijst dat dit vrijwel het geval is. Wat wordt met deze gelijkwaardigheid bedoeld? Dat bij een groot aantal aselekt gekozen geboorten het aantal meisjes ongeveer 50% bedraagt.

Toegegeven. Maar ons interesseert hier deze vrouw. Wat is de kans dat deze vrouw een dochter baart? Dat vrouwen in het algemeen statistisch gesproken een bepaald gedrag vertonen, brengt

niet noodzakelijk met zich mee dat elke vrouw in het bijzonder dat gedrag vertoont. Hoe bepalen we dan de kans dat deze vrouw een dochter baart? Daarvoor is een grote rij experimenten nodig. Helaas moeten we van deze methode afzien. We kunnen haar moeilijk 100 kinderen laten krijgen. Er blijft nog één methode over. We zouden ons kunnen afvragen of vrouwen die reeds zeven dochters hebben, een kans op het krijgen van een achtste dochter hebben die significant meer dan $\frac{1}{2}$ is. We kiezen dus een grote groep vrouwen die eerst zeven dochters gekregen hebben en daarna een achtste kind en gaan na in hoeveel van de gevallen dit achtste kind een dochter was. Zo kunnen we de kansrekening toch nog laten functioneren.

Toch wil ik nog even terugkeren naar deze vrouw als singuliere persoonlijkheid, dus niet beschouwd als bijzonder geval van een algemene categorie van vrouwen. We proberen onze drie kansdefinities erop toe te passen. Laplace functioneert niet, dat weten we al. De frequentiedefinitie levert als kans op een meisje 1. Een nietszeggend resultaat; we weten dat de frequentiedefinitie bij kleine aantallen experimenten onbetrouwbare uitkomsten levert en hechten aan deze kans 1 geen waarde.

Wat doet de bayesiaanse methode? Deze gaat ervan uit, dat we de structuur van de realiteit niet kennen. In het geval van de urn met de 3 knikkers waren er 4 mogelijke structuren van de realiteit. Bij deze 4 structuren was de kans op het trekken van een groene knikker $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$.

Wat zijn in ons geval de mogelijke structuren van de realiteit? Het kan zijn, dat we te maken hebben met een moeder bij wie de kans op het krijgen van een dochter een bepaalde waarde p heeft ($0 \leq p \leq 1$). Dit zijn oneindig veel mogelijke gevallen. Ter vereenvoudiging van het rekenwerk beperken we ons tot 5 mogelijkheden:

σ_1 : de kans dat de vrouw een dochter krijgt, ligt in het interval $[0, 0,2]$

σ_2 : deze kans ligt in het interval $[0,2, 0,4]$

σ_3 : deze kans ligt in het interval $[0,4, 0,6]$

σ_4 : deze kans ligt in het interval $[0,6, 0,8]$

σ_5 : deze kans ligt in het interval $[0,8, 1]$.

Ik neem verder aan dat de kans op het krijgen van een dochter in deze vijf gevallen resp. 0,1, 0,3, 0,5, 0,7, 0,9 is.

Aanvankelijk is de kans op $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ gelijk, dus $\frac{1}{5}$.

De kans op het krijgen van een dochter is dan

$$\frac{1}{5} \cdot 0,1 + \frac{1}{5} \cdot 0,3 + \frac{1}{5} \cdot 0,5 + \frac{1}{5} \cdot 0,7 + \frac{1}{5} \cdot 0,9 = \frac{1}{2}$$

Het eerste kind is een dochter. De vijf kansen op $\sigma_1, \dots, \sigma_5$ worden daardoor gemodificeerd. De kansen worden

$$\frac{\frac{1}{5} \cdot 0,1}{\frac{1}{5} \cdot 0,1 + \frac{1}{5} \cdot 0,3 + \frac{1}{5} \cdot 0,5 + \frac{1}{5} \cdot 0,7 + \frac{1}{5} \cdot 0,9} = \frac{1}{1 + 3 + 5 + 7 + 9} = \frac{1}{25}$$

resp. $\frac{3}{25}, \frac{5}{25}, \frac{7}{25}, \frac{9}{25}$.

De kans op een dochter wordt hierdoor

$$\frac{1}{25} \cdot 0,1 + \frac{3}{25} \cdot 0,3 + \frac{5}{25} \cdot 0,5 + \frac{7}{25} \cdot 0,7 + \frac{9}{25} \cdot 0,9 = \frac{165}{250}$$

Het tweede kind is weer een dochter. De kansen op $\sigma_1, \dots, \sigma_5$ worden

$$\frac{\frac{1}{25} \cdot 0,1}{\frac{1}{25} \cdot 0,1 + \frac{3}{25} \cdot 0,3 + \frac{5}{25} \cdot 0,5 + \frac{7}{25} \cdot 0,7 + \frac{9}{25} \cdot 0,9} = \frac{1^2}{1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2}$$

resp. $\frac{1^2}{1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2}, \dots$

$$\frac{1^2}{1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2}$$

De kans op een dochter wordt hierdoor

$$\frac{1^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,5 + 7^2 \cdot 0,7 + 9^2 \cdot 0,9}{1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2} = 0,1 \frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3}{1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2}$$

Het verhaal begint eentonig te worden. Ieder kan voor zichzelf nog één of twee stappen verder doen. Het eindresultaat is: als er na elkaar 7 meisjes geboren zijn, dan is de kans dat het 8^e kind weer een dochter is

$$0,1 \frac{1^8 + 3^8 + 5^8 + 7^8 + 9^8}{1^7 + 3^7 + 5^7 + 7^7 + 9^7} = \frac{49208709}{56868250} = 0,87$$

Komen er steeds meer dochters, dan zal de kans op een dochter naderen tot $0,9$.³

De verdeling van het interval $[0, 1]$ in 5 deelintervallen is wel erg ruw geweest. Maak deze verdeling steeds fijner en de limiet van de kans op het krijgen van een dochter gaat naar 1, zoals te verwachten was.

Het resultaat is verheugend. De andere twee methoden deden niets, maar de bayesiaanse methode doet ten minste iets dat tot onze verbeelding spreekt. Zie je wel, zeggen nu sommigen, de kans dat deze vrouw een dochter krijgt, is helemaal niet gelijk aan $\frac{1}{2}$, maar hij is veel groter.

Wie zo redeneert, loopt wel erg hard van stapel. *De bayesiaanse methode is, bij korte series experimenten, evenals de frequentie, erg onbetrouwbaar. Bij de frequentie-uitkomst 1 lag de onbetrouwbaarheid er dik boven op. Hier is hij beter gecamoufleerd. Maar daar mogen we ons niet door laten misleiden.*

7 Nadere analyse van de bayesiaanse kansen

De bayesiaanse en de frequentie methode zijn empirische methoden om kansen te bepalen. Geven zij dezelfde uitkomsten? In de vorige paragraaf hebben we al gezien, dat dit bij korte series experimenten niet het geval is. Blijft over de vraag of dit op de duur, dus bij lange series experimenten, wel het geval is.

We nemen een voorbeeld. Een urn bevat n knikkers die elk groen of rood zijn. Meer informatie hebben we niet. De kans dat de urn i groene knikkers bevat is dus

$$p_i = \frac{1}{n+1}$$

De kans dat we uit een urn met i groene knikkers en $n-i$ rode een groene knikker trekken is

$$q_i = \frac{i}{n}$$

De kans op het trekken van een groene knikker uit de urn is

$$p = \sum p_i q_i$$

Trek een knikker. Onderstel deze is groen. Dan gaat p_i over in

$$p_i^{\text{gr}} = \frac{p_i q_i}{\sum p_i q_i} = \frac{q_i}{\sum q_i}$$

En p gaat over in

$$p^{\text{gr}} = \frac{\sum q_i^2}{\sum q_i}$$

Na teruglegging trekken we weer een knikker. Neem aan dat deze rood is. Dan gaat p_i^{gr} over in

$$p_i^{\text{gr},r} = \frac{\frac{q_i}{\sum q_i} (1 - q_i)}{\sum \frac{q_i}{\sum q_i} (1 - q_i)} = \frac{q_i (1 - q_i)}{\sum q_i (1 - q_i)}$$

En p^{gr} gaat over in

$$p^{\text{gr},r} = \frac{\sum q_i^2 (1 - q_i)}{\sum q_i (1 - q_i)}$$

We redeneren op dezelfde manier verder. Onderstel we hebben met teruglegging getrokken a groene en b rode knikkers. De volgorde doet er niet toe. Dan is

$$p_i^{a, \text{gr}, b, r} = \frac{q_i^a (1 - q_i)^b}{\sum q_i^a (1 - q_i)^b}$$

en

$$p^{a, \text{gr}, b, r} = \frac{\sum q_i^{a+1} (1 - q_i)^b}{\sum q_i^a (1 - q_i)^b} \quad (1)$$

De frequentie kans op het trekken van een groene knikker is

$$\frac{a}{a + b} \quad (2)$$

Willen de bayesiaanse en de frequentie kans aan elkaar gelijk zijn, dan moet voor grote $a + b$ (1) 'ongeveer' gelijk zijn aan (2)⁴.

Helaas moet ik bekennen dat ik er niet in geslaagd ben dit te bewijzen. Mocht iemand een bewijs of eventueel een weerlegging vinden, dan houd ik mij aanbevolen.

Ik vermoed dat (1) gelijk zal zijn aan (2). Mocht dit echter niet het geval zijn, dan zouden de bayesiaanse kansen waardeloos zijn. Immers dan zou de realiteit zich niet gedragen conform de kansen.

8 De bayesiaanse somregel

Voor bruikbaarheid van de bayesiaanse kansen is ook nog een vereiste dat de somregel ervoor van kracht is. Laten we eens zien hoe het daarmee staat. In een urn zijn n knikkers die elk groen, rood of blauw zijn. De beginkansen op alle mogelijke samenstellingen zijn even groot. Daarmee corresponderen kansen van $\frac{1}{3}$ op het trekken van een groene, een rode resp. een blauwe knikker.

We trekken een serie knikkers en rekenen op grond daarvan de kansen p_{gr} , p_r , p_{bl} uit op het trekken van een groene, rode, blauwe knikker.

Wat is nu de kans $p_{\text{gr of r}}$ op het trekken van een groene of een rode knikker? We spreken af, dat

$$p_{\text{gr of r}} = p_{\text{gr}} + p_r$$

Ten gevolge van deze afspraak is de somregel van kracht.

Ik kan niet nalaten op een merkwaardige consequentie van de gekozen gedragslijn te wijzen.

Ik neem aan dat bovengenoemde serie trekkingen verricht werd door een tweetal personen. De ene had normale ogen, de andere was kleurenblind voor groen en rood. De tweede experimentator zag dus maar twee soorten knikkers, laten we ze noemen groene en blauwe knikkers. Beiden noteerden ze de door hen waargenomen kleur van de getrokken knikkers en rekenden de eruit resulterende kansen uit.

Na verloop van enige tijd vergeleken ze hun uitkomsten. Het bleek dat de kans op groen of rood die de normale waarnemer gevonden had, niet gelijk was aan de kans op groen of rood van de kleurenblinde.

Geen wonder. De normale waarnemer begon met kans van $\frac{1}{3}$ op groen en van $\frac{1}{3}$ op rood, en dus van $\frac{2}{3}$

op groen of rood. De kleurenblinde daarentegen begon met een kans van $\frac{1}{2}$ op grood!

Op de duur groeiden hun uitkomsten wel naar elkaar toe. Maar deze discrepantie geeft toch te denken.

9 Conclusie

Bij lange series experimenten kunnen we het gemakkelijkst de frequentie methode toepassen en niet de bayesiaanse. Bij korte series lijkt de bayesiaanse in sommige gevallen aantrekkelijker dan de frequentie methode. Dit is slechts schijn. Gezien het feit, dat bij korte series beide methoden onbetrouwbare uitkomsten geven, zijn ze allebei onbruikbaar. M.i. hebben we daarom aan de bayesiaanse methode geen behoefte.

De Laplace-methode en de frequentie methode zijn echter beide onmisbaar. Ze vullen elkaar aan. Ze geven in de praktijk dezelfde uitkomsten.

10 Naschrift

Recent zijn methoden ontwikkeld om op andere wijze subjectieve kansen te kwantificeren, uitgaande van subjectieve schattingen. Men noemt de zo verkregen kansen ook bayesiaanse kansen. Om misverstand te voorkomen, merk ik op dat deze bayesiaanse kansen niets te maken hebben met de kansen die ik bayesiaans genoemd heb.

Noten

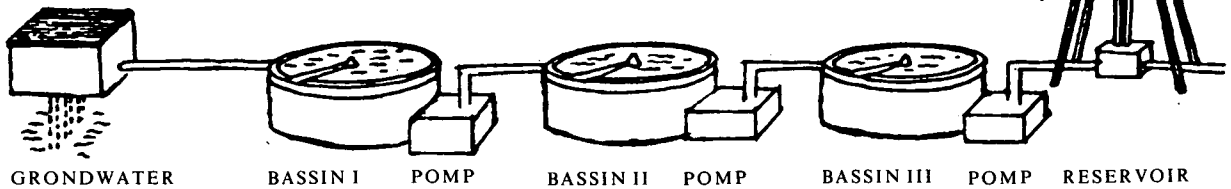
- 1 Het is voor een wiskundige verleidelijk de mathematische theorie algemener op te zetten en de beperking dat V eindig is, te laten vervallen. Dat heeft Kolmogorov inderdaad gedaan. Enkele aanvullende axioma's zijn dan nog nodig. Ik ga hierop niet nader in, omdat met betrekking tot fysische kansen deze uitbreiding overbodig is.
- 2 Chevalier De Méré wedde dat hij in 4 worpen met één dobbelsteen minstens één keer 6 zou gooien. Op de duur leverde dat hem voordeel. Hij probeerde toen te wedden dat hij in 24 worpen met twee dobbelstenen ten minste één keer dubbel-6 zou gooien. Het voordeel bleef uit. Voor Pascal was dit aanleiding zich in dit probleem te verdiepen met behulp van kansrekening. Blijkbaar leefde bij hem de overtuiging dat de realiteit zich conform de kansen zou gedragen. (Hij heeft De Méré niet kunnen overtuigen. Die hield vol dat hij een fout in de rekenkunde gevonden had, immers gebleken was, dat $4 : 24 \neq 6 : 36$.)

3 Er komt als limiet 0,9, omdat 0,9 de grootste is van de kansen 0,1, 0,3, 0,5, 0,7, 0,9, waarvan uitgegaan is.

4 Een wiskundig betere formulering is als volgt. Stel $\frac{b}{a} = k$. Dan

$$\text{moet } \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum q_i^{a+1} (1 - q_i)^{ak}}{\sum q_i^a (1 - q_i)^{ak}} = \frac{1}{1 + k}$$

Examen vwo wiskunde A 1984, 1e periode



I Een waterleidingbedrijf maakt grondwater geschikt voor consumptie door het in drie fasen biologisch te zuiveren. Het bedrijf beschikt daartoe over drie bassins I, II en III, waarin achtereenvolgens de eerste, tweede en derde zuivering plaatsvindt.

Alle drie de bassins zijn gelijktijdig in bedrijf. Na afloop van elke zuiveringsperiode wordt achtereenvolgens water overgepompt van bassin III naar het reservoir, van II naar III en van I naar II. Daarna wordt een hoeveelheid grondwater in bassin I gebracht. Bij het overpompen van bassin III naar het reservoir, van II naar III en van I naar II blijft steeds 8% van het water in het bassin achter en verdwijnt bij elke pomp 2% van het water in de grond door lekkages van de pomp.

a Geef de overgangsmatrix voor de drie bassins.

		VAN		
		I	II	III
NAAR	I	(	.	.
	II		.	.
	III		.	.

b Noem de matrix die in vraag a bedoeld is, M .

Beredeneer dat de matrix M^2 één nul minder bevat dan M .

c De matrix M geeft een onvolledig beeld van het proces dat hierboven beschreven is.

Maak een gerichte graaf met vijf punten die dit proces wel volledig weergeeft. Vermeld passende percentages bij de pijlen die vanuit de punten I, II en III vertrekken.

d Veronderstel dat na een zuiveringsperiode en voor het overpompen aanwezig is

- $x \text{ m}^3$ water in I,
- $y \text{ m}^3$ water in II en
- $z \text{ m}^3$ water in III.

Na het overpompen wordt 5290 m^3 grondwater in I gebracht.

Bereken, uitgedrukt in x , y en z , hoeveel m^3 water dan in elk van de bassins is.

Het zuiveringsproces heet stationair als elke keer dezelfde hoeveelheid grondwater in I gebracht wordt en ook elke keer evenveel schoon water uit III in het reservoir overgepompt wordt.

e Bij het stationair zuiveringsproces wordt elke keer 5290 m^3 grondwater in I gebracht.

Hoeveel m^3 water is er dan elke keer na het overpompen en het inbrengen van grondwater in elk van de bassins I, II en III aanwezig?

f Het waterleidingbedrijf wil in het stationair zuiveringsproces elke keer 5000 m^3 schoon water uit III in het reservoir pompen.

Hoeveel m^3 grondwater moet dan elke keer in I gebracht worden?

II Een grootwinkelbedrijf heeft in zijn assortiment een eigen merk zeepoeder. Het bedrijf beschikt over een vulmachine met een vulcapaciteit van 7536 kg per dag. Van de door de machine gevulde pakken is het gewicht normaal verdeeld, met een standaardafwijking van 40 gram ongeacht de inhoud. De keuringsdienst van waren eist dat, op één decimaal nauwkeurig, slechts $4,0\%$ van de in de handel gebrachte pakken minder mag bevatten dan op de pakken vermeld staat.

Het bedrijf brengt de zeepoeder op de markt in kleine pakken, waarop vermeld staat dat zij 1 kg zeepoeder bevatten. De vulmachine is ingesteld op 1070 gram per pak.

a Onderzoek of aan de eis van de keuringsdienst van waren wordt voldaan.

De bedrijfsleiding overweegt om naast de kleine pakken met opschrift 1 kg ook gezinspakken met opschrift $2,5 \text{ kg}$ op de markt te brengen.

- b Op hoeveel gram per pak moet de vulmachine ingesteld worden voor deze gezinspakken?
- c Neem aan dat het aantal geproduceerde kleine pakken tweemaal zo groot is als het aantal gezinspakken.
Hoeveel gezinspakken kunnen er dan maximaal per dag worden geproduceerd?

De winst op een klein pak wordt gesteld op f0,40 en die op een gezinspak op f1,00.

Het bedrijf kan per dag beschikken over verpakkingsmateriaal dat toereikend is voor 5000 kleine pakken en 1500 gezinspakken.

Het aantal gezinspakken mag ten hoogste de helft van het aantal kleine pakken zijn.

Noem het per dag geproduceerde aantal kleine pakken x en het aantal gezinspakken y .

- d Stel de voorwaarden op waaraan x en y moeten voldoen en teken het bijbehorende gebied in een coördinatenvlak.

- e Bereken bij welke aantallen kleine pakken en welke aantallen gezinspakken het bedrijf op maximale winst kan rekenen.

III Door een technische storing in de air-conditioning van een groot gebouw neemt het zuurstofgehalte tijdelijk af.

De technische staf heeft het verloop van het zuurstofgehalte beschreven met het volgende model:

$$Z = 200 \left(1 - \frac{10}{t + 10} + \frac{100}{(t + 10)^2} \right) \text{ voor } t \geq 0.$$

Hierin is t de tijd in minuten, gerekend vanaf het moment dat de storing begon, en is Z het aantal cm^3 zuurstof per liter lucht op het tijdstip t . Op het moment $t = 0$ is het zuurstofniveau normaal.

- a Na verloop van tijd nadert het zuurstofgehalte weer tot het normale niveau.
Toon aan dat het gekozen model hiermee in overeenstemming is.
- b Toon aan dat, volgens het model, het zuurstofgehalte op het moment $t = 0$ begint te dalen.
- c Bereken in het model het tijdstip waarop het zuurstofgehalte minimaal is.
- d Iemand beweert dat het zuurstofgehalte 1 uur na het begin van de storing op 90% van het normale niveau is.
Onderzoek of die uitspraak klopt met het model.

- e Teken de grafiek van Z als functie van t voor een periode van 1 uur gerekend vanaf $t = 0$.

- f De medische staf vindt een zuurstofgehalte van 80% van het normale niveau nog net toelaatbaar. Schat met behulp van de grafiek van Z gedurende hoeveel minuten het zuurstofgehalte ontoelaatbaar laag is.

Bereken in één decimaal nauwkeurig het aantal minuten dat, volgens het model, het zuurstofgehalte ontoelaatbaar laag is.

IV Onderstaande tabel geeft de gemiddelde hoogte aan van een bepaald veld zonnebloemen op verschillende tijdstippen na het ontkiemen.

De gemiddelde maximale hoogte die deze zonnebloemen bereiken, is 256 cm.

aantal weken	hoogte in cm	256	256 - H(t)
2	36		
4	98		
6	170		
8	228		
10	251		
12	255		
		0	



t is de tijd in weken na het ontkiemen;

$H(t)$ is de gemiddelde hoogte van deze zonnebloemen in cm op het tijdstip t .

- a Onderzoek of er sprake is van een lineaire groei, exponentiële groei of geen van beide.
- b Teken de grafiek van de functie

$$F(t) = {}^{10}\log \frac{256 - H(t)}{H(t)}$$

met behulp van de gegevens in de tabel.

- c Toon aan dat er een eerstegraads functie is die de functie F redelijk benadert en geef het bijpassende functievoorschrift.
- d Leid uit de resultaten van b en c een functievoorschrift van H als functie van de tijd af.
- e Een landbouwkundige wil het effect van een bemestingsmiddel op de groei van zonnebloemen onderzoeken met behulp van een tekentoets. Hij zaait 12 paren zonnebloemen, waarbij hij voor één zonnebloem van elk paar het bemestingsmiddel gebruikt, voor de andere niet.

Vier weken na het ontkiemen meet hij de lengte van alle zonnebloemen.

Resultaat:

Paar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Zonder bemesting	97	99	98	96	95	98	98	100	97	96	97	93
Met bemesting	102	97	100	99	99	103	101	97	102	98	98	101

Geeft dit resultaat aanleiding om te veronderstellen dat het bemestingsmiddel een positief effect heeft op de groei in de eerste vier weken? Men neemt een significantieniveau van $2\frac{1}{2}\%$ aan.

Het examen is afgenomen aan twee scholen. Totaal aantal kandidaten: 59.

Om enig inzicht te krijgen in de manier waarop de kandidaten op de vragen gereageerd hebben, volgt hier een overzicht van de p'-waarden voor de verschillende onderdelen. Onder de p'-waarde van een onderdeel verstaat men het gemiddeld aantal ervoor behaalde punten gedeeld door het maximale aantal dat ervoor verkregen kon worden.

1A	0,54	2A	0,69	3A	0,41	4A	0,78
1B	0,69	2B	0,65	3B	0,32	4B	0,47
1C	0,25	2C	0,45	3C	0,19	4C	0,26
1D	0,26	2D	0,58	3D	0,81	4D	0,00
1E	0,13	2E	0,41	3E	0,64	4E	0,33
1F	0,17			3F	0,25		

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

516. De mathematische recreatie is reeds zeer oud. Veel opgaven uit oude tijden zijn voor ons simpel. Aardig is echter de volgende variatie op de kool, de geit en de wolf, afkomstig van Tartaglia (midden 16e eeuw).

Drie liefstallige dames hebben drie jonge, jaloerse echtgenoten. Ze zijn samen op reis en komen aan de oever van een rivier. Deze moeten ze oversteken. Daarvoor hebben ze tot hun beschikking een boot die slechts twee personen tegelijk kan bevatten. Gevraagd wordt hoe de overtocht kan geschieden, als om elk schandaal te vermijden, geen vrouw ooit in gezelschap van een heer gelaten wordt zonder dat haar eigen echtgenoot daar ook bij aanwezig is.

Er zijn dingen die wiskundigen nu eenmaal niet kunnen laten. Vandaar dat men in later tijden de vraag gesteld heeft: hoe gaat het nu met vier echtparen?

517. De leden van een vereniging komen elke week bijeen. Gemiddeld zijn dan 50% van de leden aanwezig. De gebeurtenissen 'A is aanwezig' en 'B is aanwezig' zijn voor elke A en B onafhankelijke gebeurtenissen.

Men is geneigd hieruit te concluderen:

a de kans dat twee leden elkaar op een bijeenkomst treffen, is gemiddeld $\frac{1}{4}$;

b twee leden ontmoeten elkaar gemiddeld eens in de vier weken (preciezer: A en B ontmoeten elkaar gemiddeld eens in de n_{AB} weken; het gemiddelde van al deze n_{AB} is 4).

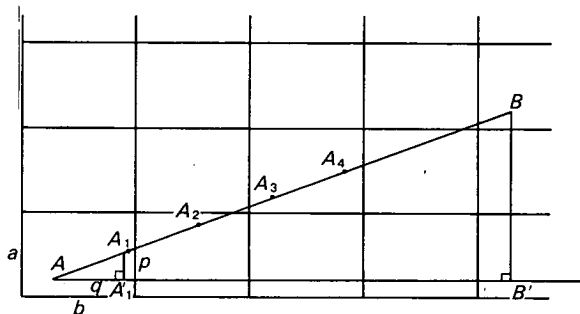
Zijn deze conclusies juist?

Oplossingen

514. Een biljart heeft afmetingen a en b ($a, b \in \mathbb{Z}^+$). Op het laken zijn stippen aangebracht op onderlinge afstand 1 en minimaal 1 van de rand. Men legt de bal op een van de stippen en probeert hem zo te stoten dat hij alle stippen passeert. Is dit mogelijk?

Geval 1. $\text{ggd}(a, b) = 1$

In fig. 1 is links onder het biljart getekend. Het is steeds weer



Figuur 1

gespiegeld naar rechts en naar boven. De baan van de biljartbal kan zo door een rechte lijn voorgesteld worden.

De bal begint in A, wordt weggestoten. Het eerstvolgend punt dat bereikt wordt, is A_1 .

Stel $AA_1 = p$ en $AA_1' = q$. Dan is $\text{ggd}(p, q) = 1$.

De bal bereikt achtereenvolgens de punten $A_2, A_3, A_4, \dots$ die zo gelegen zijn dat $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots$ (Door spiegelingen in de horizontale en verticale lijnen moeten de punten $A_2, A_3, A_4, \dots$ teruggebracht worden naar punten van het biljart.) De baan van de bal is gesloten, zodra hij komt in het punt B waarvoor geldt:

$$BB' = 2ma \text{ en } AB' = 2nb \quad (m, n \in \mathbb{Z}^+, \text{ggd}(m, n) = 1)$$

Stel $AB = kAA_1$.

Dan is

$$kp = 2ma \text{ en } kq = 2nb$$

dus

$$maq = nbp$$

Stel $\text{ggd}(aq, bp) = \text{ggd}(a, p) \cdot \text{ggd}(b, q) = g$.

Dan is

$$m = \frac{bp}{g} \text{ en } n = \frac{aq}{g}$$

dus

$$2m = \frac{2bp}{g} \text{ en } 2n = \frac{2aq}{g}$$

Waaruit volgt

$$k = \frac{2ab}{g}$$

Om zoveel mogelijk punten te passeren, moet k maximaal zijn, dus $g = 1$. We kiezen dus p en q zo, dat $\text{ggd}(a, p) = 1$ en $\text{ggd}(b, q) = 1$.

Dan wordt

$$k = 2ab$$

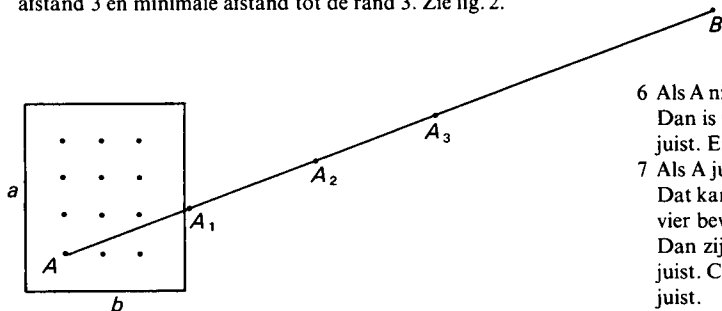
Hier kunnen ook randpunten bij zijn. Omdat $\text{ggd}(a, p) = 1$, liggen de randpunten op de horizontale randen pa van elkaar. Omdat $BB' = 2abp$, is dit aantal randpunten $2b$ of 0. Evenzo is het aantal randpunten op de verticale randen $2a$ of 0. Het aantal randpunten schijnt dus maximaal $2a + 2b$ te zijn. Dit moet nog gecorrigeerd worden, omdat er minstens 2 hoekpunten bij zijn. Het aantal is dus maximaal $2a + 2b - 2$. We houden dan over dat het aantal inwendige punten dat gepasseerd wordt, minimaal gelijk is aan $2ab - (2a + 2b - 2) = 2(a - 1)(b - 1)$. Nu kan elk inwendig punt 2 keer gepasseerd worden, nl. 1 keer in een richting parallel met de beginrichting van de stoot en 1 maal in de gespiegelde richting. Meer dan 2 keer kan niet, want dan zou een echt deel van de totale baan al gesloten zijn en dan wordt de totale baan niet doorlopen. Het minimaal aantal gepasseerde punten is gelijk aan 2 maal het aantal inwendige punten.

Conclusie: alle punten worden bereikt en zelfs elk 2 keer.

Geval 2. $\text{ggd}(a, b) \neq 1$

Onderstel bijv. $\text{ggd}(a, b) = 3$.

Beschouw de deelverzameling van de punten met onderlinge afstand 3 en minimale afstand tot de rand 3. Zie fig. 2.



Figuur 2

Volgens het voorgaande is het mogelijk de bal zo te stoten dat alle punten van de deelverzameling doorlopen worden.

$A, A_1, A_2, A_3, \dots, B$ hebben dezelfde betekenis als in fig. 1. Elk vierkantje in fig. 2 moet nog in 9 subvierkantjes verdeeld worden. Als ook de deelpunten bereikt worden, zullen er op de baan AB punten mee corresponderen die men krijgt door de lijnstukken $A_i A_{i+1}$ in 3 gelijke delen te verdelen. Het aantal punten op de baan AB wordt daardoor verdrievoudigd. Het aantal punten op het biljart wordt echter vernegenvoudigd. Nu zal het dus niet mogelijk zijn de bal zo te stoten dat alle punten bereikt worden.

(Wie nog lust heeft, kan proberen in het geval dat $\text{ggd}(a, b) = 1$ een gesloten baan te zoeken waarbij elk punt precies éénmaal bereikt wordt. Dit lukt. Begin- en eindsnelheid hebben dan uiteraard wel verschillende richting.)

515.

1 Als D juist is, dan zijn A, B en C alle drie niet juist. Dat kan niet. Dus is D niet juist.

Toegift. Dus zijn A, B en C juist en is $a = 3$, $b = 4$ en $c = 5$.

2 Evenals in 1 is D juist. De toegift luidt analoog. Wie nu boos wordt, gelieve me niet alleen een woedende brief te schrijven, maar ook aan te wijzen waar de fout in mijn redenering schuilt. Volgens mij is de redenering correct.

3 Als $a = 3$, dan zijn A en C juist. Dat kan niet. Dus $a \neq 3$. Als nu $a = 4$, dan zijn A en D juist. Dat kan niet. Dus $a \neq 4$. C is daarom juist.

4 A en D zijn gelijkwaardig. Ze kunnen niet beide juist zijn en zijn daarom beide niet juist. Dus zijn p en q juist. Dan is C juist.

Toegift. C is niet juist en r dus ook niet.

5 A en B kunnen niet beide niet juist zijn. Evenmin beide juist. Dus zijn er twee mogelijkheden:

p is juist en q is niet juist

q is juist en r is niet juist.

In het laatste geval is C juist. Dat kan niet. Blijft over: p is juist en q is niet juist. Dus is B juist.

Toegift. C is niet juist. Dus is r juist en s niet juist.

6 Als A niet juist is, is ook B niet juist. Dus is A juist. Dan is B juist. Dan is C juist. Precies één antwoord is niet juist. Dus is D niet juist. En opnieuw: niet boos worden.

7 Als A juist is, zijn er minstens drie van de vier beweringen juist. Dat kan niet; A is dus niet juist. B is niet juist, omdat één van de vier beweringen A, B, C en D juist is. Onderstel C is niet juist. Dan zijn B, C en D niet juist. Dan is geen van de beweringen juist. C is dus juist. Er is maar één bewering juist. D is dus niet juist.

Toegift. Mijn oom leeft dus gelukkig nog of ik heb geen oom of ik heb meer dan één oom.

Boekbesprekingen

VrouwWiskundig. Meisjes in het Wiskunde-onderwijs.

Vijf leden van de groep Vrouwen en Wiskunde hebben dit boekje geschreven: Marja Meeder, Francis Meester, Rijkje Dekker, Coby Geijssel en Thea de Poel. De genoemde groep is, zoals ongetwijfeld bekend, gestart in 1981 uit verontrusting over de geringe deelname van meisjes aan het wiskunde-onderwijs. Toen en zeker ook nú, een aantal jaren later, een hoogst actueel en belangrijk punt. In het boekje zeggen de schrijfsters: 'Omdat onze ideeën en gedachten voor iedereen die betrokken is bij wiskunde-onderwijs van belang zijn, hebben we dit boek geschreven'.

Inderdaad, na lezing van het werk kan ik deze uitspraak alleen maar onderschrijven. Ieder puntje op zich dat naar voren gebracht wordt, is misschien niet zo spectaculair, maar alles bij elkaar wél. En dan heb je de neiging om een aantal zaken nog weer eens opnieuw te bekijken en te herlezen. Het is een boekje dat zeker niet door ieder voor zoete koek geslikt zal worden. Hier en daar zal het stellig tegenspraak en opmerkingen ontlokken. Maar al denkend en discussiërend zullen we zeker de goede richting uitgaan. Het is geen doen om in het korte bestek van deze bespreking een samenvatting van het boekje te geven: daarvoor is de vloed van gegevens te groot. Ik doe wellicht het beste hier een overzicht van hoofdstuktitels te geven: Wat is wiskunde; 'Voor wiskunde moet je bij je vader wezen!'; Het beeld van wiskunde; Vrouwen en wiskunde door de eeuwen heen; Is er een speciale didaktiek voor meisjes?; Kiezen; Wiskunde A en B op het vwo; Middenschool, Voortgezet Basis Onderwijs; Wiskunde in het volwassenenonderwijs; Informatika; Suggesties voor opleidingen en nascholing; Onderzoek; De groep Vrouwen en Wiskunde; Literatuur; Adressen. Het lijkt mij belangrijk dat zo veel mogelijk wiskunde-docenten kennismaken van dit boekje. Het gaat over vragen die in huidige discussies een grote rol spelen. Het boek is uitsluitend als volgt te verkrijgen: schriftelijk te bestellen bij OW en OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht Prijs f12,50

W. Kleijne

Martin Barner, Friedrich Flohr, *Analysis I en II*, Walter de Gruyter, Berlijn, resp. 494 en 449 blz., ieder deel DM 48,-.

Tegelijk met de tweede druk van deel I verscheen in 1982 deel II van dit leerboek der reële analyse. Deel I behandelt de differentiaal- en integraalrekening van functies van één reële variabele: reële getallen, functies, convergente rijen, logaritmische en exponentiële functie, reeksen, complexe getallen en hoekfuncties, continue functies, differentieerbare functies, functierijen en gelijkmatige convergentie, integratie, oneigenlijke integralen, Fourier reeksen. Bij de ontwikkeling van het integraalbegrip heeft men zich beperkt tot regelfuncties.

In deel II behandelen de schrijvers de differentiaalrekening van functies van meerdere reële variabelen, Lebesgue integratie en integraalstellingen van de vectoranalyse. Bij de differentiaalrekening gaat men uit van het idee van lineaire benaderingen. Analooq aan de ontwikkeling van de integraal van regelfuncties wordt de Lebesgue integraal ingevoerd. Later komen de convergentiestellingen van de maat- en integratietheorie aan de orde. Ten slotte wordt ten behoeve van de integraalstellingen van de vectoranalyse eerst de theorie der alternerende differentiaalvormen behandeld.

In beide delen wordt de theorie toegelicht door vele voorbeelden. De lezer/student kan e.e.a. verwerken aan de hand van talrijke opgaven.

Al met al zeer waardevolle boeken die een grondige inleiding tot de analyse vormen.

W. Kleijne

David Burghes e.a., *Applying Mathematics: A course in Mathematical Modelling*, John Wiley & Sons, Chichester, 194 blz., £ 16,50.

Dit boek is uitgekomen in de Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications. Het beoogt om ieder die te maken heeft of krijgt met toepassingen van de wiskunde, te leren hoe een wiskundig model geconstrueerd dient te worden, d.w.z. hoe een probleem uit het dagelijks leven vertaald kan worden in een wiskundig probleem. Het boek houdt zich dan ook meer bezig met de praktische kant van de wiskunde dan met de abstract-theoretische opbouw.

Om de lezer vertrouwd te maken met de kunst van modelconstructie heeft de schrijver het boek in 4 delen verdeeld:

Deel 1 geeft een beschrijving van drie verschillende case-studies met als doel de lezer duidelijk te laten zien hoe belangrijk wiskunde is voor het oplossen van praktische problemen.

In deel 2 wordt de lezer uitgedaagd de hier gepresenteerde problemen zelf op te lossen. Mogelijke oplossingen zijn toegevoegd, zodat de lezer deze kan bestuderen.

In deel 3 worden slechts aanwijzingen ter oplossing van daar gestelde problemen gegeven. Lezers die in het vorige deel geen ernstige pogingen gedaan hebben de problemen zelf op te lossen, zullen grote moeite hebben met dit deel.

Hetzelfde geldt voor de problemen van deel 4, waar ook de aanwijzingen zijn weggelaten.

Al met al een zeer waardevol boek. Wanneer we denken aan de ontwikkelingen op korte termijn binnen ons wiskunde-onderwijs, lijkt mij dit boekje zeer aan te bevelen voor iedere wiskunde-leraar.

W. Kleijne

Georg Aumann, Otto Haupt, *Einführung in die reelle Analysis*, deel III, 3e druk, Walter de Gruyter, Berlijn, 1983, 295 blz., DM 138,—.

Een bespreking van de herziene delen I en II is verschenen in *Euclides*, 58e jaargang 1982/1983, nr 3, blz. 117. Met de verschijning van dit volledig herziene derde deel, is de bewerking van dit standaardwerk van de analyse voltooid. Het geeft voornamelijk generalisaties van de theorie van de Riemann-integraal zoals behandeld in deel I.

Zo bespreken de schrijvers: systemen van verzamelingen (σ -algebra e.d.), maat en maatruimte, integraal van reële functies t.o.v. een maat, produktmaat, stellingen van Fubini, Gauss en Stokes, lineaire functionalen.

In een aanhangsel zijn oplossingen opgenomen van opgaven uit de delen I en II.

Voor mijn algemene indruk en beoordeling moge ik naar mijn eerder genoemde bespreking van de delen I en II verwijzen.

W. Kleijne

F. Lorenz, *Lineare Algebra 2*, Band 605 Hochschultaschenbücher, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1982, 202 blz., DM 19.80.

Enige tijd geleden heb ik het eerste deel van deze inleiding in de lineaire algebra besproken. De bij die gelegenheid gemaakte opmerkingen gelden evenzeer voor dit tweede deel. Ik volsta daarom met een overzicht van de inhoud.

In de eerste vier hoofdstukken komen achtereenvolgens aan de orde: Lineaire en bilineaire vormen, Kwadratische vormen, Euclidische en unitaire ruimten, Classificatie van endomorfismen van n -dimensionale vectorruimten. Het laatste hoofdstuk bestaat uit een, naar hoofdstuk gerangschikte, verzameling opgaven. Antwoorden worden niet gegeven, wel zijn bij de moeilijker opgaven aanwijzingen toegevoegd. Een literatuuropgave en een index sluiten het werk af.

Een grondige inleiding in de lineaire algebra, geschikt als naslagwerk of om oude kennis op te frissen.

R. Bosch

Mededelingen

Wiskunde verplicht?

Het bestuur van de NVvW heeft aan de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen een brief met onderstaande inhoud gezonden.

Excellentie,

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars heeft er kennis van genomen dat U voorstandster bent wiskunde als verplicht eindexamenvak in te voeren op het toekomstig lyceum.

Ons bestuur verzoekt U van dit voornemen voorlopig af te zien. Aan dit verzoek ligt de volgende gedachtengang ten grondslag: Voor de invoering van de wet op het Voortgezet Onderwijs in 1968 kende ons onderwijs enerzijds de mulo-school en anderzijds de HBS en het gymnasium, waarbij niet alleen intellectuele, maar ook sociale omstandigheden bepaalden, waar een leerling heen ging. Doorstroming was mogelijk, maar tamelijk moeilijk. De wet op het Voortgezet Onderwijs doorbrak deze ongewenste toestand door het scheppen van MAVO, HAVO en VWO, met goede doorstromingsmogelijkheden. De afgelopen jaren is ook de scheiding tussen LBO en MAVO steeds kleiner geworden door de oprichting van een groot aantal scholengemeenschappen LBO-MAVO en het gelijktrekken van LBO-C niveau en MAVO-C niveau. Het toekomstige nieuwe lyceum zal weer een duidelijke scheiding teweeg brengen tussen enerzijds LBO-MAVO en anderzijds HAVO-VWO. De doorstromingsmogelijkheden blijven hier echter wel zeer essentieel. Voor 1968 kon men HBS en gymnasium aflopen met een haast te verwaarlozen hoeveelheid wiskunde. Stelt men nu wiskunde verplicht op het nieuwe lyceum, dan wordt het voor velen nog moeilijker dit schooltype te doorlopen dan vroeger de HBS of het gymnasium. Het nieuwe lyceum krijgt dan een versterkt 'elitair' karakter.

Voor een MAVO-leerling wordt de doorstroming naar het nieuwe lyceum onmogelijk als deze geen wiskunde in het pakket heeft. Er zijn dan twee mogelijkheden:

- of we laten toe dat een MAVO-leerling geen wiskunde in het pakket opneemt, waardoor reeds van te voren de mogelijkheid tot doorstroming afneemt,
- of we zullen wiskunde verplicht stellen voor alle MAVO-leerlingen, met als gevolg dat er een categorie leerlingen van het MAVO-diploma verstoken blijft omdat wiskunde een te groot struikelblok is.

De verplichtstelling van wiskunde op het nieuwe lyceum kan plaats vinden om emancipatorische of technologische redenen. Naar de mening van ons bestuur behoeft deze verplichting niet van bovenaf opgelegd te worden. De experimenten met wiskunde-A op het huidige VWO laten duidelijk zien dat we leerlingen niet behoeven te stimuleren wiskunde te kiezen als het geschikte wiskunde is. Op sommige scholen kiest nu reeds 95% van de leerlingen wiskunde.

Hieruit kan men concluderen dat meer leerlingen wiskunde kiezen als die wiskunde goed is aangepast aan de behoefte en de mogelijkheden van de leerling.

Naast de reeds genoemde zakelijke nadelen van het verplicht stellen van wiskunde, wil ons bestuur nog wijzen op de nadelen die voortkomen uit gebrek aan motivatie en ongeschiktheid. De ervaringen met de verplichte wiskunde-I voor toekomstige sociale wetenschappers hebben de hierbij optredende problemen voor leerlingen en docenten zeer duidelijk aangetoond.

Ons bestuur verzoekt U derhalve af te zien van Uw voornemen wiskunde als examenvak verplicht te stellen op het nieuwe lyceum en te laten onderzoeken hoe nieuwe leerplannen voor MAVO/LBO en onderbouw van HAVO een vorm van wiskunde kunnen bieden, die is aangepast aan de mogelijkheden en behoeften van de leerlingen.

Het bestuur van de NVvW

HEWET Keuzeproblematiek in 4 vwo.

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren organiseert in januari 1985 op zes plaatsen in Nederland een bijeenkomst met als thema: De keuzeproblematiek in 4 vwo in verband met de invoering van de nieuwe examenprogramma's wiskunde, algemeen bekend als HEWET.

De bijeenkomsten zullen worden gehouden op maandag 14 januari 1985 van 16.00 h tot 18.00 h in Bergen op Zoom, Heerenveen en Rotterdam. Op donderdag 17 januari 1985 van 16.00 h tot 18.00 h worden bijeenkomsten belegd te Amsterdam, Apeldoorn en Roermond.

Een uitgebreide aankondiging volgt in één van de volgende nummers van Euclides.

ICOTS II

Wij ontvingen een eerste aankondiging van The Second International Conference on Teaching Statistics, die gehouden zal worden van 11-16 augustus 1986 aan de University of Victoria, te Victoria, British Columbia, Canada.

VrouWiskundig.

Onder deze titel hebben leden van de werkgroep Vrouwen en Wiskunde een discussieboek over de positie van meisjes in het wiskunde-onderwijs geschreven. Dit boek is bestemd voor allen die bij het wiskunde-onderwijs betrokken zijn en voor overige belangstellenden.

Ideeën van de werkgroep over het beeld van wiskunde, lesmaterialen, werkvormen, volwassenenonderwijs, het kiezen van wiskunde, informatica en veel vragen voor onderzoek zijn in dit boek beschreven.

Vanaf september 1984 is het boek, uitsluitend schriftelijk, te bestellen bij de Vakgroep OW & OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.

De prijs bedraagt f12,50 (exclusief verzendkosten).

Voor de betaling zal met het boek een acceptgirokaart worden meegezonden.

De schrijfsters zijn Marja Meeder en Francis Meester, m.m.v. Rijkje Dekker, Coby Geijssels en Thea de Poel.

Het adres van de werkgroep luidt: Werkgroep Vrouwen en Wiskunde, Postbus 11563, 1001 GN Amsterdam.

Tiende gemeenschappelijke studiedag NVvW-VVWL

De tiende gemeenschappelijke studiedag voor de Vlaamse en Nederlandse wiskundeleraren zal plaats vinden op *zaterdag 23 maart 1985* te Kapellen (B), tussen Roosendaal en Antwerpen, aanvang 10 uur.

Er zullen een drietal voordrachten gehouden worden en wel 's morgens door

Dr P. G. J. Vredenduin over Semantische en axiomatische

wiskunde met betrekking tot het onderwijs,

R. Verhulst over Het aanbrengen van het begrip continuïteit en 's middags door

Prof. Dr F. van der Blij over Wiskunde en Biologie.

Details worden t.z.t. in Euclides meegedeeld.

Bestuur NVvW

Meetskunde, ruim bekeken

Dit is het thema van het komende wintersymposium voor wiskundeleraren van het Wiskundig Genootschap. Het symposium wordt gehouden op *zaterdag 5 januari 1985*, in de Aula van de T.H., Mekelweg 2, Delft.

Het programma is als volgt:

- 9.30 u ontvangst en koffie
- 10.00-11.00 u J. van de Craats (K.M.A., Breda)
– Galilei meetskunde.
- 11.15-12.15 u J. de Wilde (T.H., Delft)
– C.A.D.: hulp of help?
- 13.35-14.45 u M. Kindt (R.U., Utrecht)
– Ruimtevisioenen in Platland.

De heer De Wilde zal tevens een computerdemonstratie over C.A.D. (= Computer Added Design) verzorgen.

U kunt zich voor dit symposium uitsluitend schriftelijk opgeven bij: Mw. H. Weenink, Ambonstraat 4, 2612 BM Delft. Op verzoek kunt u een prospectus met samenvattingen van de voordrachten thuisgestuurd krijgen. Deze prospectussen zullen naar de scholen worden gestuurd in de tweede helft van november. Indien u wilt deelnemen aan de gezamenlijke lunch, stort u f10,- op gironummer 4015571 t.n.v. H. Weenink, Delft.

Opgaven wiskunde A

Nieuwe examenprogramma's vragen om nieuwe opgavenbundels.

Traditiegetrouw is het de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren die via zo'n bundel het nieuwe programma wat meer gestalte geeft. De niet meer zo jonge wiskundeleraren zullen zich de bundel '250 opgaven' herinneren die bij de leerplanherziening van 1958 door Wimecos (de vroegere doopnaam van de NVvW) werd gepubliceerd. Na de mammoetveranderingen in 1968 kwam spoedig een bundel met vwo-opgaven (door sommigen de '251 opgaven' genoemd), gevolgd door een HAVO-bundel. Hierbij was sprake van een vruchtbare samenwerking van de NVvW en Wolters-Noordhoff.

Het spreekt haast vanzelf dat de NVvW bij de invoering van de HEWET-programma's een nieuwe opgavenbundel bij WN zal laten uitgeven. Deze zal slechts 75 + 18 opgaven bevatten, lang geen 250. Niet zo gek als u bedenkt dat deze bundel alleen betrekking heeft op wiskunde A; een bundel voor wiskunde B zal nog even op zich laten wachten.

De 75 opgaven zijn verdeeld over drie hoofdstukken: 'Toegepaste Analyse', 'Toegepaste Algebra' en 'Statistiek en Kansrekening'. Elk van die hoofdstukken begint met een serie kleine gemengde opgaven om daarna langzaam maar zeker over te gaan op meer uitvoerige opgaven die het examenniveau benade-

ren. Het vierde hoofdstuk bevat de vier experimentele examens die in 1983 en 1984 zijn afgenomen aan de Lorentz SG in Haarlem en het Liemers College in Zevenaar. Bij alle opgaven zijn antwoorden opgenomen. De antwoorden van de eind-examenopgaven bevatten ook aanwijzingen voor een oplossing. De bundel heeft een voorlopig karakter, want op het moment dat zij werd samengesteld waren de experimenten nog in volle gang en was het leerplan nog niet definitief. Voor de totstand-koming hebben Joop van Dormolen, Martin Kindt, Theo Korthagen, Jan Maassen (eindredactie), Wolfgang Reuter, Jan Sloff, Gerard Stroomer en Nelly Verhoef zich geheel belange-loos ingezet. Bij de samenstelling is dankbaar gebruik gemaakt van schoolonderzoeken en proefwerken van de experimenteren-de scholen.

OW & OC Symposium 'Wiskunde voor allen. Verplicht?'

Datum: 8 december 1984.

Plaats: Comenius College, Bisonlaan 1, Hilversum.

Voorlopig programma

- 9.30-10.00 u Koffie.
- 10.00-10.10 u Welkom.
- 10.20-11.10 u 1e werkgroep (keuze uit ± 12).
- 11.15-12.05 u 2e werkgroep (keuze uit ± 12).
- 12.05-13.15 u Lunch.
- 13.15-14.30 u Vier inleidingen: (plenair).
Mevr. Ginjaar-Maas (staatssecretaris O en W).
Dhr. Sanders (dekaan en hoofdredacteur Dekanoloog).
Mevr. Meester (lerares, Vrouw & Wiskunde).
Dhr. De Lange (OW & OC, HEWET, hoofdredacteur Nieuwe Wiskrant).
- 14.30-15.00 u Thee.
- 15.00-16.30 u Discussie met o.a.:
Mevr. Ginjaar-Maas;
Dhr. Hillebrand (dekaan);
Dhr. Hoogbergen (adv. O en W, ARVO II);
Dhr. Van der Blij (hoogleraar wiskunde, OW & OC);
Mevr. A. Aukema-Schepel (lerares).
Voorzitter:
Dhr. Rosenberg (lid College van Bestuur, RU te Utrecht).

De werkgroepen belichten allen facetten van 'Wiskunde voor allen' aan de hand van praktijkvoorbeelden.

Toelichting op programma symposium

Het ochtendprogramma heeft als centraal thema: 'Wiskunde voor allen'.

De deelnemers kunnen dan tweemaal een keus maken uit een twaalfstal werkgroepen die allen 'Wiskunde voor allen' als thema hebben.

Zo zullen er groepen zijn met als titel:

- Wiskunde voor allen? Dan zo!

- Wiskunde voor allen. Is dat met computers en zo?
- Breuk in wiskunde voor allen.
- Basisschoolboeken voor allen?
- Wiskunde voor allen op HAVO/VWO?
- Meetkunde voor allen?
- Naar een nationaalplan voor reken/wiskunde onderwijs. enz.

Het middagprogramma is algemener van aard en heeft als thema: 'Wiskunde voor allen. Verplicht?'

De vier sprekers zullen hun -onderling nogal verschillende- persoonlijke visie geven.

Tenslotte zal de dag worden afgesloten met een plenaire discussie.

Het symposium richt zich op allen die zich met onderwijs bezig houden, en zeker niet exclusief op wiskunde leraren.

Kalender

(zie voor nadere informatie ook altijd de Mededelingen in dit nummer en in voorafgaande nummers)

1984

- 29 nov t/m 1 dec: E-conferentie, Ede
- za 8 dec: symposium Wiskunde verplicht?, Hilversum
- wo 19 dec: bestuursvergadering NVvW, Utrecht

1985

- za 5 jan: wintersymp. Wisk. Genootschap, Delft
- wo 9 jan: bestuursvergadering NVvW, Utrecht
- ma 14 jan: keuzeproblematiek 4 vwo, Bergen op Zoom, Heerenveen, Rotterdam
- do 17 jan: keuzeproblematiek 4 vwo, Amsterdam, Apeldoorn, Roermond
- 24 t/m 26 jan: D-conferentie, Ede
- wo 6 feb: bestuursvergadering NVvW, Utrecht
- za 9 feb: jaarvergadering VVWL, Antwerpen
- 28 feb t/m 2 mrt: B-conferentie, Ede
- wo 6 mrt: bestuursvergadering NVvW, Utrecht
- za 23 mrt: gem. studiedag NVvW, VVWL, Kapellen (B)
- 28 t/m 30 mrt: E-conferentie, Ede
- za 30 mrt: landelijke dag Vrouwen en Wiskunde

UTRECHTS REKEN-WISKUNDE PROGRAMMA

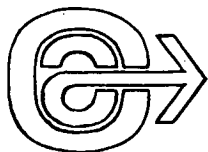
VOOR HET SCHOOLWERKPLAN BASISONDERWIJS



voor schoolteams die vanaf de kleuterfase hun rekenonderwijs willen vernieuwen.
Nieuwe leerstof, inzichtelijke cijferleergangen, gevarieerde oefenstof en flexibele werkvormen, vanuit een nieuwe kijk op leren en onderwijzen

met:

- rekenwiskunde-activiteiten voor kleuters;
- werkbladen voor de kinderen;
- praktijkboeken (handleidingen) voor de leerkracht;
- toetsbladensets per leerjaar.



*Uitgegeven door de Stichting School-
adviescentrum te Utrecht.
Inlichtingen (030) 43 42 24, toestel 51.*

*Verspreid door Muusses B.V.
Bestellingen: Postbus 13,
1440 AA Purmerend.*



Inhoud

A. Bishop: The mathematics teacher and new developments 85

Ontvangen 87

H. Broekman: Leerstijlaspecten; veld(on)afhankelijkheid II 88

F. Korthagen: Leren en reflecteren in het wiskunde-onderwijs I 93

P. Vredenduin: Bepalen van kansen 99

Examen vwo Wiskunde A 1984, 1e periode 108

Recreatie 111

Boekbesprekingen 113

Mededelingen 114

Kalender 116

Adressen van auteurs

A. Bishop, Department of Education, University of Cambridge, 17 Trumpingtonstreet, CB 2 1 PT

H. Broekman, Ped. Did. Inst. der RU Utrecht, postbus 80-120, 3508 TC Utrecht

F. Korthagen, Math. Inst. Universiteit van Amsterdam, Roeterstraat 15, 1018 WB Amsterdam

P. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 KN Doorwerth