

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

60e jaargang
1984 | 1985
aug. | sept.

Euclides 1

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Mw. I. van Breugel
Drs. F. H. Dolmans (hoofdredacteur)
W. M. J. M. van Gaans
Dr. F. Goffree
Drs. W. Kleijne
L. A. G. M. Muskens
Drs. C. G. J. Nagtegaal
P. E. de Roest (secretaris)
Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice)
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12,
7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417.
Secretaris Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132,
2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard,
Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro:
143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 50,- per verenigingsjaar;
studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de
V.V.W.L. f 35,-; contributie zonder Euclides f 30,-.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met
vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht
bij Drs. F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen,
tel. 08894-11730. Zij dienen met de machine geschreven
te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van
1¹/₂. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos
5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is
opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs W. Kleijne, Treverilaan 39,
7312 HB Apeldoorn, tel. 055-550834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille
(buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf,
Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402,
giro: 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 42,40. Een collectief
abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 24,65.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567,
9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met
betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend
nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag
leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het
einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers f 7,- (alleen verkrijgbaar na
vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Bij het begin van de 60e jaargang

Het is u ongetwijfeld opgevallen: Euclides heeft zich een nieuw uiterlijk aangeschaft. We vieren het zestigjarig bestaan en dit was aanleiding om de vormgeving te veranderen.

De voorpagina is nieuw. Terwijl het zo'n vijftien jaar lang nodig was het blad een kwartslag te draaien om zijn naam goed te kunnen lezen is dat vanaf nu niet meer nodig. Ook het formaat is gewijzigd. We hebben gekozen voor bredere bladzijden, waardoor het mogelijk is geworden tekst in twee kolommen af te drukken. Een opmaak in twee kolommen is prettiger leesbaar en geeft de mogelijkheid per bladzijde meer af te drukken, met name omdat illustraties beter geplaatst kunnen worden. We verwachten dan ook dat Euclides beter geïllustreerd gaat worden. De bredere pagina's behouden de zelfde hoogte.

Het is dus mogelijk de zestigste jaargang naast de negenenvijftig andere in de boekenkast te zetten zonder dat er een storend hoogteverschil ontstaat. Tegenover de uitbreiding van informatie per bladzijde staat een vermindering van het totale aantal bladzijden. Hierbij is uitgangspunt geweest dat de hoeveelheid tekst per jaargang minstens gelijk blijft aan die van de afgelopen jaargangen.

Zowel het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren als de uitgever Wolters-Noordhoff hebben duidelijk gemaakt dit uitgangspunt te onderschrijven.

In het eerste nummer besteden we aandacht aan het zestigjarig bestaan van Euclides door terug te kijken.

De redactie is druk doende geweest de 59 maal 40 maal 10 is 23.600 bladzijden van Euclides-tot-nu-toe door te vorsen met de bedoeling daarmee de krenten uit de pap te vissen.

We presenteren in dit nummer het wel en wee van het wereldje rond Euclides gedurende zestig jaar en doen dat mede met gebruikmaking van de artikelen die we zo gekozen hebben. Uiteraard is onze keuze een subjectieve. We pretenderen niet meer te geven dan een impressie.

Vooruitblikkend op de komende jaargang

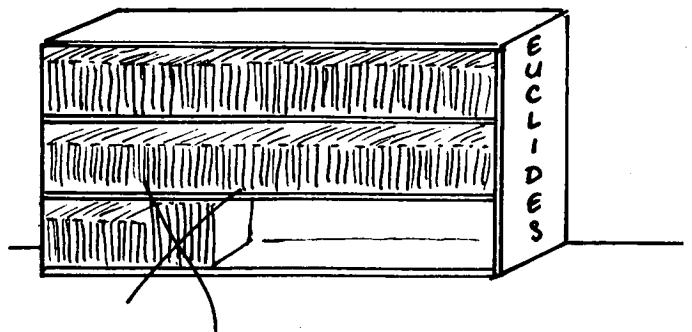
Nog steeds is Euclides meer een blad voor wiskundeleraren dan een blad door wiskundeleraren. De redactie wil deelname van leraren aan Euclides blijven stimuleren en wijst in dit verband op de prijsvraag elders in dit nummer aangekondigd.

In de komende jaargang zal geen special over eindexamens verschijnen. Deze specials hebben enige jaren het decembernummer gevuld. De eind-examenopgaven zijn thans in voldoende mate via al dan niet commerciële kanalen verkrijgbaar, reden waarom de redactie er de voorkeur aan geeft ruimte voor andere zaken te reserveren.

Gaarne danken we de uitgever en het bestuur voor de prettige samenwerking.

Veel genoegen met dit en de volgende nummers van de zestigste jaargang.

Namens de redactie,
Frans Dolmans, hoofdredacteur.



Euclides 60 jaar

Zestig jaar geleden, in 1924, kwam het tijdschrift Euclides tot stand. In de eerste drie jaren verscheen het als Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, daarna zelfstandig. De officiële naam luidde: Euclides, tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken. In die eerste jaren lag de nadruk daarbij sterk op de vakken wiskunde, mechanica en kosmografie. De leiding van het tijdschrift was in handen van J. H. Schogt en P. Wijdenes, beiden leraren in het middelbaar onderwijs en schoolboekauteurs.

De inhoud van de eerste (tientallen) jaargangen laat duidelijk zien voor wie het tijdschrift bedoeld was; leraren van de toenmalige hbs'en en gymnasia.

Het schriftelijk eindexamen voor wiskunde op de hbs bestond uit vier delen met aparte zittingen: algebra, goniometrie, stereometrie en beschrijven-de meetkunde. Het gymnasium-B kende drie zittingen: algebra, goniometrie en analytische meetkunde, stereometrie. De goniometrie bestond voor een groot deel uit trigonometrie, dus uit berekeningen in de driehoek. Het gymnasium-A kende slechts een mondeling examen in algebra en meetkunde.

De hbs viel onder de middelbaar-onderwijswet, het gymnasium onder de hoger-onderwijswet. Het gymnasium had een aparte inspectie. Op de hbs cijferde men van 1 tot 10, op het gymnasium van 1 tot 5.

Hbs en gymnasium leidden een gescheiden leven. Ze ontmoetten elkaar, op min of meer illegale wijze, in het lyceum.

In 1925 werd de vereniging Wimecos (Vereniging van Leraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie aan hogere burgerscholen met

vijfjarigen cursus, lycea en meisjes – hogere burgerscholen met 5/6 jarigen cursus) opgericht. Daarnaast bestond reeds de vereniging Liwenagel (Leraren in Wiskunde en Natuurwetenschappen aan Gymnasia en Lycea). Gymnasium – leraren konden dus geen lid worden van Wimecos en hbs – leraren niet van Liwenagel.

Zoals gezegd, in 1924 verscheen het eerste nummer van ons tijdschrift.

Wat bezielde mensen een nieuw tijdschrift te starten? De meest oorspronkelijke bedoelingen moeten zichtbaar zijn in de eerste jaargang. Dr. E. J. Dijksterhuis opende de rij artikelen met een reactie op een eerder verschenen brochure van mevrouw T. Ehrenfest-Afanassjewa, getiteld: *Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden?* Dit artikel leidde, in dezelfde jaargang nog, tot een weerwoord van mevrouw Ehrenfest en een laatste woord van Dijksterhuis.

Had men zich voorgesteld dat het tijdschrift een platform zou worden voor discussies over zaken aangaande het wiskunde-onderwijs? Latere jaargangen geven een ander, zo u wilt, rijker beeld. Er kwamen beschouwende, meningvormende en informatieve artikelen. Vooreerst werd de aandacht hoofdzakelijk bepaald door de vigerende programma's, zowel in globale zin als in details. Maar men nam ook een standpunt in ten opzichte van het wiskunde-onderwijs als zodanig. Wie goed de hierop betrekking hebbende artikelen leest, herkent discussievragen die nu nog actueel zijn. Ter illustratie het artikel van Dr. H. J. E. Beth, *Het 'meer en meer wiskundig' karakter der H.B. School met 5-jarigen cursus*, uit jaargang 1 (1924-25), blz. 90-100.

Ter toelichting het volgende. In deze tijd bestond er nog geen hbs-A en hbs-B. De 5-jarige hbs was de school die later hbs-B genoemd zou worden. Er waren plannen naast deze school een hbs-A op te richten. Tegen deze plannen is de kritiek van Beth gericht. De hbs-A is er enkele jaren later toch gekomen, inderdaad met slechts één uur wiskunde in klasse 4 en in klasse 5.

De abiturienten kregen studierecht in de sociale en in de economische wetenschappen, echter niet, zoals Beth vreesde, in de rechtswetenschappen.

HET „MEER EN MEER WISKUNDIG” KARAKTER DER H. B. SCHOOL MET 5-JARIGEN CURSUS.

DOOR

DR. H. J. E. BETH.

Wanneer men zal hebben ingezien, dat onze tijd niet zonder meer „de eeuw van het kind” mag worden genoemd, zal men het, als hij dan toch een typeerenden naam moet hebben, eens kunnen probeeren met „de eeuw van de onbewezen uitspraken.” Men raakt er al zoo langzamerhand aan gewoon, dat ook door ontwikkelde menschen uitspraken op elk gebied worden gedaan zonder schijn van argumentatie en in lijnrechten strijd met de werkelijkheid. Natuurlijk is het niets anders dan het gedachteloos napraten van wat „gezaghebbende” lieden hebben beweerd; maar dan is het toch een bedenkelijk symptoom van het „minder en minder wiskundig” karakter van den tijd, waarin wij leven. Om van die onbewezen (en, laat ik er maar dadelijk bijvoegen, onjuiste, en dus ook onbewijsbare) uitspraken er maar twee te noemen, beide op onderwijsgebied: „dat het met de *school*tucht thans heel wat droeviger is gesteld dan een kwarteeuw geleden”, en „dat het onderwijs aan de 5-jarige H.B.S. een meer en meer wiskundig karakter heeft aangenomen.” Tot de laatste zal ik mij thans hebben te bepalen.

Laat ik beginnen met de verklaring, dat ik met het volgende geenszins de bedoeling heb, een kritiek te leveren op het ahangige wetsontwerp tot regeling van het algemeen vormend middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs; ik wil dat gaarne aan meer bevoegden overlaten. Ook heb ik niet het booze voornemen, een aanslag te beramen tegen bestaande of toekomstige schooltypen, die in meerder of minder mate afwijken van het type, dat ons begripelijkerwijze nader aan het hart ligt. Mijn streven is van zeer vredelievenden aard. Het mag dat zijn, want ik geloof niet, dat onze 5-jarige H.B.S. voor concurrentie van de zijde harer

jongere zusjes zoo heel bang behoeft te zijn. Op háár leeftijd wordt men al lang niet meer jaloersch, als de ooievaar neergestreken is, ook niet, al brengt hij drie zusjes tegelijk. Al is haar peil „door den drang der tijden” eenigszins gedaald, zij mag er nog wel zijn; en als de nieuwe regelingen nog eens ten gevolge mochten hebben, dat zij eenige flinke stappen op haar levensweg *terug* mocht doen, dan zal ik mij in de nieuwe wet zéér verheugen.

Ik wilde dan iets mededeelen over „het *meer en meer* wiskundig” karakter der H.B.S. Men vindt deze uitspraak op nog andere wijzen geformuleerd, b.v. dat „de 5-jarige H.B.S. zich *meer en meer* in wis- en natuurkundige richting heeft georiënteerd”, dat „de 5-jarige H.B.S. zich *meer en meer*, in afwijking van hare oorspronkelijke bestemming, heeft gespecialiseerd tot opleidings-school voor Delft en voor de studie in genees-, wis- en natuurkunde”. Aan de vijanden van ons schooltype kan ik de laatste formulering in het bijzonder aanbevelen; zij is het hatelijkst.

Dat men het noodig heeft geoordeeld, naast de bestaande H.B.-school eene litterair-economische op te richten; dat men meent, dat deze evenzeer als de bestaande H.B.S. eene voorbereiding zal kunnen geven, niet alleen voor het bedrijfsleven, doch ook voor hogere studie; dat men aan de abituriënten van die scholen (eigenlijk reeds vóórdát die scholen bestaan en vóórdát men zich omtrent haar resultaten eenigé voorstelling kan vormen) rechten wil toekennen, die men aan de abituriënten der ruim 60 jaren bestaande scholen onthoudt..... al deze zaken, hoe belangwekkend ook, mag ik slechts in het voorbijgaan aanroeren, omdat zij alleen in verwijderd verband staan met het onderwerp mijner bespreking. Ik ben van den aanvang af, toen het denkbeeld van een splitsing der beide hoogste klassen van de bestaande H.B.S. naar voren werd gebracht, van dat denkbeeld een warm bewonderaar geweest, vóóral met het oog op kleinere plaatsen, waar men vaak niet anders heeft dan een H.B.S. Mijn bewondering is bekoeld, toen het bleek, dat deze splitsing wegens de bezuiniging slechts bij uitzondering zal worden toegepast (en juist de plaatsen, die er de grootste behoefte aan hebben, van de voordeelen verstoken zullen blijven).

Nog erger stortbad kreeg zij, toen mij b.v. uit een ingezonden schrijven van Mr. Dr. Spaander in het Alg. Handelsblad duidelijk werd, hoe de H.B.S. A tegenover de wiskunde staat. 91

Zijne mededeeling omtrent de 5 uren *theoretische* natuurkunde was mij niet duidelijk, en laat ik daarom onbesproken. De heer Spaander blijkt zeer ingenomen met de plaats, die aan zijn school is ingeruimd voor de Wiskunde. Hij somt met kennelijke voldoening op: 6 uren in klasse I en II, 4 in III, en *nog* 1 uur in IV en V¹⁾. Stellig zal hij mij ondankbaar vinden, als ik hem zeg, dat het woord „stiefmoederlijk” voor deze bedeeeling nog veel te gunstig is. Ik wil nog aannemen, dat zaken als handelsrekenen buiten de genoemde uren gegeven worden, en deze 18 uren werkelijk alleen voor de wiskunde zijn. Misschien voelt hij mijn bezwaar het best, als ik hem voorstel, zijn 18 uren wiskunde als volgt te verdeelen: 2 uur in kl. I, 2 in II, 4 in III, 5 in IV en 5 in V. Daartegenover zou dan van zijne uren economie het meerendeel naar kl. I en II overgebracht moeten worden om de rekening sluitend te maken. Men behoeft geen overmaat van schranderheid te bezitten, om te kunnen gissen, wat de heer Spaander van dit voorstel zou zeggen. Welnu, zooals hij denkt over economie, zoo denk ik over wiskunde.

Wat de rechten betreft, aan het einddiploma der H. B. S. A te verbinden, in zake toelating tot de studie der rechten, ik behoef weinig toe te voegen aan de opmerkingen, die daaromtrent van verschillende zijden, gemaakt zijn: dat het verleenen van die rechten zou zijn praematuur en oneconomisch; ik wil er nog bijvoegen: onpaedagogisch.

Maar evenmin zou ik die rechten toegekend willen zien aan de bezitters van eind-diploma H. B. S. B. De toelating tot de studie in medicijnen en wis- en natuurkunde berustte op heel wat deugdelijker gronden!

Of de oprichting der H. B. S. A een verblijdend feit moet worden genoemd, is onder de tegenwoordige omstandigheden moeilijk te zeggen. Maar dat men haar bestaansrecht motiveert door te wijzen op het „meer en meer wiskundig” karakter der H.B.S., hierover wilde ik gaarne enkele woorden in het midden brengen.

De uitdrukkingswijze „meer en meer wiskundig karakter der H.B.S.” is reeds zoo ingeburgerd (zie boven omtrent „onbewezen uitspraken”), dat menigeen, buiten het wiskundig kamp opgesteld (zelfs vele wiskundige collega’s zijn het praatje gaan gelooven),

92 ¹⁾ Ik citeer uit het hoofd; de cursiveering van het woordje „nog” is van mij.

zich met verbazing zal afvragen, of het dan niet waar is. Welnu, op deze vraag kunnen we antwoorden met één woord: nonsens!

Wie de eischen nagaat, die bij de oprichting der H.B.Scholen aan de abiturienten gesteld werden, en ze vergelijkt met de tegenwoordig geldende, zal zonder nader onderzoek overtuigd zijn; ik laat de verandering van staats- in schoolexamen in het midden; zij moge voor sommige scholen een verlichting der eischen inhouden, voor andere beteekent zij stellig een aanmerkelijke verzwaring! Uit de laatste opmerking ziet men reeds, hoe gevaarlijk het is, voor een bewijsvoering gebruik te maken van papieren regelingen; ik ben me dan ook zeer wel bewust, dat het gemakkelijk is een overtuigend, maar even moeilijk, een wettig bewijs te leveren van mijn stelling, dat men ten aanzien van de H.B.S. niet mag spreken van een „meer en meer toenemend”, maar eerder van een „op bedenkelijke wijze afnemend” wiskundig karakter. Ik weet wel, dat het wiskunde-onderwijs in het algemeen nog vrij wat hooger staat dan het huidige examen-programma zou kunnen doen vreezen, maar zou toch, om mijne meening eenigszins te motiveeren, enkele vragen aan de collega's willen voorleggen.

Wat behandelen wij tegenwoordig van theorie der rekenkunde, dat ook niet (en terecht) op de lagere school onderwezen is? Hoewel ik niet tot degenen behoor, die techniek onderschatten, moet ik er toch op wijzen, dat herleiding van samengestelde breukvormen, vierkants- en kubiekworteltrekking, en dergelijke tot begripsvorming weinig bijdragen. Hoe ver durven wij gaan, als wij eens b.v. over het onmeetbare getal komen te praten? Vinden wij het al niet „veel te moeilijk” voor onze jongens, ook voor de 5de klassers?

Hebben de collega's ook dezelfde moeilijkheid als ik geregeld heb bij het mondeling eindexamen in Algebra: dat ik, na 3 candidaten ondervraagd te hebben, de grootste moeite heb, om voor den 4den nog eens „iets anders” te bedenken? Dat wij uit het hatelijke hoofdstuk der wortelvormen krachtens het programma alle wortelvormen mochten overboord gooien, die niet van nut zijn voor de Meetkunde, hiertegen zal men wel niet veel bezwaar gehad hebben. Omdat ook de logaritmen wel eens vervelend beginnen te worden, ga ik tegenwoordig vrij wat verder met de theorie der vergelijkingen dan gewoonte was. Maar wat is er van Algebra voor het *examen* eigenlijk overgebleven?

Hebben wij ook niet de goniometrische vergelijkingen moeten prijsgeven? Gaan wij niet (*m.i. volkomen terecht*) bij het aanbrengen van de eerste beginselen der meetkunde op veel eenvoudiger wijze te werk dan men een kwarteeuw geleden deed? zonder daarom nog te vervallen in de meetkunde van schaar en stijfselpot. Maar hoevelen onzer eindexamen-candidaten zouden nog een aardig planimetrisch vraagstukje kunnen oplossen? En durven wij in de 5de klasse nog wel eens op de eerste bladzijden van het meetkundeboek terugkomen?

Ik noemde slechts enkele punten op wiskundig gebied, en zal niet uitweiden over het lot van cosmographie, mechanica en lijntekenen! Al kan men ook tegen het vak lijntekenen, als al te zeer technisch, bezwaren hebben, het kòn een gewaardeerde steun zijn bij het onderwijs in planimetrie en beschrijvende meetkunde.

Men kan over al deze wijzigingen verschillend oordeelen; en ik wil niet alles afkeuren, wat men in den laatsten tijd veranderd heeft in urentabel en leerplan, maar toch moet het vreemd aandoen, na al die wijzigingen te hooren spreken van een „meer en meer wiskundig” karakter.

Ik moet toegeven, dat ook de andere leervakken slaag gekregen hebben, en wanneer men alleen op het examenprogramma zou letten, en op grond daarvan en na vergelijking met een vroeger programma een conclusie zou willen trekken, dan zou de qualificatie „overlading” weinig van toepassing kunnen zijn. Trouwens, of er ooit van overlading kon worden gesproken, weet ik niet; er op dit oogenblik van te spreken is belachelijk.

Deze vrees voor overlading is zeer kenmerkend voor onzen tijd, waarin men meent „het kind” geen grooter weldaad te kunnen bewijzen dan door het voor inspanning te behoeden, of het te vrijwaren tegen alles, wat niet naar zijn (des kinds) smaak (tegenwoordig zegt men liever: naar zijn aard) is. Evenmin als men het kind bij iederen maaltijd zijn lievelingsgerecht zal voorzetten, evenmin moest men zich bij het bepalen van het geestelijk voedsel al te veel laten leiden door de vraag „hoe het hem smaakt”. Het gevaar dreigt, dat al de „keuze”, die men tegenwoordig biedt, en de „vrijheid”, die men begeert, tot verslapping zal leiden en dus zal blijken te zijn geweest uit den booze. Zooals men weet, doet zich reeds aan de H.B.S. een geval voor van het moderne denkbeeld der facultatieve

94 vakken, nl. aan het begin der 5de klasse, als de directeur aan de

leerlingen beleefdelijk de vraag voorlegt: wat wenscht U te gebruiken, boekhouden of mechanica? Ik ben er nooit geheel gerust op, of bij het „overleg” van de zijde der jongelui geen argumenten verzwezen worden, die met hun aard of zelfs met hun smaak weinig te maken hebben, maar meer in verband staan met vragen als deze: welke van de beide concurreerende leeraren zou het minste huiswerk geven, en welke de hoogste cijfers?

Er zal wel niemand zijn, die zou willen tegenspreken, dat het peil van het lagere zoowel als van het voortgezet onderwijs, natuurlijk in het algemeen gesproken, gedaald is; de oorzaken, die vermoedelijk velerlei zijn, zouden we daarbij nog in het midden kunnen laten. Wanneer men nu nog zou willen aannemen, dat de daling van het lager onderwijs in sneller tempo heeft plaats gehad dan die van het voortgezet onderwijs, dan zou daarmee verklaard zijn het beruchte verschijnsel van de „kloof”, die we thans bezig zijn te dempen met enquêtes, rapporten en aaneensluitingscommissies.

Men zal mij verwijten, dat ik dan de schuld van het bestaan van die kloof aan het lager onderwijs toeschrijf, hetgeen ik in hoofdzaak ook werkelijk doe. Nu moet men weer niet komen aandragen met het weinig frissche voorbeeld van het huis, waarvan men éérst het fundament legt om er daarna op voort te bouwen. Met dit beeld te gebruiken, bewijst men op de meest volledige wijze zijn ongelijk. Immers, wie een gebouw opricht, legt wel eerst de fundamenten, maar hij construeert ze in overeenstemming met het gebouw, dat erop zal moeten rusten.

Wanneer ik de schuld geef aan het lager onderwijs, dan wil ik daarmee niets zeggen ten nadeele van de onderwijzers. Inderdaad meen ik, dat zij in onze maatschappij een klasse vormen, die van de waardeering, die haar op grond van haar toewijding toekomt, slechts een klein percentage geniet. De fout schuilt m.i. geheel in het stelsel. Men heeft voor het lager onderwijs „methoden” uitgedacht, „aanschouwingsmateriaal” geconstrueerd en het stelsel van klassikaal onderwijs geperfectionneerd op zoodanige wijze, dat de intensiteit en het tempo van de geestelijke werkzaamheid der kinderen zijn teruggedrongen tot het uiterste minimum. Men bereikt daarmee, dat aan 100 % (of misschien 98 %) een zekere hoeveelheid kennis en technische vaardigheid wordt bijgebracht. Ik onderschat dit in geen deele, en wil hierbij opmerken, dat hetgeen gezegd is omtrent de daling van het peil van het lager onderwijs 95

alleen betrekking heeft op het gedeelte der leerlingen, dat voortgezet onderwijs genieten zal, welk gedeelte mij begrijpelijkerwijze thans alleen interesseert; voor het overige deel der schoolbevolking kan wellicht de lagere school een vergelijking met een vorige periode veel beter doorstaan.

Maar door te veel gebruik (en dus misbruik) te maken van de zooeven genoemde middelen heeft zij onrecht moeten doen aan de kinderen, die voorbestemd zijn voor het voortgezet onderwijs. Zij heeft hun niet meer kunnen geven datgene, waaraan die kinderen vóóral behoefte hebben: het bewustzijn, dat het raadplegen van het geheugen niet de eenig mogelijke geestelijke werkzaamheid is. Om het kort uit te drukken: de lagere school maakt het thans haren leerlingen véél te gemakkelijk; de leerling doet geestelijk te weinig, de onderwijzer doet te veel.

Dat de leerlingen, wanneer zij bij ons aankomen (uitzonderingen natuurlijk dáárgelaten) nog teveel uitsluitend het geheugen aanspreken, en er geen voorstelling van hebben, tot hoeveel méér zij in staat zijn, dit is naar mijne meening de geheele beteekenis van de „kloof”. Daar de scholen voor voortgezet onderwijs een bepaalde taak in een bepaalden tijd hebben te volbrengen, zal een wijziging van het stelsel van lager onderwijs moeten plaats hebben vóórdát wij kans hebben uit de moeilijkheid te komen. Ik bedoel hiermede *niet*, dat de eenheidsschool weg moet, of dat het Fransch weder moet worden ingevoerd. De fout zit veel dieper.

We moeten dankbaar erkennen, dat men in de kringen van het lager onderwijs dit meer en meer gaat inzien, en dat het aanpogingen om tot verandering te komen niet ontbreekt. Ik gevoel mij niet voldoende bevoegd op het gebied van het lager onderwijs om te durven komen met de aanprijzing van het Dalton-stelsel of een ander stelsel. Alleen moet ik bij deze gelegenheid de vraag stellen, of men bij het zoeken van nieuwe wegen op het gebied van opvoeding en onderwijs niet wat erg eenzijdig zijn blik richt naar het Westen. Sluiten wij wegens den afkeer, dien wij zijn gaan gevoelen voor den ouden Duitschen schoolmeester, niet al te zeer de oogen ook voor de goede hoedanigheden, die hij bezat?

Nu ik over de aansluiting spreek, wil ik de aandacht vestigen op een punt, waarop alle lichamen, die de zaak in studie genomen hebben, voor zoover ik heb kunnen nagaan, het eens zijn; n.l. dat 96 niet *alle* leerlingen, die de lagere school „met vrucht” gevolgd

hebben, op dien grond geschikt kunnen worden geacht voor het voortgezet onderwijs, zooals dat gegeven wordt aan Gymnasium en H.B.S. (Deze uitspraak acht ik van héél groote beteekenis, ook voor de vraag, waarmede we ons op dit oogenblik bezig houden: hoe het toch komt, dat naar de meening van zooveelen „de H.B.S. een meer en meer wiskundig karakter heeft aangenomen”). Hier zijn schakeeringen; men acht noodig: „bijzondere geschiktheid voor intellectueelen arbeid”, „eenige geschiktheid voor intellectueelen arbeid”, „geschiktheid voor in hoofdzaak intellectueelen arbeid”, enz. De moeilijkheid, waarvoor hoofden van scholen zich geplaatst zien, wanneer het op het afgeven der „verklaringen” aankomt, laat zich volkomen verklaren door het feit, dat zij zeer goed weten, dat niet iedere leerling, die hun te gemakkelijke school, zelfs met veel vrucht, heeft doorloopen, het op de H.B.S. zal kunnen volhouden. Toch meen ik, dat zij niet van die moeilijkheid kunnen worden ontslagen. Het kan zijn, dat ik het in dit opzicht gelukkig heb getroffen; ik zou het thans geldende stelsel van de verklaringen niet gaarne voor eenig ander ruilen; alleen hoop ik, dat wij nog eens van de bepalingen omtrent de cijfers, die de hoofden bij hun verklaring moeten voegen, en de cijfers, die wij zelf bij het admissie-examen geven, verlost zullen worden.

Het groot aantal teleurstellingen, dat reeds de eerste klasse der H.B.S. oplevert, wordt door leeken, zooals vanzelf spreekt, toegeschreven aan fouten in het H.B.S. onderwijs. Dat het vrij van gebreken is, zou ik niet gaarne verklaren, maar het zou thans te ver voeren, daarop in te gaan. De voornaamste oorzaken liggen echter m.i. elders, en een enkel (allerbelangrijkst) punt heb ik reeds besproken. Nu zou een statistiek gemakkelijk uitwijzen, dat de wiskunde volstrekt niet altijd het grootste struikelblok is, maar een feit is, dat wie zich tegen onze H.B.S. richt, zich in het bijzonder richt tegen het leervak Wiskunde. Toch is, naar ik reeds heb uiteengezet, de Wiskunde in den laatsten tijd er zeker niet gevaarlijker op geworden. Ik geloof daarom, dat de vermindering van de waardeering, die de Wiskunde als leervak treft, voor een gedeelte is toe te schrijven aan het feit, dat de H.B.S. niet aan alle gerechtvaardigde niet gerechtvaardigde eischen heeft kunnen voldoen.

Het is echter gemakkelijk, enkele meerdere punten op te noemen, die de genoemde vermindering van waardeering zouden kunnen verklaren. Men verneemt zoo vaak de klacht, dat men, aan hetgeen 97

men van de wiskunde heeft geleerd, in zijn verder leven zoo weinig heeft.

Tegenover deze klacht is in de eerste plaats op te merken, dat men in de jeugd van een kind moeilijk voorspellen kan, aan welke dingen het in zijn leven wat hebben zal. Maar bovendien, de bedoeling van het wiskundeonderwijs is toch ook volstrekt niet in de eerste plaats: het bijbrengen van de kennis van een zekere hoeveelheid stellingen en formules, en van eenige technische vaardigheden. Wat de voornaamste bedoeling dan wel is? het zou voor wiskundigen een beleediging inhouden, deze vraag hier te behandelen. Dat er sommigen onder ons zijn, die er nog niets van schijnen te weten, hierop kom ik nog terug.

Wat men eraan heeft? Ziedaar de ergerlijke vraag, die ten aanzien van een leervak als wiskunde thans meer dan ooit gesteld wordt, en die typeerend is voor de neiging tot veronachtzaming van het ideëele, die in den tijd van en na den oorlog zulke bedenkelijke afmetingen heeft aangenomen. Men heeft alleen iets aan hetgene, dat men zoo spoedig mogelijk in klinkende munt kan omzetten. Zelfs onze jongelieden zijn aangetast; men hoort het, als men met hen bij hun vertrek over de toekomstplannen spreekt; voor velen is reeds de salarismvraag de meest belangrijke, zoo niet de eenige.

Een vrij algemeen gevoeld bezwaar tegen de wiskunde is, dat het geen vak „voor iedereen” zou zijn. Hier ben ik genaderd tot de legende van de speciale wiskundige begaafdheid. Als axioma aanvaardt men gaarne: een kind heeft mathematischen aanleg of het heeft dien niet; in het laatste geval heeft het literairen (literair-economischen?) aanleg. Hoe de legende van de speciale wiskundige begaafdheid in de wereld gekomen is, is gemakkelijk te gissen: het is een slimmigheid van den eersten slechten wiskundeleeraar. Toen hem in de leerarenvergadering gevraagd werd, waarom hij toch altijd zooveel onvoldoende cijfers had, heeft hij het zooeven genoemde axioma uitgesproken. Daar er nog steeds slechte wiskundeleeraren schijnen te zijn, en ze er ook wel zullen blijven, lijkt mij de kans uitgesloten, dat men het dwaalbegrip nog zal kunnen uitroeien. Mijn stellige overtuiging is, dat als hij zijn tijd goed besteedt en zorgvuldig overweegt, welke eischen hij op een zeker oogenblik aan zijn leerlingen mag stellen, de wiskundeleeraar volstrekt niet méér onvoldoende cijfers behoeft te geven dan zijn

niet-wiskundige collega's. Komt hij regelmatig met een groot aantal onvoldoende cijfers, waar zijn collega's een milder oordeel kunnen uitspreken, dan zijn daarmee niet zijn leerlingen veroordeeld, noch zijn leervak, doch uitsluitend hijzelf.

Of dan niet de eene leerling de wiskunde met meer gemak beoefent dan de andere? Welzeker, maar dit zal met ieder vak zoo zijn. De vraag, waarom het gaat, is, of het waar is, dat er vele leerlingen zijn, die héél goed andere zaken kunnen leeren, maar juist géén wiskunde. En deze vraag meen ik op grond mijner ervaring ontkennend te moeten beantwoorden. Ik kan me niet meer dan één leerling herinneren, die „goed” was in de andere vakken, en een der onderdeelen van de wiskunde *niet* kon leeren.

Het vorige punt brengt er mij vanzelf toe, iets te zeggen over het wiskunde-onderwijs aan meisjes. Het vraagstuk van het voortgezet onderwijs voor meisjes is zoo ingewikkeld, omdat het, meer nog dan voor de jongens, behalve een paedagogische ook een maatschappelijke zijde heeft. Let men alleen op de maatschappelijke zijde, dan zal men geneigd zijn deze vraag te stellen: Is het nu bepaald noodig, dat al onze meisjes of die vervelende klassieke talen verdragen of die akelige wiskunde? Maar als men alleen op de paedagogische zijde zou letten, dan zou men allicht de vraag aldus inkleeden: Hebben ook de meisjes met het oog op de moeilijkheden, die ook haar in het leven niet gespaard zullen blijven, recht op een onderwijs, dat niet de moeilijkheden uit den weg gaat, maar ze bij voorkeur opzoekt, omdat ze kunnen dienen om het verstand te scherpen, en de wilskracht te vergrooten?

Men tracht wel door statistieken aan te toonen, dat meisjes „van nature” een geringe neiging tot de wiskunde vertoonen. Nu zijn cijfers en statistieken heel gevaarlijke dingen en men is verrast, als men ziet, wat er op onderwijsgebied mee bereikt wordt. Alle statistieken als de genoemde lijden aan het euvel (indien zij niet reeds veroordeeld zijn doordat zij over te kleine aantallen handelen) dat zij geen licht brengen op het punt van de factoren, die tot het resultaat hebben bijgedragen. De drie voornaamste factoren zijn in dit geval: natuur, onderwijs, opvoeding; misschien moet de volgorde juist omgekeerd zijn. Over dit punt heeft Dr. Adler in een van zijn lezingen te Amsterdam zeer belangwekkende zaken medegedeeld. Het zou wel van belang zijn, indien collega's op dit punt eens iets van hun bevindingen mededeelden. Ik heb de minderwaardigheid

der meisjes op het gebied der wiskunde-studie niet kunnen constateren; wat een groot deel harer wel erg in den weg staat, is een gemis aan zelfvertrouwen. Dat dít *ontstaat* door haar geringer resultaat geloof ik niet; ik ben eerder geneigd het geringer resultaat toe te schrijven aan het weinige zelfvertrouwen; het laatste ware wellicht door de groote verschillen in de opvoeding van jongens en meisjes volledig te verklaren.

Ik heb hiermede enkele punten aangeduid, die kunnen hebben bijgedragen tot een vermindering van de waardeering, die de wiskunde thans ondervindt, en wil ten slotte nog een oogenblik stilstaan bij het aandeel, dat sommige van onze collega's meenen te moeten nemen in het bestoken van hun leervak. Het is een gevaarlijk verschijnsel, omdat de invloed van dezulken op het groote publiek aanzienlijk is. Voor teleurgestelde ouders gelden zij als profeten. Men verheugt zich erin, nog eens enkele frissche lieden op te merken in het leger van frikken en sleurmenschen. Een uitspraak, die thans in de mode is, is, dat de schoolwiskunde slechts techniek is, dus op één lijn te stellen met handteekenen en gymnastiek. De laatste toevoeging kan slechts dienen, om de grootte der minachting nader te bepalen. Hoe bekrompen het is, de laatste twee vakken als louter techniek te qualificeeren, moge ik onbesproken laten. Dat een gedeelte van hetgeen wij als wiskunde bedrijven, inderdaad „slechts” techniek is, kan men niet tegenspreken. Maar dít beschouw ik als één der vele goede zijden, die de wiskunde als leervak heeft. Om den leerlingen den smaak te geven voor —, en het nut te doen zien van ordelijk en accuraat werken, daarvoor is geen enkel leervak zoo geschikt als wiskunde. Maar dat de wiskunde *uitsluitend* techniek zou zijn, is een uitspraak, die bewijst, dat bedoelde collega's een zonderlinge opvatting hebben van de schoone taak, die hun is opgedragen.

Twee mensen die een belangrijke invloed gehad hebben op het wiskunde-onderwijs in de periode 1925-1945 zijn H. J. E. Beth en E. J. Dijksterhuis. De commissie Beth-Dijksterhuis heeft een ontwerp voor een nieuw leerplan gemaakt en dat de inspectie aangeboden. Zie hiervoor jaargang 2 (1925-1926), blz. 113 e.v. en jaargang 3 (1926-1927), blz. 154 e.v. Op basis van dit ontwerp is in 1936 een nieuw leerplan voor de hbs van kracht geworden. In de beginselverklaring van de commissie lezen we: 'Zij wenst vóór alles de vormende waarde, die van beoefening der wiskunde kan uitgaan, in het oog te houden en eerst in de tweede plaats te letten op het praktische nut, dat de kennis van sommige gebieden der wiskunde voor een deel harer leerlingen later kan hebben; zij acht daarom het aanbrenge van fundamentele theoretische inzichten belangrijker dan het ontwikkelen van technische vaardigheid' (jaargang 13 (1936-1937), blz. 271). We zien in het nieuwe programma dan ook dat veel aandacht besteed werd aan de theorie van de rekenkunde, zelfs reeds in de eerste klas. Verder is essentieel de successievelijke uitbreiding van het getalbegrip, waarbij het irrationale en het complexe getal eerst in de bovenbouw (klassen 4 en 5) aan de orde kwamen. De betekenis van de fundamentele logische begrippen axioma, definitie, bewijs, stelling moest de leerlingen duidelijk gemaakt worden. De beginselen van de infinitesimaalrekening werden in het leerplan (echter nog niet in het examenprogramma) opgenomen. Samengestelde interest was niet van theoretisch belang en werd geschrapt.

Verwant met deze opvattingen is de inhoud van een artikel van P. Wijdenes over het getal i in jaargang 10 (1933-1934), blz. 1-12. Men ziet in dit artikel welke catastrofes er kunnen optreden, als men tracht techniek te funderen op theoretisch drijfzand. Het artikel woelde heel wat los. Voor- en tegenstanders van behandeling van de complexe getallen in klas 2 kregen in de erop volgende afleveringen van het tijdschrift ruimschoots de gelegenheid hun argumenten kenbaar te maken.

i
DOOR
P. WIJDENES.

Een kortere titel dan die enkele i zal men allicht niet kunnen vinden; moge de invloed, die van het volgende uit zal gaan omgekeerd evenredig zijn met de grootte van het opschrift. „Uit zal gaan”, want dat dit over de heele linie werkelijkheid zal worden, durf ik niet te onderstellen. Alweer wou ik nl. een aanval doen op sleur; als het breken met sleur tot gevolg heeft, dat onnoodige moeilijkheden worden weggenomen en dat er minder aanleiding is tot schijngeleerdheid en dikdoenerij, dan geloof ik, dat een groot deel van de collega's wel een handje wil helpen.

Ik wou nl. niets meer of minder dan i geheel verwijderen uit onze schoolwiskunde, tenzij men voor een niet al te oppervlakkige behandeling in de hoogste klas de tijd weet te vinden.¹⁾

Voor geen enkel ander schoolvak is het noodig, dat de leerlingen vooraf kennis hebben gemaakt met de imaginairen; blijft dus alleen de wiskunde voor zich zelf. De onderdeelen vlakke meetkunde, stereometrie, driehoeksmeting en beschrijvende meetkunde kennen geen imaginairen. Een rechte snijdt een cirkel, raakt een cirkel of ligt buiten de cirkel; wie denkt er aan zijn leerlingen in de tweede klas te vergasten op: elke rechte snijdt elke cirkel in twee punten met de onderscheiden gevallen van twee verschillende punten, twee samenvallende of twee toegevoegd imaginaire. Toch vindt men de stof voor de imaginairen bij de wortelvormen, die in de tweede klas aan de beurt komen, dus zou er aanleiding toe kunnen zijn het geleerde toe te passen bij de cirkel.

¹⁾ Men leze vooral ook het welsprekend betoog van Dr. Beth in „Euclides” Jg. V blz. 110—121 onder de titel „*De behandeling der complexe getallen*”.

In het „Ontwerp van een leerplan” (zie Bijvoegsel van het N. T. v. W. Jg. II 1925/26 blz. 113 en volgende) ontbreekt voor de 2e klas de behandeling van de imaginairen. Voor de 5e klas staat opgegeven „algebraïsche behandeling van het complexe getal”.

Men zegt in de stereometrie, dat twee bollen, die geheel buiten elkaar liggen, geen enkel punt gemeen hebben, toch zeker niet, dat hun snijlijn enkel imaginaire punten heeft? Van $\sin x = 2$ wordt alleen gezegd, dat dat niet kan; over de Beschrijvende Meetkunde praten we niet eens. Rest ons de Algebra zelf; $\log -3$ „kan niet”, volkomen in orde op school. Het eenige, wat wel „kan” is $\sqrt{-4}$; dat is immers $2\sqrt{-1}$ of $2i$!! Beteekent dat iets, zegt dat wat? Dat willen we nu eens nagaan en nu kan ik niet beter doen, dan onze schoolboeken opslaan om te zien, hoe de imaginairden daarin worden behandeld; de bedoeling van de schrijvers kan toch geen andere zijn, dan dat ze zich voorstellen, dat de leerstof den leerlingen zal worden bijgebracht op de manier, die ze in de boeken aangeven.

We beginnen dan maar met wat voor de hand ligt, nl.

1. *Wijdenes en De Lange*, Leerboek der Algebra II.

Daar we vroeger geleerd hebben, dat machten met een even getal als exponent positief zijn, bestaat er geen enkel algebraisch getal, dat gelijk is aan de even wortel uit een negatief getal.

Zoo is b.v. $\sqrt{-4}$ niet gelijk aan $+2$ en ook niet gelijk aan -2 ; $\sqrt[2n]{-a^{2mn}}$ is niet gelijk aan $+a^m$ en ook niet aan $-a^m$.

We vinden dus:

Evenmachtswortels uit negatieve getallen kunnen niet door een positief of negatief getal worden voorgesteld. Ze vormen een geheel nieuwe groep van getallen en worden **imaginaire getallen** genoemd. In tegenstelling daarvan heeten alle andere getallen **reële getallen**.

Dus zijn $\sqrt{-4}$ en $\sqrt[2n]{-a^{2mn}}$ beide imaginaire getallen. De eenvoudigste imaginaire getallen zijn $+\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; men noemt $\sqrt{-1}$ de imaginaire eenheid; deze wordt gewoonlijk voorgesteld door de letter i . In plaats van $2\sqrt{-1}$ schrijft men dus $2i$. Uit deze bepaling volgt onmiddellijk, dat $i^2 = -1$ is.

In plaats van $\sqrt{-4}$ kan men ook schrijven $\pm 2i$, want: $(\pm 2i)^2 = +4i^2 = -4$.

Evenzoo schrijft men in plaats van $\sqrt{-5}$ nu $i\sqrt{5}$; van beide is het kwadraat toch -5 .

2. *Wijdenes en Beth*, Nieuwe School-algebra II.

2 We vragen ten slotte naar de even wortel uit een negatief getal,

en bepalen ons tot de vierkantswortel. Willen we de gewone definitie woordelijk handhaven, dan moeten we onder $\sqrt{-9}$ het getal verstaan, waarvan het vierkant gelijk is aan -9 . We zouden geneigd zijn te zeggen, dat zulk een getal niet bestaat; inderdaad is het vierkant van elk getal, dat we kennen, een positief getal. We hebben echter reeds enkele malen de verzameling der getallen uitgebreid en passen thans opnieuw deze maatregel toe. We voeren als nieuwe getallen de getallen in, die als eigenschap hebben, dat hun vierkant een negatief getal is. Dat deze uitbreiding werkelijk mogelijk is, zullen we pas later kunnen aantonen; we zullen dan ook weer de bewerkingen met die getallen definieeren, de geldigheid der eigenschappen voor die bewerkingen bewijzen, enz. Thans doen we weder, alsof dit alles reeds had plaats gehad; de nieuw ingevoerde getallen noemen we **imaginaire** getallen; in tegenstelling daarmee noemen we de ons reeds bekende getallen **reëel**.

Als we aannemen, dat de geldigheid van de eigenschappen der bewerkingen blijft doorgaan, dan mogen we voor $\sqrt{-a}$, waarin a een positief getal voorstelt, schrijven $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$, d.w.z. we kunnen elk imaginair getal schrijven als het product van een reëel getal en $\sqrt{-1}$; gemakshalve stellen we $\sqrt{-1}$ voor door i . We schrijven dus $\sqrt{-9}$ als $3i$, maar moeten bedenken, dat zoowel $-3i$ als $+3i$ als vierkant heeft -9 .

De volgende aanhalingen geven we zonder vermelding van de naam of de namen van de schrijvers.

3. Vraagt men naar een getal x , dat, tot de tweede macht verheven, 5 oplevert, dan heeft men de vergelijking $x^2 = 5$ op te lossen. Men krijgt als oplossing $x = \pm \sqrt{5}$. Vraagt men echter naar een getal, waarvan het kwadraat gelijk is aan -5 , heeft men dus op te lossen de vergelijking $x^2 = -5$ of $x^2 + 5 = 0$, dan zal men antwoorden, dat dit niet gaat, omdat er geen enkel getal, noch een positief noch een negatief is, dat in het kwadraat verheven een negatieve uitkomst oplevert. Wij zien ons hier voor een soortgelijke moeilijkheid geplaatst als wanneer gevraagd wordt, 7 van 4 af te trekken, indien men slechts over positieve getallen beschikt. Uit deze laatste moeilijkheid redden wij ons door de invoering van een nieuw soort getallen, namelijk de *negatieve*, waardoor aftrekkingen ook mogelijk worden, wanneer de aftrekker grootter is dan het aftrektal.

De oplossing der vergelijking $x^2 + 5 = 0$ of $x^2 = -5$ zullen wij nu ook mogelijk maken door de invoering van een nieuw soort getallen, waarvan het kwadraat negatief is, de zoogenaamde *imaginaire getallen*. Onder i verstaat men $\sqrt{-1}$, de zoogenaamde *imaginaire eenheid*; per definitie geldt dus $i^2 = -1$.

De oplossing der vergelijking $x^2 = -5$ wordt dus $x = \pm \sqrt{-5} = \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5} = \pm i\sqrt{5}$. Opgemerkt wordt, dat men met i mag werken als met ieder ander getal; dit moet natuurlijk bewezen worden, doch het bewijs wordt hier achterwege gelaten.

4. Evenmachtswortels uit negatieve getallen.

$\sqrt{-4}$ is noch $+2$, noch -2 , omdat $(\pm 2)^2 = +4$ en niet -4 is.

$\sqrt[6]{-a^{12}}$ is noch $+a^2$, noch $-a^2$, omdat $(\pm a^2)^6 = +a^{12}$ en niet $-a^{12}$ is.

In het algemeen: $\sqrt[2n]{-a^{2np}}$ is noch $+a^p$, noch $-a^p$.

Wij leeren hieruit:

Evenmachtswortels uit negatieve getallen zijn noch positief noch negatief. Zij kunnen dus niet voorgesteld worden door de algebraïsche getallen, die men tot nu toe heeft leeren kennen, en vormen daarom een nieuwe soort van getallen, die men imaginaire getallen noemt.

In tegenstelling met de imaginaire getallen noemt men alle andere reëel.

De imaginaire getallen worden later behandeld.

(Inderdaad, dit wordt gedaan; omvang 13 blz. techniek).

5. Evenmachtswortels uit negatieve getallen.

De tweede macht van elk positief en van elk negatief getal is positief. Er bestaat dus geen enkel positief of negatief getal, dat tot de tweede macht verheven, een negatief getal (b.v. -9) oplevert. Hetzelfde geldt voor iedere evenmacht.

Evenmachtswortels uit negatieve getallen kunnen dus niet voorgesteld worden door de algebraïsche getallen, die wij leerden kennen. Zulke wortels (bv. $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-625}$) noemt men **imaginaire wortels** of **imaginaire getallen**. De positieve en negatieve getallen noemt men in tegenstelling met de imaginaire getallen, die in

4 deel III behandeld zullen worden, **reëel**. — Na een herhaling van

het bovenstaande wordt in deel III als volgt verder gegaan: De eenvoudigste imaginaire getallen zijn $+\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; zij heeten de **positieve** en **negatieve imaginaire eenheid** en worden gewoonlijk voorgesteld door $+i$ en $-i$.

(Volgt verder 11 blz. theorie, waarop wel een en ander is af te dingen en wat techniek).

6. Imaginaire getallen. Zooals reeds meermalen is opgemerkt, is y in $y = x^2$ voor alle waarden van x positief. Is dus $x^2 = -3$, dan is x onbestaanbaar. Dergelijke uitzonderingen nu tracht men in de wiskunde steeds op te heffen.

Men heeft daarom een nieuw soort getallen ingevoerd. Men schrijft $x = \pm \sqrt{-3}$ en verstaat onder $\sqrt{-3}$ het getal, welks kwadraat -3 is. Deze getallen heeten **imaginair** (denkbeeldig, onbestaanbaar), in tegenstelling met de tot nu toe behandelde, die **reëel** (werkelijk) worden genoemd.

Definitie. Onder $\sqrt{-a}$ verstaat men het getal, welks vierkant gelijk is aan $-a$.

Voor $\sqrt{-a}$ schrijft men $\sqrt{-1} \times \sqrt{a}$ en stelt $\sqrt{-1}$ voor door i . Dus $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$.

Daarna behandelt men dit getal, alsof i een gewone factor is en neemt $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$. Het meest algemeene getal is een tweeterm, waarvan de eene term reëel, de andere imaginair is. Bijvoorbeeld:

$$3 + \sqrt{-5} = 3 + i\sqrt{5}; \quad 7 - 2\sqrt{-3} = 7 - 2i\sqrt{3}$$

$$\text{algemeen } a + \sqrt{-b} = a + bi.$$

Deze getallen heeten *complex*.

7. Uit een Belgisch algebra-boek.¹⁾

Bepalingen. — Een *imaginaire wortelvorm* is een uitdrukking die den vorm $\sqrt{-a}$ heeft.

Dit algebraïsch symbool wordt beschouwd als de vierkantswortel van een *negatief getal*; men heeft dus

$$(\sqrt{-a})^2 = -a.$$

¹⁾ Philippens en De Huisser Algebra, theoretische en praktische leergang.

Als een algebraïsche uitdrukking minstens één imaginaire wortel bevat noemt men haar *imaginaire uitdrukking*.

Bij voorbeeld

$$a + \sqrt{-b}.$$

In tegenstelling wordt een uitdrukking, die niet imaginair is, reëel genoemd.

$\sqrt{-1}$ of *i*. — Men komt overeen op de imaginaire wortels dezelfde regels toe te passen als op de reële wortels.

Zoo heeft men, door uitbreiding van den regel op het product van wortels tot de imaginaire wortels, bij voorbeeld

$$\begin{aligned}\sqrt{-4} &= \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}, \\ \sqrt{-7} &= \sqrt{7 \cdot (-1)} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{7} \sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Meer algemeen $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \sqrt{-1}.$

Dus kan iedere imaginaire wortel $\sqrt{-a}$ vervormd worden tot een product van een reëlen wortel $\sqrt{a}$ met den imaginair wortel $\sqrt{-1}$; $\sqrt{-1}$ wordt de *imaginaire eenheid* genoemd. Men stelt $\sqrt{-1}$ voor door *i*.

8. Vertaling van de inleiding over de imaginair uit een Italiaansch boek voor de middelbare school.¹⁾

330d. Ten slotte, als *a* een negatief getal is en de wortel exponent is een even getal $2n$, dan bestaat er geen reële waarde voor de wortel, volgens de regel van de teekens, want zoowel een positief als een negatief getal hebben als $2n^e$ macht een positief getal. Zoodat een even wortel uit een negatief getal niet bestaat in het gebied van de reële getallen.

354. Wij hebben in nr. 330d gezien, dat een even wortel uit een negatief getal niet bestaat onder de reële getallen; in het bijzonder bestaat de vierkantswortel uit een negatief getal niet in het gebied van de reële getallen.

Is het mogelijk, een beteekenis te hechten aan zoo'n wortel door middel van een gepaste uitbreiding van het begrip getal?

De letters, die wij gebruiken in de algebra en die reële getallen

¹⁾ Salvatore Pincherle Lezioni di algebra elementare ad uso delle scuole medie superiori.

voorstellen, worden verbonden door zekere bewerkingen, genaamd optelling, vermenigvuldiging, machtsverheffing enz., bewerkingen, met bepaalde rekenregels.

In verbinding met de letters, die reële getallen voorstellen, beschouwen we nu een nieuw symbool, waaraan we niet de betekenis van een reëel getal hechten, maar waaromtrent we overkomen, dat het verbonden kan worden met de voorgaande door de bewerkingsteekens van de reële getallen en dat de rekenregels en de eigenschappen formeel dezelfde blijven, als die, welke zijn vastgesteld voor de reële getallen. Omtrent dit symbool, dat wij volgens gewoonte voorstellen door i , maken wij de volgende afspraken:

a. Het symbool i stelt geen reëel getal voor. De andere letters, die wij zullen gebruiken, stellen daarentegen reële getallen voor.

b. Als de letter i voorkomt in een algebraïsche uitdrukking, dan passen we daarop de formeele regels toe van de bewerkingen zooals met willekeurige andere letters, die reële getallen voorstellen.

De schrijfwijze $a + i$, ai , ... wordt genoemd optelling van i bij a , vermenigvuldiging van a met i , Van deze spreekwijzen geven we geenerlei definitie, maar we behandelen ze, we herleiden de vormen volgens de eigenschappen, die gelden voor reële getallen.

Aldus: de symbolen ai en ia kunnen worden verwisseld en men schrijft $ai = ia$; eveneens dus $a + i = i + a$, enz.; dus zal ook $bi = 0$ zijn, als en alleen dan als $b = 0$ is. Ook worden de gelijkheden van uitdrukkingen, die i bevatten, behandeld als gewone gelijkheden.

c. Men voert de begrippen grooter en kleiner voor uitdrukkingen, die i bevatten, niet in.

d. Telkens als in het rekenen, de vermenigvuldiging van i met zich zelf voorkomt, dus $i \cdot i$ of i^2 , vervangen we dit door -1 :

$$i^2 = -1.$$

355. Het teken i heet imaginaire eenheid. Het product $ai (= ia)$, waarin a een willekeurig reëel getal is, heet imaginair getal. Het imaginaire getal wordt positief of negatief genoemd, al naar a positief of negatief is. De getallen ai en $(-a)i$ of $-ai$ heeten tegengesteld.

356a. Een tweeterm van de vorm $a + bi$ wordt complex getal genoemd; a heet het reële deel, bi het imaginaire deel van hetzelfde complexe getal.

b. Twee complexe getallen $a + bi$ en $c + di$ heeten gelijk, als $a = c$ en $b = d$ is en alleen in dit geval. Men schrijft kortweg $a + bi = c + di$. Deze bepaling bevat de formeele eigenschap van het gelijk zijn."

We eindigen met de aanhalingen; ik heb geen enkel Fransch schoolboek, ook geen enkel Duitsch, dus kan ik die slecht aanhalen; over een Belgisch boek in het Fransch geschreven, straks. Opzettelijk haal ik niet aan, wat er van de imaginairen staat in Nieuwe School-algebra IV, noch in mijn Lagere Algebra I; ik beperk mij tot wat in de schoolboeken blijkbaar voor de 2e of 3e klas bestemd is. En dan moet het mij van het hart, dat al die aanhalingen al heel weinig om het lijf hebben; aanmerkingen zijn op alle te maken, op de eene wat meer, op de andere wat minder; de eerste zijn het talrijkst.

Ik wil niet vragen, wat het beste is van de 8 aangehaalde stukjes; laten we liever zeggen, welke de minst slechte zijn; dan lijkt me toe, dat dat nr. 2 en nr. 8 zijn; over de andere zwijgen we geheel; ze wijken ook niet noemenswaard af. Maar lees nu 2 en 8 eens aandachtig over, woord voor woord; is dat voor schoolkinderen van een tweede klas? Wat beteekent dat al met al voor hen? Het is alsof de leeraar op een verhooring staat, achter zich kijkt naar wat hij gedaan heeft in de 1e klas bij de negatieve getallen, nu echter een verschiet opent, waar nog heel wat anders ligt, dan ze tot zoover aanschouwden. Of het hen bevredigt en of we niet veel te hooge eischen stellen aan de leerlingen, zie, dat is voor mij geen vraag, maar voor U ook niet. Behandelt men de zaak zooals nr. 8 en dan prima uitgelegd, dan is het goed, maar het is ongeschikt voor de 2e klas; nr. 2 doet het nog zoo kwaad niet; dat zegt: later (in deel IV) zullen we dat wel eens naar den eisch in orde maken; ga nu je gang maar. Bevredigt dat? Natuurlijk ook niet. Maar toch is het beter, dan te probeeren het „onbestaanbare” (ellendiger woord is er niet, imaginair is al even slecht) te willen „verklaren”. In zijn soberheid is 1 nog zoo kwaad niet; maar zooals gezegd, de invoering, zooals nr. 8 dat doet (dit komt het meest nabij bij wat de Nieuwe School-algebra IV vrij uitvoerig geeft) is verre te verkiezen boven de andere. Ook logisch, volmaakt logisch; wij zitten nog te veel vast aan wat te kwader ure in lang vervlogen tijd uit

8 een voor volwassenen bestemd leerboek verkort en „vereenvoudigd’

werd overgenomen;¹⁾ en toen plaatste men de imaginairen direct na de wortelvormen. Zeker, daar zullen ze wel hun oorsprong gevonden hebben, maar dat is geen reden om op het verkeerde pad voort te blijven gaan. *Het moet, zooals wij dat voorstellen: algeheele verwijdering* uit deel II (bij alle schrijvers) en of niet meer noemen op de Middelbare school of in de 5e (6e) klas de imaginairen eenigszins behoorlijk bespreken; ik ben vóór het eerste, althans indien voor het tweede de tijd ontbreekt, wat doorgaans wel het geval zal zijn!

Ik keer terug tot de schoolboeken en de vraagstukken. Gemakkelijk is de jongens de techniek met i bij te brengen, om het zoo eens te zeggen, maar wat heeft dat in? Wat moet dat? Waar is het goed voor; voor de vormende waarde soms? Voor de techniek op zich zelf? Ettelijke bladzijden techniek enkel en alleen om herleidingen te laten maken, als nr. 4 ze geeft:

$$\frac{\sqrt{-3} + \sqrt{-10} + \sqrt{-7}}{\sqrt{-3} + \sqrt{-10} - \sqrt{-7}}, \quad \sqrt[4]{-28 - 16\sqrt{-12}},$$

om er maar een paar aan te halen als afschrikwekkende voorbeelden (die nr. 4 maakt het al heel bont in dat opzicht; alle anderen hebben zich tenminste binnen redelijke grenzen gehouden; ook zij gaan echter niet vrij uit).

Waar het goed voor is, liever: waarom de imaginairen behandeld worden? *Enkel en alleen om bij de vierkantsvergelijkingen te kunnen zeggen, dat deze allemaal twee wortels hebben*; in welke woorden en met welke overzichten, dat behoef ik hier natuurlijk niet neer te schrijven. (Vandaar waarschijnlijk, dat eenige schrijvers zich beperken tot een klein beetje techniek met de imaginairen). Is daar nu geen ontkomen aan, zoodat we de zinloze theorie en de

¹⁾ In een bespreking door Schogt, te vinden op blz. 214 van Jg. IX staat: „Wij hebben hier dus te doen met een der niet zeldzame gevallen, waarin een onderwerp (uit de Mechanica) dat door gebrekkig inzicht van een vorige generatie in de leerstof van de middelbare scholen is opgenomen, door sleur en traditie op het programma is gehandhaafd. De leerstof van dergelijke onderwerpen te zuiveren is een eerste eisch voor saneering van het onderwijs. Moge de poging daartoe succes hebben.” Maar onmiddellijk daarop laat hij volgen: „Wie, zooals ondergeteekende, weten, hoe sterk de voorliefde voor het traditionele is — zij het dan nog zoo foutief — zijn hierop niet heel gerust.”

Met deze woorden stem ik volkomen in; als dit zou slaan op „ i ”, dan moet „foutief” worden vervangen door „zinloos en nutteloos.”

malle vraagstukken overboord kunnen gooien? Is die theorie gezien de 8 voorbeelden, niet zinloos voor kinderen, voor ons niet net zoo, zoo zinloos, dat de heel enkele, die doorgaat in wiskunde, goed doet met vooral niet zijn schoolboek op te slaan. Zijn de bewerkingen „met i ” niet volslagen noodeloos voor alle andere schoolvakken, ook voor de verdere algebra? Is het niet beter, dat de jongens haasje over spelen dan vormen herleiden als

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4,$$

om er een uit Nieuwe School-algebra II te nemen (slechts kinderspel, vergeleken bij de opgaven, die door nr. 4 worden gevegd).

Hoe we van de imaginairén afkomen? Doodeenvoudig: de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft geen wortels, als $b^2 - 4ac = D < 0$ is; $ax^2 + bx + c$ heeft geen nulpunten, als $D < 0$ is; dat komt ook zoo mooi uit met de grafiek; immers voor $D < 0$ snijdt de grafiek de X-as niet; $ax^2 + bx + c$ is ook niet te ontbinden in lineaire vormen in x , als $D < 0$ is.

Dat is alles; de heele theorie van de vierkantsvergelijking en van de kwadratische functie wordt er sterk door vereenvoudigd en verhelderd. Thans bestaat nog het eigenaardige geval, dat $x^2 + x + 1 = 0$ wel twee wortels heeft, $x^2 + x + 1$ echter geen nulpunten; er is toch wel niemand, die de jongens leert, dat $x^2 + x + 1$ imaginaire nulpunten heeft, wel? De waarden van x , waarvoor $f(x)$ nul wordt, heeten nulpunten van $f(x)$; bij het maken van de grafiek zijn het de snijpunten van $y = f(x)$ met de x -as. Dat begrijpen de leerlingen wel, maar „imaginaire nulpunten”, dat schemert hun voor de oogen, of het is volslagen duisternis en daar zijn ze zelf niet schuldig aan, maar wij.

Het bovenstaande hebben Beth en ik overwogen toen de uitgever ons de copie vroeg voor een herdruk van Nieuwe School-algebra II; daarin is een eind gemaakt aan: $ax^2 + bx + c = 0$ heeft twee wortels, wat a , b en c ook zijn; we zeggen nu: $x^2 + x + 1 = 0$ is een eisch, waaraan niet kan worden voldaan; (evenmin als aan $3x + 5 = 3x + 7$, aan $\sin x = 1\frac{1}{2}$, aan $2^x = -3$). De grafiek van $y = x^2 + x + 1$ snijdt de X-as niet; $x^2 + x + 1$ is immers $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$; de som van twee positieve getallen kan toch niet 0 zijn. En nu kan men met schijngeleerdheid en zwaarwichtig

10 gedoe daar wel een draai aan geven, maar is dat in het belang van

de jongens en is het ergens goed voor? Ons antwoord vindt men in het bovenstaande.

Dit stukje is geschreven, nadat de copie voor deel II klaar gemaakt was; ik zeg dit er bij, om direct al te antwoorden op: „jullie hebt ze zelf ook, die imaginairen, jullie bent geen haar beter dan alle anderen”. Heb ik zelf ook al gezegd, *maar nu willen we breken met ons verleden, omdat het geen nut heeft en ook niet ontwikkelend* is die „behandeling” van de imaginairen, het maken van sommen met i en het schermen met zinlooze woorden.

Nu had ik nog gezegd, terug te zullen komen op het Belgische algebra-boek; dat is van Dr. V. Herbiet,¹⁾ dat hij mij met zijn „Homage respectueux” voor een paar maanden toezond. Ik lees daar:

„Un nombre négatif n'a pas de racine carrée; car on vient de voir que le carré de tout nombre est positif. (Meer niet!)

Bij de besprekingen van $ax^2 + bx + c = 0$:

Troisième cas . $b^2 - 4ac < 0$. L'équation est impossible. Donc le nombre de racines de l'équation du second degré dépend du signe de la quantité $b^2 - 4ac$.

Onder het hoofd: Le trinôme du second degré:

Troisième cas: $b^2 - 4ac < 0$. La forme $y = ax^2 + bx + c$ est remplacée par la suivante:

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$$

Si nous désignons par K^2 la quantité positive $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$, nous obtenons $y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + K^2 \right]$; (hiermee weer afgeloopen).

Onder: Signe du trinôme:

Troisième cas: $b^2 - 4ac < 0$. La forme

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + K^2 \right]$$

montre que $\frac{y}{a}$ est une somme de deux carrés qui est constamment positive.

Hiermee ben ik het volmaakt eens; korter, beter en duidelijker

¹⁾ Dr. V. Herbiet, Traité d'Algèbre élémentaire; een boek dat in vele opzichten verder gaat dan N. S. Alg. III.

kan het niet. Dr. Beth heeft hetzelfde voorgesteld in het artikel, dat op blz. 1 in de noot wordt genoemd.¹⁾ We gaan nu opruiming houden en we hopen en vertrouwen, dat de vakgenooten ons op deze weg zullen willen volgen.

¹⁾ Men leze ook wat Prof. Van Rooy (Potchefstroom) schreef op blz. 196 van de vorige jaargang (Jg. IX) onder het opschrift: „Die funksiebegrip en die grafische voorstelling”: „Dit word nog versterk as hij merk dat die vergelijking $ax + b = 0$ soms 'n wortel het en dan weer geen wortel het nie; dat die vergelijking $ax^2 + bx + x = 0$ twee wortels, een wortel of geen wortel het nie.”

NASCHRIFT. Dit artikel is in handschrift reeds gezonden aan de Heeren Schogt, Beth en Dijksterhuis, die zich met de strekking zeer goed konden verenigen.

In drukproef is het gezonden aan de Inspecteurs van het Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs en aan de andere medewerkers, op de omslag vermeld nl. aan de Heeren Gerrits, Haalmeijer, Thijsen (thans met verlof hier te lande), De Vaere en Verrijp.

In een volgende aflevering zullen eenige antwoorden worden afgedrukt; we kunnen alvast wel zeggen, dat „i” voor de tweede klas wel afgedaan zal hebben.

We wekken alle lezers van dit artikel op aan de redactie te berichten, hoe zij er tegenover staan, al of niet met redenen omkleed.

Gaarne wachten we deze berichten vóór 1 Dec. 1933.

In 1940 had er een verandering plaats in de status van Euclides. Op de omslag leest men dat het van nu af aan 'Officieel orgaan van Liwenagel en van Wimecos' is. Dit houdt in dat de leden van Liwenagel en Wimecos Euclides toegezonden kregen; de leden van Liwenagel betaalden f 1,75 voor dit abonnement en de leden van Wimecos betaalden f 2,75 contributie, waarin de kosten voor het abonnement waren inbegrepen. In 1948 verdween Schogt uit de leiding van het tijdschrift en in 1950 legde ook Wijdenes zijn functie neer. Een 'Wijdenes-nummer' is de dank voor 25 jaargangen trouwe dienst (26e jaargang, nr. 1).

Didactiek werd door de redactie van Euclides vaak ruim geïnterpreteerd als 'van belang voor de wiskundeleraar'. Nu is het onmiskenbaar van belang voor de wiskundeleraar dat hij naast didactische belangstelling in eigenlijke zin zich ook aangetrokken voelt tot meer wetenschappelijke beschouwingen in zijn vakgebied. Vandaar dat in Euclides lange tijd alle inaugurele redes en ook een aantal openbare lessen van lectoren opgenomen werden. Ook werden nogal eens wiskundige artikelen opgenomen waarvan de inhoud niet direct verband hield met de stof van de middelbare school. We menen dan ook een te eenzijdige kijk op het tijdschrift te geven als we niet ook een artikel van zuiver vakwetenschappelijke aard zouden opnemen. We kozen daarvoor: *'Waarde en Waardering der Wiskunde'* door Dr. H. D. Kloosterman, als rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Leiden (jaargang 22 (1946-1947), blz. 266-278). Door zijn fundamentele inhoud is dit artikel voor een brede kring van lezers interessant. Kloosterman beantwoordt de vraag 'wat is wiskunde?' op soms verrassende wijze. Uit het artikel blijkt hoe verschillend allerlei wiskundigen en niet-wiskundigen tegen het vak aankijken.

WAARDE EN WAARDEERING DER WISKUNDE.¹⁾

door

Dr H. D. KLOOSTERMAN.

In een in 1940 verschenen boek van E. T. Bell¹⁾ komt een citaat voor uit een boekbespreking van C. H. Chapman, dat als volgt luidt: "There is probably no science which presents such different appearances to one who cultivates it and one who does not, as mathematics". En inderdaad zeer verschillend zijn dan ook de antwoorden, die op verschillende tijden en door verschillende personen zijn gegeven op de vraag, die ons heden voor enkele oogeblikken zal bezig houden: „Wat is de waarde der wiskunde?". Het belang van deze vraag in al zijn verschillende aspecten is evident als men denkt aan de rol, die de wiskunde speelt b.v. in de natuurwetenschappen en bij het onderwijs.

Het zijn niet alleen wiskundigen, zelfs zijn het wel in hoofdzaak niet-wiskundigen, die een antwoord zoeken, of gedwongen zijn te zoeken. Het lijkt echter redelijk om te verlangen, dat hij, die zich aan een beantwoording waagt, eenig begrip heeft, van wat wiskunde is. Dit is een eisch, waaraan niet zoo heel gemakkelijk kan worden voldaan. Want een ernstige en langdurige studie en vooral ook belangstelling zijn noodig, om een inzicht in het wezen der wiskunde te krijgen. Vandaar dan ook, dat niet ieder, die een oordeel over de waarde der wiskunde heeft durven uitspreken, aan de gestelde eisch heeft kunnen voldoen en dat vele dezer oordeelen min of meer aanvechtbaar zijn:

Verständige Leute kannst du irren sehn

In Sachen nämlich, die sie nicht verstehn,

zegt Goethe.

Laten wij hier echter aan den zooeven gestelden redelijken eisch eenigszins trachten tegemoet te komen en ons vooraf bezig houden met de vraag „Wat is wiskunde?". Het is moeilijk om een afdoend antwoord op deze vraag te geven en hem, die een afdoend antwoord eischt, kan slechts de raad worden gegeven om wiskunde te gaan studeeren, d.w.z. die wetenschap, die beoefend wordt door hen, die zich wiskundigen noemen. Hiermee hebben we meteen al

¹⁾ Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Leiden op 2 Mei 1947.

een definitie van wiskunde gegeven, een variant op de bekende definitie, die Veblen en Whitehead²⁾ geven van „een meetkunde”, nl. “a branch of mathematics is called a geometry because the name seems good, on emotional and traditional grounds, to a sufficient number of competent people”. En alhoewel deze definitie ongetwijfeld de meest juiste is, die men met behulp van een beperkt aantal woorden kan uitspreken, is ze ook de minst zeggende en de het minst aan ons doel beantwoordende. Eerder moet het onze bedoeling zijn, om een omschrijving te geven van datgene, wat karakteristiek is voor het wiskundige denken en om aan te geven, wat de verschillende onderdeelen der wiskunde voor gemeenschappelijks hebben. Het is dan ook niet onze bedoeling, om in enkele zinnen een definitie van wiskunde te geven, al zullen eenige van deze definities, die in den loop der tijden zijn gegeven, wel voor ons doel van nut kunnen zijn.

Allereerst zij opgemerkt, dat een antwoord op de vraag „Wat is wiskunde?” afhankelijk is van het tijdstip van beantwoording. Misschien zou het honderd jaar geleden nog min of meer juist geweest zijn, om te antwoorden: „Wiskunde is die wetenschap, die zich bezig houdt met *getallen* en met *ruimte*, waarbij meer speciaal de getallen het domein der getallenleer, algebra en analyse en de ruimte meer speciaal het domein der meetkunde is”.

Ieder wiskundige zal het er echter mee eens zijn, dat een dergelijk antwoord voor den tegenwoordigen tijd op zijn minst als zeer onvolledig moet worden gekwalificeerd. Men kan wel zeggen, dat iedere omschrijving, die de wiskunde tracht te karakteriseeren door middel van de objecten, die in de wiskunde onderwerp van beschouwing uitmaken, onvolledig is. Toch is dit nog in 1894 geprobeerd door K e m p e³⁾. Deze geeft ongeveer de volgende definitie: „Wiskunde is de wetenschap, waarmee we die bijzonderheden van eenig denkobject onderzoeken, die voortvloeien uit de opvatting, dat dit bestaat uit een aantal verschillende en niet-verschillende elementen⁴⁾”. Ik verwacht niet, dat een niet-wiskundige na het aanhooren van deze definitie nu precies zal begrijpen, wat wiskunde is. De auteur ervan is daar zelf ook wel van overtuigd. Zijn bedoeling is echter om de objecten, die in de wiskunde onderwerp van beschouwing uitmaken, “The subject-matter of exact thought” te karakteriseeren. Zijn opvattingen daaromtrent heeft hij in verschillende publicaties nader uiteengezet⁵⁾. In eenigszins gewijzigden vorm zijn deze samengevat door B ô c h e r⁶⁾. Door dezen worden de opvattingen van K e m p e ongeveer als volgt omschreven. Aan iedere wiskundige beschouwing ligt ten grondslag een „mathema-

tisch systeem", bestaande uit ten eerste een bepaalde verzameling van objecten en ten tweede een bepaalde verzameling van relaties tusschen geordende verzamelingen van deze objecten. Als objecten kunnen we ons bijvoorbeeld om de gedachten te bepalen getallen voorstellen, of punten en rechte lijnen. Als voorbeeld van relaties kunnen we ons denken, dat een getal de som of het product van twee andere is, of dat een punt op een rechte lijn ligt, of een rechte lijn door een punt gaat. Indien we ons nu uitsluitend interesseeren voor de vraag of gegeven geordende verzamelingen dezer gegeven objecten aan de gegeven relaties voldoen, dan zijn de resultaten van deze onderzoekingen datgene, wat wiskunde wordt genoemd. Het valt hier onmiddellijk op, dat ook deze definitie van wiskunde wel zeer onvolledig is. Want er wordt met geen woord gerept over de hulpmiddelen, waarmede de resultaten moeten worden verkregen. Zoo is b.v. het experiment als hulpmiddel in de definitie niet uitgesloten. In ieder geval moet dus aan de definitie nog worden toegevoegd, dat de resultaten *langs deductieven weg* moeten worden verkrègen.

Daarmee komen we bij een andere definitie van wiskunde, die juist dit hulpmiddel der deductieve redeneering als uitsluitend criterium op den voorgrond stelt. Het is de definitie van Benjamin Peirce⁷⁾, luidende: "Mathematics is the science which draws necessary conclusions". De aard der objecten speelt hierbij dus in het geheel geen rol. Iedere deductieve redeneering, ongeacht de objecten, waarop deze redeneering wordt toegepast, is wiskunde. Dan en slechts dan is wiskunde mogelijk, indien men uitgangspunten of gegevens bezit, waaruit noodzakelijke conclusies kunnen worden getrokken. Waar deze gegevens vandaan komen, is voor de wiskunde onverschillig. Of de uitgangspunten waar of niet waar zijn en of er werkelijk realiteiten bestaan, die aan de praemissen voldoen, is volgens Peirce voor de wiskunde van geen belang of beter gezegd: deze vragen zijn geen wiskundige vragen. Een wiskundige weet dus niet, waarover hij spreekt en evenmin of hetgeen hij zegt, waar is.

Een verdere uitwerking van de definitie van Peirce zou zich natuurlijk in de eerste plaats moeten bezig houden met een beantwoording van de vraag, wat precies onder "necessary conclusions" moet worden verstaan. Zoolang deze vraag niet op bevredigende wijze is beantwoord, is de definitie van Peirce niet volledig. De geschiedenis der wiskunde en der moderne logica heeft ons wel geleerd, dat een beantwoording van deze vraag geenszins gemakkelijk

268 is. Ook echter dan, wanneer we in het bezit zouden zijn van een

volledig antwoord op deze vraag en indien dus volledig vast zou staan, wat de „spelregels” zijn, moet toch, zooals we nog zullen zien, ook de definitie van Peirce, zelfs in combinatie met die van Kempe, nog als onvolledig worden gekenmerkt. De opvatting van Schröder⁸⁾ als zou de wiskunde slechts een onderdeel der logica zijn, kan dan ook niet door ons worden aanvaard. Er zijn andere en zeker niet minder belangrijke elementen, die bij het wiskundig denken een rol spelen.

Voor een korte bespreking van eenige dezer elementen kunnen we uitgaan van het eenigszins simplistische beeld, dat ons door de definitie van Peirce wordt gegeven van een wiskundige redeneering, nl. een keten van logische conclusies, die, uitgaande van een stelsel gegevens, die we kortweg *axioma's* zullen noemen, leidt tot het *resultaat* van de redeneering. De keten van logische conclusies noemen we *bewijs*. Zoowel in de *axioma's*, als in het *bewijs* en het *resultaat* ligt nu een groote mate van *vrijheid* opgesloten. Ik spreek hier niet van *willekeur*. Dit laatste zou men moeten doen, indien men de opvatting zou huldigen, dat de wiskunde slechts een onderdeel der logica is. Want dan zou iedere willekeurige keten van logische conclusies, uitgaande van ieder willekeurig stelsel van *axioma's* tot een *resultaat* leiden, dat een wiskundig *resultaat* zou moeten worden genoemd. Dit kunnen we echter niet aanvaarden. Er is iets, dat den wiskundige leidt, zoowel bij de keuze van zijn resultaten, alsook bij de keuze van zijn *bewijs* en bij de keuze van zijn *axioma's*. Met opzet heb ik hier drie maal het woord *keuze* gebruikt en met opzet heb ik hier ook de volgorde *resultaat-bewijs-axioma's* in plaats van *axioma's-bewijs-resultaat* gebruikt. De bedoeling hiervan is om die elementen van het wiskundige denken naar voren te brengen, die we het *aesthetische element* en het *intuïtieve element* zouden kunnen noemen. In tegenstelling tot het logische element, dat een objectieve strekking heeft, zijn ze in hoofdzaak subjectief van aard en ze komen dan ook niet bij iederen wiskundige in dezelfde mate of in denzelfden vorm tot uiting.

Talloos zijn de uitspraken van wiskundigen, die het *aesthetische element* naar voren brengen. Poincaré zegt⁹⁾, dat de wiskundige in verband met zijn werk dezelfde emoties ondervindt, als de kunstenaar. Zelfs Weierstrass, in wiens werk toch het logische element zoo sterk overheerscht, schrijft in een brief aan Sophie Kovalevski¹⁰⁾, dat een wiskundige, die niet ook een klein beetje dichter is, geen volkomen wiskundige kan zijn en Kronecker zegt¹¹⁾ dat wiskundigen dichters zijn, die bovendien ook nog bewijzen leveren voor hun gedichten. Deze laatste uitspraak van

K r o n e c k e r is misschien minder gelukkig. Want het aesthetische element heeft in de wiskunde toch wel in hoofdzaak zijn ontstaan te danken aan de combinatie van vrijheid in de keuze van problemen (phantasie) met de gebondenheid aan de „spelregels”, die door de logica worden bepaald. Mocht men dus een stuk wiskunde met een gedicht willen vergelijken, dan correspondeert het bewijs, de gebondenheid door de logica, met de gebondenheid door rhythme en rijm.

De rol, die de intuïtie in de wiskunde speelt, hebben we zooeven aangeduid door de volgorde axioma's-bewijs-resultaat om te keeren tot de volgorde resultaat-bewijs-axioma's. Want wiskundige resultaten *ontstaan* niet op die wijze, dat de wiskundige van een stelsel axioma's uitgaat. Meestal is het resultaat het uitgangspunt en bij de wijze, waarop de wiskundige zijn resultaten vindt, speelt de aanschouwing de hoofdrol, zoowel de zuivere, alsook de empirische aanschouwing. Dit geldt zoowel, als men de wiskunde in zijn historische ontwikkeling vervolgt, alsook, wanneer men het vinden van nieuwe resultaten bij den enkelen wiskundige nagaat. Niet altijd blijken de op deze wijze verkregen resultaten, vooral als het de empirische aanschouwing betreft, den toets van een logische analyse te kunnen doorstaan. Deze logische analyse leidt dan echter tot een stelsel van axioma's, waaruit het intuïtief gevonden resultaat, eventueel met eenige beperking van zijn algemeenheid, door een deductieve redeneering kan worden afgeleid. Door P o i n c a r é is opgemerkt ¹²⁾, dat men bij het bestudeeren van de werken van groote (en zelfs ook wel van de minder groote) wiskundigen duidelijk twee typen kan onderscheiden. Eenerzijds zij, bij wie het intuïtieve element de hoofdrol speelt en anderzijds zij, bij wie het logische element meer overheerscht. Voor het eerste type zou R i e m a n n en voor het tweede type zou W e i e r s t r a s s als representant kunnen gelden. Als voorbeeld zij hier de functietheorie van R i e m a n n vermeld. De wijze, waarop deze door R i e m a n n zelf is weergegeven is wel zeer ver van een deductieve theorie verwijderd, zooals wel blijkt uit de vele moeite, die het kost, om een strenge behandeling ervan te geven ¹³⁾. De opmerking van P o i n c a r é mag echter geenszins in dien zin worden opgevat, als zou ieder wiskundige of tot het intuïtieve of tot het logische type behooren. Hier mogen we wel wijzen op G a u s s, die op de meest gelukkige wijze alle verschillende elementen in zich vereenigt.

Laten we hier echter niet te ver afdwalen van het doel, dat ons hier voor oogen staat, namelijk een omschrijving te geven, van wat wiskunde is. Behalve de nu vermelde logische, aesthetische en intuïtieve elementen zijn nog wel meer karakteristieke elementen van

de wiskunde op te noemen. Hier zij nog slechts gewezen op de *abstractie* en op de *economie van het denken*, alhoewel deze op zichzelf geenszins voor de wiskunde alleen karakteristiek zijn. Voor het bepalen van de waarde der wiskunde zijn ze echter van groot belang. Alhoewel ze in de geheele ontwikkeling der wiskunde een groote rol hebben gespeeld, treden ze bij de moderne ontwikkeling wel heel sterk naar voren. Hierbij doel ik op datgene, wat men als de *axiomatische methode* betitelt. Men stelt een systematisch onderzoek in naar de consequenties van een beperkt stelsel van axioma's. Vele van dergelijke beperkte stelsels van axioma's zijn reeds onderzocht. Hier zij b.v. gewezen op de groepentheorie, de ideaaltheorie, de topologie, de structuurtheorie van Ore en Garrett Birkhoff en nog vele andere. Herhaaldelijk blijkt nu in den loop van een wiskundig onderzoek, dat men stuit op een situatie, waarbij aan één dezer beperkte stelsels van axioma's is voldaan, waardoor men in staat is, om het geheele stelsel van consequenties uit deze axioma's geldig te verklaren. Van belang is hierbij vooral, dat men bij deze axiomatische theorieën abstraheert van den aard der in deze theorieën voorkomende objecten, tenminste voor zoover deze niet door de axioma's zelf tot uitdrukking wordt gebracht.

Na deze opsomming van enkele karakteristieke kenmerken van het wiskundige denken vlei ik me nog geenszins met de hoop, dat daarmee aan een niet-wiskundige volledig zou zijn duidelijk gemaakt, wat wiskunde is. Zooals ik daar straks reeds opmerkte, zou daarvoor alleen een grondige wiskundestudie de aangewezen weg zijn. Maar wel hoop ik tenminste duidelijk te hebben gemaakt, dat wiskunde b.v. niet uitsluitend formalistisch rekenen is. Dit toch is wel de indruk, die vele niet-wiskundigen hebben en waarop zij soms een geringschattend oordeel over de wiskunde meenen te kunnen gronden. „Wo das Rechnen anfängt, hört das Verstehen auf”, zegt Schopenhauer¹⁴⁾. Hierbij is zijn bedoeling, om een geringschattend oordeel over de wiskunde te vellen, maar hoe weinig hij zijn doel bereikt, moge wel blijken uit een door van der Waerden¹⁵⁾ aangehaalde uitspraak van den grooten wiskundige Hilbert, die eens bij zekere gelegenheid opmerkte: „... aber das sind doch eigentlich lauter Rechnungen; das kann man doch nicht verstehen!...”. Uit deze (hier natuurlijk uit zijn verband gerukte) opmerking mag men nu ook weer niet concludeeren, dat ieder wiskundige een zeer geringschattend oordeel over alle formalistisch rekenen heeft, al zijn er wel, waarvoor dit het geval is. Dit moge terecht of ten onrechte zijn, maar zooveel zal nu toch wel duidelijk zijn, dat wiskunde niet met rekenen mag worden geïdentificeerd.

Voordat we ons nu met de vraag naar de waarde der wiskunde gaan bezig houden, is het wel interessant en nuttig om nog even in enkele gevallen de positieve of negatieve waardeering te beschouwen, die de wiskunde in de oogen van niet-wiskundigen ten deel valt. Dat er mensen zijn, die een sterken afkeer van wiskunde hebben, is bekend. Veelal is dit wel een gevolg van een gebrek aan wiskundige begaafdheid, het niet in staat zijn, om een keten van logische deducties in zijn geheel te overzien en dus te vergelijken met den afkeer, die een slecht schaker van het schaakspel kan krijgen. Veelal is het ook een gebrek aan appreciatie voor het aesthetische element in de wiskunde. Dikwijls ook is het een misverstand, doordat aan een wiskundige theorie pretenties worden toegeschreven, die zij in het geheel niet heeft. Merkwaardig is, dat veel, wat als kritiek op de wiskunde bedoeld is, dit in het geheel niet is en de instemming van vele wiskundigen kan genieten. Zoo heeft Schopenhauer¹⁶⁾ kritiek uitgeoefend op de methode van Euclides, om van axioma's uitgaande logische bewijzen te willen geven van meetkundige stellingen, die toch, volgens hem, evident zijn, omdat ze op onmiddellijke aanschouwing berusten. Dat datgene, wat Euclides bewijst, waar is, moet hij inderdaad toegeven, doch hij ziet op deze wijze niet in, *waarom* het waar is. Door dergelijke „hinterlistige” bewijzen komt de waarheid door een achterdeurtje binnen, zegt hij. Hij wijst in dit verband op het Euclidische „muizeval”-bewijs van de stelling van Pythagoras¹⁷⁾. Hij „verbetert” het Euclidische bewijs, door voor het geval van den gelijkbeenig-rechthoekigen driehoek een empirisch „bewijs” te geven¹⁶⁾. Iets dergelijks, zegt hij, moet toch voor iedere meetkundige stelling mogelijk zijn, omdat hun ontdekking van een aanschouwelijke noodzakelijkheid uitgaat en het bewijs er achteraf bij verzonnen wordt. Dat dit laatste inderdaad wel eens juist kan zijn, hebben we daarstraks al opgemerkt, toen we de rol van de intuïtie in de wiskunde bespraken en daarbij wezen op de omkeering van de volgorde axioma's-bewijs-resultaat. Niet echter kunnen we met hem meegaan, als hij het logisch bewijs overbodig acht en daarbij de bedriegelijkheid der aanschouwelijke evidentie over het hoofd ziet en tevens (vermoedelijk met kwaad-aardig opzet) de zuivere en empirische aanschouwing verwacht. In den grond der zaak is zijn kritiek echter geen kritiek op de wiskunde als zoodanig. Soortgelijke opmerkingen kunnen, en worden ook inderdaad gemaakt op vele moderne wiskundige publicaties. Indien men b.v. een publicatie van Landau leest, en daarbij iedere schakel in den keten van logische conclusies op den voet volgt, dan zal men, aan het slot gekomen, niet steeds kunnen beweren, dat men het

bewijs volledig begrepen heeft, en een soortgelijke kritiek op den „L a n d a u - s t i j l ” kunnen uitoefenen, als S c h o p e n h a u e r op E u c l i d e s . De opmerking over het „muizenval-bewijs” van de stelling van P y t h a g o r a s is van denzelfden aard als de opmerking van E m m y N o e t h e r ¹⁸⁾ toen zij eens beweerde, dat het unfair is, om de gelijkheid van twee getallen te willen bewijzen, door eerst aan te toonen, dat het eerste getal niet kleiner en daarna, dat het niet grooter is, dan het tweede, doch dat men den innerlijken grond behoort aan te geven, *waarom* deze twee getallen gelijk zijn. Het betreft hier geen kritiek op de wiskunde als zoodanig, doch wel op de wijze, waarop de wiskunde wordt weergegeven.

Dat G o e t h e een afkeer van wiskunde zou hebben gehad, is een veel verbreide meening. Dat hij de waarde der zuivere wiskunde niet hoog zou hebben aangeslagen, is echter zeker niet in alle opzichten juist. De Euclidische meetkunde beschouwt hij als de beste voorbereiding, zelfs inleiding tot de philosophie ¹⁹⁾ en in „Ueber Mathematik und deren Missbrauch” verweert hij zich tegen de aanklacht, als zou hij een vijand der wiskunde zijn, „. . . , die doch niemand höher schätzen kann als ich, da sie gerade das leistet, was mir zu bewirken völlig versagt worden”. Wel keert hij zich tegen het gebruik der wiskunde in de natuurwetenschappen, waar hij van misbruik spreekt en hij richt zich daarbij in de eerste plaats tegen N e w t o n , wiens publicaties hem niet toegankelijk waren door zijn gebrek aan wiskundige kennis. Het is bekend, dat G o e t h e zichzelf als een groot natuuronderzoeker beschouwde en het den mathematici kwalijk nam, dat zij zijn „Farbenlehre” niet au sérieux namen. Daarbij dient opgemerkt te worden, dat zich in G o e t h e ’s tijd de scheiding tusschen zuivere en toegepaste wiskunde nog niet in zoo sterke mate had voltrokken als thans. Bovendien was het de tijd, waarin de toepassing der wiskunde in de natuurwetenschappen triomfen vierde en waarin men zich misschien ook wel eens al te overdreven voorstellingen maakte van de waarde der wiskunde voor de natuurwetenschappen, zooals zij b.v. tot uiting kwamen in een aantal uitspraken van den dichter N o v a l i s ²⁰⁾.

De bezwaren, die G o e t h e tegen de toepassing der wiskunde in de natuurwetenschappen heeft aangevoerd, en die voor een beoordeeling van de waarde der wiskunde in dit opzicht niet als belangrijk kunnen worden beschouwd, zijn hier vermeld, omdat ze eenige gelijkenis vertoonen met de bezwaren, die in lateren tijd in het bijzonder door beoefenaren der experimenteele natuurwetenschappen te berde zijn gebracht. Zoo vindt men ook bij den Nobelprijs-winnaar L e n a r d de uitlating ²¹⁾, dat het belang der wiskunde bij het

natuuronderzoek sterk wordt overschat, een uitlating, die bijna woordelijk aan G o e t h e herinnert en ook wel op dezelfde wijze zal mogen worden verklaard. Onredelijk wordt L e n a r d echter, wanneer hij de groote verdiensten van H e l m h o l t z bespreekt ²²⁾ ten opzichte van de verklaring der wervelbewegingen in vloeistoffen uit de differentiaalvergelijkingen der hydromechanica en wanneer hij daarna, in het feit, dat H e l m h o l t z als medicus is begonnen en aan de universiteit geen wiskunde heeft gestudeerd, aanleiding vindt, om uit te varen tegen de nutteloosheid van de uitgebreidheid van het wiskunde-onderwijs op scholen en universiteiten. Wel erg steekt hierbij af de groote waarde, die H e l m h o l t z zelf aan de wiskunde heeft toegekend ²³⁾.

Vermelden we hier ook nog de opvatting van een jurist. In 1806 verscheen in Amsterdam van de hand van J o a n n e s v a n d e r L i n d e n een „Regtsgeleerd, practicaal en koopmans handboek”. Dit begint met een „Inleiding, bevattende de noodige onderrigtingen tot den aanleg, zoo van de studie der regtsgeleerheid, . . .”. In paragraaf III spreekt hij over de voorbereidende studiën en noemt in dit verband op p. 33 o.a.: „. . . eene algemeene wijsgeerige kennis, waar toe men zig inzonderheid behoort te bepalen tot de Logica, of Redeneerkunde, door welke men de waare van de valsche sluitredenen leert onderscheiden: — de Mathesis, of Wiskunde, waar door men juist en bepaald leert denken: — de Ethica, of Zedenkunde, waar door men de algemeene pligten van den Mensch en Burger leert kennen.” — Hier treft ons dus een meer positieve waardeering van de wiskunde.

De verschillende uitlatingen van niet-wiskundigen omtrent de waarde der wiskunde, die ik tot nu toe heb aangehaald, mogen nu wel min of meer fragmentarisch zijn, maar toch meen ik, dat ze in zekeren zin tezamen een juist beeld geven van de positieve of negatieve waardeering, die de wiskunde van niet-wiskundigen ten deel valt.

Keeren we nu terug tot de in het begin gestelde vraag: „Wat is de waarde der wiskunde?”. Welke waarde heeft het, om ons bezig te houden met B a n a c h s c h e ruimtes, met klassenlichamen, met topologische groepen en met nog zooveel andere begrippen van even abstracten of misschien nog veel abstracteren aard? Waarom houden wij ons bezig met problemen omtrent deze abstracte begrippen? — met problemen, die door geen direct aanschouwelijk verband meer gebonden zijn aan de ons omringende realiteit? — met problemen, waarvan we de strekking in het geheel niet meer

wel kunnen we, wanneer we de geschiedenis der wiskunde bestudeeren, in den regel nog wel ongeveer nagaan, hoe deze begrippen en problemen zich door steeds verder gaande generalisaties ontwikkeld hebben uit eenvoudige, aan de practijk ontleende begrippen en problemen. Nog anderhalve eeuw geleden ontleende de wiskunde zijn problemen bijna uitsluitend aan de natuurwetenschappen en aan *L a g r a n g e* zweefde nog als hoofdprobleem voor oogen om het heele wereldgebeuren door één enkele geweldige differentiaalvergelijking te willen beschrijven. Maar daarna heeft in den loop der vorige eeuw de zuivere wiskunde zich van de toegepaste wiskunde meer en meer los gemaakt en in steeds sneller tempo heeft zich dit proces vooral in de laatste decennia voortgezet, zoodat ieder zichtbaar verband met de werkelijkheid *schijnt* te ontbreken. Waarom houden we hier niet mee op? Waarom keeren we niet tot de meer aanschouwelijke problemen der toegepaste wiskunde terug? Of heeft het zin om er toch mee door te gaan? Wat is dan de waarde van dit alles?

De meeste wiskundigen zullen volstaan met het antwoord: ik houd me met al deze abstracte begrippen en problemen bezig, omdat ik er behagen in schep, omdat ik het mooi vind. En zeer zeker is datgene, wat we daar straks het aesthetische element in de wiskunde hebben genoemd, de motor, die dit alles in beweging houdt. Maar even zeker is, dat niet iedereen met dit simpele antwoord genoegen neemt en dat van ons verlangd wordt, om rekenschap te geven van de waardevolle elementen in onze bedrijvigheid.

Een uitvoerig antwoord op de vraag naar de waarde der wiskunde moet natuurlijk zijn uitgangspunt nemen in de daar straks opgesomde karakteristieke elementen van het wiskundig denken. Hiervan uitgaande moeten alle aspecten van de vraag naar de waarde der wiskunde kunnen worden beantwoord.

Ik zal me hier echter moeten beperken. Van de verschillende aspecten zal ik in hoofdzaak de *practische* waarde beschouwen.

In de eerste plaats dan is het slechts schijn, dat de moderne abstracte wiskunde iedere band met de werkelijkheid heeft verbroken. Het is niet juist, dat de ver doorgevoerde abstracties slechts een ijdel spel der verbeelding zijn. Ze zijn natuurlijk uit de „werkelijkheid” geabstraheerd. We hebben daar straks reeds opgemerkt, dat er iets is, dat den wiskundige leidt bij zijn abstracties en bij het opbouwen van zijn ketens van deducties, nl. de aanschouwing in den meest ruimen zin en hier speelt dus datgene een rol, wat we het intuïtieve element in de wiskunde hebben genoemd. Daarom is het ook niet zoo erg verwonderlijk, dat abstracte mathematische

theorieën kunnen worden *toegepast*, ook al hebben de grondleggers van deze theorieën er dikwijls niet het geringste vermoeden van gehad, dat hun werk toepassingen zou kunnen hebben. Vele voorbeelden kunnen hiervan worden gegeven. Ik wijs b.v. op het gebruik van complexe getallen in de electrotechniek, op de toepassingen van de theorie der functies van een complexe veranderlijke in de aerodynamica, op de toepassing van de representatietheorie voor groepen in de quantenmechanica, op het gebruik van meerdimensionale ruimtes in de relativiteitstheorie en in de statistische mechanica.

Men zou nu de tegenwerping kunnen maken, dat er toch nog genoeg gedeelten der wiskunde overblijven, die niet de geringste toepassing hebben. Wat is b.v. het practische nut van de moderne getallentheorie? Toch kunnen ook hier nog wel directe toepassingen aangegeven worden. Zoo is b.v. de theorie der partities, die zich bezig houdt o.a. met de vraag naar het aantal manieren, waarop een geheel positief getal als een som van geheele positieve getallen is te schrijven, in de statistische mechanica toegepast. Zoo spelen ook de polygonaalgetallen een rol in de waarschijnlijkheidsrekening en in toepassingen daarvan. Maar belangrijker is het om te wijzen op het verband, dat tusschen de verschillende onderdeelen der wiskunde bestaat en op de invloed, die deze onderdeelen op elkaar uitoefenen. Zoo heeft b.v. *F e r m a t* het bekende vermoeden uitgesproken, dat een som van twee n -de machten van geheele positieve getallen nooit weer een n -de macht van een geheel positief getal kan zijn, als n minstens 3 is. Voor *K u m m e r* is dit probleem echter aanleiding geweest, om zijn theorie der ideale getallen op te stellen. Deze theorie heeft weer den stoot gegeven tot de moderne algebra, en deze staat weer via de representatietheorie van hypercomplexe systemen in verband met problemen uit de quantenmechanica.

Uit de hier aangehaalde voorbeelden blijkt ook wel het belangrijke feit, dat de daarstraks aangeroerde scheiding tusschen zuivere en toegepaste wiskunde in de eerste decennia der 19e eeuw wel niet zoo volledig en blijvend is geweest, als het op het eerste gezicht schijnt. Ze is wel mede daardoor ontstaan, dat de wiskunde niet meer in staat was om de haar door de natuurwetenschappen voorgelegde problemen op bevredigende wijze op te lossen. Dit is trouwens ook thans nog, en zelfs wel in nog sterkere mate het geval. Maar dit is wel zeker, en juist de aangehaalde voorbeelden zijn er, om het te bewijzen, dat alleen een vrije ontwikkeling van de zuivere wiskunde weer nieuwe toepassingsmogelijkheden kan scheppen. Wie bij de beoefening eener wetenschap direct practisch nut najaagt, zal dikwijls bedrogen uitkomen. De mogelijkheid tot een vrije beoefening

van fundamenteel wetenschappelijk onderzoek is ook voor de eischen der practijk, onontbeerlijk, omdat men in het geheel niet kan voorzien, welke onderdeelen later de gewichtige toepassingen zullen opleveren. Dus wèl B a n a c h s c h e ruimtes, wèl klassenlichamen, wèl topologische groepen en wèl getallentheorie, ook al mogen we weliswaar morgen nog geen directe toepassingen verwachten. Wie had de ontwikkeling kunnen voorzien, die van den kikvorsch van G a l v a n i naar de moderne toepassingen der electriciteit leidt?

Ik heb me thans geheel tot de practische waarde der wiskunde beperkt. De vraag naar de waarde der wiskunde is natuurlijk veel omvattender. Ik zou nog moeten wijzen b.v. op de gewichtige banden, die de grondslagen der wiskunde met de philosophie verbinden. Ik zou nog moeten wijzen op de z.g. vormende waarde der wiskunde, die het belang der wiskunde voor het onderwijs in zoo sterke mate bepaalt en die op het logische, het aesthetische en het intuitieve element in het wiskundige denken berust. Wellicht zijn deze waarden van nog grooter belang. Ik heb echter gemeend, me bij dit schetsmatig betoog tot het meest voor de hand liggende, de practische waarde, te moeten bepalen. Want het komt mij voor, dat juist zij, die de wiskunde het meest toepassen, het eerst geneigd zijn, om de waarde der wiskunde in twijfel te trekken.

AANTEEKENINGEN.

- 1) E. T. Bell. The Development of Mathematics. New York 1940.
- 2) O. Veblen and J. H. C. Whitehead. The foundations of Differential Geometry (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 29), Cambridge 1932.
- 3) A. B. Kempe. Mathematics, Proc. London Math. Soc. 26 (1895), p. 5—15.
- 4) "Mathematics is the science by which we investigate those characteristics of any subject-matter of thought which are due to the conception that it consists of a number of differing and non-differing individuals and pluralities".
- 5) A. B. Kempe. Memoir on the Theory of Mathematical Form, Phil. Trans. Roy. Soc. 177 (1886), p. 1; Note, Proc. Roy. Soc. 42, p. 193; On the Relation between the Geometrical Theory of Points and the Logical Theory of Classes, Proc. London Math. Soc. 22 (1890), p. 147; The Subject-matter of exact Thought, Nature 43 (1890), p. 156.
- 6) M. Bôcher. The fundamental conceptions and methods of Mathematics, Bull. Amer. Math. Soc. (2) 11 (1904), p. 115—135.
- 7) B. Peirce. Linear associative algebra, Amer. Journ. Math. 4 (1881), p. 97-221.
- 8) E. Schröder. Ueber Pasigraphie. Verh. d. ersten intern. Math. Congr. Zürich 1897 (Leipzig 1898), p. 149.
- 9) H. Poincaré. Notice sur Halphen, Journ. de l'Ec. polytechn. (1890), p. 143.
- 277 10) Volgens een mededeeling van G. Mittag-Leffler ter gelegenheid van een

herdenking van Weierstrass. Zie Comptes rendus du 2^{me} congr. intern. des math. Paris 1900 (Paris 1902), p. 148.

- 11) L. Kronecker. Berichte d. Math. Vereins d. Univ. Berlin, 1890-91, p. 9.
 - 12) H. Poincaré. La valeur de la science, Chap. I.
 - 13) H. Weyl. Die Idee der Riemannschen Fläche. Leipzig 1913.
 - 14) A. Schopenhauer. Ueber die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde, § 21.
 - 15) B. L. van der Waerden. De strijd om de abstraktie. Rede, Groningen 1928.
 - 16) Die Welt als Wille und Vorstellung. Bd. I, § 15.
 - 17) Ueber die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde, laatste alinea van § 39.
 - 18) Zie H. Weyl. In Memory of Emmy Noether. Rede, Princeton N. J. 1935; Scripta Math. III, No. 3, p. 18.
 - 19) Maximen und Reflexionen, Fünfte Abtheilung.
 - 20) Mathematische Fragmente, No. 1666-1699.
 - 21) P. h. Lenard. Grosse Naturforscher, München 1929, p. 191.
 - 22) Ibid. p. 249.
 - 23) Zie b.v. H. Helmholtz, Vorträge und Reden (1897), Bd. 1, p. 176.
-

Zoals reeds vermeld waren Beth en Dijksterhuis fervente voorstanders van wiskunde-onderwijs dat aan hoge wetenschappelijke eisen voldoet. De leerstof moest zo streng mogelijk geformuleerd worden. Meetkunde moest dus deductief gebracht worden hetgeen inhield dat, reeds in de eerste klas, uitgegaan werd van axioma's. Elk schoolboek hield zich daaraan. Dat hield echter niet in dat de leerlingen een abstract axiomatische opbouw voor-gezet werd. Er werden enkele axioma's expliciet geformuleerd, zoals: door twee punten gaat een rechte lijn, en door twee punten gaat niet meer dan één rechte lijn. Verder eventueel een axioma over de mogelijkheid figuren in het vak te verplaatsen. Uitgaande van deze axioma's werden bewijzen gegeven, die echter bij nadere analyse vaak schijn-

bewijzen bleken te zijn. Veel eigenschappen werden toch uit de figuur afgelezen. Axioma's over 'tussen' kwamen niet voor. Wat 'tussen' betekent, werd zonder meer duidelijk ondersteld. Wat een lijnstuk is, wat het wil zeggen dat een punt op een verlengde van een lijnstuk ligt of dat een punt binnen een driehoek ligt, werd aan de voorstelling ontleend.

In de naoorlogse jaren begon verzet te rijzen tegen de pogingen de schoolwiskunde zo streng op te bouwen. Twee standpunten, een voor een logisch strenge en een voor een meer intuïtieve opbouw, worden tegenover elkaar gesteld in het artikel van Dr. Ph. Dwinger, getiteld: *Enige opmerkingen over het onderwijs van meetkunde in deze tijd*. Het staat in jaargang 22 (1946-1947) op blz. 38-42.

ENIGE OPMERKINGEN OVER HET ONDERWIJS IN DE MEETKUNDE IN DEZE TIJD

door

Dr Ph. DWINGER.

Het onderwijs in de meetkunde in de laatste decennia beweegt zich tussen twee uitersten. Er ontstonden zelfs volgens Rein-
dersma twee richtingen in de didactiek der wiskunde nl. de *psychologische* en de *logische* richting.

Al is het naar mijn mening ¹⁾ te ver gezocht om over twee rich-

38 ¹⁾ Zie ook Dr E. W. Beth. De psychologische argumenten en richtlijnen van de vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde. Euclides XVI, 1.

tingen te spreken, toch valt niet te ontkennen, dat dan weer eens de nadruk op het ene, dan weer op het andere element wordt gelegd.

Wanneer men zich afvraagt, waardoor deze belangrijke divergentie optreedt dan moet m.i. op enige punten de aandacht gevestigd worden.

Daar is in de eerste plaats de erkenning dat het geestelijk peil van den leerling in hoge mate zijn stempel moet drukken op de didactiek van het vak. De didactiek dient nu eenmaal ingesteld te zijn op den leerling, wil ons onderwijs vruchtdragend zijn.

Daarnaast moeten wij onze blik richten op de wiskunde zelf en ons opnieuw afvragen, wat het doel van ons onderwijs in de wiskunde is. Afgezien van de overigens hoogst belangrijke praktische waarde, dienen wij ons er steeds bewust van te zijn, dat er nog andere doeleinden bij het wiskunde-onderwijs nagestreefd moeten worden.

Den jongen mens nader te brengen tot het wezen van dit product van de menselijke geest, hem de schoonheid ervan te tonen en de bekoring ervan te doen ondergaan moet onze taak steeds blijven. De eerbied voor onze cultuur, tot welks opbouw de wiskunde een belangrijke bijdrage geleverd heeft, zal bij den jongen mens aangebracht worden, wanneer hij zich bewust wordt van de bewondering, die hij gevoelt voor de scheppingen van de menselijke geest in de wiskunde.

Bij dit alles dienen wij echter ernstig rekening te houden met de ontwikkeling van de wiskunde zelf. Willen wij ons onderwijs goed geven en niet stil blijven staan, dan dienen wij steeds contact te houden met de levende wetenschap. Achter ons onderwijs dient steeds de wetenschap te staan, zoals hij nu is en niet, zoals hij 2000 jaar geleden was.

Ik herinner hier bv. aan de ontdekking der niet-euclidische meetkunden, van de meerdimensionale meetkunde en een in samenhang daarmee staand onderzoek naar de axiomatische opbouw der meetkunde. De strijd om het beroemde parallelenaxioma was daarmee beslist. Het onderzoek naar de axiomatische opbouw der meetkunde leidde tot de erkenning, dat het mogelijk is de meetkunde op te bouwen uitgaande van niet gedefinieerde grondbegrippen, waartussen met behulp van axioma's bepaalde relaties vastgelegd worden. Betekende in de oudheid een axioma een vanzelfsprekende waarheid ontleend aan de realiteit, in onze tijd ziet men in een axioma, een voorschrift, dat aan de grondbegrippen en hun relaties wordt opgelegd.

Al maakt dit naar het uiterlijk niet veel onderscheid — zolang de 39

wiskunde, in casu de meetkunde, zich nauw aansluit bij de ruimte, waarin wij leven — in wezen is de gewijzigde opvatting van fundamentele betekenis.

Men heeft op deze wijze een meetkunde opgebouwd, die volkomen logisch en los van elke aanschouwing is.

Ik noem deze punten natuurlijk niet om ze een plaats te willen geven in ons onderwijs, maar wel, omdat wij bij ons meetkunde-onderwijs ons bewust dienen te zijn van deze belangrijke feiten, die immers het huidige beeld van de meetkunde mede bepalen.

De leerling van heden is diep overtuigd van de absolute waarheid der bewezen (en niet bewezen) stellingen en de „logische” opbouw der meetkunde. Hij is zich in het algemeen niet bewust van menige concessie, die aan zijn jeugdige leeftijd is gedaan bij deze „logische” opbouw.

Het theorema over de som van de hoeken van een driehoek blijft menigeen lang in het geheugen hangen en geldt als een van de belangrijkste onomstotelijke waarheden in de meetkunde. Mededelingen als die, dat de grote wiskundige Gauss het nodig oordeelde bedoeld theorema proefondervindelijk te toetsen en dat in de ruimte, waarin wij leven, dit theorema niet geldt en dat onze ruimte „gekromd” is enz. enz., wekken dan ook verbazing en ongeloof, maar doen ook vaak twijfel ontstaan aan de goede kwaliteit van het vroeger geleerde.

Ik weet zeer goed, dat wij dit niet in ons onderwijs zonder meer kunnen verwerken, maar ik wil toch wel wijzen op het feit, dat de huidige stand van een zelfs zo abstracte wetenschap als de wiskunde de mens niet onberoerd hoeft te laten.

Wanneer wij ons nu weer wenden tot het onderwijs in de meetkunde, dan geloof ik te mogen zeggen, dat een onderwijs in dit vak, dat aan alle eisen van wetenschappelijkheid en strengheid voldoet en dus op zuiver axiomatische grondslag wordt opgebouwd, voor het middelbaar onderwijs niet te gebruiken is.

Een opbouw van de meetkunde, in wezen niet gebruik makende van de aanschouwing, maar slechts van de axioma's en de daaruit door logische redenering afgeleide stellingen gaat ver boven het bevattingsvermogen van den gemiddelden leerling uit. De wiskundeleraar zal met beide benen op de grond dienen te blijven staan en ten volle rekening moeten houden met mogelijkheden van zijn leerlingen.

Wat wij echter steeds zien, is een poging tot een axiomatische opbouw, die reeds in het eerste leerjaar aanvangt. Er is mij geen
40 methode bekend waar niet op één van de eerste bladzijden het

begrip axioma, zij het vaak ook na degelijke voorbereiding wordt ingevoerd. In vele gevallen worden slechts de meest evidente axioma's vermeld en laat men de minder voor de hand liggende terecht weg (continuïteitsaxioma!).

Ik geloof, dat in het algemeen deze pogingen weinig kans tot volledig slagen hebben. Ik vraag mij af, of een leerling van 12—13 jaar in staat is het begrip axioma — in zijn huidige vorm — tot zijn geestelijk eigendom te maken. Wij weten ook, dat vele meetkunde-bewijzen vaak „schijnbewijzen” zijn, gebruik als zij maken van nooit genoemde axioma's.

Terwijl wij dus enerzijds zeker niet voor honderd procent wetenschappelijk zijn, lopen wij anderzijds de kans het abstraherende vermogen van het kind veel te hoog aan te slaan.

Ik wil daarom een enkele beschouwing wijden aan de rol, die de aanschouwing in ons meetkunde-onderwijs kan spelen en beschouw in de eerste plaats de wetenschappelijke zijde hiervan.

Wanneer wij onze axioma's ontleen aan de ruimte, waarin wij leven, als „*ervaringsfeiten*” dan doen wij niets anders dan een poging een meetkunde op te bouwen, die de ruimte, waarin wij leven, moet beschrijven. Wanneer wij ons dus op het standpunt stellen, dat wij een „*ervaringsmeetkunde*” opbouwen, die dus afhankelijk is van onze waarnemingen, die uiteraard „onjuist” kunnen zijn, dan hoeven wij niet zonder meer onwetenschappelijk te zijn. Wij kunnen immers gebaseerd op onze waarneming trachten een meetkunde op te bouwen, waarin elke optredende redenering voldoet aan twee eisen. In de eerste plaats dient hij duidelijk aan te geven, waar van de aanschouwing gebruik wordt gemaakt en in de tweede plaats dient hij logisch te zijn.

Wanneer wij zo te werk gaan, doordat wij de leerlingen met grote zorg en verstand de ruimte laten „ontdekken”, dan sluiten wij aan bij hun geestelijke vermogens; wij hoeven het woord axioma niet te noemen, terwijl wij de leerlingen voor kunnen houden, dat onze meetkunde een sterk subjectief-experimenteel karakter draagt. Dit brengt ons er dan toe naarmate de leerling ouder wordt, het abstraherende element in het onderwijs in te brengen en te vergroten. Dit kan gebeuren in een tweede ronde, zoals de Zwitsers Gonseth en Marti dit in hun leerboek¹⁾ doen. Maar ook leent bv. de aanvang van het onderwijs in de stereometrie zich hier toe uitstekend.

¹⁾ Gonseth u. Marti Planimetrie. Zie ook Euclides XIII, 4.

Ik kies, terugkerende tot mijn uitgangspunt, als voorbeeld de kennismaking met de rechte lijn in de aanvang van het meetkunde-onderwijs.

Dat door twee punten *één* rechte gaat, beschouwt elk kind als een trivialiteit. Men kan echter deze eigenschap ook laten zien als een middel om de rechte lijn te onderscheiden van andere lijnen bv. van de cirkel. Komen wij, wanneer de leerlingen dit „ontdekt” hebben, dan in wezen niet dichter bij het begrip axioma, zonder dat wij dit woord gebruiken? Hetzelfde geldt voor de „ontdekking” van de beweegbaarheid van een rechte in zich zelf (cirkel!) De beweegbaarheid van het platte vlak in zich zelf leidt tot de congruentie. Ik geloof trouwens, dat de bewegingen in het meetkunde-onderwijs een veel grotere rol moeten gaan spelen dan zij tot nu toe vaak deden.

Willen wij het meetkunde-onderwijs in de aanvang niet te zwaar belasten met „axiomatica” dan dienen wij consequent uit te gaan van onze ruimte die wij de leerling voorzetten als object van zijn uiterst voorzichtige waarneming. Het kind dient de ruimte, waarin hij leeft, te „ontdekken”, dient er zich bewust van te worden, naarmate hij rijper wordt, dat de meetkunde, die zo opgebouwd wordt, een sterk subjectief karakter draagt en behoefte heeft aan abstrahering.

Wij dienen het begrip axioma met grote omzichtigheid te hanteren, opdat niet in de geest van vele leerlingen een verkeerde idee ervan blijft hangen, als zou bv. een axioma een stelling zijn, die niet bewezen hoeft te worden, maar wel als een soort afspraak, die eventueel veranderd kan worden.

Bij het onderwijs in de stereometrie met name bij de meetkunde op de bol (en niet in de vorm van de drievlakshoek), kan zeer veel leerzaams over de aard van de axioma's ter sprake komen, zonder dat het woord elliptische meetkunde genoemd wordt.

In de aanvang van het meetkunde-onderwijs moeten wij echter concreet zijn, schijn-wetenschappelijkheid vermijden, en het kind in staat stellen zijn geestelijke vermogens volledig te gebruiken.

In 1954 werd de Wimecos-commissie ingesteld. De opdracht voor de commissie was met voorstellen te komen voor een nieuw leerplan voor de hbs. Voorzitter werd Wansink. Het bestuur van Wimecos had Liwenagel gevraagd een vertegenwoordiger in de commissie aan te wijzen. Dit geschiedde en zo werd een begin gemaakt aan het slechten van de muur tussen hbs en gymnasium. De samenwerking tussen de hbs-leden en het gymnasium-lid bleek vruchtbaar te zijn. Al spoedig kwam men op de gedachte dat het gunstig zou werken, als het lukte een gemeenschappelijk wiskunde programma voor hbs en gymnasium tot stand te brengen. Op de achtergrond speelde reeds de wens van een gemeenschappelijk eindexamen.

In 1955 was het werk van de commissie gereed. Het werd voorgelegd aan een ledenvergadering van Wimecos en een van Liwenagel en door beide aanvaard. Belangrijke facetten van het nieuwe programma waren:

- De planimetrie begint met een intuïtieve inleiding. Eerst nadat voldoende basiskennis de leerlingen is bijgebracht op grond van de voorstelling, wordt overgegaan tot een deductieve opbouw. Over axioma's werd dus niet meer gerept en de eerste paar maanden werden geen eigenschappen bewezen. Eerst zodra genoeg kennis vergaard was om bewijzen te geven die geen schijnbewijzen zijn, werd hiertoe overgegaan.
 - Het vak beschrijvende meetkunde verdween. Wel moest het op enigerlei wijze mogelijk blijven op verantwoorde manier een driedimensionale figuur, b.v. een kubus, tweedimensionaal voor te stellen. Een bepaalde methode werd niet voorgeschreven. De meeste leraren kozen voor de scheve projectie.
 - De differentiaal- en integraalrekening werd deel van de eindexamenstof.
 - De analytische meetkunde werd op het leerplan van de hbs geplaatst.
 - De leerstof werd aan een revisie onderworpen waardoor talrijke uitwassen die langzamerhand in de traditionele leerstof waren binnen geslopen, weer verwijderd werden.
 - De statistiek werd toegevoegd.
 - De complexe getallen werden geschrapt.
- Motivering: het is een abstract onderwerp dat, voor de leerling althans, in geen relatie tot de realiteit staat.

De inspectie vreesde overlading en wilde het nieuwe programma in deze vorm niet invoeren. De commissie liet de statistiek vallen en toen werd het programma in 1958 voor hbs en gymnasium bindend verklaard. Vanaf 1961 zijn de schriftelijke eindexamens bij hbs-B en gymnasium- β hetzelfde. Ze werden afgenomen in drie zittingen: voor algebra (inclusief infinitesimaalrekening), voor stereometrie en voor goniometrie en analytische meetkunde.

Duidelijk was nu wel geworden hoe ongewenst het was dat er twee verenigingen bestonden, Wimecos en Liwenagel, die geen van beide de belangen van wiskundeleraren konden behartigen. Op instigatie van Liwenagel heeft Wimecos dan ook in 1956 zijn lidmaatschap opengesteld voor alle leraren van het vmo (voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs, dus gymnasium en hbs).

Ook Euclides onderging in 1956 een metamorfose. Het tijdschrift was aanvankelijk een uitgave van de N.V. Erven P. Noordhoff's Uitgeverszaak. De leiding berustte bij personen die door de uitgever werden aangewezen. In 1940 werd het, zoals reeds vermeld, officieel orgaan van Wimecos en Liwenagel. Voorlopig kwam er nog geen verandering in de wijze waarop het tijdschrift geleid werd. Eerst vanaf 1953 wezen Wimecos en Liwenagel elk ook een vertegenwoordiger in de leiding aan.

In 1956 werd deze toestand radicaal gewijzigd. Wimecos, Liwenagel en Noordhoff sloten een overeenkomst waarin werd vastgesteld dat Euclides voortaan een redactie zou krijgen waarvan de leden door deze verenigingen werden aangesteld. De verantwoordelijkheid voor de inhoud van het tijdschrift berustte voortaan uitsluitend bij de verenigingen.

Euclides verscheen daarna niet meer zes keer, maar tien keer per jaar.

De naam werd:

Euclides, Maandblad voor de Didactiek van de Exacte Vakken, orgaan van de Verenigingen Wimecos en Liwenagel.

In jaargang 32 (1956-1957) lezen we op blz. 2 en 3:

'De redactie stelt zich voor de volgende rubrieken tot hun recht te laten komen:

- a vakwetenschappelijke artikelen; hierin zullen in de eerste plaats die onderwerpen uit de hogere wiskunde aan de orde worden gesteld, die voor de school betekenis hebben of betekenis kunnen krijgen;

- b didactische artikelen in de ruimste zin van het woord;
- c de opleiding tot wiskundeleraar in een nabij verleden, in het heden en in de nabije toekomst;
- d buitenlandse contacten;
- e recreatieve wiskunde; mathematische varia; korrels en verscheidenheden;
- f boekaankondigingen en recensies;
- g officiële mededelingen.

Aandacht verdient ook de Wiskunde-Werkgroep van de WVO (Werkgroep voor Onderwijsvernieuwing). Deze vereniging hield geregeld bijeenkomsten waarin gevanceerde stromingen in de didactiek tot zijn recht kwamen.

Reeds voordat de Wimecos-commissie ingesteld werd, had de Wiskunde-Werkgroep een concept samengesteld voor een nieuw leerplan. Een deel van dat concept is gepubliceerd in jaargang 28 (1952-1953), blz. 206-226. Toen de Werkgroep in 1961 25 jaar bestond, is besloten dat Euclides

voortaan ook haar officieel orgaan zou zijn. 'We verheugen ons over de nauwere samenwerking die hierdoor tussen de drie instanties, die alle drie de belangen van het wiskunde-onderwijs in het vmo behartigen, mogelijk wordt.' Zo formuleerde de redactie haar vreugde over deze stap in jaargang 38, blz. 99.

Deze toestand bleef bestendig tot het begin van de jaargang 1972-1973. Liwenagel werd toen opgeheven. Eind 1974 hield ook de Werkgroep op te bestaan.

Het is moeilijk een artikel te vinden dat een afspiegeling biedt van deze ietwat turbulente ontwikkelingen. Een thema echter dat van oudsher de aandacht heeft getrokken en dat momenteel nog steeds doet, is de vormende waarde van de wiskunde. Hierover schreven de Van Hieles in jaargang 32, blz. 277-281.

DE VORMENDE WAARDE DER WISKUNDE

door

P. M. VAN HIELE EN D. VAN HIELE-GELDOLF

In Euclides XXXII, nr. 2 merkt Van Haselen op, dat de vormende waarde van (goed) algebra-onderwijs veel groter is dan die van (uitgebreid) stereometrie-onderwijs. Op de vraag, of deze uitspraak gegrond is, kom ik in het vervolg van dit artikel terug. In ieder geval is het van het grootste belang te weten onder welke voorwaarden wiskunde vormende waarde zal bezitten. De keuze van de leerstof zal daarbij stellig van betekenis zijn.

Het begrip „vormende waarde” wordt door Prof. Stellwag („De Waarde der Klassieke Vorming”) als volgt omschreven: „Wanneer iets geleerd wordt, wordt dan dit specifieke wat men leert, alleen maar geleerd, of daarmee nog iets anders, wat zijn invloed doet gevoelen op andere kennis-gebieden, en wat van meer waarde geacht moet worden dan wat feitelijk geleerd wordt, en wat men met het leren van dit heel speciale trachtte te bereiken.”

Of de schoolvakken werkelijk een vormende waarde bezitten, is een vraag, die zeer moeilijk beantwoord kan worden. „Geistesformung” van Castiello is geheel aan onderzoeken op dit gebied gewijd. De proeven zijn dikwijls niet zeer overtuigend: men vraagt zich bij de lezing van de verslagen ervan dikwijls af, of zij werkelijk

277

wel zo iets als een vormende waarde toetsen. Heeft men eigenlijk wel een voldoende duidelijk concept van „vormende waarde”, dat het mogelijk maakt experimenten op te stellen, die de vormende waarde kunnen toetsen?

Het is deze twijfel, die bij de besprekingen over het ontwerp-leerplan van de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O. (dat op vele punten overeenkomst vertoont met dat van Wimecos) er toe geleid heeft, dat men de vormende waarde der leervakken niet heeft laten meetellen. Behalve voor de meetkunde gold het praktische nut als criterium voor het al of niet opnemen van de leerstof. Achteraf bekeken was het toch misschien beter geweest de vraag van de vormende waarde maar moedig onder het oog te zien, ook al zou dit waarschijnlijk tot gevolg hebben gehad, dat het programma een jaar later zou zijn gereedgekomen. Immers, zoals Mursell in “The Psychology of Secondary-School Teaching” opmerkt, wij leraren zijn vast overtuigd van het bestaan van een „vormende waarde”, zonder zulk een vormende waarde zou het vak voor de meeste leerlingen zijn betekenis verliezen.

Zowel van de wiskunde, als van de klassieke talen kan men zeggen, dat vele leerlingen, die deze vakken leren, waarschijnlijk hoogst zelden datgene, wat zij in die vakken specifiek geleerd hebben, direkt in de praktijk of in hun verdere studie zullen toepassen. Men zal de belangrijke plaats, die deze vakken in de onderwijs-programma's innemen, moeten motiveren door hun belangrijke vormende waarde, of men zal moeten erkennen, dat vele leerlingen deze vakken alleen leren „om nog alle kanten uit te kunnen”, d.w.z. om later een keus te kunnen doen, waardoor een groot deel van het geleerde waardeloos wordt.

In het ontwerp-leerplan van Wimecos is de vormende waarde wel impliciet aanwezig. Dit blijkt uit de criteria, welke voor de Commissie hebben gegolden en uit de herhaalde verzekering, dat het om inzicht te doen is. *Het* kenmerk van inzicht is de mogelijkheid van transfer. Men kan zelfs zeggen, dat hoe hoger het bereikte inzicht is, des te ruimer de transfermogelijkheden. Kohnstamm („Keur uit het didactisch werk”) spreekt dit als volgt uit: „Wat men onder vormende waarde verstaat is zeker niet het bezit van een zekere mate van kennis, maar het verwerven van het *inzicht*, dat het gevolg is van zekere arbeid.” „Bij de scherpe onderscheiding van „inzicht” en „oefening” hebben we te doen met *het* centrale vraagstuk van een moderne wetenschappelijke didaktiek.”

Men heeft getracht het probleem van de „vormende waarde”
278 te benaderen door het denken te analyseren. Kohnstamm (t.a.p.)

schrijft: „Vruchtbaar denken (waartoe zowel het oplossen van een nieuw probleem als het terugvinden van iets, dat men geweten heeft, behoort) onderscheidt zich van „ongeordend” denken door de toepassing van bepaalde „oplossingsmethoden” voor het probleem in quaestie. Het is de taak der denkpsychologie de oplossingsmethoden, die vermoedelijk zeer talrijk zijn, te leren kennen voor alle ons bekende probleemsoorten. Worden zij bewust toegepast, dan leidt dit tot een sterk verhoogde vruchtbaarheid van denken.” Deze gedachte, die gebaseerd is op de theorie van Selz, heeft sommigen gebracht tot de uitspraak, dat het gewenst zou zijn de leerlingen zoveel mogelijk „oplossingsmethoden” bij te brengen, opdat zij zo vruchtbaar mogelijk zouden leren denken. Men ziet daarbij echter twee dingen over het hoofd. Het eerste is, dat de oplossingsmethoden zelf tot gehelen gegroepeerd kunnen worden, die een eigen structuur vertonen, zodat men, door zich tot een hoger standpunt op te werken, met de kennis van veel minder oplossingsmethoden toe kan. Het tweede is, dat nog in het geheel niet is aangetoond, dat oplossingsmethoden, die men op een bepaald gebied heeft opgedaan, ook transferabel zijn naar andere gebieden. Aan deze transfer mag men met des te meer recht twijfelen, naar mate de oplossingsmethoden in een geringere onderlinge samenhang (met minder structuur) zijn verworven.

De analyse van het denken voert nog tot een andere mogelijkheid van transfer. Deze komt vooral tot uiting in de belangrijke brochure van mevr. Ehrenfest en prof. Freudenthal: „Kan het Wiskunde-onderwijs tot de Opvoeding van het Denkvermogen Bijdragen?”

Mevr. Ehrenfest schrijft o.a. het volgende: „Er wordt meestal onder „logisch denken” het *foutenvrij trekken van conclusies uit gegeven praemissen* verstaan.” „Het duidelijk begrijpen van *wat een probleem is* en het vinden van de juiste *praemissen*, zijn veel moeilijker en beslissender opgaven en ze moeten aan het trekken van de eventuele conclusies voorafgaan.”

„Wie moeten we een „logisch” mens noemen? Stellig niet hem, die uit een groep willekeurige, ongecontroleerde (of door iemand anders gegeven) praemissen op een onberispelijke wijze een hoeveelheid van „dus”-sen aan elkaar weet te rijgen, maar hem, die de kunst verstaat om *uit een nog niet geordend geheel* van gegevens de *bij de zaak behorende gegevens voor den dag te halen*; die onderscheidt tussen „juiste” beweringen en de *bij de zaak behorende juiste beweringen*; die belang stelt in goede argumentaties en het juist gebruik der woorden en die natuurlijk ook gevoelig is voor logische fouten.”

Tot de (denk?)gewoonten, die thans op de eindexamina geoefend

279

worden noemt zij o.a. „... in de mening verkeren, dat men „in de wiskunde” een speciale taal en een speciale „strengheid” moet toepassen . . . , zonder de *steun* van die strengheid en die beknopte taal bij het eigen zoeken naar een of andere oplossing en haar formulering *beleefd* te hebben; de bepaalde typen van geleerde toepassingen herkennen en de daarbij behorende methoden uit de *herinnering* halen . . . of wel gokken.”

„Voor hem, die gewend was aan de opvoedende waarde der wiskunde te geloven, is deze ontdekking *aanmoedigend*: immers, het geringe vermogen om zuiver en energiek te denken, dat men niet zelden bij bezitters van goede cijfers voor wiskunde aantreft, is niet aan de „niet-overdraagbaarheid” van het „wiskundig” denken te wijten, maar daaraan, dat men bij het onderwijs niet getracht heeft het *denken* te laten oefenen.”

Men kan het ook als volgt uitspreken: De vormende waarde van de wiskunde moet niet in de eerste plaats gezocht worden in het kunnen opereren met bepaalde rekenwijzen, met bepaalde algoritmen, moet niet gezocht worden in het korrekt kunnen redeneren in een gegeven logisch deduktief systeem. Van veel groter betekenis is de *analyse*, die uitgaande van de waarnemingsstructuren door middel van *abstraktie* ten slotte de wiskunde doet ontdekken. Welke relaties zijn kenmerkend in datgene, wat men waarneemt, hoe hangen deze relaties samen, dat is het, waarom het gaat. Hoe het mogelijk is vanuit een konkreet, oorspronkelijk niet-matematisch probleem met de leerlingen de meetkunde te ontdekken, heeft Mw. Van Hiele aangetoond in het door haar ontworpen werkstuk „tegels”. De Miranda heeft onlangs van zijn ervaringen met dit werkstuk een belangwekkend verslag gegeven.

In de hiervoor genoemde brochure is Prof. Freudenthal veel skeptischer t.a.v. de vormende waarde der wiskunde. Hij merkt op, dat er mensen zijn, die de wiskunde niet snappen, omdat zij niet kunnen substitueren. Zij kunnen niet „... voor de driehoek, waarvan in een vroeger bewezen stelling sprake was, die driehoek substitueren, die in een nu te bewijzen stelling voorkomt...”. „Zij zijn in het geheel niet toegankelijk voor de methode van formele substitutie, zonder welke geen wiskunde denkbaar is.” Buiten de wiskundige wetenschappen en buiten de woord- en zinsontleding „zullen we wel niet veel meer van onze gading vinden, om de formele matematische methode nu bepaald als voorbeeld van de feitelijk beoefende denkkunst te kunnen aanprijzen.”

„Er zijn nl. nog geheel andere „goede denkgewoonten”, die juist
280 in de wiskunde niet bepaald tot hun recht komen. Iemand, die de

bekwaamheid mist tot het formeel substitueren, zou bijv. nog uitstekend in analogieën kunnen denken — iets wat we trouwens op elk ogenblik in veel hogere mate beoefenen dan het trekken van schoolse syllogistische conclusies.”

Deze uitspraak is echter een bevestiging van het voorafgaande. De denkvorm, die de beste mogelijkheid van transfer biedt, ligt net even buiten de wiskunde. Zij wordt toegepast, juist vóórdát men tot de wiskunde is doorgedrongen. Mw. Ehrenfest kan alleen tot de konklusie komen, dat de wiskunde een grote vormende waarde kan hebben, doordat zij aan het begrip „wiskunde” een ruimere betekenis geeft dan gebruikelijk is.

Wil men echter, dat het wiskundeonderwijs een grote vormende waarde zal hebben, dan zal men zich vooral in dat onderwijs moeten bezighouden *met het leren omvormen van konkrete (oorspronkelijk niet-wiskundige) problemen tot wiskunde*. Daarbij behoeft men niet zijn toevlucht te nemen tot voor het kind volslagen oninteressante ingeklede vergelijkingen. Neen, de onderwerpen liggen al klaar: in de meetkunde en in de statistiek. De meetkunde en vooral de stereometrie biedt de grootste gelegenheid tot vormende waarde, omdat daar de leerlingen de kans krijgen in de hun omringende voorwerpen de wiskunde te leren ontdekken. Men leze in dit verband ook het verslag van de lezing van Freudenthal: „Het Aanvankelijk Meetkundeonderwijs” (Faraday XXVI, nr. 2). In de statistiek zou een tweede gelegenheid kunnen worden verkregen, wanneer dit vak niet, zoals in het boek van Bunt, logisch deductief zou worden opgezet, maar uit praktische gegevens zou worden ontdekt.

Het vak algebra is in wezen inderdaad het vak van de formele substitutie. En zoals Freudenthal betoogd heeft: van de formele substitutie mogen we niet veel transfer verwachten. Kohnstamm (t.a.p.) heeft aangetoond, dat er zelfs een negatieve transfer mogelijk is.

De uitspraak van Van Haselen, dat de vormende waarde van de algebra veel groter is dan die van de meetkunde, moet dus ernstig in twijfel getrokken worden. En we kunnen pas gaan hopen op een vormende waarde van het vak statistiek, wanneer dit op een totaal andere wijze wordt ingeleid dan in het boek van Bunt wordt aanbevolen.

Een nieuwe fase rond de ontwikkelingen van het wiskunde-onderwijs werd ingeluid door de conferentie van Royaumont in 1959. Deze conferentie werd georganiseerd door de OEES, de Organisatie voor Europese Economische Samenwerking (de latere OESO). Er waren 45 vertegenwoordigers aanwezig uit 18 landen. Deze brachten twee weken door in een klooster 35 km ten noorden van Parijs om daar in afzondering te beraadslagen over de mogelijkheden van moderner wiskunde-onderwijs. Bekend is hier geworden de slagzin van Dieudonné: A bas Euclide.

Het structuurbegrip diende centraal te staan. Waarom een kronkelende, moeizame weg te bewandelen om in de wiskunde thuis te geraken als er een korte, rechte weg is die snel tot het doel voert? Aan het einde van de conferentie werd een tweetal resoluties aangenomen:

- De regeringen van de verschillende landen zal verzocht worden experimenten met gemoderniseerde leerstof te bevorderen en het mogelijk te maken dat deze leerstof geëxamineerd wordt door middel van speciaal daartoe samengestelde opgaven.

- Er zal gevraagd worden experimenten met onderwijs in statistiek te doen plaats hebben.

Voor ons land hadden deze aanbevelingen tot gevolg dat in 1961 de CMLW (Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde) werd geïnstalleerd. De voornaamste werkzaamheden van de commissie waren het opstellen van concepten nieuwe leerstof, experimenten daarmee en het organiseren van heroriënteringscursussen. Deze laatste waren een groot succes; door zeer veel leraren werd eraan deelgenomen. In 1965 werd het eerste experiment gestart betreffende algebra en analyse. In 1967 werd het eerste experimentele examen afgenomen. De opgaven staan in jaargang 42 (1966-1967), blz. 281. Later volgden ook experimentele examens meetkunde met vectoren en statistiek.

In 1966 werd bekend dat in 1968 de Mammoetwet van kracht zou worden. Van groot belang was dan klaar te zijn met een nieuw programma voor wiskunde, zodat alle ingrijpende veranderingen tegelijk plaats zouden hebben. Er moest snel gewerkt worden. De CMLW stelde daarom een Dagelijks Bestuur in onder voorzitterschap van Van der Blij. Door het DB werden contouren opgesteld voor een nieuw programma. Verschillende commissies wer-

den in het leven geroepen om de concrete inhoud op te stellen. Achtereenvolgens werd dit gedaan door commissies voor het programma brugklas, onderbouw vwo, analyse en statistiek en meetkunde met vectoren. Uitgaande van het programma vwo werden daarna de programma's voor havo en voor mavo opgesteld. Leidraad daarbij was dat er voldoende mogelijkheid voor doorstroming moest zijn.

Tenslotte werden door de CMLW nog uitvoerige toelichtingen op de verschillende onderdelen van het programma geschreven. De korte tijdspanne waarin dit alles gebeuren moest, heeft het de schrijvers van schoolboeken zeer moeilijk gemaakt zich aan te passen aan de desiderata van de CMLW.

Hoofdtrekken van de modernisering waren:

- er wordt meer aandacht besteed aan de logische achtergronden, waardoor een scherpere bewijsvoering en preciezere formuleringen mogelijk worden;
- de structuren krijgen een meer centrale plaats, en wel in het bijzonder bij de opbouw van de planimetrie door middel van transformaties en vectoren;
- de analyse wordt uitgebouwd, en wel door meer aandacht te besteden aan het integreren en door invoering van het onderwerp differentiaalvergelijkingen;
- kansrekening en beginselen van de mathematische statistiek worden opgenomen in het programma wiskunde I;
- in wiskunde II wordt de meetkunde in R_2 en in R_3 opgebouwd met behulp van vectoren.

De stereometrie verdween als afzonderlijk leervak. Ze kwam alleen nog maar verplicht ter sprake in wiskunde II en dan nog als regel op een zodanige wijze dat ruimteinzicht verdrongen werd door algebraïsche vaardigheid.

In die jaren schreef Prof. dr. H. J. A. Duparc, *'Nodig en Voldoende, Onnodig en Onvoldoende.'* Men vindt het, behalve hierna, in jaargang 41 (1965-1966) op blz. 305-308.

NODIG EN VOLDOENDE, ONNODIG EN ONVOLDOENDE.¹⁾

door

Prof. Dr. H. J. A. DUPARC

Delft

Zodra een wiskundige in de formulering van een stelling de woorden nodig en voldoende gebruikt, zijn zijn collegae stellig geneigd te oordelen dat hij uit het ware wiskundige hout is gesneden. Er zijn echter momenten waar de woorden nodig en voldoende een iets minder absolute betekenis hebben, zeker als het gaat om de stof in de diverse stadia van wiskunde-onderwijs. Het is daarbij nodig dat men de bedoeling van dit onderwijs bij de onderscheiden categorieën leerlingen niet uit het oog verliest.

Een aantal jaren geleden is bij het V.H.M.O. een wijziging in het programma opgetreden, waarbij de pijl zijn entree in het onderwijs deed, de pijl in de notatie bij het limietbegrip, nodig voor de differentiaal- en integraalrekening. Er zijn vernieuwers die wel drie pijlen op hun boog hebben, namelijk ook nog de pijlen der implicatie en der vectorrekening. Is dat ook nodig? Modern lijkt het stellig, maar dat feit alleen is onvoldoende om zoiets te propageren.

Laten wij ons even bezinnen op mutaties in het programma in het algemeen. Dat ze er zijn is duidelijk en dat onderwerpen die eens in het H.O. werden gegeven „devalueren” en via V.H.O. zelfs naar het L.O. kunnen doordringen is bekend: voor het rekenen, vroeger een geheime kunde van weinigen, haalt men nu al zijn neus op bij het L.O.: zoiets kan een automaat, desgewenst een rekenautomaat. De mens en de leerlingen zijn, zo oordeelt men dan, voor hogere zaken geschapen. De schaduwzijde van deze ontwikkeling is echter niet weg te cijferen.

Dat het onderwijs evolueert is duidelijk. Het is een bekend verschijnsel dat men zich bepaalde stof goed eigen maakt als men die in een of andere vorm globaal de lijn der historische ontwikkeling laat volgen. Opvallend is het dat de oude meetkunde van Euclides nog steeds — terecht — haar stempel sterk op dit onderwijs kan blijven drukken. Ook thans nog oordelen wiskundigen dat de

¹⁾ Voordracht gehouden tijdens het Tweede Nederlandse Mathematische Congres op 15 april 1966 te Heerlen.

Elementen van Euclides tot een der beste ooit geschreven leerboeken behoren.

Vreemd kan het lijken dat het vervolg, de beschrijvende meetkunde (der 19e eeuw) werd vervangen door de analytische meetkunde (der 17e eeuw): in dit geval was een vooruitgang een stap terug van eeuwen. Moeten wij dit nu inhalen en overgaan tot de lineaire algebra, een uitgewerkt produkt van de 20e eeuw (en wellicht weldra tot zaken van de 21e eeuw)? Ik geef toe dat de lineaire algebra zich uiterst fraai laat formaliseren en zelfs dat leerlingen — als ik goed ben ingelicht — reeds op zeer jeugdige leeftijd in staat zijn tot het verwerken van en werken met dergelijke systemen. Maar als het bij dit spelletje blijft, is men er niet. Te vaak blijken de leerlingen niet in staat te zijn de dan ontwikkelde calcul toe te passen op concrete gevallen, zodat de dan gevolgde methode onvoldoende is.

Er wordt wel beweerd dat het veel educatiever is om de leerlingen te trainen in een fraai eenvoudig stelsel als de lineaire algebra is, dan in het ingewikkelde systeem der meetkunde van Euclides, een warboel voor hen tot wie het blijkbaar onvoldoende heeft gesproken. Gaarne teken ik daartegen verzet aan. Wie klassieke meetkunde bedrijft dient voor een hem gesteld vraagstuk uit de rijke veelheid der stellingen die uit te zoeken, die hem de oplossing van het vraagstuk zullen brengen, net als iemand die zich door een dicht bos met vele wegen een weg moet banen naar een begeerd punt. Men moet daarbij ingenieus zijn: het ontwikkelen van dit soort talent is uiterst nuttig voor hen die zich later een of ander (praktisch) probleem gesteld krijgen en maar moeten zien hoe zij met de hun ter beschikking staande middelen de oplossing vinden. Deze wijze van ingenieus zijn is een kunde die elke ingenieur alleen maar van nut kan zijn. Bij de vlakke meetkunde is het nog extra plezierig, dat men zijn vermoedens kan verifiëren aan een tekening, een duidelijke weerspiegeling van het feit dat de meetkunde ons een beschrijving geeft van onze fysische ruimte (niet-euclidische afwijkingen daargelaten).

Misschien is het aan te bevelen enkele wijzigingen in de meetkunde van Euclides te tolereren. Axiomatisch is deze lang niet eenvoudig. In het begin liggen moeilijke stellingen en eigenschappen waarvan soms de bewijzen in het bewuste stadium van het leerplan voor de leerlingen onverteerbaar zijn, ofwel van een dusdanige afwijkende structuur, dat zij in latere bewijzen niet meer optreden. Ik zou er voor zijn bepaalde eigenschappen over evenwijdige lijnen en daarbij optredende hoeken maar zonder bewijs te poneren. Ook

ben ik bereid de congruentiegevallen als axioma's te nemen; hand-tastelijke bewijzen met opnemen van driehoeken of figuren treden erna in de meetkunde niet meer op. Verdere stellingen kunnen juist met behulp van die congruentiegevallen worden geleverd. (Evenmin voel ik veel voor een poging om met spiegelingen dit complex van eigenschappen op te bouwen).

Na de planimetrie en stereometrie is naar mijn oordeel de analytische meetkunde in het V.H.M.O. zeer op haar plaats. De lineaire algebra zag ik liefst bij het H.O. Wie al te veel moderne theorieën naar het V.H.M.O. wil verwijzen, ondervindt dat klassieke nuttige feiten daar in het gedrang komen. Dan zou men bij het H.O. moeten inhalen wat bij het V.H.M.O. thuis hoort, juist doordat het V.H.M.O. wezenlijke H.O.-stof tot zich heeft getrokken. De chaos wordt compleet.

Ook bij het algebra-onderwijs traden en treden mutaties op. Reeds heeft de infinitesimaalrekening er haar entree gedaan, waarvoor in het programma enkele minder nuttige traditionele onderwerpen dienden plaats te maken. Er zijn groeperingen, die het daarbij niet willen laten. Men speelt met de gedachte aan verzamelingsleer en logica en dan moet men andermaal enkele klassieke zaken laten schieten. Zolang de nieuwe onderwerpen dienen om de terminologie wat scherper te maken dan voorheen, bestaat er naar mijn oordeel geen bezwaar tegen ze in te voeren. Nu reeds schijnt de pijl der implicatie populairder te zijn in ons onderwijs, dan het klassieke drietal puntjes voor het begrip „dus”.

Men vermijde het de nieuwe symbolen tot systeem te verheffen en de er dan uit te voorschijn komende calcul tot cultus. Zo'n calcul spreekt pas tot een leerling als de calcul met normale getallen al behandeld is en stellig niet voordien. Het manipuleren met logische formules kan bij het H.O. een doel in zichzelf zijn, bij het V.H.M.O. beseffe men terdege waar de grenzen liggen en houde men de aansluiting met dat deel der wiskunde, waarop het wordt toegepast, in het oog. Er zouden anekdotes te vertellen zijn over leerlingen of studenten, die menen dat een iets scherpere terminologie moeilijke stellingen ineens een bewijs verschaft. Zij doorzien de bedoeling van de nieuwe begrippen niet, wellicht door een teveel aan aandacht die de abstracte uiteenzettingen over het nieuwe systeem hebben genoten.

Bij het V.H.M.O. is een te sterk formalisme in abstracto verwerpelijk. Zo zijn er mensen die de grafieken of functies willen invoeren via een relaas over relaties en getallenparen. Lettend op het concrete nut van deze begrippen prefereer ik een aanschouwelijke

behandeling met een plaatje. In verreweg de meeste gevallen is men daar meer mee gebaat.

Ook als nieuwe begrippen een nuttige basis voor later gebruik geven (logica voor programmeren; lineaire algebra voor economische problemen), houde men bij hun invoering er terdege rekening mee, dat men concreet blijve. Dat is de primaire taak voor het V.H.M.O., evenzeer voor het toekomstige H.A.V.O. en M.A.V.O. De vreugde over introductie van nieuwe gebieden moge nimmer voeren tot een onnodige abstracte uitbouw van zo'n gebied. Een abstracte uitbouw dient pas te geschieden bij het H.O. en alleen maar voor de relatief zeer kleine groep der eigenlijke wiskundestudenten.

Tot slot nog een enkele opmerking over weglaten van onderwerpen uit het traditionele programma. Men zij daarmee zeer voorzichtig. Vele op zichzelf minder belangrijke onderwerpen kunnen een goede training bieden van uiterst nuttige theorie. Wie deze — zelfs als vraagstuk — niet meer wil behandelen, maakt dat de eigenlijke theorie onvoldoende vaak wordt gebruikt, zodat de leerlingen deze onvoldoende of minder voldoende beheersen, een euvel dat zich vaak later pas ernstig manifesteert.

Als men zich met een te eng bepaald of verschaald vakgebied tevreden stelt, riskeert men dat het onvoldoende het geestelijke eigendom wordt van de leerlingen; zo'n beperking is onnodig en ongewenst.

Voor Wimecos had de nieuwe onderwijsstructuur ingrijpende gevolgen. De mechanica was reeds als zelfstandig vak verdwenen; thans verdween ook de kosmografie. Zowel de 'me' als de 'cos' in de naam van de vereniging hadden hun zin verloren. Naamsverandering lag dus voor de hand. Maar ook de statuten voldeden niet meer. Wimecos was een vereniging voor leraren wiskunde aan gymnasia, lycea en hbs'en. De hbs had opgehouden te bestaan. Bovendien was het ongewenst, gezien de nieuwe structuur van het onderwijs, een scheiding aan te brengen tussen vwo-, havo- en mavo-leraren. Gevolg hiervan was dat de vereniging zowel een nieuwe naam als nieuwe statuten kreeg. Besluiten van de ledenvergadering van 23 december 1968 zijn:

- De naam van de vereniging wordt gewijzigd in: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
- Het aannemen van nieuwe statuten. Krachtens artikel 7 daarvan kunnen lid van de vereniging worden 'leraren in de wiskunde aan scholen, als bedoeld in de Wet op het Voortgezet Onderwijs'. Artikel 7 werd voorlopig op voorzichtige wijze gehanteerd. De vereniging werd opengesteld voor mavo-leraren. Het bestuur werd uitgebreid met twee leden die afkomstig waren uit het mavo. Eerst in 1975 deelde het bestuur mee dat het de tijd gekomen achtte de grenzen te verruimen en ook het lbo in de gezichtskring van de NVvW te betrekken. In 1977 werd het bestuur uitgebreid met een vertegenwoordiger van het lbo (zie jaarg. 52, blz. 67-68). Ook voor Euclides brak in 1968 een nieuw tijdperk aan. Tot dan richtte het tijdschrift zich uitsluitend op leraren uit het vmo of, om de nieuwe terminologie te gebruiken, op eerstegraads leraren. Nu de leraren tweede en derde graad ook tot de vereniging konden toetreden, wilde de redactie zich ook op hen instellen. Het streven artikelen van wiskundig-wetenschappelijke inhoud op te nemen die in geen direct verband met de schoolwiskunde staan, werd verlaten. Aan didactiek werd een meer centrale plaats gegeven dan voorheen. Gepoogd werd ervoor te zorgen dat de inhoud van het tijdschrift voor de totale lezerskring relevant werd. Kortom, Euclides werd gemoderniseerd. P.G.J. Vredenduin heeft in jaargang 48 (1972-1973) in een serie artikeltjes het programma van het vak Meetkunde met vectoren toegelicht. Het eerste artikel van deze serie volgt hier:

Meetkunde met vectoren I

(het uitgangspunt)

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

De laatste vier jaar heb ik in de bovenbouw van het gymnasium geëxperimenteerd met het vak meetkunde met vectoren, zonder daarbij een bepaald boek te gebruiken. De voorzitter van de redactie vroeg mij, of ik iets van mijn bevindingen in Euclides wilde schrijven. Gaarne voldoe ik aan zijn verzoek. Het lijkt mij het beste, dat ik in een serie artikeltjes weergeef, wat voor mij het belangrijkste is geweest. Daartoe moet ik eerst uiteenzetten, wat volgens mij de plaats van het vak meetkunde met vectoren in het wiskundeonderwijs op het vwo is.

In de voorbeeldtabellen van jaren her, uit het 'witte boekje', vindt men in klasse 4: voor alle leerlingen 2 uur wiskunde, en wel wiskunde I;

voor de B-leerlingen bovendien 3 uur wiskunde, en wel wiskunde II.

Bij de eerstvolgende herziening zijn deze 3 uur wiskunde II teruggebracht tot 2 uur.

De voorbeeldtabellen waren reeds gepubliceerd, toen de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde begon met het opstellen van een leerplan. Bij het samenstellen van dit leerplan is de CMLW dan ook uitgegaan van de mogelijkheden, die door de voorgestelde urenverdeling gegeven waren.

Zowel de A- als de B-leerlingen kunnen wiskunde I in hun keuzepakket opnemen. De A-leerlingen volgen echter niet de 3 (later 2) uren in klasse 4 gereserveerd voor de B's. De inhoud van deze uren mag dus niet van zodanige aard zijn, dat een met vrucht volgen van het onderwijs in wiskunde I in de bovenbouw belemmerd zou worden door het niet volgen van deze lessen. De inhoud van de 4B-uren mag dus alleen preluderen op de wiskunde II uit de bovenbouw. Hij moet bovendien van dien aard zijn, dat het nuttige leerstof is voor elke B-leerling. Vandaar dat gedacht is aan een inleiding in de vectormeetkunde, waarbij men ook kennis zou maken met het inwendig produkt, en waarbij men verder in contact zou komen met zaken van algemeen nut, zoals eenvoudige stereometrische begrippen en kennismaking met de kegelsneden.

Hoe vanzelfsprekend het voorgaande ook mag klinken, toch geloof ik dat deze opvatting door de feitelijke ontwikkeling al weer achterhaald is of althans spoedig achterhaald zal worden. Ik zal wel niet het complex van oorzaken hoeven te noemen, dat ons noodzaakt zo efficiënt mogelijk te werk te gaan. Volgens mij brengt dit met zich mee, dat we ervan af moeten zien de uren in 4B te

1

beschouwen als uren in algemene mathematische ontwikkeling tevens geschikt als prelude voor de wiskunde II in de bovenbouw. We zullen deze uren hard nodig hebben voor wiskunde I. Het zal noodzakelijk zijn, dat ieder die in de bovenbouw wiskunde I in zijn pakket opneemt, de uren wiskunde-B in klasse 4 volgt. (Aan mijn eigen school is dit doorgevoerd.) Men kan dan een uur ervan besteden aan verdieping van het functiebegrip en het andere aan een inleiding in de differentiaalrekening.

Dit laatste heeft het grote voordeel, dat ieder die in klasse 5 natuurkunde of scheikunde wenst te volgen, reeds kennis heeft van de beginselen van de differentiaalrekening. Verder is het zeer gewenst, dat ook zij die economie I in hun pakket opnemen, deze inleiding volgen. Naar mij meegedeeld is, is het dan mogelijk voor economie I in de bovenbouw 2×3 uur uit te trekken, terwijl dit aantal onvoldoende is, als ook nog de nodige wiskundekennis door de leraar economie de leerlingen bijgebracht moet worden. Misschien is het gewenst in deze inleidende cursus ook iets over integraalrekening te vertellen. Een ander voordeel van het terugschuiven van een uur analyse naar klasse 4B is, dat men in de bovenbouw iets meer tijd krijgt voor een verantwoorde behandeling van de twee zo uitermate belangrijke onderwerpen: analyse en statistiek.

Kennelijk wordt door het verdwijnen van de wiskunde II uit klasse 4B iets over boord gezet. We moeten eerst nagaan in hoeverre dit catastrofaal is. Het gaat in essentie om twee dingen: de kegelsneden en de ruimtemeetkunde.

Ellips en hyperbool kunnen we op twee manieren doen ontstaan. De ene manier is, dat we uitgaan van de brandpuntseigenschappen en ellips en hyperbool als puntverzamelingen definiëren. De bijbehorende vergelijkingen worden dan afgeleid op precies dezelfde manier als vroeger in de analytische meetkunde. De andere manier is de volgende functies te beschouwen:

$$\begin{aligned} (x, y) &\rightarrow x^2 + y^2 \\ (x, y) &\rightarrow x^2 + ay^2 & (a > 0) \\ (x, y) &\rightarrow x^2 - y^2 \\ (x, y) &\rightarrow x^2 - ay^2 & (a > 0) \end{aligned}$$

De niveaulijnen van de eerste functie zijn cirkels. De niveaulijnen van de tweede functie ontstaan uit die van de eerst door een 'strekking' met als richting de y -as. Deze niveaulijnen heten ellipsen. De niveaulijnen van de derde functie eisen iets meer geduld. Men vindt twee symmetrieassen, twee toppen (de snijpunten met de x -as) en ten slotte met wat rekenwerk twee asymptoten. We noemen deze niveaulijnen orthogonale hyperbolen. En ten slotte vinden we uit de vierde functie de hyperbool als beeld van een orthogonale hyperbool bij een strekking met als richting de y -as. Volgens mij raakt deze behandelingswijze meer het essentiële van ellips en hyperbool dan de meetkundige behandelingswijze. Weglating van de wiskunde II uit klasse 4 behoort dus gepaard te gaan met het introduceren van de

2 ellips en de hyperbool in het programma voor de analyse.

Onaangenamer is het tweede punt: de ruimtemeetkunde. Ik zie geen manier om het stereometrisch inzicht te ontwikkelen binnen het kader van het onderwijs in wiskunde I. In de onderbouw wordt wel eens de ruimte mee in de besprekingen betrokken, maar dat blijft meestal beperkt tot een min of meer kunstmatig met de haren erbij slepen van de kubus. In de analyse wordt de inhoud van enkele lichamen afgeleid, maar ook dat is slechts een schrale troost.

Inzicht in de ruimte verkrijgen we nu eenmaal hetzij door mathematisch fröbelonderwijs in de onderbouw, hetzij door een verantwoorde afleiding van stereometrische eigenschappen in de bovenbouw. In de onderbouw ontbreekt ons de tijd om nog extra te gaan fröbelen. En in de bovenbouw zou dit betekenen: axiomatisch-deductieve behandeling van een stuk stereometrie of vectoriële behandeling ervan. Zowel het ene als het andere kost ons minstens een jaaruur en we zijn nu juist tot de conclusie gekomen, dat we deze tijd niet hebben. Willen we onze energie dus niet versnipperen, dan zullen we het offer moeten brengen een stuk mathematische algemene ontwikkeling braak te laten liggen.

Na deze beginselverklaring kunnen we met ons eigenlijke onderwerp beginnen. De leerling heeft in vorige jaren reeds met vectoren kennis gemaakt en er enigszins mee leren rekenen. Hoe deze vectoren gedefinieerd waren, weet ik niet. Misschien waren het geordende puntenparen, misschien gerichte lijnstukken; misschien waren ze vrij, misschien hadden ze een vast beginpunt. Hoe het ook zij, in elk geval is er een optelling van vectoren gedefinieerd en is er bewezen, dat voor deze optelling de volgende eigenschappen gelden:

- A1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
- A2. $\mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u}$
- A3. de optelling heeft een neutraal element ($\mathbf{0}$):
 $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
- A4. elk element heeft een tegengestelde ($-\mathbf{v}$):
 $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

Verder is een vermenigvuldiging gedefinieerd van een reëel getal en een vector en bleek (of blijkt) deze de volgende eigenschappen te hebben:

- A5. $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$
- A6. $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$
- A7. $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$
- A8. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Voorzover de juistheid hiervan vroeger niet aangetoond is, zal het nu weinig moeite kosten deze aan het licht te brengen.

Nu wordt het tijd wat te gaan rekenen met vectoren, d.w.z. uit de eigenschappen A1-8 enkele andere af te leiden. Vooral niet veel. Ik denk b.v. aan:

$$\begin{aligned}
v + x = w &\Leftrightarrow x = w - v \\
\text{definitie: } w - v &\stackrel{\text{df}}{=} w + (-v) \\
v - v &= \mathbf{0} \\
(w - v) + v &= w \\
0v &= \mathbf{0} \\
(a - b)v &= av - bv \\
av + (-a)v &= \mathbf{0} \\
(-2)v &= -(2v) \\
(-1)v &= -v
\end{aligned}$$

Het doel hiervan is de leerling aan de hand van deze voorbeelden duidelijk te maken, dat het mogelijk is uit de eigenschappen A1-8 andere af te leiden zonder er daarbij aan te denken, wat vectoren eigenlijk zijn. (D.w.z. wij weten, dat dit ons doel is, maar we zeggen het niet, omdat het belang ervan in dit stadium nog niet te begrijpen is.)

We gaan nu naar de 'werkelijkheid' terug. Wat zijn vectoren? Laten we aannemen, dat de leerling in de onderbouw geleerd heeft, dat vectoren gerichte lijnstukken zijn en dat twee vectoren gelijk zijn als ze even lang en gelijkgericht zijn. Zijn vectoren waren dus vrije vectoren. Waarschijnlijk waren deze vrije vectoren te voorschijn gekomen door op te merken, dat er een bijectie bestaat tussen deze vrije vectoren en de translaties, welke bijectie de som van twee vectoren doet corresponderen met de samengestelde van de bijbehorende translaties. Welnu een dergelijke bijectie bestaat ook tussen translaties en gerichte lijnstukken met vast beginpunt. Zouden we een gericht lijnstuk met vast beginpunt O ook een vector kunnen noemen? Ook voor deze 'vectoren' blijven de eigenschappen A1-8 van kracht. Met deze vectoren kunnen we dus net zo rekenen als met de vroegere. Ook voor deze vectoren gelden dus de boven genoemde afgeleide eigenschappen.

We kunnen ook zeggen, dat een translatie bepaald is door te geven welk punt het beeldpunt van een vast punt O is. Zo kunnen we een bijectie tot stand brengen tussen de translaties en de geordende puntenparen met vast beginpunt O . Ook nu zijn A1-8 en daarmee de eruit afgeleide eigenschappen van kracht.

Tenslotte is er een vierde manier om vectoren te definiëren. We hebben zo juist gezegd: een vector is een geordend puntenpaar met vast beginpunt O , dus een geordend paar (O, A) . Waarom zouden we dat vaste punt O in al onze beschouwingen meeslepen? Eenvoudiger is in het platte vlak een vast punt O te kiezen en nu te zeggen: een vector is een punt in het vlak. Dat lijkt gek; waarvoor dient dat punt O nu nog? De rol daarvan komt te voorschijn, zodra we de optelling van vectoren gaan definiëren. De vectoren 'punt A ' en 'punt B ' tellen we op door op OA en OB een parallelogram te construeren. Het vierde hoekpunt C van dit parallelogram is nu de som van de vectoren 'punt A ' en 'punt B '. En natuurlijk speelt O ook een rol bij de definitie van het produkt van een reëel getal en een vector.

Nu begint duidelijk te worden, dat het er eigenlijk weinig toe doet, wat we nu eigenlijk een vector noemen. Het enige, dat van belang is, is dat hetgeen we vector

4 noemen de eigenschappen A1-8 heeft. Als dat het geval is, dan kunnen we met

onze vectoren gewoon rekenen, d.w.z. zijn al die eigenschappen juist, die we hierboven uit A1-8 afgeleid hebben.

We zouden zelfs heel gekke dingen vectoren kunnen noemen. Onderstel, dat een huisvrouw inkopen doet in een warenhuis. Ze koopt vijf artikelen, t.w. suiker, thee, koffie, rijst en cacao. Koopt ze s gram suiker, t gram thee, k gram koffie, r gram rijst en c gram cacao, dan noteren we haar inkoop (s, t, k, r, c) . Soms heeft ze te veel van een bepaald artikel, b.v. te veel koffie. Ze brengt dan wat koffie terug. Het warenhuis is gewillig en neemt dat. We definiëren nu:

$$\begin{aligned}(s_1, t_1, k_1, r_1, c_1) + (s_2, t_2, k_2, r_2, c_2) &= \\(s_1 + s_2, t_1 + t_2, k_1 + k_2, r_1 + r_2, c_1 + c_2) \\a(s, t, k, r, c) &= (as, at, ak, ar, ac)\end{aligned}$$

En gezien het feit, dat weer aan A1-8 voldaan is, blijkt de huisvrouw telkenmale met een vector thuisgekomen te zijn.

Maar ons onderwerp is meetkunde met vectoren en niet huisvrouw met vectoren. Wij zullen dus meetkundige dingen vectoren noemen. Maar welke? We hebben gezien, dat we een ruime keus hebben. Ik zou de volgende keus willen doen: een vector is een punt in een vlak, waarin een vast punt O gekozen is.

Misschien is de volgende formulering didactisch wat duidelijker. De punten van een vlak noemen we vectoren. Een van de punten noemen we de nulvector. Daarna definiëren we de optelling van vectoren met behulp van de parallellogramconstructie en de vermenigvuldiging van reëel getal en vector op de gebruikelijke manier.

Bovenstaande formulering gaat ervan uit, dat we reeds een vlak hebben en dat we in dit vlak vectormeetkunde willen bedrijven. Ik geloof niet, dat het enige zin heeft bij het vwo verder te willen gaan met de abstractie. Dit is dus ons uitgangspunt. En nu willen we dit uitgangspunt gebruiken om meetkundige eigenschappen te gaan afleiden. Maar daarover volgende keer.

In het begin van de jaren zeventig werd er op verschillende gebieden met succes gestreefd naar mogelijkheden om meer professioneel met de schoolwiskunde aan de slag te gaan.

Een voorbeeld hiervan is de professionalisering van de opleiding tot wiskundeleraar. Deze opleiding had in de jaren daarvoor een marginale omvang voor zover deze betrekking had op het bijbrengen van kennis en vaardigheden op het gebied van vakdidactiek en doceervaardigheden; het was in de zestiger jaren nog gebruikelijk dat een onderwijsbevoegdheid behaald werd via een summiere extra studieactiviteit die qua zwaarte in geen verhouding stond met de veel omvangrijkere vakinhoudelijke opleiding. Door de uitbouw van de Universitaire Lerarenopleidingen en door de komst van de Nieuwe Lerarenopleidingen ontstond de mogelijkheid voor studenten allerlei aspecten van het leraarschap te doordenken en voor het leraarschap relevante kennis en vaardigheden op te doen. Aan de opleidingen werden bijvoorbeeld instituutsp practica en schoolpractica toegevoegd.

De CMLW breidde haar taak uit tot het gehele wiskunde-onderwijs waarbij ook met name aan basisonderwijs en lbo veel aandacht geschonken werd.

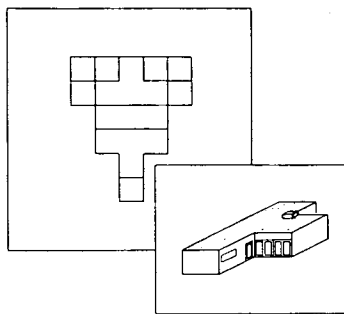
Deze uitbreiding maakte het wenselijk een meer professioneel werkend instituut in het leven te roepen om deze taken uit te voeren. In 1971 werd daartoe het IOWO (Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs) opgericht onder de bezielende leiding van Prof. dr. Hans Freudenthal. Opvallend is het brede scala van onderwerpen waar het IOWO zich mee bezig heeft gehouden zoals het ontwikkelen van leerlingenmateriaal, docentenboeken, achtergrondliteratuur, leerplannen, na- en bijscholing van leraren, kadervorming en periodieken zoals het Wiskobas-Bulletin en de Wiskrant, waarbij de Wiskobas-activiteiten zich op de basisschool en de Pedagogische Academies richtten en Wiskivon zich op het voortgezet onderwijs en de lerarenopleidingen concentreerde.

Het IOWO heeft een belangrijke en inspirerende invloed gehad. Het werd in 1981 om onderwijspolitieke redenen opgeheven waardoor een belangrijk gedeelte van de werkzaamheden abrupt afgebroken werd.

Uit het volgende artikel van één van de voormalige medewerkers van het IOWO blijkt iets van de sfeer van het ontwikkelingswerk van het instituut. Het is te vinden in jaargang 50 (1974-1975), blz. 212-218.

Nog zonder kop of staart

WIM KREMERS en JOHN PHILIPS
I.O.W.O. architect
Heteren Rosmalen



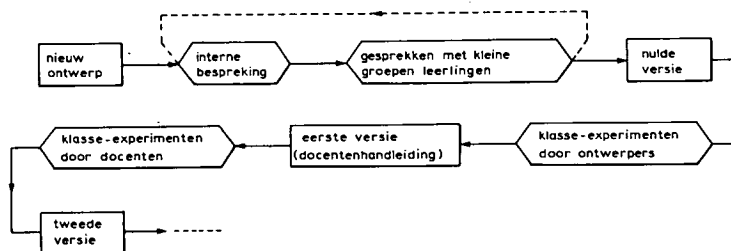
Nulde versie van een stukje wiskunde-onderwijs geïnspireerd door 'de brochure'.

Na het schrijven van de I.O.W.O.-brochure: 'Wiskunde l.b.o., startpunt leerplanontwikkeling' is de groep van het I.O.W.O. die zich in het bijzonder richt op het wiskunde-onderwijs aan 12 tot 16 jarigen nog nauwelijks met meetkunde bezig geweest. Wel hebben we zo langzamerhand een wat duidelijker idee gekregen over de eisen die we willen stellen aan problemen die we de leerlingen voorleggen:

1. het probleem moet aansluiten bij de *belevings- of ervaringswereld* van de leerling. Hij moet zich persoonlijk bij het onderwerp betrokken voelen: het probleem dient vooral zijn probleem te worden.
2. de leerling dient door het probleem *actief* bij het onderwijs betrokken te worden: wiskunde leren geschiedt door wiskunde te doen.
3. het moet een *rijk* probleem in een *rijke* kontekst zijn, d.w.z. dat het op verschillende nivo's oplosbaar is en de leerling er toe brengt zijn eigen subproblemen te stellen en op te lossen. Bovendien moet het aanleiding geven tot fundamentele wiskundige activiteiten.

In de leerstofvakken grafische verwerking en meten hebben we enige ervaring hiermee opgedaan. Misschien voldoet een uitgewerkte versie van de volgende serie problemen aan deze drie eisen. We hebben het gevoel dat het er in zit. Wat aan een dergelijk projekt vooraf moet gaan weten we nog niet precies, ook het vervolg is nog niet helemaal duidelijk.

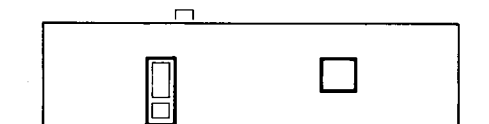
Natuurlijk ligt dan de vraag voor de hand waarom we dan toch met zo'n stuk komen. We willen u in dit artikel een indruk geven van wat en hoe wij ontwerpen. Uw reacties hierop kunnen een waardevolle aanvulling zijn op de procedure die wij binnen onze groep tot nu toe hebben gevolgd bij het ontwikkelen van een stuk leerstof:



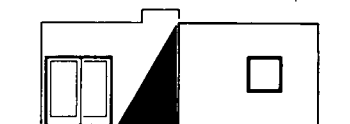
Bij de volgende serie opdrachten kan de vraag gesteld worden of er niet te weinig is terug te vinden van de zaken die tot nu toe bij het meetkunde-onderwijs centraal hebben gestaan. We komen daar straks nog even op terug. Ook veel andere vragen zouden gesteld kunnen worden, maar laten we maar eens gaan kijken.

De familie A. N. Lewieks heeft een stuk grond gekocht in het recreatiegebied van de gemeente Elnes. Zij willen daar een aantal vakantiebungalows op laten bouwen.

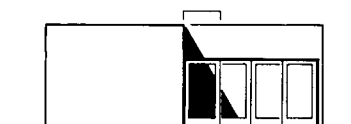
*Architekt Flip Wilkers maakte een ontwerp dat hij Belvia genoemd heeft. *1*



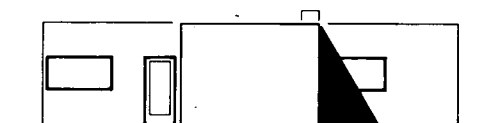
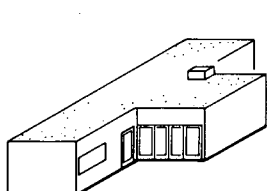
VOORGEVEL.



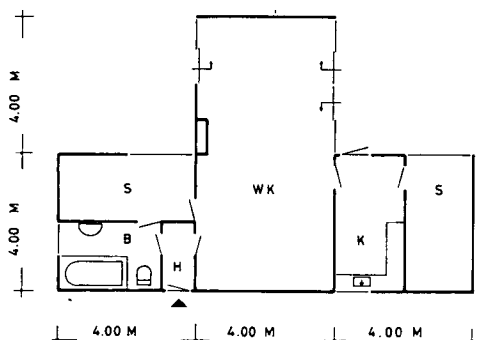
ZIJGEVEL LINKS



ZIJGEVEL RECHTS.



ACHTERGEVEL.



PLATTE GROND

H hal
WK woonkamer
K keuken
S slaapkamer
B badkamer

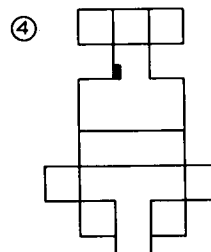
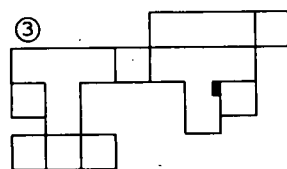
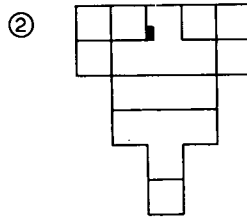
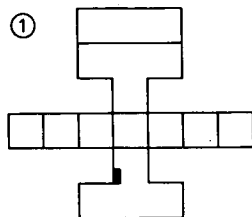
— schuifdeur

bestektekening
bungalow type BELVIA
bld. I. J. J. 3 nov. 1974

OPDRACHTEN (I)

Een model van Belvia.

- 1. Van welke van de hieronder getekende uitslagen kun je deze vakantiebungalow vouwen? *2



Kontroleer je antwoorden door de uitslagen uit te knippen en te vouwen.

Teken, samen met de andere leden van je groep nog een aantal uitslagen van deze vakantiebungalow.

Hoeveel verschillende uitslagen zijn er door de leerlingen van je klas gevonden? *3

- 2. Maak, bijvoorbeeld van karton, een makette van dit huisje.

- 3. Vul de volgende tabel in:

	lengte w.k.	oppervlakte w.k.	inhoud w.k.
bestektekening	6 cm		
makette			
werkelijkheid	8 m		

Als je de schaal van je makette tweemaal zo groot gekozen had, zou de lengte van de woonkamer in die makette dan ook tweemaal zo groot geweest zijn? En de oppervlakte? En de inhoud? *4

Opmerkingen:

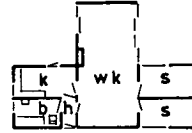
- *1 Een nivodifferentiatie kan hierbij worden aangebracht door de perspectief-tekening weg te laten.
 - *2 Door andere uitslagen te kiezen of door de uitslagen meer het karakter van een bouwplaat te geven – bij kniplijnen een schaartje tekenen en vouwlijnen stippelen – kan deze opdracht eenvoudiger aangeboden worden. Anderzijds kan ook gevraagd worden deuren en ramen in de uitslag op de juiste plaats aan te geven en kan worden nagegaan welke uitslag het meest geschikt is om er een bouwplaat van te maken, rekeninghoudend met plakstrookjes en de éézijdige bedrukking van zo'n plaat.
 - *3 Het aantal mogelijkheden kan bijvoorbeeld beperkt worden door de eis op te nemen dat na het uitknippen langs de buitenste lijnstukjes er niet meer geknipt mag worden.
 - *4 Het tekenen van grafieken van de lengte, de oppervlakte en de inhoud van de woonkamer als functie van de schaal (of eenvoudiger oppervlakte en inhoud als functie van de lengte) zou hieraan gekoppeld kunnen worden.
- 5 Natuurlijk kan hierbij ook het rekenaspect naar voren gebracht worden. Aan de hand van een eenvoudige materialenstaat – het kan op een halve bladzijde – en een prijskaart van een handel in bouwmaterialen kan een eenvoudige berekening van de kosten aan bouwmaterialen gemaakt worden.

De afdeling bouw- en woningtoezicht van de gemeente Elnes keurt het ontwerp van de architect op één punt af. Deze afdeling is namelijk van mening dat de natte ruimten (keuken en badkamer) aan elkaar grenzend behoren te zijn. Voor de rest gaat zij met het ontwerp akkoord. De architect heeft de tekeningen die nodig zijn voor het aanvragen van een bouwvergunning het snelst klaar als hij er in slaagt aan dit bezwaar tegemoet te komen zonder zijn ontwerp drastisch te wijzigen.

OPDRACHTEN (II)	Een gewijzigd ontwerp Belvia.
► 1. Maak een nieuwe plattegrond voor deze vakantiebungalow waarbij de badkamer en de keuken aan elkaar grenzen. Hierbij moet je rekening houden met: - i de T-vorm van het vakantiehuisje mag niet gewijzigd worden. - ii de vorm, de oppervlakte en het aantal vertrekken van de woning blijft onveranderd. - iii in elk vertrek moet daglicht binnen kunnen blijven treden. *1	
► 2. Maak bij je plattegrond ook de tekeningen van de vier gevels.	
► 3. Pas je makette bij het nieuwe ontwerp aan. *2	

Opmerkingen:

- *1 Door het aanbieden van geschikt gekozen hulpmiddelen kan deze opdracht sterk vereenvoudigd worden. In feite kan het probleem teruggebracht worden tot het op een geschikte manier leggen van een puzzel van zes stukjes in de T-vorm.
- *2 Een klasgesprek zou de afronding van deze opdracht kunnen zijn.
Gemakshalve zullen we bij de volgende opdracht aannemen dat de hiernaast getekende oplossing als 'klasontwerp' uit de bus gekomen is.
- 3 Aan deze serie kunnen veel opdrachten toegevoegd worden. Denk, om er maar eens één te noemen, aan de elektriciteitsleidingen met zijn minimaliseringsproblemen (oplosbaar m.b.v. uitslagen) en zijn toepassingsmogelijkheden van de stelling van Pythagoras.



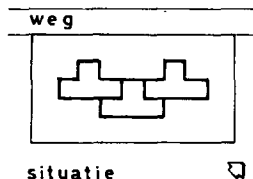
De vakantiebungalows zullen in groepen van drie aan elkaar gebouwde huisjes op het bouwterrein gezet worden. Bij het schakelen van zo'n drietal moeten de bouwkosten natuurlijk zoveel mogelijk gedrukt worden. Zo is het bijvoorbeeld van belang dat de natte ruimten van drie geschakelde woningen aan elkaar grenzend gebouwd worden, omdat je dan o.a. met één centrale afvoer van het rioleringsnet kunt volstaan. Vandaar dat de architect bij zijn ontwerp verschillende typen nodig heeft. We spreken van een ander type Belvia als de onderlinge ligging van de vertrekken veranderd is. De vorm, oppervlakte en het aantal vertrekken is hierbij weer niet gewijzigd.

OPDRACHTEN (III)

Variaties op Belvia.

- 1. Op de plattegrond van Belvia zijn drie gedeelten te onderscheiden: de twee slaapkamers (een vierkant), de hal, badkamer en keuken (net zo'n vierkant) en de woonkamer (twee van deze vierkanten). Hoeveel verschillende typen kun je met je groep vinden door alleen maar deze drie gedeelten te verwisselen? Binnen zo'n gedeelte is het wel toegestaan om de plaats van een vertrek te veranderen. Teken van elk type een plattegrond en ga na welke nadelen er eventueel voor de toekomstige bewoners van zo'n type zullen zijn (b.v. dat ze via de keuken van de hal naar de kamer moeten). *1

- 2. Eén mogelijkheid om drie van deze woningen te schakelen is hiernaast getekend. Welke indeling zou je deze drie woningen geven. Maak hierbij gebruik van de typen die je bij ► 1. gevonden hebt en houd rekening met de voorwaarde dat de natte ruimten van de drie woningen aan elkaar moeten grenzen.



- 3. Teken nog een aantal mogelijkheden om drie van deze woningen te schakelen. Aan welke schakeling geeft je groep de voorkeur? Waarom?

Opmerkingen:

- *1 Ook dit probleem is op een aantal manieren eenvoudiger toegankelijk te maken. Men kan bijvoorbeeld de vertrekken van deze drie gedeelten uit karton, laten knippen, waarbij elk gedeelte zijn eigen kleur heeft. Bij deze opdracht is het niet noodzakelijk om op de plaatsing van ramen en deuren in te gaan.
- 2 Een mogelijk vervolg en afsluiting van deze serie opdrachten zou het probleem van de situering van zoveel mogelijk huisjes op het bouwterrein kunnen zijn. Door een aantal beperkende voorwaarden op te nemen (bereikbaarheid van de woningen, oppervlakte tuin, etc.) is zo'n opdracht wel in de hand te houden. Ook op deze plaats kunnen weer een groot aantal problemen toegevoegd worden. Zo kan verondersteld worden dat de vakantiebungalows in vier blokken van drie woningen op het terrein gebouwd worden en dat ze op een centraal antennesysteem zullen worden aangesloten, waarvan de mast op het middenplein staat. In verband met verlies aan signaal is het van belang dat de som van de lengten van de vier kabels die nodig zijn om de vier blokken met de antennemast te verbinden, minimaal is. Wat is – bij een gegeven situatieschets – de gunstigste plaats voor die mast?

Bij dit project zullen leerlingen, voornamelijk nog impliciet, een aantal fundamentele zaken uit de meetkunde ervaren. Ruimtelijke oriëntatie, oppervlakte en inhoud, transformaties en projecties zijn daar voorbeelden van. Maar het biedt eventueel ook toepassingsmogelijkheden en aanknopingspunten voor de meetkunde-van-nu.

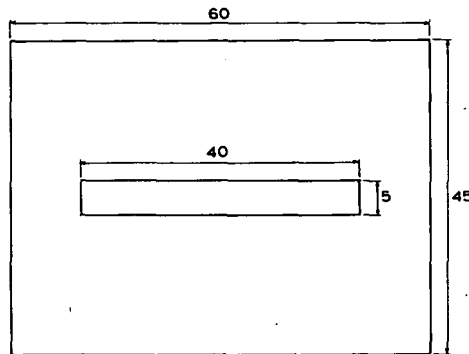
Deze wat intuïtieve opzet kan in een later stadium en misschien voor een kleinere groep leerlingen aanleiding geven tot een diepgaander mathematische bespreking van de aangesneden onderwerpen.

We hebben al opgemerkt dat het stuk in deze vorm nog niet rijp is om er de klas mee in te gaan. Dat neemt echter niet weg dat we nu al erg geïnteresseerd zijn in uw reacties. Als het u wat lijkt of als u een leuke uitwerking of aanvulling bij een of andere opdracht ziet, laat het ons dan even weten. Ook als u hier wat minder positief tegenover staat zijn wij benieuwd naar het waarom daarvan.

Reacties gericht aan het I.O.W.O. (antwoordnummer 1566 t.a.v. Wim Kremers) komen zeker op hun plaats terecht.

Opgave 7.

*Gevraagd het stuk hout met gleuf, zoals hier-
naast afgebeeld, in twee stukken te zagen, die
samengevoegd kunnen worden tot een vierkant.*



In 1970 is de didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren opgericht. De didactiekcommissie wilde in eerste instantie een bijdrage leveren aan een nieuwe didactische uitwerking van het leerplan wiskunde. Dit heeft met name geleid tot het uitbrengen van een reeks brochures (zoals Vaardigheden, Instappen en Toepassen, Handelen om te begrijpen, Rekening houden met Individuele Verschillen en Het probleem van de wiskunde in 3 Havo) en het organiseren van studiedagen voor de leden van de vereniging en anderen. Succesvol was het initiatief van de didactiekcommissie om in samenwerking met het IOWO te starten met landelijke nascholingsconferenties op het gebied van de didactiek van de wiskunde. Hieraan hebben tot nu toe ruim 2000 cursisten deelgenomen. Het verdwijnen van het IOWO had tot gevolg dat deze conferenties overgenomen zijn door het daartoe in 1979 opgerichte Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde dat de oorspronkelijke 'A,B,C'-cursussen uitgebouwd heeft tot A,B,C,D,E-conferenties, terwijl er ook diverse kadercursussen voor opleiders georganiseerd zijn. Het artikel dat hier volgt stamt uit de begintijd van de didactiekcommissie. Het is intrigerend te lezen hoe in die tijd geschreven werd over de eerste versies van wat later het OS a EV-model zou gaan heten.

Naar een nieuw onderwijsprogramma voor de wiskunde

DRS. J. VAN DORMOLEN

Oegstgeest

1 Het wiskundeleerplan dat in 1968 met de brugklas van start is gegaan en dat te lezen is in het Voorstel Leerplan Rijksscholen [4] is opgesteld onder supervisie van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. Tegen dit leerplan wordt wel eens het bezwaar gemaakt dat daarbij geen duidelijke doelstellingen van het (wiskunde-) onderwijs zijn geformuleerd. Dat bezwaar is gegrond maar niet helemaal rechtvaardig. Er zijn voldoende argumenten te noemen, die aannemelijk maken waarom de Commissie het leerplan indertijd in zijn huidige vorm ter publikatie aan de Staatssecretaris van Onderwijs heeft aangeboden. Het is echter niet mijn bedoeling die argumenten hier te noemen en te bespreken.

Iets anders is, dat degenen die het bezwaar maakt daarmee stilzwijgend schijnt te willen stellen dat het zonder meer onmogelijk zou zijn over een leerplan te spreken voordat de doelstellingen geformuleerd zijn. Ik meen dat die stelling onjuist is. Het is ondenkbaar dat bij het formuleren van doelstellingen de bestaande onderwijspraktijk vergeten zou kunnen worden. Er moet wisselwerking bestaan tussen het denken over doelstellingen en het formuleren van leerstof en de kennis van onderwijsmethoden en -middelen.

De oorzaak van de onjuistheid van de stelling is naar ik geloof de verwarring van logische samenhang en chronologische volgorde. Het verschijnsel, dat logische en chronologische volgorde niet overeenstemmen is normaal, ook in de wiskunde: de manier waarop een probleem opgelost wordt wijkt gewoonlijk sterk af van de manier waarop de oplossing tenslotte op schrift gesteld wordt.

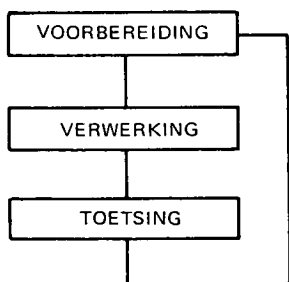
Dit artikel gaat over de ontwikkeling van een onderwijsprogramma voor wiskunde. Ik ga daarbij uit van een schema dat een logische samenhang suggereert. De lezer gelieve echter te bedenken dat ik daarmee niet de chronologische volgorde heb willen vastleggen van de verschillende taken die uitgevoerd moeten worden. Ik heb alleen willen proberen de vorm vast te leggen die het onderwijsprogramma tenslotte zal moeten hebben. Over de chronologische volgorde, het werkplan dus, dat naar het uiteindelijke programma moet leiden zal ik in dit artikel weinig zeggen. Men leze daarvoor het stuk van Broekman elders in dit nummer.

Men zou zich kunnen afvragen waar het allemaal voor nodig is, dat gepraat over doelstellingen en leerplannen en zo. We hebben nu toch een nieuw leerplan. Het onderwijs is toch al zo in beweging, laten we nu alsjeblieft even rustig ervaringen opdoen met datgene waar we pas aan begonnen zijn.

Daar ben ik het wel mee eens, maar alle ontwikkelingen wijzen erop dat we over een tiental jaren echt wel iets anders moeten hebben. En als we daar nu niet over beginnen te denken lopen we het gevaar, dat we straks weer in de verdrukking komen met onze experimenten. En dan moeten we weer overhaast iets invoeren waarvan we hopen en geloven dat het goed is, maar dat niet steunt op zorgvuldig onderzoek.

Daarom ben ik voorstander van een groot onderzoek, dat zich niet alleen beperkt tot het produceren van een leerplan, maar ook de methoden en middelen bestudeert waarmee dat leerplan gerealiseerd zou kunnen worden. Dat is dan ook de reden dat ik niet over een leerplan, maar over een onderwijsprogramma wil spreken. Het plan is ambitieus, maar nodig. Ik hoop dan ook van harte dat het geen zaak wordt van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars alleen, maar reken op krachtige steun van andere organen en verenigingen die zich met het wiskundeonderwijs bezighouden.

Om het mezelf en de lezer niet te moeilijk te maken zou ik in eerste instantie een onderwijsprogramma willen verdelen in drie hoofdstukken: *voorbereiding*, *verwerking* en *toetsing*. Ik kom dan tot het volgende (logische, niet chronologische) schema:



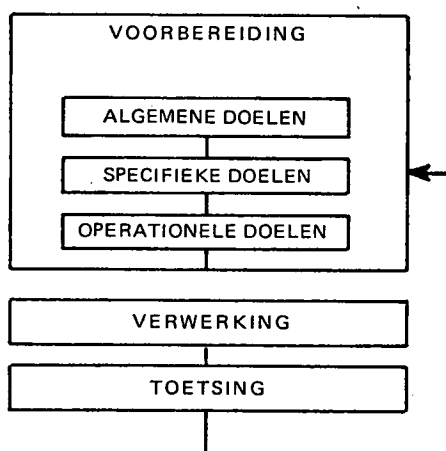
In de voorbereiding staan doelstellingen en leerplannen geformuleerd. Hier moet antwoord gegeven worden op vragen als: *Waarom* wiskunde op school? *Welke* wiskunde op school? *Hoeveel* wiskunde op school?

De verwerking is praktischer dan de wat theoretisch gerichte voorbereiding. Hier moeten de doelstellingen gerealiseerd worden. Er moeten onderwijsstrategieën worden uitgestippeld, methoden en middelen worden uitgedacht. De leerlingen moeten de vereiste vaardigheden, kennis en houding bijgebracht worden. Kortom, de vraag moet beantwoord worden: *Hoe* wiskunde op school?

De toetsing dient om te onderzoeken of de doelstellingen gerealiseerd konden worden. Dat onderzoek moet naar twee kanten werken. Enerzijds dient zij om de leerlingen te tonen in welke mate zij aan de gestelde eis hebben voldaan, anderzijds moeten we er uit kunnen afleiden of de doelstellingen voor wijziging vatbaar zijn. Vandaar de terugkoppeling in het schema.

Kenners van stroomdiagrammen zullen opmerken dat er een lus is ontstaan en zich misschien afvragen of we niet steeds in hetzelfde kringetje blijven rond-draaien. Ik zou daarop willen antwoorden, dat ik dat van harte hoop. We moeten ons nooit gaan verbeelden dat we het ideale onderwijsprogramma te pakken hebben, maar we moeten telkens weer opnieuw beginnen.

2 Ik wil nu een poging wagen de drie hoofdstukken verder uit te werken. Om te beginnen de voorbereiding. Dit hoofdstuk is weer te verdelen in drie onderdelen: *algemene*, *specifieke* en *operationele* doelen. De lezer vergeve mij deze weinig zeggende woorden, maar ik moet hier een gebrek aan fantasie bekennen. Hopelijk krijgen de termen na de nu volgende toelichting meer inhoud. Ik houd me aanbevolen voor een meer heldere terminologie.



2.1 De algemene doelen geven antwoord op de vraag waarom er wiskunde op school gegeven wordt. Uit de aard van de zaak zullen deze antwoorden weinig gespecificeerd kunnen zijn, maar ze mogen ook weer niet zo vaag en nietszeggend zijn dat we er eigenlijk niets mee kunnen doen. Ze moeten op twee manieren bruikbaar zijn. In de eerste plaats dienen ze om er de verschillende leerstofgebieden aan te toetsen. Elk leerstofgebied moet een rol spelen bij het vervullen van een of meer algemene doelen. Het zou best eens kunnen zijn dat een bepaald stuk uit de leerstof alleen op grond van traditie of persoonlijke voorkeur in het leerplan staat, terwijl het geen functie vervult bij het voldoen aan de doelstellingen. Een voorbeeld hiervan is de stelling van Ptolemaeus. Niemand 3

zal er tegenwoordig nog behoefte aan hebben deze stelling als verplichte leerstof voor te schrijven. Het is dan ook volstrekt onduidelijk welke rol de stelling zou kunnen hebben in het wiskundeonderwijs.

Anderzijds is het heel goed denkbaar dat we bij bestudering van de algemene doelen ontdekken dat een bepaald aspect van de wiskunde in het onderwijs thuis hoort, terwijl het bestaande leerplan daarin niet voorziet. Een prachtig voorbeeld hiervan is te vinden in de belangrijke ontwikkelingen die er gaande zijn ten aanzien van de computerkunde.

Zonder vooruit te willen lopen op de voorstellen van de didactiekcommissie zou ik hier toch wel graag een vijftal algemene doelen willen noemen. Ik trof ze aan in Johnson [1] en ik vind ze er nogal aantrekkelijk uitzien omdat ze aan beide bovenstaande eisen kunnen voldoen: men kan er bestaande leerstofgebieden aan toetsen en men kan ermee op het spoor komen van nieuwe leerstofgebieden.

- a De leerling moet weten hoe wiskunde bijdraagt tot het begrijpen van natuurverschijnselen.
- b Hij moet begrijpen hoe hij wiskundige methoden kan gebruiken bij het onderzoeken van, bij het interpreteren van, en bij het nemen van beslissingen in intermenselijke relaties.
- c Hij moet zich kunnen voorbereiden voor een beroep waarbij hij wiskunde gebruikt als producent en als consument van goederen en diensten.
- d Hij moet begrijpen hoe de wiskunde als wetenschap en als 'kunst' bijdraagt in de ontwikkeling van onze cultuur.
- e Hij moet wiskundige begrippen goed en begrijpelijk kunnen overdragen aan anderen.

Dit vijftal is een tamelijk letterlijke vertaling uit het genoemde boek. Ik heb nog geen poging gewaagd ze te modelleren naar Nederlandse behoefte. We zullen er nog wel wat aan moeten prutsen, maar in grote lijn zijn ze wel goed.

De aanhalingstekens om het woord kunst in de vierde doelstelling zijn van mij. In de oorspronkelijke Engelse tekst staat het woord art, dat hier niet goed te vertalen is door kunst. Weet iemand een beter woord?

2.2 Specifieke doelen vormen een verbinding tussen de algemene en de operationele. Hier worden de verschillende aspecten van elk der algemene doelen onderzocht. En wel op twee manieren. In de eerste plaats moeten die aspecten genoemd worden, en in de tweede plaats moet bij elk van die aspecten een niveau aangegeven worden waarop de leerling dat bepaalde aspect moet kunnen beheersen. En omdat die niveau's voor verschillende leerstofgebieden verschillend kunnen zijn, moet er bij elk der aspecten als het ware een glijdende niveauschaal aangebracht worden. Ik zal nu eerst een aantal aspecten noemen. Ze zijn

- 4 ook weer uit het boek van Johnson afkomstig. Ik ben er iets minder enthousiast

over dan over de door hem geformuleerde algemene doelstellingen, maar ik geloof wel dat we het in deze richting zullen moeten zoeken.

- a De leerling kent en begrijpt wiskundige processen, feiten, principes.
- b Hij begrijpt de logische structuur van de wiskunde en de betekenis van een bewijs.
- c Hij voert berekeningen uit met begrip, nauwkeurigheid en doelmatigheid.
- d Hij kan vraagstukken oplossen.
- e Hij ontwikkelt een gedragspatroon dat leidt tot nieuwsgierigheid, initiatief, vertrouwen en interesse.
- f Hij leest goede methoden voor de studie en overdracht van wiskunde, en ontwikkelt gewoonten die noodzakelijk zijn voor zelfstandige arbeid.

Het is duidelijk dat bij elk van de algemene doelen meer dan een van deze aspecten aan de orde zullen moeten komen.

Voor het nader omschrijven van elk van de aspecten door niveaueisen zullen we verder moeten afzien van woorden als: begrippen, leren, inzicht hebben, kunnen. Deze worden in zoveel verschillende betekenissen gebruikt dat zij oorzaak zijn van veel verwarring. Beter kunnen we woorden gaan gebruiken als: opschrijven, uitrekenen, oplossen, onderscheid maken, herkennen, samenvatten, tekenen.

Ik geef hier de schaal die Johnson bij aspect a noemt. De voorbeelden tussen haakjes zijn van hem.

- a De leerling kent en begrijpt wiskundige processen, feiten, principes.
 - 1 Hij herkent een uitspraak, voorbeeld, of definitie ('Welk van de volgende figuren is het plaatje van een rechthoek?')
 - 2 Hij herinnert zich een feit, symbool of term. ('Teken het plaatje van een rechthoek').
 - 3 Hij vermeldt een begrip in een nieuwe terminologie ('Schrijf de open uitspraak $O = l \cdot b$ in woorden').
 - 4 Hij maakt onderscheid tussen eigenschappen van begrippen. ('Wat is het verschil tussen een vierkant en een rechthoek?')
 - 5 Hij herkent de logische implicatie van het begrip. ('Hoe kun je de oppervlakte van een parallellogram in verband brengen met dat van een rechthoek?')
 - 6 Hij past deze kennis toe op een nieuwe situatie. ('Wat is de oppervlakte van deze doos?')
 - 7 Hij breidt het begrip uit om een nieuwe generalisatie te ontdekken. ('Wat is de formule voor de oppervlakte van een kubus?')
 - 8 Hij toetst de generalisatie aan een bewijs. ('Hoe bewijs je de formule voor de oppervlakte van een driehoek?')
 - 9 Hij bedenkt een nieuwe uitbreiding van het begrip ('Wat is de formule voor de oppervlakte van een rechthoek als de eenheid van oppervlakte die van een gelijkzijdige driehoek met zijde 1 is?')

5

Op dergelijke manier gaat Johnson ook te werk bij andere aspecten. Men ziet wat de bedoeling is. Het is duidelijk dat men bijvoorbeeld bij een onderwerp als oppervlakte van bijvoorbeeld een mavo-leerling meer zal eisen dan niveau 1, maar minder dan niveau 9. De eis zal ergens tussenin liggen. Dat betekent dan dat die leerling ook aan alle voorgaande eisen zal moeten voldoen, maar niet aan de volgende.

Overigens is deze schaalverdeling van Johnson niet goed. Hij slaat wat stappen over en de volgorde is ook niet in orde. Maar zijn bedoeling is goed, het idee om op deze manier te werk te gaan is bruikbaar en doelmatig.

De mensen die dit werk gaan aanpakken behoeven niet alles zelf te gaan verzinnen. Er is goede literatuur over, bijvoorbeeld Bloom [2]. Ik meen trouwens in de lijsten van Johnson ook een poging te ontdekken volgens de indeling van Bloom te werk te gaan. Dan is er nog een voortreffelijk boek van De Cecco [3], dat ik elke leraar zou willen aanbevelen. Er worden in begrijpelijke en goed leesbare taal veel verstandige en leerzame dingen gezegd over de praktijk van het lesgeven.

2.3 Het laatste onderdeel van de voorbereiding bestaat uit operationele doelen. Dit onderdeel staat het dichtst bij de praktijk, omdat de leraar dagelijks werk kan geven.

Een operationeel doel bestaat uit drie gedeelten:

- a Omschrijving van een leerstofgebied.
- b Beschrijving van de manier waarop de leerling moet tonen het leerstofgebied te beheersen.
- c Beschrijving van de mate waarin de leerling het leerstofgebied moet beheersen.

Voorbeeld: De leerling moet van elke vergelijking van het type $ax + b = cx + d$, waarin a, b, c, d gegeven rationale getallen zijn, de oplossingsverzameling in $\mathbf{N}$, in $\mathbf{Z}$ en in $\mathbf{Q}$ opschrijven.

Hieruit blijkt:

- a De omschrijving van het leerstofgebied: '... vergelijking van het type $ax + b = cx + d$, waarin a, b, c, d gegeven rationale getallen zijn ...'
- b De wijze waarop het leerstofgebied beheerst moet worden: 'De leerling moet ... de oplossingsverzameling in $\mathbf{N}$, in $\mathbf{Z}$ en in $\mathbf{Q}$ opschrijven.'
- c De mate waarin hij het leerstofgebied moet beheersen: '... van elke ...' hetgeen betekent dat geen fouten gemaakt mogen worden.

Eigenlijk zou er nog bij moeten staan in welke tijd de prestatie geleverd moet worden.

De gedachte dat doelstellingen geoperationaliseerd moeten worden is natuurlijk niet nieuw. Dergelijke doelstellingen bestaan in zekere zin al, maar ze zijn moeilijk als zodanig te herkennen. Er worden namelijk naast het reeds genoemde 6 Voorstel Leerplan Rijksscholen dat onder verantwoordelijkheid van de

Staatssecretaris is uitgegeven, door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde toelichtingen op dat leerplan [5], [6] en [7] verspreid. Verder komen er van andere instanties boekjes met voorbeelden van vraagstukken op eindexamenniveau. Dit geheel van leerplannen, toelichtingen en vraagstukkenverzamelingen zou men kunnen beschouwen als een verzameling geoperationaliseerde doelstellingen. Toch is dit veel te veel versnipperd naar mijn zin. Ik zou graag mee willen werken aan iets wat meer samenhang heeft, en overzichtelijker is. Het is wel duidelijk dat het produceren van operationele doelstellingen een reusachtig werk is, dat pas kan beginnen als we beschikken over een inventaris van mogelijke leerstofgebieden. De opstellers ervan zullen niet alleen naar het huidige leerplan moeten kijken, maar ook naar buitenlandse leerplannen en ze zullen moeten bedenken wat er verder nog voor nieuwe leerstof in zou moeten. Daarom moeten eerst de algemene doelen en specifieke doelen gemaakt worden (Zie het stuk van Broekman, I.1) er moet een lijst van leerstofgebieden gemaakt worden (I.2) Behalve dat zullen de opstellers ook al met een half oog moeten kijken naar de praktische uitvoerbaarheid en zullen zij zich af moeten vragen in hoeverre de resultaten meetbaar moeten zijn. Daartoe moeten zij de beschikking hebben over een lijst van werkvormen en hulpmiddelen (I.3) en een inventaris van toetsingsmethoden (I.4)

Daarom kan de produktie van operationele doelen pas later beginnen: fase II van het werkplan. Hier blijkt alweer de onverenigbaarheid van logische en chronologische volgorde. Met dit veelomvattende, maar belangrijke werk wordt het eerste gedeelte van het onderwijsprogramma, de voorbereiding, afgesloten.

2.4 Literatuur over het hoofdstuk Voorbereiding.

- [1] Johnson & Rising, Guidelines for teaching mathematics (Wadsworth Publ. Co., Belmont, California, 1967).
- [2] Bloom e.a., Taxonomy of educational objectives (Longmans, London, 1956).
- [3] De Cecco, The psychology of learning and instruction (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968).
- [4] Voorstel Leerplan Rijksscholen (Staatsuitgeverij 's-Gravenhage) (uitverkocht).
- [5] Toelichting op het leerplan brugklas (Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, Utrecht, 1968).
- [6] Toelichting op het leerplan onderbouw mavo, havo, vwo (Idem, 1969).
- [7] Toelichting op het leerplan bovenbouw havo en vwo (Idem) (in voorbereiding).

(wordt vervolgd)

Veel is op de voorgaande bladzijden aangestipt, veel meer is onvermeld gebleven. We hebben aan de hand van wat artikelen willen terugblikken op het wel en wee van Euclides, van de Vereniging en van het wiskundewereldje daaromheen.

We gebruiken de laatste alinea's om de jongste ontwikkelingen onder de loep te nemen.

Er staan belangrijke veranderingen voor de deur van alle wiskundeleraren. Onder invloed van het HEWET-gebeuren zal de inhoud van het wiskunde-programma van het vwo ingrijpend veranderen. Die verandering zal een zware belasting betekenen voor een groep leraren die niet adequaat opgeleid zijn voor een vak dat voor velen ogenschijnlijk niet meer dan de naam met het oude vak gemeen heeft. Het schoolvak wiskunde evolueert van een vak vol zekerheden en éénduidigheden naar een vak met interpretaties, modelvormingen en onzekerheden. Waarbij komt dat de veranderingen waarschijnlijk niet tot het vwo beperkt zullen blijven.

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft al het initiatief genomen tot het instellen van een commissie voor het havo als analogon van de HEWET-commissie; binnen een paar jaar zal daarvoor óók het havoprogramma een ingrijpende wijziging doorgemaakt hebben. Met het havo zullen waarschijnlijk ook lbo en mavo veranderen. En met de bovenbouw de onderbouw, in principe dus het gehele wiskunde-onderwijs.

Deze veranderingen zijn ingrijpender dan ooit. Het is te hopen dat leraren de gelegenheid krijgen en de energie bezitten om zich hierop in te stellen.

Er wordt op diverse plaatsen gewerkt aan het verder ontwikkelen van het wiskunde-onderwijs.

De vakgroep OW & OC van de Rijksuniversiteit van Utrecht zet een gedeelte van de IOWO-activiteiten voort. Er wordt gewerkt aan het verder realiseren van computerkunde in het onderwijs en aan aspecten van de vakdidactiek zoals het invoeren van variabelen en de betekenis van logica voor leerlingen. Indrukwekkend zijn de activiteiten en de producten van OW & OC-medewerkers op het gebied van de Hewet, evenals enkele fundamentele onderzoekspublikaties op het gebied van het basisonderwijs.

De leerplanontwikkelingstaak van het IOWO is voor een deel overgenomen door sectie III (wiskunde en informatica) van de Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO) in Enschede. Daar wordt, wat

het voortgezet onderwijs betreft, gewerkt aan een project voor 12 tot 16-jarigen waarbij planning van diverse leerstoflijnen (meetkundelijn, functioneel, logische lijn) gerealiseerd wordt deels in de vorm van voorbeelden van leerlingenmateriaal, deels als achtergrondpublicaties (In verband met..., Rekening houden met, Naar aanleiding van...). Ook dit ontwikkelingswerk is ten eerste toe te juichen.

We krijgen als wiskundeleraren de kans een vak te geven dat door onszelf en vooral ook door onze leerlingen als zinvol ervaren wordt.

Euclides is 60 jaar oud. We leven in een tijd die door velen ervaren wordt als een periode van afbraak en ongemotiveerdheid. De ontwikkelingen in ons vakgebied van de laatste jaren doet ons echter vol verwachting de toekomst tegemoet treden.

Mededeling

Feestvergadering ter gelegenheid van het tienjarig bestaan van de VVWL

Zaterdag 17 november 1984 in het Koninklijk Atheneum te Keerbergen, Vliegheavenlaan 18, 2850 Keerbergen.

13.30: ontvangst

14.00: opening door de voorzitter Frank Laforce

14.05: academische zitting: 10 jaar VVWL, toespraken en historisch overzicht van tien jaar VVWL-werking

14.45: Jan De Gelas (Sint Victor Instituut Alsemberg): *Hoe functioneel is ons wiskunde-onderwijs?*

16.00: koffiepauze

16.30: prof. dr. Jan Paredaens (Universitaire Instelling Antwerpen): *De integratie van informatica in het wiskunde onderwijs.*

17.45: rondvraag en sluiting

18.00: in de 'Grand Veneur': receptie

19.00: feestmaal gevolgd door gezellig samenzijn in de bar.

Eventueel mogelijkheid voor overnachting met ontbijt.

Voor het feestmaal moet ingeschreven worden vóór 1 november 1984, door storting van 495 fr. op prk. 000-1116247-68 van VVWL, 2610 Wilrijk, Hoge Aardstraat 44, met vermelding: 'feestmaal'.

Overnachtingen moeten voor dezelfde datum aangemeld worden op het secretariaat van de VVWL, mevrouw Lieve Simons, Torenblokstraat 11, 2610 Wilrijk. De betaling geschiedt ter plaatse in Keerbergen, aan zeer billijke voorwaarden.

Hoe bereik je Keerbergen?

De treinreizigers nemen de trein tot Mechelen en nemen daar de bus 53 Mechelen-Keerbergen-Aarschot. Halte Grand Veneur. Met de auto: richting Antwerpen: E10 afrit Mechelen-Noord, langs de vaart tot aan de spoorwegberm, daar onderdoor naar Bonheiden, Rijmenam, Keerbergen. Vanuit Brussel: E10 afrit

Weerde, Boortmeerbeek, Haacht, Keerbergen. Vanuit Leuven: Haacht, enz. In Keerbergen volg je de pijlen naar het K.A. Parking aan de ingang van het K.A. of achter 'Le Grand Veneur'.

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1983-31 juli 1984

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. Th. J. Korthagen, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester F. F. J. Gaillard, overige leden L. Bozuwa, dr. J. van Dormolen, C. Th. J. Hoogsteder, M. Kindt, F. Mahieu, mw. drs. N. C. Verhoef.

Op zaterdag 12 november werd de jaarvergadering gehouden in het gebouw van de SOL te Utrecht. Deze jaarvergadering was gecombineerd met een studiedag, die verzorgd was door de vakgroep OW & OC, in samenwerking met de SLO. Het thema voor deze dag was 'Vak-beweging'. De aanwezigen op deze studiedag konden deelnemen aan één of meer van de volgende studiegroepen: BOVO: verhoudingen op het breukvlak van basisonderwijs en voortgezet onderwijs; voortgezet rekenen; burgerinformatica; heterogene groepen; introductie functies; Hewet, de groei in wiskunde A; Hewet, de ruimte in wiskunde B. Tevens hield dr. Alan J. Bishop uit Cambridge een lezing over de ontwikkelingen in het onderwijzen van wiskunde. Veel leden waren aanwezig, 261 tekenden de presentielijst. De publikatie 'Vak-beweging' van de voorbereidende werkgroep zorgde er voor dat de aanwezigen reeds van tevoren waren ingeleid in de activiteiten van de studiegroepen.

Op 1 februari installeerde de Staatssecretaris van onderwijs een Werkgroep ter voorbereiding van het indexamenprogramma wiskunde havo en van de in verband daarmee wenselijke wijziging van het leerplan wiskunde voor de rijksscholen voor havo. Namens de NVvW hebben in deze commissie zitting drs. W. H. M. Kremers en mw. drs. N. C. Verhoef.

Op zaterdag 24 maart hielden de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars en de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars hun negende gemeenschappelijke studiedag te Breda.

Op deze bijeenkomst werden de volgende voordrachten gehouden:

'Integralen in het secundair onderwijs' door Jos De Schrijver,
'Integraal rekenen en R' door Louis Maassen,
'De spilmethode en haar toepassingen in de lineaire algebra' door Jan Anseeuw,
'Differentialvergelijkingen in het vwo' door Paul Drijvers.

Op 11, 14 en 15 mei vonden examenbesprekingen plaats voor wiskunde lbo-c, mavo-c en mavo-d in 21 plaatsen, voor wiskunde havo in 6 plaatsen, voor wiskunde I vwo in 6 plaatsen en voor wiskunde II vwo in Utrecht.

Ook dit jaar werden wij geconfronteerd met vele veranderingen voor het onderwijs. Voor vele docenten was de meest ingrijpende de invoering van het nieuwe leerplan wiskunde voor de bovenbouw van het vwo, het zogenaamde Hewet-programma. Het bestuur heeft contacten gelegd met de Nederlandse Vereniging van Schooldecanen om gezamenlijk de schooldecanen op deze veranderingen voor te bereiden, terwijl er plannen zijn gemaakt om in de loop van het volgende verenigingsjaar bijeenkomsten te houden voor de leden over de keuze wiskunde A en wiskunde B. Er is een werkgroep ingesteld om een vraagstukkenbundel te verzorgen met opgaven in de geest van het nieuwe programma wiskunde A.

Om gezamenlijk te kunnen reageren op voorstellen van het ministerie zijn de contacten tussen ons bestuur en dat van de Nederlandse Vereniging voor Onderwijsgeevenden in de Natuurwetenschappen verstevigd. Dit heeft reeds geleid tot een brief aan de Staatssecretaris betreffende de mogelijke invoering van schriftelijke eindexamens lbo en mavo in objectief (machinaal) scorebare vorm. Aan de Vaste Commissie van Onderwijs en Wetenschappen van de Tweede Kamer heeft ons bestuur een brief geschreven om de leden te vragen zich in te zetten voor het behoud van de ACLO's.

De vele werkzaamheden van de didactiekcommissie leidden dit jaar onder andere tot de uitgave van de brochure 'Het probleem van de wiskunde in 3-havo'.

De werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde' hield dit jaar landelijke dagen op 8 oktober en 31 maart. Ook dit jaar werkte zij met de werkgroepen: onderzoeksgroep vrouwen en wiskunde; wiskunde in het volwassenenonderwijs; literatuurgroep; werkgroep schoolboeken; werkgroep vrouwen en informatica en HEWET-groep.

In de redactie van Euclides werden als nieuwe redacteurs benoemd W. M. J. M. van Gaans en drs. C. G. J. Nagtegaal.

De nauwe samenwerking met de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars uitte zich ook dit jaar onder andere in de gemeenschappelijke bestuursvergadering in september, de gemeenschappelijke studiedag in maart en bezoeken aan elkaars bijeenkomsten.

Het bestuur was verder onder andere vertegenwoordigd op redactievergaderingen van Euclides, op het congres, tevens jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Onderwijsgeevenden in de Natuurwetenschappen, op de jaarvergadering van de Vereniging van Leraren in de Levende Talen, bij de prijsuitreiking van de Nederlandse Wiskunde-olympiade en de hoorzitting van de Adviesraad Voortgezet Onderwijs Tweede Fase.

Het bestuur vergaderde dit jaar twaalf maal, waaronder een maal met de inspecteurs J. Boersma en drs. B. J. Westerhof.

Prijsvraag 'In de wiskundeles'

Zo nu en dan maak je in de klas iets mee waarvan het de moeite waard is er aandacht aan te besteden zoals:

- een antwoord van een leerling dat óók goed is en waaraan je zelf nooit gedacht hebt
- een tip van een collega over een manier om twee vergelijkingen met twee onbekenden op te lossen
- een krante-artikel dat goed bruikbaar was bij een les over differentiëren in 4 havo
- een gesprek tussen leerlingen over de zin van wiskunde
- een fout die een leerling maakt waaruit je iets over zijn onderwijs op de basisschool denkt te kunnen afleiden
- een opstelling van drie spiegels waarmee je punt-spiegeling kunt demonstreren.

Vaak vervliegen dat soort ideeën weer snel.

Euclides nodigt u uit zo'n ervaring op te schrijven en in te zenden. Er zal aandacht aan besteed worden onder de kop 'In de wiskundeles'. De voorkeur gaat uit naar kort-en krachtige artikeltjes over *echte* ervaringen met wiskunde-onderwijs.

Er wordt f 100,- uitgelooft voor die inzending die uiterlijk in juni 1985 geplaatst is en die dan de meest geslaagde gevonden werd.

Hoe te handelen kunt u verder in het colophon lezen.

F. Dolmans

Kalender

(zie voor nadere informatie ook altijd de 'Mededelingen' in dit nummer en in voorafgaande nummers)

1984

wo 29 aug:	bestuursvergadering NVvW, Utrecht
wo 19 sep:	bestuursvergadering NVvW, Utrecht
11 t/m 13 okt:	C-conferentie, Ede
wo 24 okt:	bestuursvergadering NVvW, Utrecht
za 27 okt:	jaarvergadering/studiedag NVvW, Utrecht
1 t/m 3 nov:	D-conferentie, Ede
14 t/m 16 nov:	PANAMA conferentie, Noordwijkerhout
29 nov t/m 1 dec:	E-conferentie, Ede
... nov	HCC-dagen, Utrecht

1985

24 t/m 26 jan:	D-conferentie, Ede
28 feb t/m 2 mrt:	B-conferentie, Ede
28 t/m 30 mrt:	E-conferentie, Ede

Mededelingen

Jaarvergadering / Studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Op zaterdag 27 oktober 1984 houdt de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren haar jaarvergadering in combinatie met een studiedag in het gebouw van de SOL, Archimedeslaan 16, Universiteitscentrum De Uithof te Utrecht, van 10.00 h tot 17.00 h.

Agenda:

- 1 Huishoudelijk gedeelte (10.00 h-10.30 h)
 - a Opening door de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen.
 - b Notulen van de jaarvergadering 1983 (zie het januarinummer van Euclides).
 - c Jaarverslagen (zie Euclides).
 - d Décharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie.
Het bestuur stelt kandidaat: W. P. de Porto, Waddinxveen en Mw. G. Visser, Delft.
 - e Bestuursverkiezing in verband met periodiek aftreden van dr. Th. J. Korthagen, drs. J. W. Maassen en drs. N. C. Verhoef. Het bestuur stelt de aftredenden kandidaat. Tot veertien dagen vóór de vergadering kunnen tegenkandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door tenminste vijf leden.
 - f Vaststelling van de contributie 1985/1986. Het bestuur stelt voor de contributie *niet* te verhogen en vast te stellen op f 50,-.
- 2 Themagedeelte.
Zie nadere gegevens hierover elders in dit nummer.
- 3 Huishoudelijk gedeelte (16.30 h-17.00 h).
 - g Rondvraag.
Degenen die van de rondvraag gebruik wensen te maken wordt verzocht hun vragen schriftelijk vóór de lunch aan een van de bestuursleden bekend te maken.
 - h Sluiting.

Aanmelding kan geschieden door overmaking van f 14,25 voor de lunch naar giro 143917 ten name van NVvW te Amsterdam, Jorisstraat 43, Breda (voor 24 oktober 1984).

Jaarvergadering / Studiedag 27 oktober 1984 Themagedeelte

De werkgroep Vrouwen en Wiskunde organiseert in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren de jaarlijkse studiedag. Ontwikkelingen in het wiskunde-onderwijs, speciaal meisjes en wiskunde, staan centraal op deze dag. Alle deelnemers krijgen na aanmelding het boek 'VROU-WISKUNDIG', 'Meisjes in het wiskunde-onderwijs' thuis gestuurd.

In zeven werkgroepen kan men deelnemen aan activiteiten op het gebied van:

- 1 Samenwerken en Observeren.
- 2 Wiskunde een vrije keuze?
- 3 Volwassenenonderwijs.
- 4 Informatica.
- 5 Leerstijlen.
- 6 Hewet.
- 7 Leerboeken en Lesmateriaal.

Samenwerken en Observeren

Groepswerk betekent niet dat je als docent(e) rustig achter je tafel kunt zitten en toekijken hoe kinderen met elkaar, werkend aan wiskundeproblemen, tot fraaie oplossingen komen. Ieder die met groepswerk te maken heeft weet dat dat geen verlichting van je taak betekent. Je baan wordt wel anders. Groepjes leren samenwerken vereist nogal wat aandacht, vooral als het voor je leerlingen en voor jezelf nieuw is.

Geschikt lesmateriaal blijft daarbij van groot belang. Daagt het uit tot discussie, roept het verschillen in oplossingswegen op? De samenstelling van groepjes is ook van invloed. Laat je dat vrij dan zoeken de jongens elkaar op en de meisjes elkaar. Niet zo gek zeggen sommigen die bemerken dat meisjes een voor-sprong hebben wat betreft het kunnen samenwerken. Ze zouden die dan mooi voor elkaar bij het samen *leren* kunnen benutten. Maar als je juist wilt dat jongens en meisjes met elkaar leren samen werken en samen leren?

In deze werkgroep willen we aan de hand van twee observaties over het oplossen van een wiskundeopdracht in een meisjes-groepje en in een gemengd groepje kijken hoe het samen leren in deze groepjes feitelijk verloopt, wat we ervan vinden en wat er voor de praktijk uit te leren valt. Er kunnen eventueel twee parallelgroepen gevormd worden.

Iedereen is welkom.

Noor Blom, Rijkje Dekker, Paul Herfs, Wim Kerkhofs, Anneke Teitler en Anna Tessel.

Wiskunde een vrije keuze?

Wanneer leerlingen voor de keuze staan wel of geen wiskunde in hun vakkenpakket te nemen, dan zijn de meningen van diverse personen in hun omgeving daarover van belang. In de eerste plaats zijn/haar eigen mening en die van zijn/haar ouders. Verder de mening van de mentor en/of decaan en last but not least de mening van de wiskundeleraar(e).

Welke factoren laat een docent(e) meewegen in zijn/haar advies?

We zouden een hele lijst kunnen maken van de eigenschappen die een ideale leerling kan hebben, maar dat is niet de bedoeling. Het is een bekend gegeven dat er minder meisjes wiskunde kiezen dan jongens, het roldoorbrekend onderwijs ten spijt. Eén van de oorzaken hiervan zou kunnen zijn het gedrag van de wiskundeleraar(e) zelf. Het is belangrijk dat docenten zich bewust zijn van hun gedrag en de invloed die dat heeft op leerlingen en hun keuzes.

In deze werkgroep proberen we duidelijkheid te scheppen in de rol die het gedrag van de docent(e) speelt.

Marijke Melis e.a.

Volwassenenonderwijs

Vrouwen en mannen met uiteenlopende redenen om wiskunde te willen leren: dát zijn de leerlingen in het volwassenenonderwijs. Welke motivaties kunnen leerlingen allemaal hebben om op latere leeftijd (18-80 jaar) weer naar school te gaan en wiskunde te kiezen?

Hoe speel je het als docent(e) klaar om deze heterogene groep volwassenen tevreden te stellen als je ze maar één keer in de week ziet en beperkte tijd hebt voor de les? Speciaal voor volwassen leerlingen gemaakt materiaal is er niet. Maar welk wiskundemateriaal is dan het meest geschikt om te gebruiken? Moet er juist een duidelijke scheiding tussen theorie en opgaven zijn? Zijn zelfwerkzaamheidsvoorwaarden belangrijk? Hoe stimuleer je vrouwen, die vaak denken dat wiskunde 'niets voor hen is' om toch kennis te maken met ons vak?

Leren volwassenen anders dan kinderen? Kunnen hun ervaringen een rol spelen in de wiskundeles?

Veel vragen, nog geen antwoorden, mogelijk op de jaarvergadering.

Annette van der Heijden, Mariette van Erp, Marja Meeder.

Informatica

Wij willen het hebben over (burger)informatica in de lagere klassen van het voortgezet onderwijs.

Ons doel daarbij is:

- we willen meer meisjes interesseren voor het vak informatica en wel om de volgende redenen:
 - o inhoudelijk: burgerinformatica is wat iedereen van informatica moet weten. Daar horen meisjes uiteraard in gelijke mate bij;
 - o met het oog op de vakkenkeuze: de aanpak van de (exacte) vakken in de lagere klassen beïnvloedt de mening over die vakken en beïnvloedt op die manier het al of niet opnemen van die vakken in het pakket. We zien op dit moment dat, waar informatica een keuzevak is waar leerlingen zich er via een hobbyclub mee bezig kunnen houden, het aantal deelnemende jongens veel groter is dan meisjes. Aangezien op veel scholen in de hogere klassen informatica een onderdeel van wiskunde is, denken we dat een motiverende aanpak in de lagere klassen bovendien een stimulans kan betekenen wiskunde in het pakket op te nemen. Dit is met het oog op vervolgopleidingen en daaraan gekoppeld de maatschappelijke positie van meisjes van belang.
 - een inhoud van burgerinformatica waarbij de maatschappelijke kant een belangrijke plaats inneemt. Dit omdat:
 - o deze gedachte aansluit bij onze maatschappij- en onderwijsopvattingen;
 - o een maatschappijgerichte aanpak blijkt onze (en onderzoeks-) ervaringen meer aansluit bij de belevingswereld (het gedrag/de socialisatie) van vrouwen.
 - meer docentes betrekken bij het onderwijs in de informatica:
 - o dit heeft een voorbeeldfunctie voor de meisjes;
 - o het is inhoudelijk voor het vak beter wanneer mannen en vrouwen evenredig eraan deelnemen; vrouwen vinden het zelf ook leuk eraan mee te doen en waarom zou je ze ervan uitsluiten?
 - o in verband met de (rechts)positie van de vrouwen binnen de school is het van belang dat zij in deze nieuwe richting stappen.

In een korte inleiding zullen bovengenoemde doelen en enige knelpunten met betrekking tot vrouwen en informatica geschetst worden. Vervolgens zal middels een nog uit te werken werkvorm een discussie gehouden worden waarin zowel de rechtspositionele als de vakinhoudelijke kant van burgerinformatica aan de orde komen.

Gerda Casimir, Wendelien Greve, e.a.

Leerstijlen

De wijze waarop leerlingen informatie verwerken bij het leren kan nogal uiteenlopen.

Voorbeeld: Waar de één direct op de oplossing van een probleem afstevent, zal de ander eerst alle facetten van een probleem willen onderzoeken; of waar de één de zaken goed kan verwoorden is de ander beter in de weergave door middel van een plaatje. We spreken hier van verschil in leerstijlen.

Is de leerstijl van de docent(e) ook de leerstijl van de leerling(e)? Is de norm die de docent(e) hanteert ook die waar de leerling(e) naar toe werkt?

Is er wat de leerstijlen betreft een duidelijk onderscheid te maken tussen jongens en meisjes?

Docenten wiskunde zijn meestal mannen, heeft dat verschillend de consequenties voor meisjes en jongens?

Aan de hand van een opdracht, voorgelegd aan leerlingen in het voortgezet onderwijs, is er gezocht naar antwoorden op voorgaande vragen.

Deze vragen beslaan een heel breed terrein. Daarom is in deze workshop gekozen voor een paar aspecten die bij wiskunde toonaangevend zijn.

In de workshop zullen de deelnemers *zelf* aan een opdracht kunnen werken om vervolgens:

- elkaars leerstijlen te vergelijken,
- in het onderwijs gebruikelijke normeringen te leggen naast heel andere normeringen.

Daarna kan men kennis nemen van ervaring opgedaan bij voornoemde opdracht in een paar klassen. Dit laatste onderdeel zal worden toegelicht met videofragmenten.

De hier opgedane ervaring en kennis zullen we dan terugkoppelen naar de eigen klasse-situatie.

Als achtergrondinformatie wordt wat literatuur uitgereikt over leerstijlverschillen. Ook krijgen de deelnemers nog wat opdrachten mee, die bij uitvoering in de klas mogelijk verschillende leerstijlen laten zien.

Erica van Gemert, Sjef van Gisbergen, Hans Pouw, Gerdientje Visser.

Hewet

Hoe geef je voorlichting met betrekking tot de keuze: wiskunde A of wiskunde B?

Door te vertellen 'zo wordt wiA en zo wordt wiB' schep je nog niet voldoende duidelijkheid. In de vierde klas van het onderdeel wvo zul je met voorbeelden moeten komen – maar hoe doe je dat? Een stukje A-onderwijs naast je gewone onderwijs, of in plaats daarvan? Proefwerken met vragen in A-stijl en vragen in B-stijl? Welke criteria leg je zelf aan voor een A-advies en wanneer adviseer je B? Welke overwegingen gelden voor de

leerling: studiekeuze, of uitstel daarvan; het vage beeld dat zij van het vak heeft; het oordeel van de omgeving? Welke rol speelt de decaan bij de beeldvorming en welke taken liggen daar voor de docent(e)?

Allemaal vragen – en u wilt antwoorden?

Er zijn helaas geen standaardprocedures en de duidelijkheid zal afhangen van hetgeen uw sectie en de schooldecaan aan inlichtingen kan verschaffen.

In werkgroep Hewet willen we met elkaar werken aan duidelijkheid rondom de keuze wiskunde A of B. We willen bovengenoemde problemen belichten met voorbeelden en keuzegegevens uit de praktijk van de 'voorlopers', door uitwisseling van ideeën, door discussie over mogelijke keuzecriteria.

Tineke Brinkman-Geilman, Nico Olofsen, Heleen Verhage.

Leerboeken en Lesmateriaal

Dat weinig meisjes wiskunde in hun vakkenpakket kiezen heeft allerlei oorzaken. In de werkgroep willen we bekijken welke rol het lesmateriaal hierin speelt.

Het gaat ons niet om het tellen van aantallen meisjes en jongens in de voorbeelden, maar om de vraag in welke mate jongens en meisjes zich aangesproken voelen door een bepaalde presentatie van de leerstof.

Uit een aantal wiskundemethoden hebben we de hoofdstukken gebundeld waarin de goniometrie geïntroduceerd wordt. Deze bundel wordt tijdens de werkgroep aan de deelnemers uitgereikt om aan de hand daarvan met elkaar van gedachten te wisselen over manieren om het onderwerp in te voeren, goede voorbeelden, contexten, het trainen van vaardigheden en andere zaken die van belang zijn om wiskunde-onderwijs voor meisjes en jongens aantrekkelijk te maken.

Thea de Poel, Sylvia van der Werf.

Agenda

9.30 h-10.00 h aankomst koffie

10.00 h-10.30 h huishoudelijk gedeelte (zie elders in dit blad)

10.30 h-10.35 h aankondiging lokalen en groepen

10.35 h-10.45 h pauze, koffie

10.45 h-12.30 h bijeenkomst in groepen

12.30 h-13.30 h lunch en markt

13.30 h-14.30 h lezing door Ria Jaarsma

14.30 h-14.45 h pauze, koffie

14.45 h-16.30 h bijeenkomst in groepen

16.30 h-17.00 h huishoudelijk gedeelte (zie elders in dit blad)

Aanmelding vóór 24 oktober 1984

Leden kunnen zich aanmelden door f 14,25 over te maken naar giro 143917 t.n.v. NVvW te Amsterdam, Jorisstraat 43, Breda, onder vermelding 'lunch studiedag'. Zij krijgen daarna het boek 'Vrouwwiskundig' toegestuurd.

Leden die niet aan de lunch deelnemen kunnen zich per briefkaart aanmelden.

Zij krijgen daarna het boek toegestuurd.

Niet-leden kunnen zich aanmelden door overmaking van f 25,- naar bovengenoemde girorekening onder vermelding van

'lunch niet-lid'. Als men geen gebruik wenst te maken van de lunch dan kan men zich aanmelden door overschrijving van f 10,- onder vermelding 'studiedag niet-lid'. Daarna krijgt men het boek thuisgestuurd.

Men kan zich ook ter plaatse aanmelden. De prijzen zijn in dat geval f 5,- hoger. Bovendien is de plaatsruimte beperkt.

Alle wiskundeleraars uit het gehele voortgezet onderwijs zijn welkom.

Kinderopvang

Op 27 oktober 1984 zal op de jaarvergadering/studiedag, bij voldoende deelname, voor kinderopvang worden gezorgd. Men dient zelf voor een lunchpakket en enig speelgoed te zorgen. Aanmelding hiervoor kan geschieden bij Penningmeester NVvW, Jorissstraat 43, 4834 VC Breda.

Wiskunde in het volwassenenonderwijs

Hoe leid je leerlingen in drie jaar met 1½ uur les per week op voor het mavo wiskunde examen? Dat is één van de problemen waarvoor de collega's in het volwassenenonderwijs zich gesteld zien. Maar er zijn meer knelpunten bij dit onderwijs. Ook voor het havo en vwo volwassenenonderwijs is de tijd krap bemeten, hoewel het hier iets minder knelt, omdat de meeste leerlingen die deze opleidingen volgen al enige scholing in wiskunde achter de rug hebben.

Een ander nijpend probleem is het ontbreken van een speciaal voor deze categorie uitgegeven methode. Zo'n methode zou tegemoet moeten komen aan de krappe tijd waarbinnen de gehele opleiding moet plaats vinden en aan de andere manier van studeren die bij volwassenen bestaat. Een andere manier van studeren omdat volwassenen over een geringer onmiddellijk geheugen beschikken dan jongeren en daarom sneller na een uiteenzetting de tijd moeten hebben om de nieuwe stof te verwerken. De bestaande methodes komen, voorzover ons bekend, niet aan deze eisen tegemoet. Bovendien zijn ze vaak voor kinderen geschreven hetgeen zich vooral manifesteert in de manier van aanspreken van de leerling.

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars wil de collega's in het volwassenenonderwijs helpen deze problemen op te lossen. Deze hulp kan o.i. het best geboden worden door de bestaande know-how te bundelen en een goed overzicht te krijgen van het totale probleem en van de mogelijk reeds bestaande oplossingen. Misschien kan dat resulteren in het formeren van een schrijversgroep en het vinden van een uitgever zodat er een meer adequate methode voor volwassenen komt.

Wil iedereen die zich door deze problematiek aangesproken voelt, of oplossingen kent, of mee wil werken aan het zoeken naar oplossingen, dat kenbaar maken door een briefje te schrijven aan:

L. Bozuwa, Abeelstraat 7, 3329 AA Dordrecht.

Het bestuur van de NVvW

Wiskunde-didactiek conferenties

Te houden in het conferentieoord 'De Bosrand' te Ede, steeds van donderdag 10.00 uur tot zaterdag 13.30 uur.

B-conferentie *Samenwerken*, 28 feb., 1 en 2 maart 1985

C-conferentie *Rekening houden met individuele verschillen*, 11, 12 en 13 oktober 1984

D-conferentie *Zingeving van wiskunde-onderwijs*, 1, 2 en 3 november 1984 en 24, 25 en 26 januari 1985

E-conferentie *Voortgezet rekenen*, 29, 30 nov. en 1 dec. 1984 en 28, 29 en 30 maart 1985

Aanmelding voor 1 september en inlichtingen bij een der lerarenopleidingen of het centrale adres

Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen.

HEWET in de onderbouw

De didactiekcommissie roept geïnteresseerden in de didactiek van de wiskunde op, om mee te werken in een werkgroep, die zich bezig wil houden met het onderwerp 'HEWET in de onderbouw'.

- Het zal een studiegroep zijn die zich bezig houdt met de invloed die het HEWET programma zal kunnen en moeten hebben op de onderbouw. (Er wordt niet alleen gedacht aan onderbouw havo/vwo). Centraal staat de vraag naar het gebruiken van de HEWET - ideeën in het huidige wiskunde programma.
- Verwacht wordt dat de werkgroep van 10 à 12 personen in de periode van november 1984 tot april 1985 vier à vijf keer bijeenkomt. Binnen de werkgroep worden afspraken gemaakt en taken verdeeld.
- Als plaats van bijeenkomst wordt gedacht aan Utrecht of een voor alle deelnemers zo centraal mogelijk gelegen plaats.
- De bijeenkomsten worden in scholen gehouden. Gedacht wordt aan een tijd van 16.30 tot 20.00 uur (inclusief een eenvoudige maaltijd). Behoudens goedkeuring van de begroting ligt het in de bedoeling dat de vereniging van de maaltijd f 5,- en reiskosten boven de f 10,- vergoedt.
- Twee leden van de huidige didactiekcommissie zijn beschikbaar als kwartiermaker. Deze mensen zorgen voor een goed functioneren van de werkgroep, maar zijn niet noodzakelijk deskundig in het studieonderwerp.
- Van de werkgroepleden wordt verwacht dat zij zich tijdens de bijeenkomsten actief bezighouden met het ontwikkelen en uitwisselen van materiaal en ideeën.
- Degenen die belangstelling hebben voor de werkgroep, worden verzocht zich zo vlug mogelijk aan te melden (aan de didactiekcommissie, Emma Rozendaal, Boekanierlaan 5, 2132 TA Hoofddorp).

Vermeld de dagen waarop u beslist niet kunt en schrijf een regeltje over de aard van uw werkzaamheden in het wiskunde-onderwijs.

Namens de didactiekcommissie

E. Rozendaal tel.: 02503 - 12030

C. Hoogsteder tel.: 08350 - 24347

Ars et Mathesis

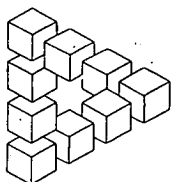
De stichting 'Ars et Mathesis' stelt zich ten doel activiteiten te bevorderen welke zich in het grensgebied van kunst en wiskunde bevinden.

Het eerste project dat ter hand genomen is, is gecentreerd rond onmogelijke figuren (zie afbeelding).

Een werkgroep bereidt thans een internationale tentoonstelling over dit onderwerp voor. Hobby-isten op dit gebied kunnen hierover informatie inwinnen (030-783168) en wellicht een bijdrage leveren.

Voorzitter van de stichting is prof. dr. F. van der Blij, secretaris is Bruno Ernst, onder meer bekend om zijn Escher-publicaties. De stichting hoopt in de toekomst ook andere projecten dan die van de onmogelijke figuren aan te pakken. Men denkt bijvoorbeeld aan perspectief, vlakvullingen, maar wellicht ook aan muziek en poëzie.

Belangstellenden kunnen schrijven naar het secretariaat van de stichting: Julianalaan 8, 3743 JG Baarn.



PANAMA najaarsconferentie

Noordwijkerhout, 14, 15 en 16 november 1984.

Onderwerp: 'Op weg naar een rationaal plan voor het reken/wiskunde-onderwijs (van 4- tot 14-jarigen) en de plaats van de computer daarbinnen'.

Inlichtingen: OW & OC, mw B. Dekker, tel. 030-611 611.

VVWL-studiedag Gent 13 oktober 1984

De VVWL houdt op zaterdag 13 oktober 1984 een studiedag in de Rijksuniversiteit Gent: De Sterre, Auditorium 8Q, eerste verdieping, hoek Galglaan en Krijgslaan in Gent.

Agenda:

vanaf 9.30: ontvangst

10.00: opening door voorzitter Frank Laforce

10.10: dr. F. De Clerck (Seminarie voor Meetkunde en Kombinatoriek RUG): *Affiene, projectieve, euclidische en niet-euclidische meetkunde: Een doolhof?*

11.20: Chris Ervynck (Rijksnormaalschool Gent): *Vernieuwde wiskunde als basis voor een totaal-onderwijs in de lagere school*

12.30: lunch

14.00: Sylvia Meuldermans (Stedelijke Middenschool nr. 1 Antwerpen): *Ervaringen met en evaluatie van de eerste intrede van de computer in de observatiecyclus van het VSO.*

15.10: Guido Roels (Bisschoppelijke Normaalschool Sint Niklaas): *Hoeken.*

16.20: Rondvraag en sluiting.

De lunch kan genomen worden in een zelfbedieningsrestaurant, vlak over het auditorium.

Wegbeschrijving: met de auto: E5 afrit Gent-Zwijnaarde; E3 afrit 9 Academisch Ziekenhuis. De gebouwen van de RUG liggen langs de Krijgslaan, Galglaan.

Treinreizigers nemen aan het station Gent-Sint-Pieters bus 71 die stopt op de Kortrijkse Steenweg of bus 90, die stopt op de Oudenaardse Steenweg. Beide straten monden uit op een rond plein: De Sterre. Ook de Krijgslaan en Galglaan komen daar op uit.

PAO-Informatica nascholingscursussen

Programmeren

Inschrijving en inlichtingen:

- VU Amsterdam, Subfac. Wisk. en Inf., De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam, tel. 020-548 24 10
- TH Eindhoven, Vakgr. Inf., Onderafd. Wisk. en Inf., postbus 513, 5600 MB Eindhoven, tel. 040-47 27 73
- TH Delft, Vakgr. Inf., t.a.v. mw M. Koetsier, Julianalaan 132, 2628 BL Delft, tel. 015-78 44 75
- TH Twente, O. J. J. Broenink, TW/RC A 319, postbus 217, 7500 AE Enschede, tel. 053-89 44 67 en bij H. G. Berendsen, tel. 053-89 44 50
- KU Nijmegen, Secr. afd. Inf. I, Fac. der Wisk. en Natuurwetenschappen, Toernooiveld, 6525 ED Nijmegen, tel. 080-55 88 33
- Centrum voor Wisk. en Inf. Amsterdam, L. Geurts, p/a CWI, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, tel. 020-592 93 33

Informatietechnologie en Samenleving

Inschrijving en inlichtingen:

J.F. Entrop, TW/RC A 324, TH Twente, postbus 217, 7500 AE Enschede, tel. 053-89 44 48

Didactiek van de Informatica

Inschrijving en inlichtingen:

Vakgr. Inf., Onderafd. Wisk. en Inf., TH Eindhoven, postbus 513, 5600 MB Eindhoven

Bestandsorganisatie en gegevensbanken

Inschrijving en inlichtingen:

Vakgr. Inf., TH Delft, t.a.v. mw M. Koetsier, Julianalaan 132, 2628 BL Delft, tel. 015-78 44 75 en bij A. van der Ende, tel. 015-78 45 71

Voortgezet programmeren

Inschrijving en inlichtingen:

Vakgr. Inf., RU Groningen, postbus 800, 9700 AV Groningen, tel. 050-11 67 97

Informatica in de Samenleving

Inschrijving en inlichtingen:

Vakgr. Fysische Experimenteerkunde, Universiteit van Amsterdam, Nieuwe Achtergracht 170, 1018 WV Amsterdam, tel. 020-522 28 77

INHOUD

Bij het begin van de 60e jaargang 1

Euclides 60 jaar 2

Jaarverslag 1983-1984 80

Prijsvraag 'In de wiskundeles' 81

Kalender 81

Mededelingen 81