

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

09

59e jaargang

1983/1984

nr. 7

maart

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Mw. I. van Breugel - Drs. F. H. Dolmans (hoofdredacteur) -
W. M. J. M. van Gaans - Dr. F. Goffree - W. Kleijne -
L. A. G. M. Muskens - Drs. C. G. J. Nagtegaal
P. E. de Roest (secretaris) - Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) -
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie:
F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 50,- per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 35,-; contributie zonder Euclides f 30,-.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs. F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894 - 11730. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-550834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, giro: 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 7,- (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

ISSN 0165-0394

Gelukwensen aan Joh. H. Wansink, erelid van de N.V.W.L.

Hooggeachte Wansink en beste collega,

Een dezer dagen word je negentig. Je bereikt dan de leeftijd van de wel zeer sterken. Namens het bestuur van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren wens ik je alle goeds.

Voor de lezers die je niet gekend hebben zou ik jouw grote betekenis voor het Nederlandse wiskunde-onderwijs moeten beschrijven. Het volgend nummer van *Euclides* wordt echter geheel aan je gewijd en daarom zal ik me hier beperken tot wat Johan Wansink voor mij persoonlijk heeft betekend. Ik meen dat ik daarmee een voorbeeld geef van wat je voor vele anderen hebt gedaan.

Als jong leraar kende ik je alleen als de man die op jaarvergaderingen achter de groene tafel zat en van je schoolboeken. Die boeken gebruikten we niet op school, maar ik had ze wel in de kast staan en ik herinner me dat ik er regelmatig in keek.

Er bestond toentertijd nog geen pedagogisch-didactische opleiding voor eerste-graads leraren. We moesten het vak zelf maar meester zien te worden. Als je geluk had, dan was er aan de school wel een ervaren collega die een beetje raad kon en wilde geven. Verder waren er wel eens landelijke bijeenkomsten waar didactische problemen aan de orde kwamen. Op zulke vergaderingen zul je best wel opgetreden zijn, maar dat herinner ik me niet.

De eerste maal dat ik echt bewust van jouw kennis, ervaring en scherpzinnigheid kon profiteren was toen de eerste twee delen van jouw *Didactische Orientatie voor Wiskundeleraren* uitkwamen. Je gaf daarmee de stoot aan de ontwikkeling van wiskundendidactiek in Nederland. Ik heb die boeken verslonden.

Later vroeg je me mee te werken aan het derde deel. Je kritische opmerkingen bij wat ik toen schreef waren scherp en duidelijk. Er sprak respect uit voor de schrijver, maar je had geen pardon voor vage of inconsistente beweringen.

Helder herinner ik me ons gesprek tijdens een wandeling in een park van Lyon waar we waren ter gelegenheid van een congres. Je sprak toen over de noodzaak van onderzoek in het onderwijs. Je wees moderne stromingen niet af, maar wel verzette je je tegen ongefundeerd wegwerpen van goede ervaringen en ongefundeerd omhelsen van nieuwigheden, die met veel tam-tam werden gepropageerd. Je had steeds een houding van kritisch vrager, die het wilde enthousiasme wel eens temperde, maar het nadenken bevorderde. Je leerlingen zullen het wel eens moeilijk bij je hebben gehad, maar ze hebben vast veel goeds van je geleerd. Net zoals ik en vele anderen die zich jouw collega mochten noemen, maar zich vaak je leerling voelden.

Mede namens hen bedankt Johan. De vereniging kan zich geen beter erelid voorstellen.

Joop van Dormolen

Uitleggen en begrijpen

HANS AALMOES

Regelmatig krijg ik het verwijt naar mijn hoofd geslingerd dat ik nooit iets uitleg, dat ik de kinderen maar laat aanmodderen en dus, die conclusie trek ik dan maar zelf, dat ik eigenlijk niet zo een goede leraar ben. Nu is dat laatste best mogelijk, maar dan kan ik wel andere criteria bedenken, bijvoorbeeld het te veel voorkauwen, het hele bord volschrijven en te weinig initiatief overlaten aan mijn leerlingen.

Misschien kan ik aan de hand van enkele voorbeelden aantonen dat het 'uitleggen' voor velerlei uitleg vatbaar is. Eén lesuur in de week heb ik een halve 3-vwo klas van ongeveer 12 leerlingen. In dat uur gaan we wat opgaven maken, de stof goed verwerken, wat bijspijkeren waarbij ik zelf rondloop en ga helpen daar waar het nodig blijkt te zijn. Er is een goede motivatie. De leerlingen willen echt wel. Ik wou bijna zeggen: ze willen echt iets gaan begrijpen, maar dat is het eigenlijk niet. Ze willen weten hoe ze iets moeten doen, hoe ze die sommen kunnen maken. Het is een uitstekende gelegenheid om individueel bezig te zijn en de leerling in zijn werk te observeren. Zo had ik één van de meisjes een kwartier lang geholpen. Ik was naast haar gaan zitten en keek hoe ze aan het werk was. Ik merkte op wat ze goed deed en wat ze weer niet zo handig deed. Wanneer ze de fout inging, kon ik inspringen. Ik vroeg haar naar het waarom bij enkele stappen en als ze niet wist hoe ze verder moest, gaf ik wat tips in de richting van de oplossing. De goede oplossing kwam er en ik had ook echt het idee dat ze het begreep. Kortom, de meest ideale situatie die je je als leraar maar kunt indenken. Wie schetst echter mijn verbazing, toen dat meisje opmerkte dat ze toch liever bij een collega van mij in de klas zat, want die legde het tenminste uit ...

Een jongen die achter haar zat probeerde mij nog te troosten met de opmerking: 'U legt het wel uit, *alleen zo laat*' en dat klonk voor mij natuurlijk iets aardiger. Toen moest ik ook weer denken aan een gesprek dat twee jongens voerden over de wiskundeleraar A en de wiskundeleraar B. Ze waren het erover eens dat B een betere leraar was dan A omdat B in één lesuur meer sommen op het bord schreef dan A.

Het gaat nu om de vraag waarom leerlingen, maar ook collega's een dergelijk standpunt innemen. Duidelijk is dat de prestatiedrang gesteund door de exameneisen en de vraag in de maatschappij een belangrijke rol speelt. De leerlingen moeten iets presteren, namelijk hetzelfde als de leraar ... Ik wil ook dat de leerlingen iets gaan presteren, heel veel zelfs. Het moet alleen iets soortgelijks

zijn als de leraar, het doelgericht en adequaat kunnen handelen bij het oplossen van problemen.

Uit de klassepraktijk

De leerlingen moeten de top kunnen bepalen van een parabool door middel van kwadraatafsplitsen. De techniek beheersen ze, het is goed ingeoefend voor zover de coëfficiënt van x^2 gelijk aan 1 is. Er is de leerlingen uitgelegd hoe ze het moeten doen en met een aantal voorbeelden hebben zij reeds kennis gemaakt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x + 7 \\ &= x^2 + 6x + 9 - 9 + 7 \\ &= (x + 3)^2 - 9 + 7 \\ &= (x + 3)^2 - 2 \end{aligned}$$

Ook hier zijn al verschillende manieren van uitleggen waarbij je bepaalde tussenstappen kunt weglaten, maar dat is hier niet essentieel.

Wat begrijpen de leerlingen nu? Als leraar wijs je op dat kwadraat dat minimaal 0 is, zodat het minimum van deze functie -2 is enz.

Je kunt dat zo mooi zien aan de vorm:

$$f(x) = (x + 3)^2 - 2$$

Veel beter dan aan:

$$f(x) = x^2 + 6x + 7$$

Maar zien de leerlingen dit ook, weten ze wat een functie is en waaraan denken zij bij het woord minimum? Wat pikken de leerlingen nu precies op? Begrijpen ze het of kennen ze alleen die vier of vijf stappen die naar het gewenste doel leiden? Ik denk eerder het laatste, zeker als je ze hoort bij:

$$f(x) = x^2 - 5$$

‘Maar dit hebben we nog nooit gehad, je kunt hier geen kwadraatafsplitsen, want er staat niet zoiets als $4x$ bij ...’

De zaak wordt complexer wanneer je ook functies toelaat als de coëfficiënt van x^2 ongelijk 1 is. Maar ook hier is de kinderen, zij het met wat meer moeite, te leren om de oplossingsmethode in te oefenen:

$$\begin{aligned} g(x) &= 3x^2 + 6x + 10 \\ &= 3(x^2 + 2x + 3\frac{1}{3}) \text{ enz.} \\ \text{en } h(x) &= -x^2 + 4x - 5 \\ &= -(x^2 - 4x + 5) \end{aligned}$$

De leraar legt het haarfijn uit. Hij geeft wat voorbeelden, maar de vraag is nog steeds 'wat is er uitgelegd?'.

Eigenlijk is de kinderen alleen maar een oplossingsmethode voorgedraaid, die zij straks kunnen nadoen. Waarom ik dit geloof en ik hier zo pessimistisch ben is het feit dat één van mijn beste vwo-leerlingen de hele materie niet doorzag. In een diagnostische toets had ik de volgende vraag gesteld:

Bepaal de uiterste waarde van $f(x) = 1 - (x + 3)^2$.

Zij ging als volgt te werk:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (x^2 + 6x + 9) \\ &= 1 - x^2 - 6x - 9 \\ &= -x^2 - 6x - 8 \\ &= -(x^2 + 6x + 8) \\ &= -[(x + 3)^2 - 9 + 8] \\ &= -[(x + 3)^2 - 1] \\ &= -(x + 3)^2 + 1 \end{aligned}$$

en het maximum kwam er na deze vlekkeloze berekening goed uit.

Nu ik de smaak te pakken had, vroeg ik aan hetzelfde kind in een volgend sommetje naar het maximum van

$$g(x) = 2 - (x + 23)^2$$

en ja hoor, ijverig ging zij dezelfde oplossingsmethode toepassen.

Het werd voor mij hoog tijd om in te grijpen en dit gaf mij meteen de gelegenheid om nu eens in een andere situatie op dat verschijnsel van het 'kwadraat afsplitsen' terug te keren. De tijd was nu kennelijk rijp om het haar echt te laten begrijpen.

Toch zien wij regelmatig dit klakkeloos toepassen van regeltjes zonder enig inzicht. De kinderen doen de leraar na. Met dat voorkauwen van oplossingen leren de kinderen geen vraagstuk oplossen, maar ze leren de oplossing van dat vraagstuk. De leerlingen blijven te veel steken in het stadium van reproducerend begrijpen. Nu is dat kunnen nadoen van de leraar een noodzakelijke schakel, maar het is nog niet voldoende om leerlingen opgaven te leren oplossen die iets afwijken van het gebruikelijke type of als zij moeten kiezen uit meer dan één oplossingsmethode.

Bij het behandelen van een proefwerk krijgen de leerlingen altijd zo een schitterend vals beeld van de leraar die het zo mooi heeft uitgelegd. De kinderen hebben met veel inspanning gewerkt aan de toetsopgaven en willen nu wel eens weten hoe je tot het goede antwoord kunt komen. Zij zijn (ondanks het cijfer?) sterk gemotiveerd en volgen de 'uitleg' van de leraar. Deze stevent bewust op het doel af alsof de te kiezen oplossingsmethode vanzelfsprekend is. Eénmaal deze oplossingsmethode voorgetoverd en het schijnt voor de leerlingen bijzonder

duidelijk. De leraar heeft het goed uitgelegd ... 'stom dat we dat zelf niet konden ...'.

Een voorbeeld van een toetsopgave om dit te illustreren:

'Bepaal vergelijkingen van de raaklijnen door het punt $P(0, -2)$ aan de parabool met vergelijking $y = x^2 + 2x - 1$.'

De oplossing gaat als volgt:

De algemene gedaante van een rechte lijn is $y = ax + b$.

De lijn gaat door $(0, -2)$:

$$-2 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = -2$$

De lijn heeft dus als vergelijking

$$y = ax - 2$$

Bereken nu de snijpunten van de lijn met de parabool.

Je lost dan het stelsel op:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 1 \\ y = ax - 2 \end{cases} \text{ enz.}$$

Dit leidt tot een 2e graadsvergelijking, waarin het om één oplossing gaat, dus discriminant nul stellen, hetgeen weer leidt tot een 2e graadsvergelijking met a als onbekende. Er rollen vervolgens twee a 's uit en de vergelijkingen van de raaklijnen $y = -2$ en $y = 4x - 2$.

De leerlingen die de opgave niet goed hadden, kunnen het hele verhaal volgen: niets is hun onbekend, immers:

- zij kunnen de vergelijking van een rechte lijn door een gegeven punt opstellen,
- zij kunnen een stelsel van twee vergelijkingen oplossen,
- dat geldt ook voor een 2e graadsvergelijking,
- een discriminant nul stellen herinneren zij zich ook.

Maar toch ...

Een soortgelijke opgave zullen ze nu wel kunnen oplossen, zoals:

'Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen door het punt $A(0, 5)$ aan de parabool $y = -x^2 + 4$ '.

Het niveau van begrijpen is dan van reproducerende aard. Nu terug naar die eerste toetsopgave, want de vraag is hoe je de leerlingen nog meer kunt helpen. De kern van de toetsvraag zit 'm in dat 'raken'. Je doet alsof je snijpunten gaat uitrekenen, maar stelt de eis van 'raken'.

Deze voorwaarde leidt tot het oplossen van de parameter a .

Weten die kinderen wel goed wat raken is?

Misschien moet je wel:

- een tekeningetje maken van deze situatie;
- een aantal tekeningetjes maken van parabolen en lijnen met 0, 1 of 2 snijpunten;

- teruggrijpen op 1e graadsvergelijkingen, omdat die theorie is weggezaakt;
- de betekenis van de discriminant is 0 eruit lichten;
- een plan voor de oplossing opstellen?

Je kunt niet van achter je bureau precies zeggen wat in die klas en bij die leerlingen het beste is, maar het lijkt me zo dat deze leraar had kunnen volstaan met aangeven, in de vorm van een leergesprek of welke onderwijsvorm dan ook, hoe de oplossing zou kunnen verlopen. En dat is namelijk de bedoeling van deze opgave, juist omdat de leerlingen de daarin voorkomende technieken over het algemeen wel beheersen.

Door met de leerlingen te praten over:

- snijden en raken;
- vergelijking parabool en rechte lijn;
- het aantal raaklijnen aan een parabool enz.

ben je ook aan het uitleggen en misschien kunnen de leerlingen dan nog wel meer dan alleen maar de leraar nadoen. Wellicht is hun startpositie beter bij opgaven die iets van de toetsopgave afwijken zoals:

- geef de vergelijking van de raaklijn aan de parabool $y = x^2 - 5$ in het punt waarvoor $x = 3$.

of

- geef de vergelijking van de raaklijn aan de parabool $y = x^2 - 2x + 1$ die evenwijdig is aan de lijn met vergelijking $y = 4x + 3$.

En ook hier kan de hulp zijn in de richting van een praatje over evenwijdigheid en richtingscoëfficiënten. Uitleggen is dan niet voorkauwen, maar de leerling begeleiden naar de oplossing. Het is een moeizame weg die van de leraar veel improvisatie vraagt, omdat hij in elke situatie telkens opnieuw moet bepalen wat hij bij de leerling als bekend kan veronderstellen en in welke vorm hij de hulp gaat bieden. Stelt hij alleen wat vragen, geeft hij een enkele aanwijzing, laat hij een leerling een bladzijde uit het boek overlezen, verwijst hij naar wat voorbeelden of voorgaande opgaven of geeft hij toch de volledige oplossing om de leerling de grote lijn te laten zien? Deze verscheidenheid van mogelijkheden maakt uitleggen tot iets wat het volgens mij moet zijn, namelijk de wiskunde begrijpen om nieuwe problemen te kunnen aanpakken.

Redactionele noot

Zie R. Leentfaar: 'Raaklijnen aan tweedegraadskrommen in het HAVO-onderwijs I', Euclides 56, 4, 138.

Zie A. v. Oort: 'Raaklijnen aan tweedegraadskrommen in het HAVO-onderwijs II', Euclides 57, 7, 281.

Over de auteur:

Hans Aalmoes is werkzaam aan de Rijksscholengemeenschap in Schagen en betrokken bij het MAVO-project.

Leren wat bewijzen is*

JOOP VAN DORMOLEN

Om een bewijs van een stelling te geven, of om een bewijs van iemand anders te kunnen begrijpen, moet je enerzijds beschikken over een repertoire van vaardigheden om de gedachtengang te kunnen volgen en anderzijds moet je begrijpen dat er iets te bewijzen valt. Ik zal dit toelichten aan het voorbeeld van de negenproef. Ik geef drie redeneringen die daarmee te maken hebben.

Een voorbeeld

I Neem eens 628×573 . Je hebt geen rekenapparaat tot je beschikking. Dus doe je dat met een kladpapiertje en je vindt 359144. Je wilt het resultaat controleren en dat niet doen door het nog eens op dezelfde manier uit te rekenen. Een gelijke uitkomst zou immers wel eens kunnen komen doordat je dezelfde fout hebt gemaakt. Je wilt de controle dus op een andere manier uitvoeren. Dat kun je doen met de negenproef. Die gaat als volgt:

Reken de rest bij deling uit van 628 en van 573.

628 geeft bij deling door 9 de rest 7
573 geeft bij deling door 9 de rest 6.

Vermenigvuldig de resten (6 maal 7 is 42) en reken de rest bij deling door 9 uit.

42 geeft bij deling door 9 rest 6.

Doe hetzelfde met het produkt.

359144 geeft bij deling door 9 de rest 8.

De rest 8 is niet hetzelfde als de rest 6 (van 42) en daarom is de vermenigvuldiging fout. (N.B. Je kunt dit ook doen met andere delers dan 9, maar 9 is gekozen omdat de rest bij deling zo gemakkelijk is te bepalen via de som van de cijfers. Maar dat is een ander verhaal.)

* De uitwerking van een activiteit voor een gezamenlijke studiedag van de VvWL en de NVWL op 26 april 1983 te Kapellen (België).

II Dat de negenproef goed is volgt uit de volgende redenering.

Stel a en b zijn twee gehele positieve getallen.

Stel d is een geheel positief getal.

Zij p rest bij deling van a door d ($0 \leq p < d$)

Zij q rest bij deling van b door d ($0 \leq q < d$)

Dan zijn er getallen x en y zodanig dat

$$a = x \cdot d + p$$

$$\text{en } b = y \cdot d + q$$

Voor het produkt $a \cdot b$ geldt dan

$$a \cdot b = x \cdot d \cdot y \cdot d + x \cdot d \cdot q + y \cdot d \cdot p + p \cdot q$$

Zij r de rest bij deling van $p \cdot q$ door d ($0 \leq r < d$)

Er is dan een getal z zodanig dat

$$p \cdot q = z \cdot d + r$$

We vinden zo:

$$a \cdot b = x \cdot d \cdot y \cdot d + x \cdot d \cdot q + y \cdot d \cdot p + z \cdot d + r$$

Dit is te herleiden tot

$$a \cdot b = (x \cdot d \cdot y + x \cdot q + y \cdot p + z) \cdot d + r \text{ met } 0 \leq r < d$$

Hieruit blijkt dat r de rest bij deling is van $a \cdot b$ door d .

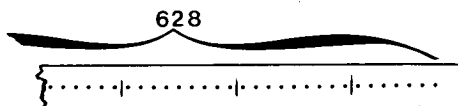
Conclusie:

De rest bij deling van een produkt van twee factoren door een getal is gelijk aan de rest bij deling (door datzelfde getal) van het produkt van de resten bij deling van de afzonderlijke factoren (door datzelfde getal).

Neem je 628 voor a , 573 voor b en 9 voor d , dan blijkt dat $p = 7$ en $q = 6$, dus kan r niet gelijk aan 8 zijn.

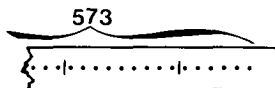
We kunnen de negenproef ook als volgt bewijzen.

III Ik neem weer de getallen 628 en 573. De rest bij deling van 628 door 9 kan je je voorstellen door een rij stippen op een strook papier. Je telt dan telkens 9 stippen af.

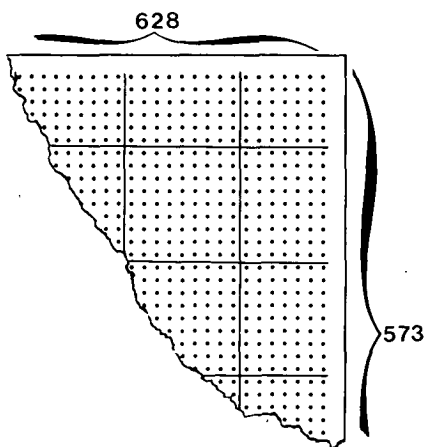


Je kunt uitrekenen dat er dan 7 stippen overblijven. Je hoeft de hele strook niet te zien. Alleen het eind met de rest is interessant.

Hetzelfde kun je doen met 573.



Je kunt nu het produkt $628 \cdot 573$ voorstellen door een rechthoek van stippen met lengte 628 en breedte 573. De stippen deel je dan weer in in groepen van 9.



Je hoeft alleen maar naar het hoekje met resten te kijken, want alle andere stippen verdwijnen in de groepjes van 9. De 'resthoek' bestaat uit $7 \cdot 6$ stippen, namelijk het produkt van de resten bij deling van 628 en van 573. Hieraan zie je dat de rest bij deling van $628 \cdot 573$ door 9 gelijk is aan de rest bij deling van het produkt $7 \cdot 6$ van resten.

Als we de drie redeneringen bekijken dan kunnen we zeggen dat I geen bewijs is. Het is een recept waarvan je in het beste geval wilt aannemen dat het bij alle gehele positieve getallen zo gaat. Wie zijn leerlingen wil leren wat bewijzen is zal zijn doel met deze redenering niet kunnen bereiken.

II is een goed bewijs, maar het vereist nogal wat vaardigheden bij de leerling die het voorgeschoteld krijgt. De leerling moet in staat zijn het redeneren met variabelen te begrijpen.

Er zijn nogal wat verschillende soorten uitspraken.
Zo zijn

'Stel a en b twee gehele positieve getallen'
en
'Stel d is een geheel positief getal'

definiërende zinnen.

De zinnen

'Zij p de rest bij deling van a door d '

en

'Zij q de rest bij deling van b door d '

zijn voor een deel definiërend, maar er zit impliciet ook een bewering in, namelijk dat a en b resten bij deling hebben. De toevoegingen

' $0 \leq p < d$ '

en ' $0 \leq q < d$ '

zijn uitspraken die volgen uit de definitie van rest.

De volgende zin is:

'Dan zijn er getallen x en y zodanig dat

$a = x \cdot d + p$

en $b = y \cdot d + q$ '

Deze zin is erg ingewikkeld omdat het impliciet meer dan een mededeling doet. Er is een theoretische betekenis als logische conclusie van het voorafgaande:

Als a en d gehele positieve getallen zijn en

als p de rest bij deling van a door d is,

dan is er een getal dat vermenigvuldigd met d juist het verschil van a en zijn rest p is.

Voor b , d en q geldt hetzelfde.

Een tweede mededeling is van communicatieve aard: Ik geef die getallen een naam: x resp. y .

Een derde mededeling van methodische aard zit helemaal verstopt: Ik weet nu wel dat die getallen bestaan en dat ik ze een naam gegeven heb, maar dat heb ik alleen gedaan om het vervolg van mijn verhaaltjes netjes te kunnen opschrijven. Het interesseert me helemaal niet hoe groot die getallen zijn. (Zo kan x best 0 zijn, als $d > a$ en dan is $p = a$. Ook kan $y = b$ zijn als $d = 1$ is en dan is $q = 0$. Maar dat heeft allemaal voor mijn verhaal van nu geen belang.)

Het vervolg van verhaal II eist de nodige vaardigheid in het rekenen met letters. En dan komen er ook nog zinnen van bovengenoemde soort.

Voor het begrijpen van het hele verhaal moet je dan nog de vaardigheid hebben dat je al deze zinnen met elkaar in verband kunt brengen.

Wie zijn leerlingen wil leren wat een bewijs is zou daarom met het bovenstaande zijn doel wel eens voorbij kunnen schieten.

III ziet er op het eerste gezicht uit als I, maar nauwkeuriger bestudering leert dat er eigenlijk dezelfde redenering staat als in II.

De getallen 628, 573 en 9 spelen in het hele verhaal dezelfde rol als a , b en d : het

zijn variabelen die zonder bezwaar voor de geldigheid van het hele verhaal door andere kunnen worden vervangen. Dat kan in I niet, want daar zou je wel degelijk opnieuw moeten onderzoeken of het wel klopt. De onbelangrijkheid van de grootte van x en y is hier openlijk door het (in gedachten) afscheuren van het papier waarop de stippen staan.

Het bestaan van x en y wordt vastgesteld door het aftellen van groepjes van 9 stippen (ook als d groter dan a zou zijn gaat dit nog door: je kunt dan 0 groepen van d stippen aftellen).

De formule $a \cdot b = x \cdot d \cdot y \cdot d + x \cdot d \cdot q + y \cdot d \cdot p + p \cdot q$ is ook zichtbaar: $x \cdot d \cdot y \cdot d$ zijn de vierkanten van 9 bij 9 stippen, $x \cdot d \cdot q$ en $y \cdot d \cdot p$ zijn de randen van de rechthoek en $p \cdot q$ is de rechterbovenhoek.

III is dus een goed bewijs voor de stelling.

Voor- en nadelen van II en III

II heeft het voordeel dat het terug te voeren is op een axiomatische basis van de getallenleer. Als zodanig heeft het zin om II een mathematisch bewijs te noemen. Het heeft de moeilijkheid dat het, zoals boven is aangetoond, een behoorlijk groot repertoire aan vaardigheden op een redelijk hoog abstractie-niveau bij de leerling veronderstelt.

Bij leerlingen die die vaardigheden niet hebben geeft dat grote problemen.

Als daar geen oplossing voor te vinden is ben je geneigd als leraar ofwel de leerling te dwingen het bewijs uit het hoofd te leren in de hoop dat hij het later wel eens een keer zal gaan begrijpen, ofwel het bewijs weg te laten en alleen zoiets als I te geven. Beide oplossingen verduisteren een essentieel deel van wiskunde: het bewijzen.

III heeft het nadeel van II niet. Het sluit uitstekend aan bij het begripsvermogen van de leerling en laat onverlet de essentie van het bewijzen: redeneren en concluderen. Het heeft het nadeel dat het niet zonder meer terug te voeren is op grondslagen van de getallenleer. Daarom zou het nodig zijn eerst de redenering te formaliseren in de trant van II.

Pre-formele redeneringen.

Het feit dat II in te passen is in een formeel systeem maakt dat men het een wetenschappelijk bewijs zou kunnen noemen, of zo men wil een wiskundig bewijs. Het feit dat III eerst geformaliseerd zou moeten worden tot II, maar dan verder onveranderd zou blijven gelden, maakt dat men het voorwetenschappelijk, of *pre-formeel* zou kunnen noemen.

Pre-formele bewijzen hebben dus de eigenschap dat ze formaliseerbaar zijn zonder dat de essentie van de redenering verloren gaat en het voordeel dat ze aangepast zijn aan het begripsniveau van leerlingen die nog niet het denkniveau hebben bereikt waarop ze een geformaliseerde redenering kunnen volgen.

Ik geef nu een paar voorbeelden van redeneringen die ik niet pre-formeel zou willen noemen.

- a Teken een driehoek op papier. Knip die uit. Scheur de hoeken af en leg die tegen elkaar.



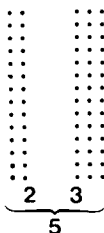
Je ziet dat ze samen een gestrekte hoek vormen. Dus de som van de hoeken van een driehoek is 180° .

- b $2a + 3a = 5a$ want twee appels en drie appels is samen vijf appels.

- c Teken een rechthoek op de zijkant van een telefoonboek en duw dan de bladen scheef. Je ziet dan dat parallellogrammen met gelijke basis en gelijke hoogte dezelfde oppervlakte hebben.

Deze redeneringen zijn uitstekend geschikt om leerlingen te helpen een vermoeden te krijgen. Het zijn geen bewijzen, ook geen pre-formele.

De redenering b lijkt nog het meest op een bewijs en dat is erg verraderlijk, want het is in deze vorm niet te generaliseren: een appel is niet te generaliseren tot een variabele over een getalverzameling. Wel pre-formeel is het volgende.



Slotopmerkingen

Pre-formele bewijzen zijn redeneringen aan de hand van concrete visuele of zelfs materiële hulpmiddelen, die kunnen worden geformaliseerd zonder dat er essentieel iets aan de inhoud veranderd hoeft te worden. Bepaalde begripsmatige problemen die te maken hebben met methodiek en met theoretische begrippen en niet met het logische aspect van het bewijzen kunnen worden omzeild. Daarom zijn pre-formele bewijzen uitstekend geschikt om mensen te leren wat een bewijs is, zolang ze niet geroutineerd zijn in het volgen van een reeks van formele redeneringen.

Pre-formele bewijzen sluiten van bij wat de leerling kan bevatten.

Pre-formele bewijzen zijn geen bewijzen die in feite fout zijn en alleen bedacht zijn 'om het voor de kinderen gemakkelijker te maken', zoals de bekende truc van de appeltjes bij $2a + 3a = 5a$.

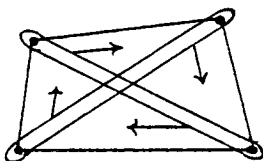
Pre-formele bewijzen zijn geen experimentele controles van een bewering. Een pre-formeel bewijs is geen onvolledige inductie dat wil zeggen, het plausibel maken van hypothesen die uit concrete voorbeelden worden gevormd. Niet elk bewijs is als pre-formeel bewijs te geven.

Voorbeelden

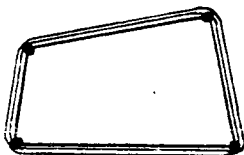
Voor hen die meer ideeën willen hebben voor pre-formele bewijzen volgt hier nog een aantal voorbeelden.

Verschillende heb ik uit een artikel van Kirsch (1979).

- 1 Bewijs dat de omtrek van een vierhoek groter is dan de som van zijn diagonalen. Neem (of stel je voor) vier spijkers als hoekpunten van een vierhoek. Sla om elk (eventueel in gedachten) paar overstaande hoekpunten een elastiekje.



Rek nu elk van de elastiekjes uit zodanig dat het om de andere hoekpunten geslagen wordt.



Je moet telkens, dat wil zeggen vier maal, echt uitrekken. Dus de elastiekjes worden echt langer. Daarmee is het bewijs geleverd. De handeling van het uitrekken is formaliseerbaar tot de driehoeksongelijkheid.

- 2 Er is een figuur gegeven van p punten en r rechten, zoals in het volgende plaatje:



Het bijzondere van de figuur is dat (a) door elk punt precies twee rechten gaan en (b) op elke rechte precies drie punten liggen.

Bewijs dat er $1\frac{1}{2}$ keer zoveel punten als rechten zijn.

Bewijs.

De figuur denken we (of maken we) opgebouwd uit p houten bolletjes (als duplicaten van de punten) en r ijzerdraadjes (als duplicaten van de rechten). Elk bolletje wordt door 2 ijzerdraadjes doorboord, maar dat doen we zo dat de boorgaten elkaar niet snijden. Als het netwerk klaar is, dan zagen we elk bolletje tussen de boorgaten door.

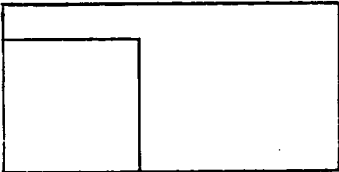
Er waren p bolletjes, er zijn dus $2p$ halve bolletjes. Aan elk ijzerdraadje hangen

3 halve bolletjes. Er waren r ijzerdraadjes, dus zijn er $3r$ halve bolletjes. Dus $2p = 3r$. Hetgeen te bewijzen was.

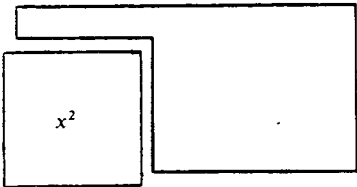
3 $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
 Knip een rechthoek uit dun karton.



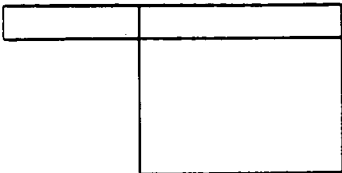
Teken daarop een vierkant op de volgende manier:



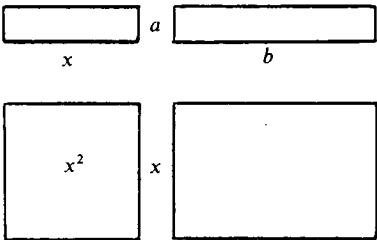
Knip dat vierkant uit. Als de zijde de lengte x heeft, dan is de oppervlakte x^2 . Je houdt nu een stuk als een haak over:



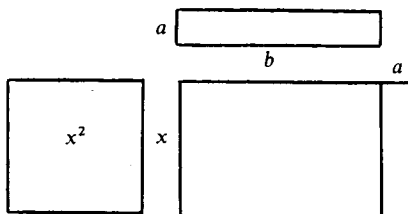
Knip beide 'benen' van de haak af.



Van de benen is een van de zijden x . Laat de andere zijden resp. a en b zijn:



De beide benen leg ik nu met het gelijke stuk x tegen elkaar.



Ik heb dan drie stukken die samen de oppervlakte $x^2 + (a + b)x + ab$ hebben. Deze zijn even groot als het oorspronkelijke stuk karton.

De lengte van de zijden daarvan was resp. $x + a$ en $x + b$, dus de oppervlakte van het oorspronkelijke stuk is $(x + a)(x + b)$.

Hiermee is de stelling bewezen (zij het helaas alleen voor positieve waarden van x , a en b).

4 Bekijk een of ander knip-en-plak bewijs van de stelling van Pythagoras.

5 Bewijs de stelling van Euler voor landkaarten ($H - Z + V = 2$) met behulp van dijken die door de storm weggeslagen worden en stukken land die overstroomd worden.

6 Uit n kinderen kunnen $\frac{n(n-1)}{2}$ paren worden gevormd.

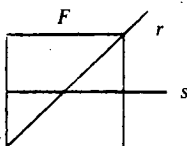
Bewijs. Maak alle mogelijke paren door elk kind het eind van touwtjes vast te laten houden waarmee het met elk ander kind wordt verbonden.

Elk kind houdt dus $(n - 1)$ eindjes touw vast. Er zijn n kinderen, dus in totaal $n(n - 1)$ eindjes.

Elk touwtje heeft 2 eindjes, dus zijn er $\frac{n(n-1)}{2}$ touwtjes.

Opmerking: De vondst hier is dat er gesproken wordt over eindjes, zodat er niet nagedacht hoeft te worden over het feit dat touwtjes dubbel geteld worden.

7 Als een figuur twee symmetrie-assen heeft die niet loodrecht op elkaar staan, dan heeft die figuur er minstens nog een. Bewijs. Laten r en s symmetrie-assen van figuur F zijn. Copieer de figuur met de assen op een stukje doorzichtig plastic. Die copie noem ik F^* met symmetrie-assen r^* en s^* .



Spiegel F in r , dan gaat F in zichzelf over.

Dit is te dupliceren door F^* op te tillen, een halve slag om r^* te draaien en weer neer te leggen. Het past dan precies op F .

Daarbij valt r samen met r^* , maar s^* is nu het spiegelbeeld van s in r . Copieer s^* op het papier. Noem die copie s_1 .

Nu is s_1 weer een symmetrie-as van F_1 want s^* is symmetrie-as van F^* .

Je kunt het zelfde doen met spiegeling in s . Je krijgt dan r_1 als spiegelbeeld van r en op dezelfde manier kun je aantonen dat r_1 symmetrie-as is van F .

- 8 Als van twee natuurlijke getallen a en b elk deelbaar is door c dan is hun k.g.v. deelbaar door c .

Bewijs. Leg steentjes van lengte a naast elkaar en leg daar bovenop een rij steentjes van lengte b .



Maak het bewijs zelf verder af.

Literatuur

Broekman, *Visualiseren helpt!*, Euclides 59, 6, p. 279.

Van Dormolen, *Aandachtspunten, de a priori analyse van leerteksten voor wiskunde bij het voortgezet onderwijs* (Bohn, Scheltema en Holkema, Utrecht 1982).

Goffree, Freudenthal en Schoemaker, *Wiskunde-onderwijs, een micro-didactische beschouwing rond begrijpen*, in : Losbladig Onderwijskundig Lexicon (Samson, Alphen a/d Rijn 1981).

Kirsch, *Beispiele für "prämathematische" Beweise*, in: Dörfler en Fischer, *Beweisen im Mathematikunterricht* (Teubner, Stuttgart 1979).

Inkonsekwente normeringen

DICK BUIJS

Kort geleden las ik ergens over wiskunde-examens de volgende regels:

‘De korrektievoorschriften bij de examens zijn soms zeer strikt en gedetailleerd. Niettemin zijn de meningsverschillen tussen 1^e en 2^e korrektor berucht.’

In het onderstaande wil ik het niet hebben over meningsverschillen die slechts een seniele tweede korrektor als oorzaak hebben, of wellicht een leraar die al te goed wil zijn voor zijn leerlingen. Het gaat mij hier om een steeds terugkerende bron van ergernis, nl. de formulering van sommige examenopgaven en hierop aansluitend een vaak inkonsekwente manier van normeren. De onderstaande voorbeelden spreken, dacht ik, wel voor zich.

vb 1 vwo wiskunde I 1982, opg. 3a

Gegeven is voor iedere $p \neq 0$ de functie $f_p(x) = 2 \ln^2 x - 2p \ln x$.

Onderzoek f_1 ; bepaal de coördinaten van het buigpunt; teken de grafiek van f_1 .

Betreffende het buigpunt merke men op dat $f_1''(x) = 0 \Rightarrow x = e^{1/2}$. Dus het buigpunt bevindt zich bij $x = e^{1/2}$. Vraag is alleen: Moet de kandidaat nagaan of bij deze x f_1'' van teken wisselt (velen vinden van wel). M.i. is gegeven dat er een buigpunt is, dus deze moet zich wel bij $x = e^{1/2}$ bevinden. Anders is de opgave fout.

vb 2 havo wiskunde 1983, opg. 1c

Gegeven is $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$. De minimale richtingscoëfficiënt (r.c.) van de raaklijn aan de grafiek van f is m .

Bereken m en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f met r.c. m .

De r.c. wordt gegeven door $f'(x) = x^2 - 4x + 3$, en $f''(x) = 0$ geeft $x = 2$. Je ziet zó dat $x = 2$ een minimum geeft. Desondanks wordt het door

sommige docenten als fout aangerekend als een tekenschema van f'' , waaruit het minimum van f' blijkt, ontbreekt.

Bovenstaande (op zich futiele) voorbeelden beschrijven hoe onenigheid kan ontstaan over enig gegeven in de opgave, waarvan sommigen willen dat de juistheid ervan ook nog eens door de kandidaat wordt aangetoond. Bij de volgende twee (minder futiele) voorbeelden geeft zo'n controle echter onoverkomelijke problemen.

vb 3 vwo wiskunde I 1983, opg. 4c

V is de verzameling differentieerbare functies f van $\langle 0, \pi \rangle$ naar $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat voor iedere x uit het domein geldt:

$$*) \quad f'(x) = f(x) + 7 \cos x + \sin x.$$

De grafiek van een element van V heeft een buigpunt op de lijn $y = 10$. Bereken de r.c. van de raaklijn aan de grafiek in dit buigpunt.

Men leide af dat $f''(x) = f(x) + 8 \cos x - 6 \sin x = f(x) + 10 \cos(x - \varphi)$, waarbij $\cos \varphi = \frac{4}{5}$ en $\sin \varphi = -\frac{3}{5}$. Uit het gegeven: f heeft een buigpunt op de lijn $y = 10$ volgt dan:

$$**) \quad f''(x) = 10 + 10 \cos(x - \varphi) = 0 \Rightarrow x = \pi + \varphi.$$

Het vervolg: $f'(\pi + \varphi) = 10 - 7 \cos \varphi - \sin \varphi = 5$, dus de gevraagde r.c. is 5, spreekt voor zich.

Een kleine komplikatie: Een kollega van mij vertelde dat één van zijn leerlingen bij **) had opgemerkt dat f'' bij $x = \pi + \varphi$ niet van teken wisselt, omdat dan $\cos(x - \varphi)$ een uiterste waarde bereikt. Vervolgens was hij maar opgehouden met de som.

Het heeft deze kollega en mijzelf geruime tijd en veel moeite gekost om erachter te komen dat het gevraagde buigpunt wel degelijk een echt buigpunt is, en dat die leerling een verkeerde konklusie had getrokken. Het bewijs ervan is echter zodanig, dat redelijkerwijs niet verondersteld kan worden dat leerlingen zoiets in hun examen vermelden (de argwanende lezer moet zelf maar eens proberen om het netjes op te schrijven).

Over deze opgave nog wat anders: Er wordt gesproken over f'' en over een buigpunt, maar is f eigenlijk wel voor iedere x tweemaal differentieerbaar? In de opgave is het niet gegeven, dus zou het bewezen moeten worden voordat je met f'' gaat rekenen. Het bewijs zelf is simpel: in *) kun je het rechterlid differentiëren omdat f volgens het gegeven (eenmaal) differentieerbaar is, en dus bestaat f'' , de afgeleide van het linkerlid. Alleen, welke kandidaat denkt eraan? Anderzijds, als men het niet controleren van het bestaan van f'' (wat immers niet gegeven is) vergoelijkt, waarom rekent men het niet controleren van het buigpunt in voorbeeld 1 (waarvan het bestaan wél is gegeven) dan fout?

Het volgende voorbeeld mag er ook wezen:

vb 4 vwo wiskunde II 1981 (2^e tijdvak), opg. 1c

In $\mathbf{R}_2$ is voor iedere reële k gegeven de lijn l_k met vergelijking $kx_1 + x_2 + k^2 = 0$. Voor iedere $a \neq 0$ en $b \neq 0$ is $A_{a,b}$ een lineaire afbeelding met matrix $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$. Een afbeelding $A_{a,b}$ beeldt elke l_k waarbij $k \neq 0$ af op zichzelf. Welke relatie bestaat er tussen a en b ?

Deze opgave is al eerder in Euclides besproken. Het antwoord had moeten zijn: $ab = 1$, maar omdat geen enkel getallenpaar a, b voldoet, zou ook het antwoord $a + b = a + b + 1$ korrekt zijn geweest. Zou de kandidaat nu echt uit zichzelf bij de berekening moeten kunnen vaststellen dat het gegeven van de opgave onmogelijk is?

De voorbeelden 3 en 4 laten toch wel duidelijk zien dat een kandidaat eventuele gegevens in een opgave gewoon moet gebruiken, en zijn verstand op nul moet zetten als hij vindt dat er iets niet klopt.

In het volgende is het echter anders:

vb 5 vwo wiskunde II 1983, opg. 1b

Gegeven zijn in $\mathbf{R}_3$ de punten $O(0, 0, 0)$, $A(-3, 6, 0)$, $B(6, 0, 6)$ en $C(9, 6, p)$. Bij een spiegeling S in een lijn s is $S(O) = B$ en $S(A) = C$. Bereken p en geef een vektorvoorstelling (v.v.) van s .

Gegeven is dat S en s bestaan, dus m.i. is de volgende oplossing goed: Bij spiegelen blijven lengtes gelijk, dus $OA = BC \Rightarrow \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{3^2 + 6^2 + (p - 6)^2} \Rightarrow p = 6$. s gaat door de middens van OB en AC , dus door $(3, 0, 3)$ en $(3, 6, 3)$. Voor s vind je dus als v.v.:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Helaas: Volgens de korrektievoorschriften moeten (afhankelijk van de manier waarop je ze interpreteert) van de 11 te behalen punten er 2, 3 of 4 punten worden afgetrokken. Men moet namelijk ook nagaan of s inderdaad goed is, d.w.z. men moet controleren of $s \perp OB \wedge s \perp AC$ geldt. (In feite hebben veel leerlingen s door het midden van OB en van AC genomen; de richtingsvektor is dan $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ \frac{1}{2}p - 3 \end{pmatrix}$, en $s \perp OB$ geeft $p = 6$. $s \perp AC$ werd hierna niet meer gecontroleerd.)

In dit voorbeeld geldt kennelijk een andere 'logika' dan in de voorafgaande twee.

vb 6 hetzelfde examen, opg. 2c

Gegeven zijn in $\mathbf{R}_3$ de punten $A(2, 0, 4)$, $B(2, 2, 4)$, $C(0, 2, 1)$ en $D(4, 1, 6)$. Bij vermenigvuldiging met faktor f t.o.v. $P(6, -3, 11)$ snijdt het beeld van het

lijnstuk AB de lijn CD . Bereken f en de coördinaten van het snijpunt.

Men lette op het woord *lijnstuk*. Wat zou de moeilijkheid zijn? Een v.v. van

$A'B'$ is $\bar{x} = \begin{pmatrix} 6 - 4f \\ -3 + 3f \\ 11 - 7f \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge 0 \leq \lambda \leq 2 \cdot |f|$. Het niet vermelden van

de voorwaarde voor λ kost twee punten. Ongeacht deze voorwaarde vindt men precies één waarde voor f , nl $f = \frac{5}{4}$ en één snijpunt $S(1, 1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4})$. Men behoeft van de normenopstellers niet meer na te gaan of S tussen A' en B' ligt. Logisch, zou je zeggen, want in het andere geval zou de opgave verkeerd zijn geweest.

Waarom dan die voorwaarde voor λ ?

Wat betreft de voorbeelden 5 en 6: als gekommitteerde (invallend voor een zieke kollega) had ik geen enkele moeite met het voorstel van de examinerator om de korrektievoorschriften te laten voor wat zij waren en goed te rekenen wat o.i. goed was. Genoemde zieke kollega, die het werk van zijn eigen leerlingen nog wel had nagekeken, had zich aanvankelijk wel aan de normen gehouden, maar op advies van zijn tweede korrektor is ook hij hiervan afgeweken.

Burgerlijke ongehoorzaamheid dus, die niet slechts voortkomt uit onze slechte inborst. Dit soort zaken vraagt erom.

Tot slot nog een voorstel tot verbetering:

Wat vindt men bij voorbeeld 5 van de volgende formulering (als men tenminste inderdaad wil dat $s \perp OB$ en $s \perp AC$ wordt gecontroleerd):

Ga na, of voor zekere p een lijn s bestaat, zodat bij spiegeling in deze lijn, O wordt afgebeeld op B , en A wordt afgebeeld op C .

Zo ja, bereken dan voor dit geval p en geef een v.v. voor s .

Of wat betreft voorbeeld 1:

Ga na dat f_1 buigpunten heeft, en bereken de coördinaten van die buigpunten (Vademecum, blz. 39).

Of anders:

Bepaal de coördinaten van het buigpunt van f_1 .

(maar dan wel in de normen de mededeling: Voor $f_1''(x) = 0$ geeft buigpunt $(e^{1/2}, 1\frac{1}{2})$, tekenschema f_1'' niet noodzakelijk, ...)

Dergelijke veranderingen lijken mij niet ingrijpend, maar nemen wel een hoop ergernis en bronnen van onenigheid weg. En de docent houdt meer tijd over voor het uitleggen van wiskunde, tijd die hij nu aan haarkloverij, cq het voorbereiden van zijn leerlingen op haarkloverij moet besteden.

Nogmaals: Oneindig min oneindig en nul maal oneindig

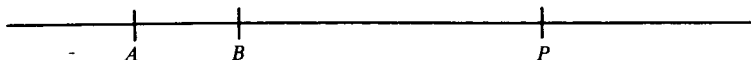
FRED PACH

In zijn artikel 'Oneindig min oneindig en nul maal oneindig' (*Euclides* 58 no. 9, p.342-344) schetst Harrie Broekman een manier om naast of in plaats van een formele verklaring een meetkundige illustratie te geven waarom $\infty - \infty$ en $0 \times \infty$ niet gedefinieerd zijn. Het gegeven voorbeeld lijkt me echter nodeloos ingewikkeld, en ik kan dan ook levendig meevoelen met de geciteerde leerling die maar liever een aardig regeltje had.

Ik zou het denk ik zo doen:

$\infty - \infty$. Als in figuur 1 P steeds verder naar rechts schuift, naderen AP en BP tot ∞ . Dus $AP - BP$ nadert tot ' $\infty - \infty$ '. Maar $AP - BP = AB$ (of $-AB$, als we B links van A gekozen hadden), onafhankelijk van P . Dus door A en B geschikt te kiezen kunnen we uit $AP - BP$ elk willekeurig getal laten komen, en ook nog wel ∞ of $-\infty$ door in plaats van het lijnstuk AP of BP de halve lijn eindigend in P te nemen.

Figuur 1



$0 \times \infty$. Het vierkant in figuur 2 knippen we horizontaal doormidden, en de twee helften plakken we naast elkaar. Dit herhalen we bij de nu verkregen rechthoek, enzovoort. Zo krijgen we een rij rechthoeken waarvan de hoogte tot 0 nadert en de breedte tot ∞ , dus de oppervlakte tot ' $0 \times \infty$ ', terwijl anderzijds de oppervlakte steeds gelijk blijft aan die van het oorspronkelijke vierkant, dat we zo groot kunnen kiezen als we willen.

Figuur 2



Nog wat opmerkingen:

- 1 Het lijkt me nuttig leerlingen er op te wijzen dat er geen wiskundig opperwezen is (met als vertegenwoordiger op aarde de wiskundeleraar) dat ons verbiedt $\infty - \infty$ te definiëren (bijvoorbeeld als 0, of 73). Het is echter geen gewoonte omdat we er doorgaans zo weinig gemak van zouden hebben: de rekenregels uit $\mathbb{R}$ gelden niet (bijvoorbeeld $\infty + 5 - \infty = \infty - \infty = 0$, maar

$\infty - \infty + 5 = 0 + 5 = 5$), en evenmin de rekenregels voor limieten (zie de volgende opmerking).

- 2 We komen in de schoolwiskunde ∞ alleen in formuleringen als $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \infty$ tegen als iets getalachtigs, iets waar je rekenkundige bewerkingen mee zou willen uitvoeren. Met name ligt het voor de hand een regel als $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ te willen ge-/misbruiken. Bij

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + 3 \right) = \infty + 3 = \infty$ valt niemand daar over. (Misschien durven sommigen de tussenstap $\infty + 3$ niet op te schrijven, maar we denken het

allemaal.) En dan wordt het verleidelijk ook te schrijven $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) =$

$\infty - \infty = 0$. Waarop je als leraar natuurlijk komt aandragen met bijvoor-

beeld $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{1}{x} + 1 \right) - \frac{1}{x} \right)$ en $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x} \right)$.

- 3 De laatste voorbeelden zullen sommige leerlingen wel overtuigen, andere zullen toch nog wel behoefte aan een plaatje hebben. Terecht benadrukt Harrie Broekman het belang van meetkundige toelichting bij algebraïsche zaken. Ongetwijfeld schort het daar vaak aan, maar een gunstige uitzondering is de meetkundige representatie van de reële getallen, inclusief optellen en aftrekken, met behulp van de getallenlijn (vergelijk mijn eerste voorbeeld). En op de vraag naar een voorstelling van het produkt van twee positieve getallen zullen veel mensen direct aan de oppervlakte van een rechthoek denken.
- 4 Een voorbeeld dat bedoeld is om leerlingen te helpen een wiskundig begrip te doorgronden moet volgens mij zo eenvoudig en voor de hand liggend zijn als mogelijk is. Ten eerste omdat de essentie de leerlingen in zo'n geval nog niet duidelijk voor ogen staat, en hun bij teveel ruis al gauw geheel ontgaat. Ten tweede omdat leerlingen liefst het idee moeten hebben dat ze zo'n voorbeeld zelf ook wel zouden kunnen verzinnen, in plaats van zich overgeleverd te voelen aan de toverkunstjes van de leraar. Ten derde omdat een belangrijk aspect van de wiskunde, het reduceren van een zaak tot het meest essentiële, zoveel mogelijk aan de leerlingen gedemonstreerd moet worden. En ten vierde omdat een voorbeeld dat op simpele wijze de essentie van een begrip laat zien, door het plotselinge inzicht sterk motiverend kan werken, en kans maakt te gaan functioneren als paradigmatisch voorbeeld, zoals Freudenthal dat noemt, een voorbeeld waar alles in samengevat is en waar je telkens weer op terug kunt vallen. Mijn voorbeelden lijken me hieraan beter te voldoen dan de oorspronkelijke.

De auteur heeft een aantal jaren op het Mathematisch Instituut van de Universiteit van Amsterdam gewerkt en is thans leraar aan de Knorringa Avondscholen Gemeenschap in Amsterdam.

De XXIVe Internationale Wiskunde Olympiade

J. VAN DE CRAATS

Bij de XXIVe Internationale Wiskunde Olympiade, die van 1 tot 12 juli 1983 in Parijs werd georganiseerd, is de Nederlandse ploeg in het landenklassement op de zevende plaats geëindigd. Aan de wedstrijd namen 186 scholieren uit 32 landen deel. Vrijwel elk land zond een team van zes deelnemers. Vier Nederlanders vielen in de prijzen: Daan Krammer uit Hengelo was één van de negen winnaars van een gouden medaille, en Victor Allis uit Aalsmeer, Daniel Tuijnman uit Arnhem en Menke Ubbens uit Sneek behaalden (samen met 24 anderen) zilver. Daan, Victor en Daniel gaan wiskunde studeren in resp. Utrecht, Amsterdam (VU) en Nijmegen, terwijl Menke nog een jaar naar school moet. De Olympiade, die plaats vond in het Lycée Louis le Grand, bestond uit twee zittingen van $4\frac{1}{2}$ uur met elk drie opgaven. De wedstrijd bleek dit jaar extra moeilijk te zijn, gezien het feit dat de helft van de deelnemers minder dan 15 punten scoorden, bij een maximum van 42. Vooral de opgaven 5 en 6 waren grote struikelblokken. Opvallend waren de verbluffend goede prestaties van West Duitsland (vier maal goud en een maal zilver), en de matige scores van traditioneel sterke landen als Tsjechoslowakije, Bulgarije, Polen, DDR, Groot Brittannië, Joegoslavië en Frankrijk.

De huisvesting van deelnemers en juryleden in het Lycée, in het centrum van Parijs, waarborgde een intensief en vriendschappelijk contact tussen alle teams. Dit werd nog extra gestimuleerd door een aantal ontvangsten, concerten, excursies (o.a. naar Versailles) en museumbezoeken. De feestelijke prijsuitreiking vond plaats op 11 juli in het Grand Amphithéâtre van de Sorbonne.

De Nederlandse ploeg is geselecteerd uit de prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1982. De training d.m.v. lesbrieven werd weer verzorgd door dr. J. van de Craats. Voor Nederland hadden zitting in de internationale jury drs. J. M. Notenboom (SOL Utrecht) en dr. J. van de Craats.

Prestaties Nederlandse deelnemers:

Opgaven:	1	2	3	4	5	6	totaal
Victor Allis	7	7	7	3	7	4	35
Ronald Beekelaar	1	2	0	7	0	0	10
Daan Krammer	6	7	7	7	7	4	38
Bart de Smit	2	0	1	0	0	1	4
Daniel Tuijnman	2	7	7	7	7	0	30
Menke Ubbens	7	0	7	7	0	5	26

Landenklassement (totaal aantal punten per land):

1 West Duitsland	212	17 Israël	96
2 USA	171	18 Joegoslavië	89
3 Hongarije	170	19 Australië	86
4 Sovjet Unie	169	20 Brazilië	77
5 Roemenië	161	21 Zweden	47
6 Vietnam	148	22 Oostenrijk	45
7 NEDERLAND	143	23 Spanje (4)	37
8 Tsjechoslowakije	142	24 Cuba	36
9 Bulgarije	137	25 Marokko	32
10 Frankrijk	123	26 Tunesië	31
11 Groot Britannië	121	27 België	26
12 DDR	117	28 Colombia	21
13 Finland	103	29 Luxemburg (2)	13
14 Canada	102	30 Algerië	6
15 Polen	101	31 Koeweit	4
16 Griekenland	97	32 Italië	2

Opgaven

Eerste dag (beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur)

- 1 Bepaal alle functies f die de verzameling van de reële getallen groter dan nul in zichzelf afbeelden, die voldoen aan de volgende voorwaarden:

- (i) $f(xf(y)) = yf(x)$ voor alle reële $x, y > 0$,
(ii) $f(x) \rightarrow 0$ voor $x \rightarrow \infty$

- 2 Gegeven zijn in het vlak twee elkaar snijdende cirkels C_1 en C_2 met ongelijke stralen en met middelpunten O_1 respectievelijk O_2 .

A is één van de twee snijpunten van de cirkels. Eén van de twee gemeenschappelijke raaklijnen raakt C_1 in P_1 en C_2 in P_2 , de andere gemeenschappelijke raaklijn raakt C_1 in Q_1 en C_2 in Q_2 .

M_1 is het midden van P_1Q_1 , M_2 is het midden van P_2Q_2 .

Bewijs: $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.

- 3 a, b en c zijn gehele getallen groter dan nul.

$\text{ggd}(a, b) = \text{ggd}(b, c) = \text{ggd}(c, a) = 1$.

Bewijs dat $2abc - ab - bc - ca$ het grootste gehele getal is dat niet geschreven kan worden in de vorm $xbc + yca + zab$ met x, y en z gehele getallen groter dan of gelijk aan nul.

Tweede dag (beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur)

- 4 Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC . E is de verzameling bestaande uit alle punten van de lijnstukken AB , BC en CA , inclusief de eindpunten.

Is het voor elke partitie van E in twee deelverzamelingen mogelijk om in minstens één van de twee deelverzamelingen drie punten te vinden die de hoekpunten vormen van een rechthoekige driehoek? Bewijs je antwoord.

(V en W vormen een partitie van E als geldt: $V \cup W = E$ en $V \cap W = \emptyset$.)

- 5 Is het mogelijk om 1983 verschillende gehele getallen te kiezen, alle groter dan nul en kleiner dan of gelijk aan 100.000, zo, dat er geen drie bij zijn die opvolgende termen zijn van een rekenkundige rij? Bewijs je antwoord.
- 6 Van een driehoek zijn de lengtes van de zijden a , b en c . Bewijs:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Bepaal wanneer het gelijkteken geldt.

Voor elke opgave kon maximaal 7 punten behaald worden. De opgaven waren afkomstig uit resp. Groot Brittannië, de Sovjet Unie, West Duitsland, België, Polen en de Verenigde Staten.

Boekbesprekingen

Prof. R. Morris (ed), *Studies in Mathematics Education*, Unesco, Parijs.

Enige tijd geleden is het plan opgevat de serie *Studies in Mathematics Education* het licht te doen zien met het doel verslag te doen van de ontwikkeling van wiskunde-onderwijs in verschillende landen en beschouwingen te geven over de plaats van de wiskunde in de huidige maatschappij. Momenteel zijn de eerste twee delen van deze serie beschikbaar.

Deel 1 gaat in op de diverse wiskunde-programma's in Hongarije, Indonesië, Japan, Filippijnen, USSR, UK, Tanzania.

In deel 2 wordt door verschillende schrijvers ingegaan op de doelstellingen van wiskunde-onderwijs, afgezet tegen behoeften van de maatschappij.

Zeer instructieve informatie waardoor men meer kijk kan krijgen op ontwikkelingen in eigen land door deze te vergelijken met die van andere delen van de wereld.

W. Kleijne

H. Meschkowski, *Unendliche Reihen*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 320 blz., DM 48,-.

Dit boekje is een heruitgave van twee eerder verschenen werken van dezelfde schrijver in dezelfde reeks over hetzelfde onderwerp. Maar het is meer dan dat: er zijn nieuwe gedeelten aan toegevoegd betreffende getaltheoretische toepassingen van oneindige produkten, reeksen van Lambert en een hoofdstuk over nieuwe ontwikkelingen in de theorie der reeksen. Op deze wijze is een zeer compleet boekje ontstaan over oneindige reeksen: reeksen met positieve termen, alternerende reeksen, dubbelreeksen, Taylor-reeksen, functie-reeksen, machtreeksen, oneindige produkten, interpolatie, Fourierreeksen, orthonormale systemen, Hilbertruimten.

In het boek zijn vele opgaven opgenomen. Achterin geeft de schrijver oplossingen en aanwijzingen daartoe.

Een zeer goed boekje, dat zeker goede diensten kan doen bij lerarenopleidingen, alsmede de propedeuse.

W. Kleijne

‘Leren reflecteren als basis van de lerarenopleiding’

HARRIE BROEKMAN

Op 25 maart 1983 promoveerde ons medelid Fred Korthagen aan de Universiteit van Amsterdam op het proefschrift met bovenstaande titel, een feit, waarmee ik hem alsnog van harte feliciteer. De auteur richt zich in hoofdzaak tot ‘leraren-opleiders’ en ‘het wetenschappelijk forum’. Dat er desondanks een artikel in dit blad aan gewijd wordt heeft niet alleen te maken met het feit dat het hier gaat om de dissertatie van een medelid. Het heeft ook te maken met het feit dat in dit boek* enkele uitspraken gedaan worden over het opleiden van wiskundeleraren die m.i. tevens voor reeds (nog?) in het onderwijs werkzaam de moeite waard zijn. De moeite waard omdat zij vragen oproepen over aspecten van het eigen functioneren als leraar, zoals een blik op de titels van een aantal hoofdstukken reeds duidelijk kan maken.

- 2 Een model voor leren
- 3 Een visie op onderwijs
- 4 De basisprincipes van het opleidingsmodel
- 5 De relatie docent/student
- 6 Het begeleiden van groepen door de docent
- 7 De integratie van de beroeps- en de vakcomponent
- 10 Het ontwikkelingsproces van de student.

Visie op onderwijs

Na een van Skemp afkomstig ‘model voor leren’ beschreven te hebben, geeft de auteur een beschrijving van een (zijn!?) visie op onderwijs die op dat model voor leren aansluit.

‘Uitgangspunt van het beschreven model voor leren is, dat het menselijk handelen (en dus ook de activiteiten van een leraar) bestuurd wordt door zgn. stuursystemen. Een belangrijk onderdeel van een stuursysteem is een cognitief schema, i.e. een georganiseerd kennisgeheel. Wanneer het individu een bepaald doel wil bereiken, dan wordt zo’n schema getransformeerd tot een actieplan. M.b.v. dit actieplan wordt, via voortdurende feedback vanuit de waargenomen actuele situatie, het handelen bestuurd. Naarmate dit meer of minder succesvol verloopt, treden positieve resp. negatieve gevoelens op. Door dergelijke gevoelens kunnen weer houdingen ontstaan.

* F. A. J. Korthagen, *Leren reflecteren als basis van de lerarenopleiding*, Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs, Flevodruk Harlingen b.v., 1982, f38,50.

Leren wordt (kortweg gezegd) opgevat als het verbeteren van stuursystemen. Een basisprincipe van het beschreven model voor leren is nu dat het verbeteren van een stuursysteem door een tweede, intern stuursysteem (delta-twee) bestuurd wordt. Verloopt het leerproces bewust, dan betekent dit dat het individu nadenkt over het functioneren van zijn stuursysteem (-emen). Dit wordt reflecteren genoemd.

D.m.v. reflectie kan het individu komen tot verbetering van zijn stuursystemen en daardoor tot verbetering van de kwaliteit van zijn handelen. De daarbij optredende fasen zijn: 1. handelen; 2. terugblikken op het handelen; 3. bewustwording van essentiële aspecten; 4. het ontwikkelen van alternatieven voor de aanpak. Hierna herhaalt de cyclus zich weer. Dit leidt derhalve tot een spiraalvormige ontwikkeling.

De basisgedachte van het in de volgende hoofdstukken uit te werken opleidingsmodel is nu, dat bij a.s. leraren het vermogen tot reflectie ontwikkeld dient te worden, zodat zij in staat zijn zichzelf (spiraalsgewijze) verder te ontwikkelen nadat zij de opleiding hebben verlaten.' (blz. 40)

'Vanuit de gedachte dat het leren van een leerling in eerste instantie bestuurd wordt door interne systemen binnen die leerling, wordt de rol van de leraar gezien als helper bij dat leren (vgl. Rogers). Dat wil zeggen dat de leraar een spiraalvormig ontwikkelingsproces (hoofdstuk 2) bij de leerling moet stimuleren: 'doen' en 'denken' (leren) dienen vervlochten te zijn. Door het doen kunnen leerbehoeften ontstaan; het leren dient weer gevolgd te worden door een fase waarin het geleerde gebruikt wordt in praktische situaties. Motivatie tot leren wordt, in navolging van auteurs als Rogers, Maslow, Brown en Combs, opgevat als iets dat van nature in het individu aanwezig is: de behoefte om de eigen stuursystemen te verbeteren is direct verbonden met de levensdrift. Er is wel benadrukt dat deze vorm van motivatie in het onderwijs vaak weinig kans krijgt. Als de leerling meer gericht is op 'overleven', dan zullen hele andere stuursystemen geactiveerd worden dan de gewenste (de leerling zal bijv. leren dát antwoord te geven dat de leraar graag wil horen in plaats van zelf na te denken).

De relatie leraar/leerling is vanuit drie gezichtspunten bekeken: als helpende relatie, als samenwerkingsrelatie en als machtsrelatie.' (blz. 70)

Opleidingsmodel

In de hoofdstukken 4 t/m 10 wordt – volgens de auteur – een model gebouwd voor de opleiding van leraren. Hierbij heeft Korthagen duidelijk het opleidingsmodel van de vakgroep wiskunde van de SOL te Utrecht voor ogen. Hierin schuilt echter de kracht én de zwakte van deze studie. Het is voor de lezer erg moeilijk om uit elkaar te houden wat de door de auteur ontwikkelde gedachten zijn, wat bij de SOL-wiskunde realiteit is en wat diverse onderwijskundigen en andere sociale wetenschappers beweren.

Anderzijds is het juist de kracht van de in dit boek beschreven ideeën dat ze de volle breedte van de opleiding tot leraar beschrijven. Dat de auteur daarbij uitgaat van een aantal vooronderstellingen moge blijken uit o.a. het volgende citaat:

'Vanuit een korte analyse van de problematiek van de beginnende leraar wordt in 4.2 het uitgangspunt van het opleidingsmodel geformuleerd, n.l. de onmogelijkheid de a.s. leraar voor te bereiden op elke situatie waar hij in zijn beroep voor kan komen te staan. Dat leidt tot het principe dat de student in de opleiding moet leren te leren van zijn ervaringen, dat hij moet leren zichzelf te ontwikkelen (4.3). Deze benadering van de student staat evenwel vaak haaks op hetgeen deze door zijn vooropleiding gewend is. Dat probleem wordt in 4.4 besproken en is de aanleiding tot de keuze voor een geleidelijkheidsstrategie (4.5).

In 4.6 komen twee belangrijke pijlers van de opleiding aan de orde: het leren kiezen en het leren reflecteren. Het zijn allebei aspecten die er een belangrijke bijdrage toe leveren dat de

student verantwoordelijkheid gaat dragen voor zijn eigen ontwikkeling. De student zal dan ook verantwoordelijkheid moeten leren dragen voor de beoordeling van zichzelf: je kunt je eigen ontwikkeling slechts sturen als je jezelf kunt beoordelen. Dit wordt nader uiteengezet in 4.7.' (blz. 73)

Het is duidelijk dat Korthagen van mening is dat 'het leren te leren van zijn eigen ervaringen' en 'het leren zichzelf te ontwikkelen' vaak te weinig aan bod komt in de vooropleiding van de studenten van de opleiding. Dit levert een tweetal problemen op.

Ten eerste moet dit 'leren van eigen ervaringen' en 'leren zichzelf te ontwikkelen' alsnog geleerd worden.

Ten tweede heeft de student mede hierdoor tijdens al die jaren van onderwijs volgen een impliciet beeld gekregen van leren en onderwijzen dat niet het enige (of zelfs juiste) beeld hoeft te zijn.

Het eerste punt komt uitvoerig aan bod met name in hoofdstuk 8. In de samenvatting daarvan lezen we:

'Opvallende onderdelen van het studieprogramma zijn vooral de eerstejaarscursus onderwijskunde I, die gericht is op het leren reflecteren op het eigen functioneren en het minischoolpracticum dat veel kenmerken van een supervisie-situatie heeft (een aanpak die in de nabije toekomst waarschijnlijk meer gebruikt zal gaan worden in de schoolpractica). Bij dergelijke studie-onderdelen is erg duidelijk de basisvisie op de opleiding terug te vinden: het leren reflecteren en de voorbereiding op een zelfstandige verdere ontwikkeling. Verder is duidelijk gemaakt hoe de aandacht gedurende de eerste twee studie jaren verschuift van het eigen leren en functioneren naar helpen leren, en welke rol de groep medestudenten daarbij speelt.

Logboeken en individuele gesprekken vervullen een belangrijke functie bij het leren reflecteren. Bij deze elementen uit de opleiding komt het hulp- en samenwerkingsaspect van de relatie docent/student nog eens duidelijk naar voren. Dat geldt ook voor de beoordeling binnen de beroepscomponent: dit is een zaak van de student en de docent(en) samen. Het 'leren jezelf te beoordelen' is dan ook een wezenlijk aspect van een opleiding waarin het leren reflecteren centraal staat.' (blz. 156-157)

Op het tweede punt gaat de auteur impliciet in, zoals o.a. uit het volgende citaat uit de beschrijving van de plaats van de stage moge blijken.

'Men dient echter te beseffen dat het risico van een te vroege stageperiode is, dat de student nog nauwelijks geleerd heeft na te denken over zichzelf (in onderwijssituaties) en zijn aandacht dan ook snel richt op externe factoren ('de omstandigheden': de leerlingen, de schoolstructuur, etc.). Hij kan deze externe factoren dan gemakkelijk gaan zien als enige relevante verklaring voor zijn eigen functioneren. Het is m.i. ook niet verbazingwekkend als een student zich dan snel aanpast aan de opvattingen, rolpatronen e.d. op zijn stageschool. Er is immers een zekere mate van bewustheid en zelfstandigheid vereist om je als student of aankomend leraar te kunnen verzetten tegen de enorme druk die van het bestaande systeem uitgaat.' (blz. 135)

Visie op wiskunde

Maatschappelijke ontwikkelingen, ontwikkelingen in leer- en ontwikkelingspsychologie én ontwikkelingen in de vakdidactiek hebben het denken over wiskunde en wiskunde-onderwijs flink op gang gebracht. Mede hierdoor worden de

opleiders van wiskundeleraren veelvuldig gedwongen keuzes te maken t.a.v. doelstellingen, leerstofinhouden, etc.

Korthagen zegt bij de beschrijving van de SOL-wiskunde opleiding hierover o.a. het volgende.

'Binnen de vakcomponent zijn een aantal meer traditioneel opgezette cursussen blijven bestaan, waarin wiskunde meer als 'created subject' dan als 'subject to be created' (vgl. 9.4.2.) wordt gepresenteerd. Gedeeltelijk is dat het gevolg van het feit dat het docentteam niet goed zou weten hoe je een gehele wiskunde-opleiding vanuit de laatstgenoemde benadering zou kunnen opzetten en of zo'n aanpak eigenlijk wenselijk zou zijn. Gedeeltelijk is het een bewuste keuze geweest om ook afgeronde stukken wiskunde aan te bieden. Het leek niet juist om de ene visie op wiskunde zonder meer in te wisselen voor een andere. Wiskunde heeft verschillende gezichten, voor a.s. leraren is het goed die te leren kennen. Daar komt bij dat de meer IOWO-achtige benadering van het vak nog lang niet kenmerkend is voor de huidige schoolwiskunde, al zijn er duidelijke verschuivingen waar te nemen.

In dit verband is een kritische kanttekening m.b.t. de huidige opzet van de vakcomponent op z'n plaats. Wat wellicht te weinig structureel als studie-onderdeel is opgenomen, is een bezinning op wiskunde als vak, het ontwikkelen van een visie op (school)wiskunde. Dit lijkt, juist gezien de huidige ontwikkelingen in de wiskunde op school, heel belangrijk voor a.s. wiskunde leraren. Aanvankelijk werd ook te weinig aandacht besteed aan de schoolwiskunde zelf, m.n. aan de inhoud van meer traditionele wiskundemethodes, en aan de samenhang in en achtergronden van de schoolwiskunde. In de laatste paar jaren zijn nieuwe cursussen ontwikkeld om dit manco op te heffen. Toch blijft ook binnen de vakcomponenten de moeilijkheid voelbaar die algemener een rol speelt binnen de opleiding van leraren, n.l. de spanning tussen enerzijds idealen en ontwikkelingen in het onderwijs en anderzijds de (in ieder geval gedeeltelijk) nog vrij traditionele praktijk in de school. Die spanning kan wellicht het best verkleind worden door de aandacht te richten op de vraag hoe de leraar die op een minder progressieve school en met een traditionele methode werkt, zelf andere elementen in zijn lessen kan inbouwen.' (blz. 171)

Het is duidelijk dat de auteur de spanning wil aangeven tussen ideaal en werkelijkheid; waarbij hij gelukkig niet vergeet dat het ideaal van de een niet hetzelfde hoeft te zijn als dat van een ander. Enkele pagina's eerder heeft Korthagen echter wel duidelijk gemaakt dat wiskunde voor hem niet alleen een denk-vak is, maar ook een doe-vak. Een vak waaraan je plezier kunt beleven, maar ook een vak waartegen je weerzin kunt hebben.

'Door de reflectie op de eigen manier van werken aan en leren van wiskunde komt tevens aan het licht dat wiskunde niet alleen een denk-vak is, maar ook een doe-vak (9.4.3.) en een vak waarin gevoelens en houdingen een wezenlijke rol spelen. Bij het laatste kan men denken aan factoren als lol in wiskunde, weerzin tegen een bepaald vraagstuk, twijfel, de neiging om zich vast te bijten in een opgave, plezier in samen-bezig-zijn, vreugde bij plotseling doorbrekend inzicht, etc. Het is uiterst belangrijk dat a.s. leraren gevoelig worden voor de vaak grotere betekenis van dergelijke affectieve aspecten van leerprocessen.' (blz. 166)

Het staat niet dik onderstreept of roodomlijnd in Korthagen's proefschrift, maar desondanks meen ik telkens weer een stukje optimisme te lezen over wat er in de opleiding allemaal gedaan kan worden. Daarnaast lees ik – tussen de regels – optimisme over de mogelijkheden van het door LBO- en AVO-leerlingen beter leren reflecteren. Dit laatste zou m.i. beslist nader uitgewerkt dienen te worden.

Er valt nog veel te doen

Dat in dit boek van 300 pagina's veel te lezen valt voor lerarenopleiders moge uit voorgaande opmerkingen en citaten duidelijk zijn. Door de gekozen uitgangspunten én de wijze van verbanden leggen is kritiek op de inhoud wel degelijk mogelijk. Desondanks hoop ik dat Fred Korthagen tijd en gelegenheid zal vinden om een aantal van de door hem beschreven aspecten – mét veel voorbeelden – nader uit te werken voor een ander lezerspubliek: n.l. leraren wiskunde.

Misschien dat hij dan ook zijn schema op pag. 25 ($x^2 + 2x = 3$ oplossen via resp. ontbinden, kwadraatafsplitsen, abc-formule) wil aanvullen met oplossingsmethoden waarbij de grafiek een rol speelt, of waarbij substitutie een rol speelt (Babylonische methode).

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

507. *A* heeft de zes zijvlakken van een kubus elk op de volgende manier half zwart half wit gekleurd.



Hij vraagt *B* de kubus neer te zetten zo, dat hij alleen het bovenzvlak kan zien. Hij is daarna in staat te vertellen, hoe de overige vijf zijvlakken in een witte en een zwarte helft verdeeld zijn.

Op welke wijze heeft hij de zes verdelingen aangebracht?

(Aaron J. Friedland, *Puzzles in Math and Logic*, 100 new Recreations, Dover)

508. *A* en *B* doen het volgende spel. Opgeschreven zijn de getallen 1 tot en met 50. *A* kiest een van deze getallen en schrapt alle delers daarvan door. Daarna kiest *B* een nog niet doorgeschrapt getal. Hij schrapt alle nog niet doorgeschrapte delers ervan door. Enzovoorts. Wie het laatste getal doorschrapt, heeft gewonnen.

Wie wint bij optimale strategie?

509. Eén rood en drie witte bolletjes worden bevestigd in vier hoekpunten van een kubus. De bolletjes kunnen langs de ribben verschoven worden. *A* begint met de rode bol langs een ribbe te verschuiven naar een nog onbezet hoekpunt. Daarna verschuift *B* een van de witte bolletjes. Enz. De bedoeling van *B* is de rode bol vast te zetten, de bedoeling van *A* dit niet te doen gebeuren.

De beginstand wordt door het lot bepaald. Analyseer dit spel.

Oplossingen

504. A en B kaarten met de volgende regels:

- a als iemand met een bepaalde kleur uitkomt, moet de ander dezelfde kleur bijspelen zo mogelijk en anders mag hij bijspelen wat hij wil;
- b wie een slag wint, komt de volgende slag uit;
- c één van de kleuren is troef.

Gegeven is:

- 1 A heeft schoppen, schoppen, harten, ruiten;
B heeft schoppen, harten, klaver, klaver.
- 2 Elke speler komt twee keer uit.
- 3 Elke speler wint twee slagen.
- 4 Geen enkele slag worden twee kaarten van dezelfde kleur gespeeld.
- 5 Elke slag wordt met een andere kleur uitgekomen.

In de hoeveelste slag werd geen schoppen gespeeld?

Wegens 2 en 3 zijn er de volgende mogelijkheden (u = komt uit, w = wint de slag):

I	II	III
X u, w	X u Y w	X u Y w
X u Y w	Y u, w	X w Y u
Y u, w	X w Y u	X u Y w
X w Y u	X u, w	X w Y u

Uit 4 volgt: als de een uitkomt en de ander de slag wint, is er getroefd.

In geval III is er dus vier keer getroefd. Dit is in strijd met 1.

In geval I en in geval II is er twee keer getroefd. Volgens 5 is er één keer met troef uitgekomen. Volgens 1 is dan schoppen troef.

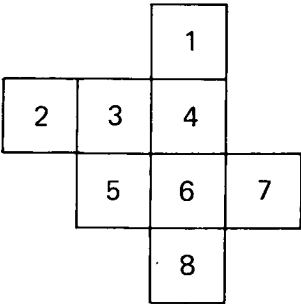
In geval I wordt wegens 4 de eerste slag geen troef gespeeld. De tweede en de vierde slag wordt getroefd. Volgens 5 wordt de derde slag met troef uitgekomen. Omdat X in de vierde slag troeft, heeft hij in de derde slag nog een troef. Dit kan niet volgens 4.

Blijft over geval II. In de derde slag wordt door X getroefd. In de tweede slag wordt door Y dus niet met schoppen uitgekomen. Ook wordt in deze slag niet getroefd. In de tweede slag wordt dus geen schoppen gespeeld.

Er zijn twee realisaties:

X = A	Y = B
r	s
h	k
s	k of h
s	h of k

505. Acht kaartjes zijn zo gerangschikt:



Gegeven is:

- 1 Er zijn twee azen (a), twee heren (h), twee vrouwen (v) en twee boeren (b).
 - 2 Elke aas grenst aan een heer.
 - 3 Elke heer grenst aan een vrouw.
 - 4 Elke vrouw grenst aan een boer.
 - 5 Geen twee gelijksoortige kaarten grenzen aan elkaar.
- Gevraagd: wat is kaart nr. 6?

Aan de meeste conclusies ligt 1 ten grondslag. Dit is niet vermeld.

$$6 = b \Rightarrow 7 = 8 = v \quad (2, 3, 5) \Rightarrow \text{contradictie (3)}$$

$$6 = a \Rightarrow 7 = 8 = b \quad (3, 4, 5) \Rightarrow \text{contradictie (4)}$$

$$6 = v \Rightarrow 7 = 8 = b \vee 7 = 8 = h \vee ((7 = b \wedge 8 = h) \vee (7 = h \wedge 8 = b)) \quad (2, 5)$$

$$7 = 8 = b \Rightarrow \text{contradictie (4)}$$

$$7 = 8 = h \Rightarrow \text{contradictie (2)}$$

$$(7 = b \wedge 8 = h) \vee (7 = h \wedge 8 = b) \Rightarrow \text{de twee azen grenzen aan dezelfde heer (2)}$$

Hieruit resulteren de volgende drie mogelijkheden:

$$2 = 5 = a \wedge 3 = h \Rightarrow 4 = v \quad (3) \Rightarrow \text{contradictie (5)}$$

$$4 = 5 = a \wedge 3 = h \Rightarrow 2 = v \quad (3) \Rightarrow \text{contradictie (4)}$$

$$1 = 3 = a \wedge 4 = h \Rightarrow 2 = v \quad (5) \Rightarrow \text{contradictie (4)}$$

Blijft over $6 = h$.

De enige twee realisaties zijn:

h	h
$v \ b \ v$	$v \ b \ v$
$a \ h \ b$	$a \ h \ a$
a	b

506. A , B en C hebben elk precies drie van de volgende kwaliteiten: knap, sterk, geestig, intelligent en pathetisch.

Gegeven is:

- 1 Twee zijn knap, twee sterk, twee geestig, twee intelligent en één is pathetisch.
- 2 Als A geestig is, dan is hij knap:
als A knap is, dan is hij niet intelligent.
- 3 Als B geestig is, dan is hij intelligent:
als B intelligent is, dan is hij knap.
- 4 Als C knap is, dan is hij sterk:
als C sterk is, dan is hij niet geestig.

Voor A geldt:

geestig en niet knap zijn onverenigbaar:

knap en intelligent zijn onverenigbaar.

In onderstaand schema is dit aangegeven door in de hokjes A_k en A_g links boven een 0 resp. een 1 te zetten en in de hokjes A_k en A_i rechts onder een 1.

Op analoge wijze zijn cijfers gezet in de hokjes onder B en C .

	A	B	C
k	0		1
s	1	0	
g			0
i	1	1	
p			1

We kijken eerst naar de derde rij hokjes. Er zijn drie mogelijkheden:

A en B zijn geestig, A en C zijn geestig, B en C zijn geestig. (1)

I A en B zijn geestig. Afgekort: $Ag \wedge Bg$.

$Ag \wedge Bg \Rightarrow \neg Cg$ (1)

$Ag \Rightarrow Ak$ (2)

$Bg \Rightarrow Bi$ (3)

$Bi \Rightarrow Bk$ (3)

$Ak \wedge Bk \Rightarrow \neg Ck$ (1)

$\neg Cg \wedge \neg Ck \Rightarrow Cp$

II $Ag \wedge Cg$

$Cg \Rightarrow \neg Cs$ (4)

$\neg Cs \Rightarrow \neg Ck$ (4)

$\neg Cs \wedge \neg Ck \Rightarrow Cp$

III $Bg \wedge Cg$

Als II.

Dus: C is pathetisch.

Enig mogelijke realisaties:

	A	B	C
k	1	1	0
s	1	0	1
g	1	1	0
i	0	1	1
p	0	0	1

	A	B	C
k	1	1	0
s	1	1	0
g	1	0	1
i	0	1	1
p	0	0	1

Boekbesprekingen

R. G. Bartle, D. R. Sherbert, *Introduction to real analysis*, John Wiley and Sons, Chichester, 370 blz., £21.40.

In het voorwoord van dit boek constateren de schrijvers dat er behoefte bestaat aan een goed toegankelijk maar toch gedegen werk over de analyse. Speciaal vanwege het feit dat in de gebieden van de sociale wetenschappen, de economie en managementstudies een goede kennis van reële analyse onontbeerlijk is.

Het vanuit deze gedachte geschreven boek is een werk geworden dat op vrij traditionele wijze de analyse presenteert. Een boek qua opzet en inhoud te vergelijken met het bekende leerboek der analyse van prof. Kuipers. Ook de moeilijkheidsgraad is hiermee zeer nauwkeurig aangegeven. Vele opgaven zijn in het boek opgenomen. Voor een aantal hiervan zijn achterin aanwijzingen voor oplossing en antwoorden gegeven.

W. Kleijne

H. P. Gumm, W. Poguntke, *Boolesche Algebra*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 95 blz., DM 12,80.

Dit boekje wil een inleiding zijn in de theorie en toepassing van de Boolese algebra. Uitgaande van schakelingen en schakelalgebra, het rekenen met verzamelingen en de propositielogica komen de schrijvers tot de definitie van Boolese algebra, die vervolgens nader op zijn eigenschappen wordt onderzocht. Daarna komen nogmaals de algebra van schakelingen en de toepassing in de logica ter sprake.

Nadere theoretische overwegingen over Boolese ringen en algebra's, waaronder ordeningen, homomorfismen, isomorfismen, filters op een Boolese algebra, de stelling van Stone sluiten het boekje af. Het boekje is voorzien van 39 opgaven, waarvan de oplossingen achterin zijn opgenomen. Een literatuurlijstje, een zaakregister en een lijst met symbolen completeren het geheel.

Het is bestemd voor studerende in de wiskunde, de informatica, de natuurkunde en de ingenieurswetenschappen.

W. Kleijne

W. Ledermann (ed), *Handbook of applicable mathematics, vol. IV, Analysis*, John Wiley & Sons, Chichester, England, 865 blz., £ 27,50.

Voor ons ligt het vierde deel van het handboek van toepasbare wiskunde. De eerste drie delen zijn al eerder in Euclides besproken. Dit, aan de analyse gewijde deel, is van dezelfde indrukwekkende kwaliteit als de andere delen. De formule, volgens welke dit boek is samengesteld, is dezelfde gebleven. Ik moge daarvoor verwijzen naar de eerder verschenen besprekingen. Om een indruk te geven van het brede scala waarover dit boek zich uitstrekt zal ik hier volstaan met een opsomming van de behandelde onderwerpen:

sequences and series; functions of one (real) variable; differential calculus; integral calculus; functions of several (real) variables; multiple integrals; ordinary differential equations; functions of a complex variable; special functions; metric spaces; calculus of variations; integral transforms; mathematical modelling; non-linear programming; dynamic programming; classical mechanics; stochastic differential equations; functional analysis; Fourier series; inequalities.

W. Kleijne

H. Lüneburg, *Vorlesungen über Analysis*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 457 blz., DM 48, —.

Zoals de titel van dit boek aangeeft bestaat dit werk uit een verzameling college-voordrachten op het gebied van de analyse. We hebben hier geen samenhangend, systematisch leerboek waarbij het bouwwerk van de analyse vanaf de fundamenteen wordt opgetrokken. Dit boek geeft in 82 hoofdstukjes afgeronde analyse-onderdelen. Als zodanig is het een bijzonder geschakeerd, gevarieerd en rijk boekwerk geworden.

Rijen, reeksen, machtrekken, topologische vectorruimten, een stelling van Ostrowski, differentieerbaarheid, p-norm, partiële integratie, Betafunctie, complexe logaritme, kringintegraal in het complexe vlak, integratie over meetbare verzamelingen, vormen enige van de vele onderwerpen.

De meeste hoofdstukken worden afgesloten met enige opgaven. Het boek wordt besloten met een literatuurlijstje, een lijst van symbolen en een index.

Al met al een zeer gedegen boekwerk op het zo uitgebreide terrein van de analyse.

W. Kleijne

Jan Everink, *De Informatiemaatschappij*, Uitgeverij Academic Service, Den Haag, 247 blz., f 32,50.

Het door Academic Service gepubliceerde persbericht stelt:

'Dit boek geeft een duidelijke inhoud aan het zo in de belangstelling staande begrip informatiemaatschappij. Door de leesbare stijl is de tekst ook voor niet-deskundigen goed te begrijpen. Toch wordt

nergens afbreuk gedaan aan het uitgangspunt van een technisch/wetenschappelijk verantwoorde behandeling.

In het eerste hoofdstuk wordt gesteld dat de behoefte aan informatie de meest fundamentele en onverzadigbare van alle menselijke behoeften is. Deze informatiebehoefte vormde de stimulans tot de ontwikkeling van de informatietechnologie.

In hoofdstuk 2 wordt deze technologie, waartoe worden gerekend het schrijven en drukken, het vastleggen en weergeven van geluid, de fotografie, film en video, de computertechniek, geheugentechniek en telecommunicatie, in vogelvlucht bekeken. De principes van de huidige techniek worden tegen hun historische achtergrond beschreven.

Het derde hoofdstuk behandelt de informatie-industrie. Met nadruk wordt gewezen op de economische mogelijkheden. Deze mogelijkheden kunnen de Nederlandse economie weer tot bloei brengen, mits de overheid een aantal (met name genoemde) belemmeringen wegneemt, zo stelt de auteur.

Hoofdstuk 4 wijst op de gevaren die dreigen indien de informatietechnologie slechts in handen is van enkelen. Het gebruik van de computer om de menselijke vrijheid te onderdrukken wordt onder de aanduiding digicratisme behandeld. Tevens worden de overdreven verwachtingen ten aanzien van de zogenaamde artificial intelligence aan een kritische beschouwing onderworpen.

In het laatste hoofdstuk wordt een blik in de toekomst geworpen, waarbij wordt getracht een beeld te krijgen van het leven in de informatiemaatschappij rond het jaar 2000.

Naast nuttig feitenmateriaal geeft dit boek een analyse van het verschijnsel informatiemaatschappij, alsmede vele nuchtere doch oorspronkelijke ideeën en voorstellen. Het kan een waardevolle bijdrage leveren tot de meningsvorming van een ieder die de toekomst van onze samenleving ter harte gaat.'

Bij dit alles sluit ik mij van harte aan. De schrijver lijkt met dit boek mede de bedoeling te hebben de ogen van velen, m.n. in onze Nederlandse samenleving, te openen. Hij voert een warm pleidooi voor het ontwikkelen en het verder uitbouwen van datgene wat met informatietechnologie te maken heeft. Slechts daardoor ziet hij overlevingskansen voor onze cultuur en blijvend herstel van onze economie. Het boek lijkt mij een 'must', in het bijzonder ook voor docenten (en niet alléén in de Wiskunde) bij het voortgezet onderwijs.

W. Kleijne

Bedrijfs(kundige) informatica opleiding

Leerplan en beschouwingen over het onderwijs in de bestuurlijke informatica en het appreciatie onderwijs aan het HEAO, WIHBO uit.: Academic Service ISBN 90 6233 073 8.

In dit rapport van het BIO-team (Bedrijfsinformatica Opl.), een werkgroep van de commissie Wiskunde en Informatica bij het HBO (WIHBO) worden de ervaringen van de zgn. BIO opleidingen aan de HEAO's geëvalueerd en wordt een nieuw leerplan voor deze opleidingen voorgesteld. Het rapport is bestemd voor hen die werken met de (bedrijfskundige) informatica, voor het onderwijsveld en voor de beleidsvoorbereiders en de beleidsuitvoerders.

Naast het HIO (Hoger Informatica Onderwijs verbonden aan de HTS'en) dat zich voornamelijk met de technische kant van de computer bezig houdt, is er een grote behoefte aan functionarissen die zich met de toepassing van de computer bezig houden, de bedrijfskundige informatici. De BIO opleiding voorziet in deze behoefte; zij leidt geen computerspecialisten op, maar is afgestemd op de eisen die gesteld worden aan functionarissen, die belast worden met het opzetten van informatiesystemen in organisaties. M.a.w. 'deskundigen op het gebied van ontwikkeling (analyse en ontwerp) van informatiesystemen in het bijzonder ten behoeve van de behandeling van economische en administratieve problemen voorkomend uit het besturen van organisaties.'

Dit leidt tot het volgende profiel van de opleiding: informatiesystemen 25%, bedrijfseconomie en organisatiekunde 25%, computer gerichte vakken 25%, wiskunde 10%, algemeen 15% en 10% voor vrije beleidsruimte (door de scholen zelf in te vullen).

De opleiding duurt nominaal 4 jaar (3,2 jaar studie + 9 maand stage). De vereiste vooropleiding is op dit moment HAVO met 2 van de 3 volgende vakken: handelswetenschappen/economie/wiskunde. De werkgroep stelt voor dit te wijzigen in: wiskunde of handelswetenschappen om de instroom te vergroten.

Recente onderzoeken bij het bedrijfsleven hebben aangetoond, dat er in Nederland een groot te

kort is aan informatici. Er zal in de komende jaren een soort 'inhaal manoeuvre' moeten plaats vinden om bij te blijven met de ontwikkelingen in het buitenland. De informatica is een van de terreinen, waarop voorlopig nog voldoende werkgelegenheid zal blijven. De eisen aan informatici zijn echter hoog. Om zijn werk goed te kunnen doen, moet hij/zij in structuren kunnen denken. Dit vormt ook het zwaartepunt van de opleiding en daarom wordt de opleiding nogal eens als moeilijk gekwalificeerd.

Het boek lijkt mij een zeer goede informatie-bron voor schooldecanen en leraren in de economische of exakte vakken. Het geeft een goed inzicht in wat er op HBO niveau – bij gebrek aan een volwaardig academisch alternatief – geboden wordt aan opleidingen op informatica gebied.

E. H. Dürr

W. Pijls, *Programmeeropgaven 1*, 68 blz., f 14,50; *Uitwerkingen in BASIC*, 87 blz., f 12,50 Educaboek.

Er verschijnen veel boeken op dit moment waarvan de titels informatica voor het voortgezet onderwijs suggereren. Een vlag die niet altijd de lading, een cursus programmeren, blijkt te dekken. Het boekje van Pijls valt in de eerste plaats op door zijn oprechte titel. Het bevat maar liefst 135 opgaven tot het maken van computerprogramma's. Het opstellen en verwerken van deze programma's zal toch wel degelijk stilzwijgend begrip voor bepaalde kanten van de informatica aanbrengen.

In de tweede plaats springt het boekje eruit door het ontbreken van theorie. Daarmee is de mogelijkheid opgehouden om met andere programmeertalen te werken dan het BASIC van het uitwerkingenboekje. De schrijver pretendeert echter niet taalonafhankelijk te zijn en ook dat is eerlijk. Men zal geen problemen aantreffen die een beroep doen op andere taalelementen dan van minimaal BASIC, zoals bijvoorbeeld procedures met parameters, recursiviteit of bestanden. Evenmin wordt een aanpak met stapsgewijze verfijning verondersteld. Het cijfer 1 in de titel mag doen vermoeden dat er nog een vervolg op komst is, waarin mogelijk andere technieken worden verondersteld.

Het boek bevat twee secties, waarvan de eerste de 'études voor het spelen' met bepaalde taalelementen bevat. De tweede sectie past deze vaardigheid toe op problemen van overwegend wiskundige aard.

De uitvoering van het boekje is sober en toch uiterst smaakvol, waardoor het niet alleen uiterst prettig oogt maar ook werkt.

Zelden zult u op dit terrein een zo uitgebreide vraagstukkenverzameling aantreffen. Voor het onderwijs in programmeren bijzonder aanbevolen en voor elke docent wiskunde een bijna verplicht bezit.

G. A. Vonk

Mededelingen

Onder de auspiciën van het Wiskundig Genootschap, Twintigste Nederlands mathematisch congres, Groningen 24 en 25 april 1984

Programma

Aangemelde voordrachten

Themasessies met inleidende voordrachten:

- Algebraïsche meetkunde (F. Oort)
- Analyse (D. Terman)
- Dynamische systemen
- Numerieke wiskunde (A. van der Sluis)
- Wiskunde en informatica (P. van Emde Boas)

Symposium wiskunde in het onderwijs

- Inleidende voordracht (A. van Streun)
- Themasessie Didaktiek van de wiskunde
- Themasessie Computers op school

Slotvoordracht door M. S. Keane over Biljart reflecties

Uitreiking van de *Brouwer medaille* aan J. Moser, die de *Brouwer lezing* zal houden. J. J. Duistermaat zal een inleiding geven over het werk van Moser.

Microcomputer demonstraties, boek exposities, films over wiskundigen, enz.

206 de Jaarvergadering van het Wiskundig Genootschap.

Aanmelding en kosten.

Het congresgeld bedraagt f20, — voor leden WG, f30, — voor niet leden en f10, — voor studenten. De prijs voor de lunch is f10, — per keer. U kunt zich als deelnemer opgeven bij ondergetekende onder gelijktijdige overmaking van de kosten op girorekening 826171, t.n.v. Rijksuniversiteit Groningen (onder vermelding van nr 994306/59200)

J. Kamp, Secretaris Congrescommissie, Mathematisch Instituut, Postbus 800,
9700 AV Groningen, Telefoon 050-11 76 77

Oproep t.b.v. schoolbibliotheek

Een aantal jaren geleden hebben er in Euclides een aantal lijsten, opgesteld door D. Leujes, met aanbevolen boeken gestaan voor de leerlingen(wiskunde)bibliotheek en voor een leraren(wiskunde)bibliotheek (Euclides 35, 1959/1960, blz. 335; Euclides 36, 1960/1961, blz. 241-245; Euclides 43, 1967/1968, blz. 329-332). Uit vragen blijkt dat er behoefte bestaat aan een nieuwe lijst. Ik wil die graag opstellen. Daarvoor heb ik hulp van collega's nodig.

Wil ieder die over een schoolcatalogus beschikt, of aanbevelingen heeft, die aan mij opsturen? Ik zal t.z.t. een nieuwe lijst aan Euclides ter publicatie aanbieden.

Graag vermelding van *auteursnaam met voorletters, volledige boektitel, uitgever, jaar van uitgifte*. Zo mogelijk ook erg graag: *aantal bladzijden* en een aanduiding van de *moeilijkheidsgraad* (bijv.: geschikt voor goede havo-5-leerling).

Opsturen naar: Dr. J. van Dormolen, Ped.-Did. Inst. v.d. Lerarenopl., Heidelberglaan 2, Utrecht.
Voor een enkel boek is telefonische opgave ook mogelijk: 030-35 37 76

De staatssecretaris van onderwijs en wetenschappen

Besluit:

Artikel 1

Er is een werkgroep ter voorbereiding van een wijziging van het eindexamenprogramma wiskunde en havo en van de in verband daarmee wenselijke wijziging van het leerplan wiskunde van de rijksscholen voor havo.

Artikel 2

In de werkgroep hebben zitting:

Als lid en voorzitter: W. Kleyne, Rector Nutsseminarium te Amsterdam;

Als lid en secretaris: H. N. Schuring te Arnhem.

Als leden:

Drs. W. H. M. Kremers te Heteren; Mw. Drs. N. C. Verhoef te Zwolle; A. Roodhardt te Dokkum;
Drs. D. Kok te Amsterdam; Drs. S. A. Muller te Apeldoorn; J. Siemons te Maartensdijk; Ir. L. C. M. Timmermans te Almelo; A. Algra te Almere.

Als waarnemers:

Namens inspectie VO/AV: Drs. B. J. Westerhof te Arnhem

Namens SLO: H. Krabbendam te Berkel-Enschot

Namens Begeleidingscommissie HEWET-project: Dr. J. van Dormolen te Utrecht, M. Kindt te Utrecht.

Artikel 3

De werkgroep brengt niet later dan 1 juli 1985 haar eindadvies uit. De Werkgroep rapporteert éénmaal per jaar over de voortgang van de werkzaamheden.

Artikel 4

De werkgroep houdt bij haar arbeid rekening met de eisen, die het hoger beroepsonderwijs en het bedrijfsleven stellen.

Artikel 5

In verband met de doorstroming van HAVO-abituriënten naar het vwo dient de werkgroep kennis te nemen van de – thans bij experiment beproefde – nieuwe eindexamenprogramma's vwo wiskunde A en vwo wiskunde B.

Met de begeleidingscommissie t.b.v. het Hewet-project wordt overleg gepleegd.

Artikel 6

Het advies van de werkgroep gaat vergezeld van uitgewerkte nieuwe examenprogramma's.

In het advies vermeldt de werkgroep tevens

- a) m.i.v. welk examenjaar volgens het nieuwe programma (programma's) zou kunnen worden geëxperimenteerd;
- b) of her- en bijscholing vooraf der leraren/examinatoren wenselijk is en, in bevestigend geval, van welke omvang deze zou moeten zijn;
- c) of zij van oordeel is dat aan de invoering van het nieuwe programma een experimentele fase moet voorafgaan en of de begeleiding van de leraren/examinatoren in die fase gewenst is;
- d) de werkgroep schenkt – in het kader van het onderwijs emancipatiebeleid aandacht aan de wenselijkheid, dat het vak wiskunde in de toekomst meer dan thans door meisjes wordt gevolgd. Met betrekking tot het leerplan voor de rijksscholen gaat de werkgroep na of dat leerplan bepaalde aanwijzingen moet bevatten, waaraan iedere rijksschool bij het opstellen van haar schoolwerkplan, bedoeld in artikel 30 en navolgende van het Reglement rijksscholen voor vwo-havo-mavo-lbo, aandacht moet geven.

Artikel 7

Indien hij zulks in het belang van de uitvoering van de aan de werkgroep opgedragen taak nodig oordeelt, kan de voorzitter

- a) subgroepen met een deeltaak instellen, waarvan hij een der leden met het voorzitterschap en een met het secretariaat belast en
- b) anderen dan de in artikel 2 genoemden door de werkgroep of een subgroep doen raadplegen.

Artikel 8

De leden, waarnemers en secretaris van de werkgroep genieten evenals de in artikel 7 onder bedoelde anderen, vergoeding van reis- en verblijfkosten volgens het Reisbesluit 1971.

Deze beschikking treedt in werking m.i.v. 1 januari 1984.

Afschrift ervan wordt verzonden aan de Algemene Rekenkamer en aan belanghebbenden.

De staatssecretaris van onderwijs en wetenschappen, (w.g. drs. N. J. Ginjaar-Maas).

Kalender

(zie voor nadere informatie ook altijd de 'mededelingen' hiervoor en in voorafgaande nummers).

woensdag 14 maart 1984: bestuursvergadering NVvW, Utrecht

13-16 maart 1984: Bundestagung für Didaktik, Oldenburg, Duitsland

20-24 maart 1984: Internationale Lehrmittelmesse DIDACTA 84, Basel, Zwitserland

zaterdag 24 maart 1984: 9de gemeenschappelijke studiedag NVvW-VVWL, Breda

zaterdag 31 maart 1984: 6e landelijke dag van de groep Vrouwen en Wiskunde. Contactadres Sylvia van de Werf 020-73 17 62

woensdag 4 april 1984: bestuursvergadering NVvW, Utrecht

v.a. 10 april 1984: cursus Burgerinformatica, COI, Enschede

dinsdag 24 en woensdag 25 april 1984: 20e Nederlands Mathematisch Congres, Groningen

vrijdag 11 mei 1984: examenbesprekingen HAVO-VWO I

maandag 14 mei 1984: examenbesprekingen VWO II

dinsdag 15 mei 1984: examenbesprekingen LBO-c, MAVO-c en -d

woensdag 16 mei 1984: bestuursvergadering NVvW, Utrecht

zomervakantie 1984: CWI-cursus

Wolters' woordenboeken De taal van deze tijd

- Actueel en compleet
- Overzichtelijk ingedeeld
- Duidelijke omschrijvingen
- Linnen band met stofomslag

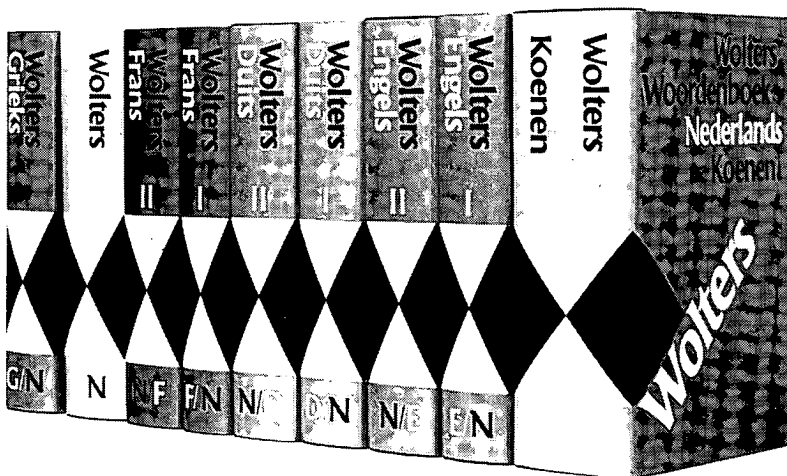
Wolters' woordenboeken

- Nederlands (Koenen)
- Frans (F-N en N-F)
- Duits (D-N en N-D)
- Engels (E-N en N-E)
- Latijn
- Grieks

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij



Wolters-Noordhoff bv,
Postbus 58,
9700 MB Groningen.



INHOUD

Gelukwensen aan Joh. H. Wansink, ereid van de NVvW	319
H. Aalmoes: Uitleggen en begrijpen	320
J. van Dormolen: Leren wat bewijzen is	325
D. Buijs: Inkonsekvente normeringen	335
F. Pach: Nogmaals: Oneindig min oneindig en nul maal oneindig	339
J. van de Craats: De XXIVe Internationale Wiskunde Olympiade	341
H. Broekman: "Leren reflecteren als basis van de lerarenopleiding"	344
Recreatie	348
Boekbesprekingen	345-351
Mededelingen	354
Kalender	356

ADRESSEN VAN AUTEURS

H. Aalmoes, Spreeuwenlaan 27, 1742 GA Schagen

Drs. H. Broekman, Ped. Did. Inst. der RU Utrecht, Heidelberglaan 2,
postbus 80-120, 3508 TC Utrecht

D. Buijs, Prins Hendriklaan 12, 3701 CN Zeist

Dr. J. van de Craats, Math. Inst. der RU Leiden, postbus 9521, 2300 RA Leiden

Dr. J. van Dormolen, Ped. Did. Inst. der RU Utrecht, Heidelberglaan 2,
postbus 80-120, 3508 TC Utrecht

F. Pach, Arntzeniusweg 94', 1098 GT Amsterdam