EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

59e jaargang
1983/1984
nr. 6
februari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Mw. I. van Breugel - Drs. F. H. Dolmans (hoofdredacteur) - W. M. J. M. van Gaans - Dr. F. Goffree - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - Drs. C. G. J. Nagtegaal
P. E. de Roest (secretaris) - Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Tràviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894 - 11730. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-550834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, giro: 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 7,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

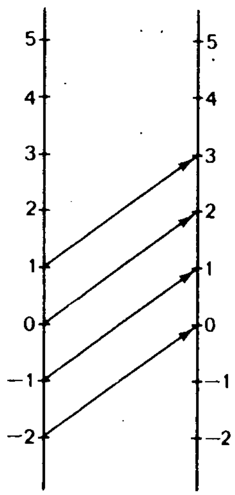
ISSN 0165-0394

Visualiseren helpt!

HARRIE BROEKMAN
Met dank aan Joop v. Dormolen

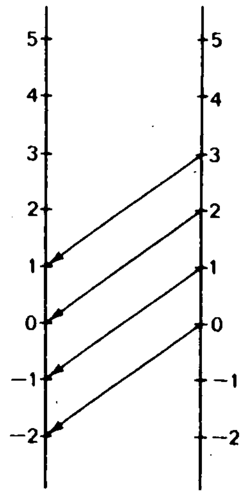
I Voorbeelden

1



functie

$x \to x + 2$



inverse functie

$x \to x - 2$

2 $A = \{a, b\}$. Hoeveel verschillende bewerkingen kunnen we in A definiëren? Deze vraag kan vertaald worden in tabellen: hoeveel 2 bij 2 tabellen kunnen we maken, met op ieder van de 4 plaatsen een element van A? Enkele mogelijkheden zijn:

	a	*b*
a	*a*	*a*
b	*a*	*a*

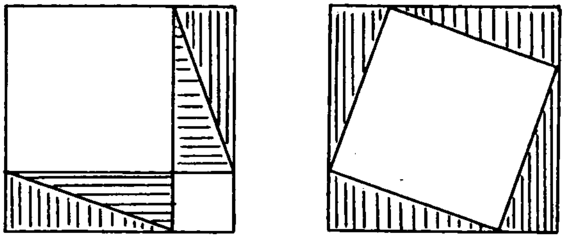
	a	*b*
a	*b*	*b*
b	*b*	*b*

	a	*b*
a	*a*	*a*
b	*a*	*b*

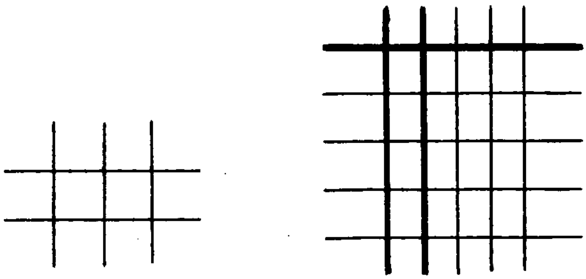
	a	*b*
a	*a*	*b*
b	*b*	*a*

Er zijn in totaal 16 mogelijkheden. Kun je verklaren waarom?

3



4

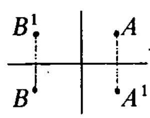


2 x 3   14 x 23

5 Tabellen, grafieken, staafdiagrammen, sectordiagrammen.

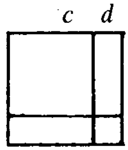
6 Spiegelen in de x-as schijnt voor een aantal leerlingen ook duidelijk te zijn als ze 'zien': $(x, y) \rightarrow (x, -y)$.

Voor velen is het zó beter te zien



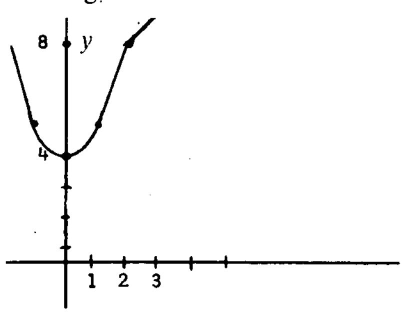
7 Veel leerlingen helpt het als ze behalve
$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

ook te 'zien' krijgen

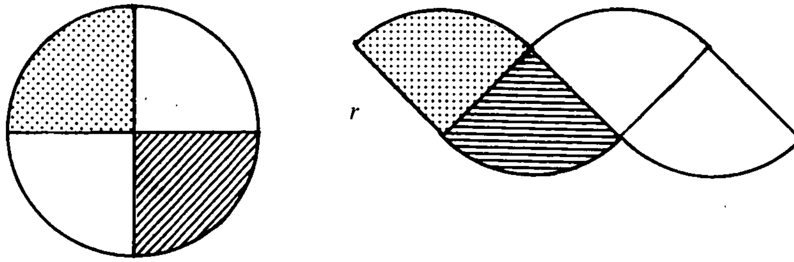


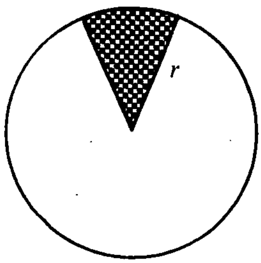
Er zijn ook leerlingen die daar graag mee beginnen.

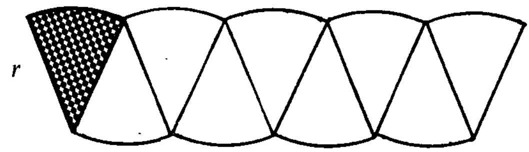
8 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{voor } x < 2 \\ x + 6 & \text{voor } x \geq 2 \end{cases}$



9



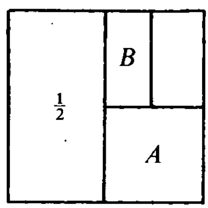




Oppervlakte cirkel = $r \times$ halve omtrek cirkel

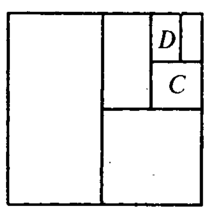
10 Vraag 1: Hoe berekent u de som $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$?

Vraag 2:



de oppervlakte van A is?

de oppervlakte van B is?

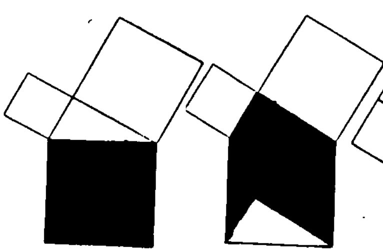


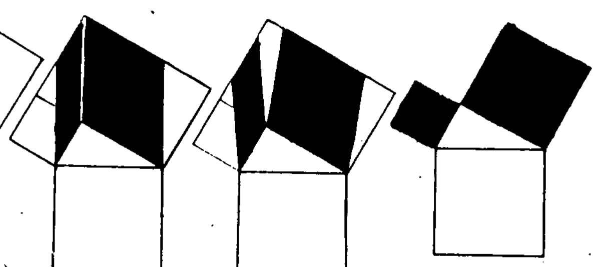
de oppervlakte van C is?

de oppervlakte van D is?

Hoeveel is $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$?

11 ... und sagte kein einziges Wort





(Mathematiklehrer 1-1980)

II Inleiding

Met de voorgaande voorbeelden heb ik een boodschap willen overbrengen die – naar mijn vaste overtuiging – voor zichzelf spreekt.
Visualiseren helpt: zo niet iedereen, dan toch velen
zo niet altijd, dan toch wel vaak.
Zelf heb ik dat o.a. ervaren met het Euclidisch algoritme voor het berekenen van de ggd. Het duurde een tijd voor ik dat algoritme door had en nog langer voordat ik het begreep. Dit laatste gebeurde bij mij pas toen ik een visuele weergave van het algoritme tegenkwam.
In de rest van dit artikel wil ik mijn boodschap – visualiseren helpt – verhelderen door u het voornoemde algoritme te laten zien mét de visuele ondersteuning.
Door de specifieke keuze van de visualisering kunnen er allerlei vragen boven komen borrelen. Hiervan zal ik in het geval van het Euclidisch algoritme een voorbeeld laten zien. In de vorm van een welbekend grapje zal daarbij een voorbeeld gegeven worden van een gevaar van visualiseren, nl. het optreden van gezichtsbedrog, vooral bij slordig werken.

III Het Euclidisch algoritme

Het algoritme van Euclides is een middel voor het vinden van de ggd van twee getallen.
De grootste gemene deler van 46 en 12 kunnen we als volgt berekenen:

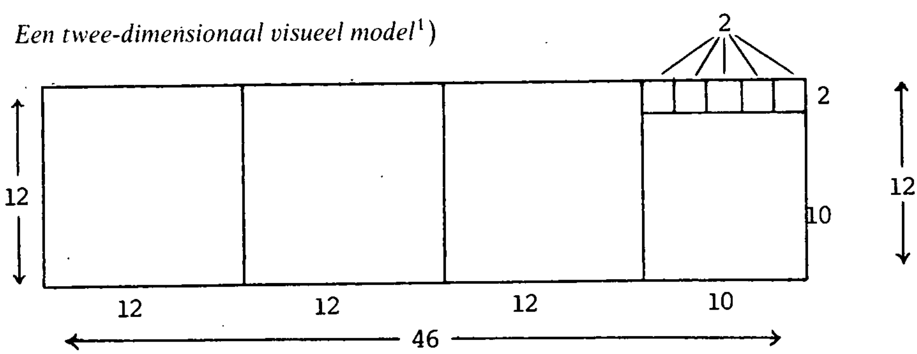
$$46 = \underline{3} \times 12 + 10$$

$$12 = \underline{1} \times 10 + 2$$

$$10 = \underline{5} \times 2$$

ggd (46, 12) = 2.
2 zit als factor in 10 én in 2, dus in 12.
2 zit als factor in 10 én in 12, dus in 46.

Een twee-dimensionaal visueel model[1])

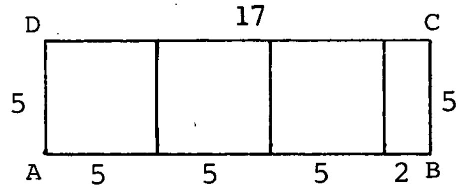


[1]) Er zijn ook andere manieren om via visuele modellen de ggd te verduidelijken. Probeer bijvoorbeeld maar een rechthoek met zijden van 46 resp. 12 te bedekken met vierkantjes met zijde 1, dan met zijde 2, dan met zijde 3, etc.

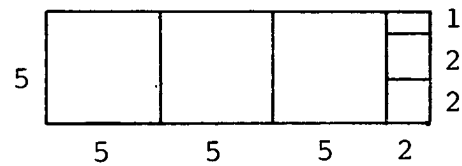
Wat is de ggd van 17 en 5?

Euclidisch algoritme | *Visueel model*

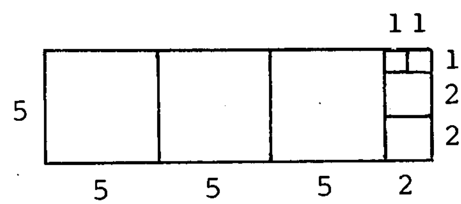
1e stap $17 = \underline{3} \times 5 + 2$



2e stap $5 = \underline{2} \times 2 + 1$



3e stap $2 = \underline{2} \times 1$



Conclusie:
De ggd is 1 (= de laatste rest ongelijk nul).

De ggd is 1 (= de lengte van de zijde van het laatste vierkant).

$[3, 2, 2]$

De getallen van het getallentriple $[3, 2, 2]$ geven resp. aan: het aantal malen dat 5 bevat is in 17, het aantal malen dat de eerste rest bevat is in 5 en het aantal malen dat de tweede rest bevat is in de eerste rest.

De getallen van het getallentriple $[3, 2, 2]$ geven resp. aan: het aantal vierkanten met lengte 5 dat bevat is in de rechthoek van 5 bij 17, het aantal zo groot mogelijke dezelfde vierkanten dat bevat is in de eerste rest en het aantal zo groot mogelijke dezelfde vierkanten dat bevat is in de tweede rest.

Tussenopmerking:
Degenen onder de lezers die bekend zijn met kettingbreuken zullen in het triple $[3, 2, 2]$ de standaard-notatie kunnen herkennen van de kettingbreukont-ontwikkeling van $\frac{17}{5}$, nl.: $3 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}$.

IV Een opkomende vraag

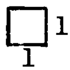
Lukt het om tweetallen, drietallen, viertallen, etc. te maken met alleen het getal één?
Antwoord: Ja, maar ...

Verklaring 1: Als we naar het visuele model kijken kunnen we de gestelde vraag vertalen in: lukt het om gevallen te tekenen waarin bij iedere stap maar één vierkantje past in de rest?
Dit lukt altijd behalve bij de laatste stap; daar zullen tenminste twee vierkantjes nodig zijn.

Verklaring 2: De kettingbreuk $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}$ is in feite te schrijven als $1 + \frac{1}{2}$
en dus is $[1, 1, 1]$ hetzelfde als $[1, 2]$.

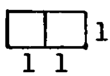
Voorbeelden

een één



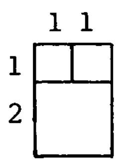
$[1] = [1]$ ggd $(1, 1) = 1$

twee éénen



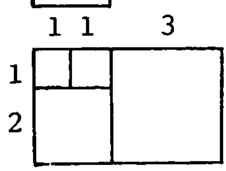
$[1, 1] = [2]$ ggd $(2, 1) = 1$

twee éénen en een twee



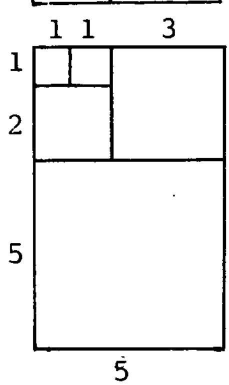
$[1, 1, 1] = [1, 2]$ ggd $(3, 2) = 1$

twee éénen, een twee en een drie



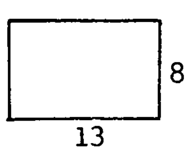
$[1, 1, 1, 1] = [1, 1, 2]$ ggd $(5, 3) = 1$

twee éénen, een twee, een drie en een vijf



$[1, 1, 1, 1, 1] = [1, 1, 1, 2]$ ggd $(8, 5) = 1$

De volgende rechthoek is 13 bij 8.



Het volgende 'getal' is $[1, 1, 1, 1, 1, 1] = [1, 1, 1, 1, 1, 2]$ ggd $(13, 8) = 1$

etc. etc. etc.

Het lijkt er op dat de rechthoeken steeds meer 'eenzelfde vorm' aannemen.

Het volgende 'getal' wordt gevormd door er een één bij te nemen.

In de opvolgende tweetallen zit een mooie regelmaat (Fibonacci)

Met eenzelfde vorm wordt hier bedoeld eenzelfde verhouding van de zijden, die mogelijk ontstaan is door een vast patroon te volgen bij de constructie.[2])
En daarmee gaan we naar de getallen om het visuele te ondersteunen.

De verhouding van de zijden van de rechthoeken bedraagt resp.
$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \ldots$

Afgerond op 5 decimalen krijgen we hiervoor:
1,00000; 2,00000; 1,50000; 1,66667; 1,60000; 1,62500; 1,61538; 1,61905; 1,61765; 1,61818; ...

Het zal duidelijk zijn dat we *met het oog* een rechthoek met een verhouding van 1,61765 tussen de zijden, inderdaad moeilijk kunnen onderscheiden van een rechthoek met 1,61818 als verhouding.

V Een welbekend grapje

Een grapje dat verband houdt met de beperkingen van ons 'zien' werd door Freudenthal beschreven in het Wiskobas Bulletin van december 1974.*)

Een vierkant van 8 bij 8 is opgedeeld in twee rechthoekige driehoeken met rechthoekszijden 3,8 en twee rechthoekige trapezia met hoogte 5 en evenwijdige zijden 3,5 (zie fig. 1). Die vier onderdelen worden tot een rechthoek van 5 bij 13 (zie fig. 2) samengevoegd.
Hoe kan dat? 64 is toch niet gelijk aan 65?

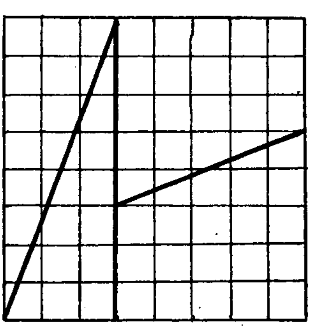


Fig. 1

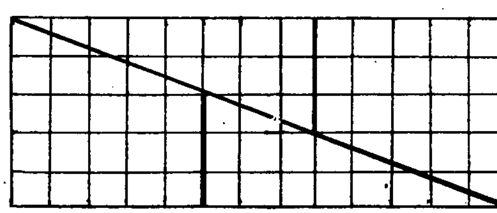
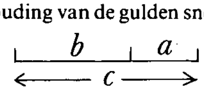


Fig. 2

Wel, de 3,5,8,13 van dit grapje komen uit de Fibonacci-rij vandaan, waar het verschil van 8^2 en $5 \cdot 13$ net 1 is. Die eenheid is bij de overgang van vierkant naar

[2]) De waarde van de limiet is $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, de verhouding van de gulden snede. U weet wel: $c : b = b : a$



rechthoek klandestien verkregen door met de rechthoeksdiagonaal wat te kliederen en dit kan omdat 5 : 3 en 13 : 8 niet veel verschillen. Doe je het netter (zie fig. 3) dan zie je dat ze wel verschillen en waar het oppervlak van het ekstravierkantje vandaan komt.

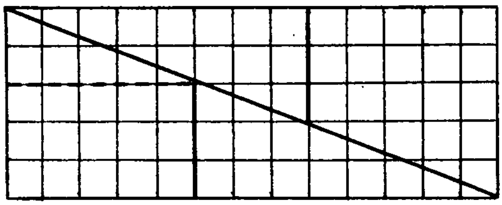


Fig. 3

Je had dit truukje ook met een vierkant van 5 bij 5 kunnen proberen, opgesplitst in twee driehoeken met rechthoekszijden 2 en 5 en twee trapezia met hoogte 3 en parallelle zijden 2 en 3, om een rechthoek van 3 bij 8 te verkrijgen (zie fig. 4 en 5) maar dit was tè grof geweest.

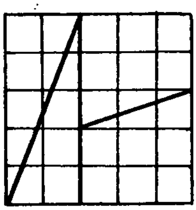


Fig. 4

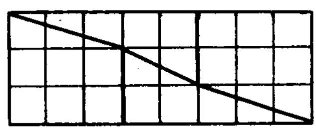


Fig. 5

Aan de andere kant had je het ook fijner kunnen doen, met een vierkant van 13 bij 13, driehoeken van 5 bij 13 en trapezia met hoogte 8 en parallelle zijden 5 en 8, waar tenslotte een rechthoek van 8 bij 21 uitkomt, en dan zou de fout in de tekening al niet meer te achterhalen zijn.

VI Slotopmerkingen

In het voorgaande heb ik via voorbeelden laten zien dat het leren van begrippen, werkwijzen etc. – zeker in het intuïtieve aanvangsstadium[3]), maar ook bij het hebben resp. geven van overzicht – ondersteund kan worden door visualiseren. Met het wat verder uitgewerkte voorbeeld van het Euclidisch-algoritme voor de ggd berekening heb ik aangegeven dat visualisering ook kan helpen vervolgvragen op te roepen. Dat er ook gevaren aan visualiseren verbonden zijn kwam eveneens aan bod.

[3]) Probeer de volgende opgave maar eens te maken zonder plaatje.
'Voor welke waarde van α is

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

een vectorvoorstelling van een lijn? Welke lijnen kunnen aldus worden voorgesteld?'

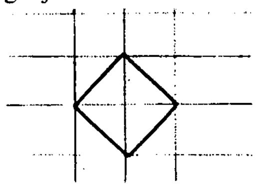
De kracht van visualisering is o.a. de samenvattende werking, waarbij structuur getoond wordt. Als zwakte zou genoemd kunnen worden het feit dat visualisering beperkingen heeft t.a.v. de analyserende werking, waarbij details getoond worden, maar ook beperkingen bij het deductief redeneren. Maar daarvoor hebben we dan nog onze spreek/schrijftaal én onze wiskunde-taal[4]). Een m.i. mooi voorbeeld van het samengaan van een praatje met een plaatje volgt hier tot slot.

Is er een getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 2?

Ja, $\sqrt{2}$.

Hoeveel is $\sqrt{2}$? (decimaal geschreven)

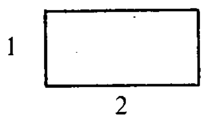
Is er een vierkant waarvan de oppervlakte gelijk is aan 2?



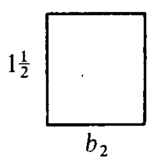
Hoe lang is de zijde van dit vierkant? (decimaal geschreven)

Een aanpak van deze vragen die bekend staat als de Grieks-Babylonische methode, is de volgende[5]).

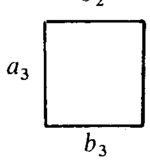
$\sqrt{2}$ berekenen betekent een vierkant zoeken met oppervlakte 2. Dit komt neer op het zoeken van een rechthoek met oppervlakte 2 en zijden die niet veel in lengte verschillen.



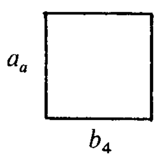
$a_1 = 1$ en $b_1 = 2$



$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{3}{2} \text{ en } b_2 = \frac{2}{a_2} = \frac{4}{3}$$



$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{17}{12} \text{ en } b_3 = \frac{2}{a_3} = \frac{24}{17}$$



$$a_4 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{577}{408} \text{ en } b_4 = \frac{2}{a_4} = \frac{816}{577}$$

De verschillen tussen a_i en b_i zijn resp. 1; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{204}$; $\frac{1}{235416}$; ...

[4]) Zie hierover o.a. J. van Dormolen, Didactiek van de Wiskunde, 3e druk pag. 107 e.v.

[5]) Zie o.a. Freudenthal, Mathematics as an Educational Task, pag. 204.

Reaktie

Na het gereedkomen van dit artikel kreeg ik een aantal reakties op het tweedimensionale model van het Euclidisch algoritme. De essentie van die reakties was dat voor de minder visueel-ingestelden, maar ook voor de meer visueel ingestelden, dit model bezwaren heeft. Het grootste bezwaar betreft de wijze van 'aanbouwen' van vierkanten: rechts er bij, onder er bij, rechts er bij, etc.
Joop van Dormolen liet het niet bij deze reaktie maar ontwikkelde het hierna volgende model dat dit aanbouwprobleem niet kent. Ook hiermee is de vraag over de getallen tweetallen, drietallen, enz. volledig te beantwoorden. Zijn ééndimensionaal (kleuren) model is bovendien zeer geschikt om op de overheadprojektor te gebruiken.

Een één-dimensionaal (kleuren)model
Gegeven zijn twee getallen. Bijvoorbeeld 2282 en 532, maar ik noem ze liever BRUIN en BLAUW.

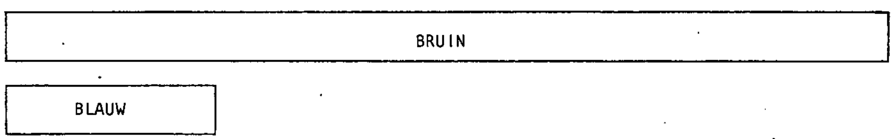


Fig. 1

Deel BLAUW op BRUIN (in het voorbeeld zou dat 154 zijn). Als de rest niet 0 is, dan noem ik hem GEEL.

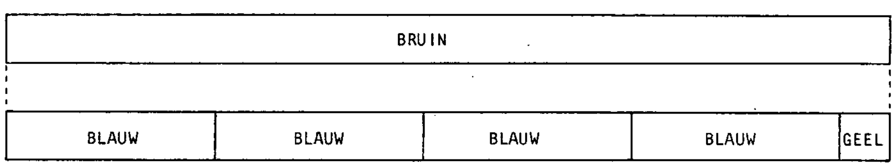


Fig. 2

Deel de rest GEEL op de deler BLAUW (in het voorbeeld 154 op 532). Als de rest niet 0 is, dan noem ik hem GROEN (in het voorbeeld 70).

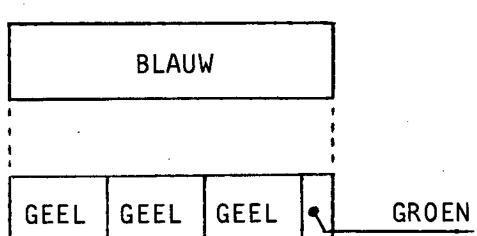


Fig. 3

Deel de rest GROEN op de deler GEEL (in het voorbeeld 70 op 154). Als de rest niet 0 is, dan noem ik het ZWART (in het voorbeeld 14).

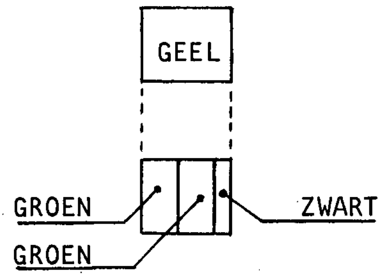


Fig. 4

Zo doorgaande (telkens de rest delen op de deler van de voorgaande bewerking) zal de rest eens 0 zijn. Immers, de rest is steeds kleiner dan de deler en de getallen zijn natuurlijke getallen.
(Neem aan dat de laatste deler ZWART is.) (In het voorbeeld is dat 14.)

Deze laatste deler is de gevraagde ggd van BRUIN en BLAUW. Dit is te begrijpen door terugredeneren:

ZWART is deler van ZWART en van GROEN (zie figuur 4)
dus: ZWART is deler van GEEL.

ZWART is deler van GROEN en van GEEL (zie figuur 3)
dus: ZWART is deler van BLAUW (wat bewezen moest worden).

ZWART is deler van GEEL en van BLAUW (zie figuur 2)
dus: ZWART is deler van BRUIN (wat bewezen moest worden).

Dat ZWART de grootste gemeenschappelijke deler is, is ook te begrijpen. Elke gemeenschappelijke deler van BLAUW en van BRUIN is deler van GEEL. GEEL zelf is geen gemeenschappelijke deler, dus is de gemeenschappelijke deler kleiner dan GEEL. Enzovoort.

*) Zie ook Pieter van Delft, Jack Botermans, *Spelen met puzzels*, uitg. De Bezige Bij, pag. 35.
**) Zie ook de boekbespreking op pag. 316.

$a\sin(bx + c) + d$ en $a\cos(bx + c) + d$

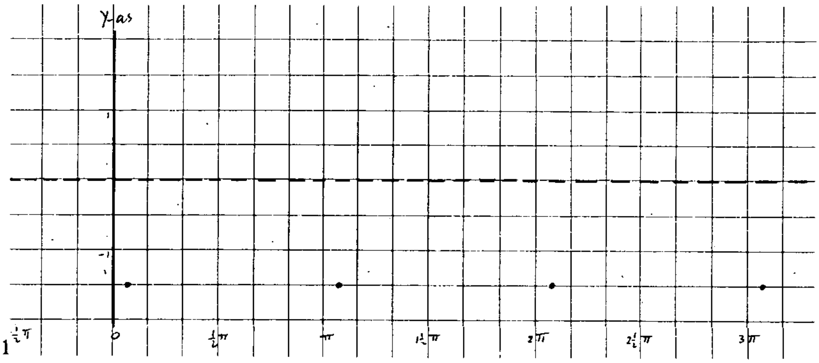
L. A. RANG

Op het C.S.E. moet de kandidaat aangeven op welke wijze de grafieken van bovenstaande funkties via transformaties uit de grafieken van $\sin x$ en $\cos x$ verkregen worden. Die transformaties zijn spiegelingen, lijnvermenigvuldigingen en translaties. Het getuigt ongetwijfeld van groot inzicht als de kandidaat dat correct opschrijft. Maar voert hij al die stappen ook uit? Natuurlijk niet, omdat het van veel groter inzicht getuigt als hij iets dat eenvoudig is ook eenvoudig doet en niet zo omslachtig als de voorschriften van hem eisen.
Hij doet het door één simpele vergelijking op te lossen en verder is het een kwestie van vakjes tellen.
Voorbeeld:

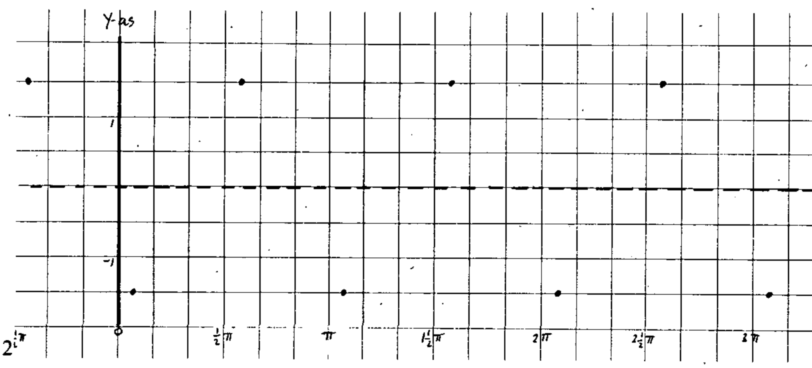
$$f: x \to -1\tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi - 2x\right) + 1$$

Beschouw eerst de funktie g die 1 minder is dan f.
g heeft $-1\frac{1}{2}$ als minimum; dat is het geval bij $\sin(\frac{2}{3}\pi - 2x) = 1$.
Dit leidt na drie regeltjes tot $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$.
De periode van de funktie is dus π (6 vakjes).
Teken (x-as gestippeld) die minima (fig. 1).
Halverwege die minima (3 vakjes opzij) zitten de maxima $1\frac{1}{2}$ (nu is figuur 2 ontstaan uit figuur 1).
Telkens halverwege maximum en minimum ($1\frac{1}{2}$ vakje opzij) zitten de nulpunten (figuur 2 is nu figuur 3 geworden).
De waarden $\pm\frac{3}{4}$ zijn vervolgens heel nauwkeurig uit te tellen (je kent immers $\sin x$!) en in te tekenen. Vervolgens komt de x-as op afstand 1 onder de stippellijn (2 vakjes lager) en de kromme kan keurig geschetst worden: dan is figuur 4 uit figuur 3 ontstaan.

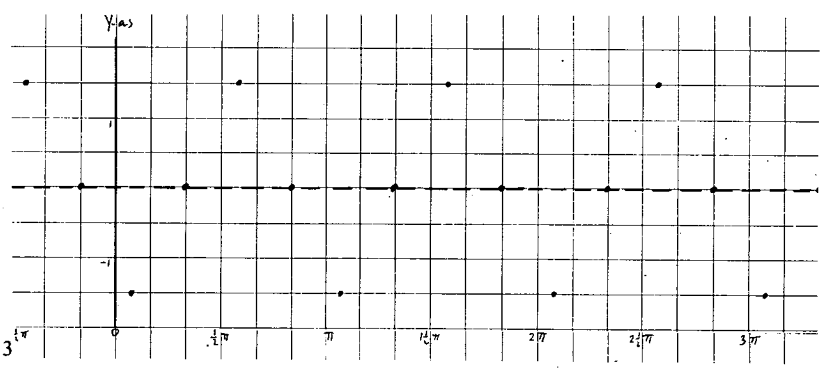
Waarom die ingewikkelde tamtam van de voorschriften?
Wat eenvoudig ís moet je ook eenvoudig dóén.
Ik pleit voor vereenvoudiging van de voorschriften.



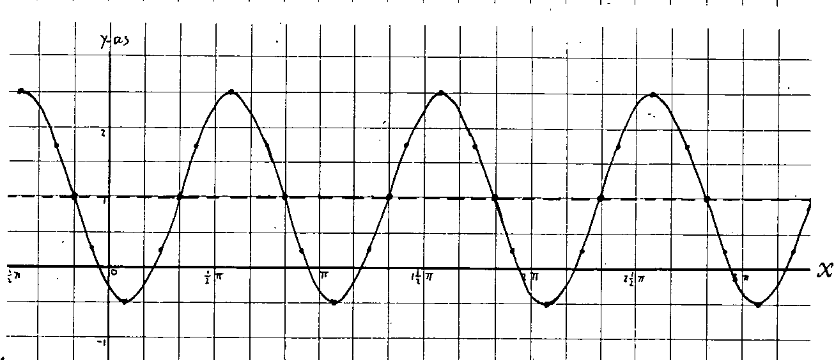
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

Effektieve onderwijspraktijken

HEIN KRAMMER

1 Inleiding

Enkele vragen:
- Hebben wiskundeleraren die meer dan hun doorsnee-collega's met zelfwerkzaamheid werken betere resultaten met hun leerlingen?
- Krijgen leerlingen meer plezier in wiskunde, als hun leraar de wiskunde in relatie brengt met toepassingen?
- Leren leerlingen beter wiskunde bij een leraar die goed orde houdt, dan bij een leraar die minder goed orde houdt?

Deze en een hele waslijst van dergelijke vragen liggen ten grondslag aan het zgn. Leeromgevingsprojekt, dat momenteel door medewerkers van de universitaire lerarenopleiding aan de T.H.Twente wordt verricht. Het is een internationaal onderzoek waaraan 13 landen over de hele wereld deelnemen. Als onderdeel van het onderzoek zijn in het schooljaar 1981/1982 in Nederland 50 klassen voor vwo en havo doorgelicht. Op verschillende tijdstippen in het jaar zijn er toetsen en vragenlijsten bij de leraren en leerlingen afgenomen. Bovendien zijn er per leraar acht lessen geobserveerd.
De analyse van de gegevens zal nog ettelijke maanden in beslag nemen, maar nu al zijn er enkele resultaten beschikbaar. Daar zijn zeer verrassende verbanden bij en ook resultaten waar leraren gebruik van zouden kunnen maken bij het inrichten van hun lessen.

Over de voorlopige onderzoeksresultaten wil ik het in dit artikel hebben.

2 De beschikbare gegevens en de toegepaste analyse

In een onderzoek als dit vinden vaak metingen op veel variabelen plaats. In dit geval zijn er meer dan 200 variabelen die betrekking hebben op de school, de leraar, de leerlingen en – vooral – de gang van zaken in de lessen. Het is ondoenlijk ze hier alle te bespreken. Ik beperk me tot enkele cruciale variabelen. In het begin van het jaar is er in elke klas een toets afgenomen over de wiskundestof van de (eerste) brugklas. De gemiddelde score van de leerlingen van een klas op die toets noem ik de 'beginkennis'. Tevens is er in het begin van het

jaar een vragenlijst bij de leerlingen afgenomen. Hiervan gingen acht items over hun houding tegenover de wiskunde. Bij uitspraken als 'Ik vind wiskunde prettig', 'Om een goede baan te krijgen is het belangrijk dat je wiskunde kent', e.d., vulden de leerlingen in in hoeverre ze het met die uitspraken eens waren. Hieruit is een variabele 'beginhouding' gedestilleerd, die aangeeft hoe positief de gemiddelde houding van de klas aan het begin van het jaar was.
In de loop van het jaar zijn er toetsen afgenomen over de behandelde stof. De leraren gaven daarbij per item aan of de stof die voor dat item nodig was ook inderdaad behandeld was. Het percentage goed gemaakte items van alle aldus door de leraar geschikt gevonden items over alle afsluitende toetsen, gemiddeld over de leerlingen van een klas, vormt de variabele 'eindkennis'.
Aan het einde van het jaar werd o.a. weer een vragenlijst over de wiskundehouding bij de leerlingen afgenomen. Dit leverde de score de variabele 'eindhouding' op.
Behalve deze vier cruciale variabelen zijn er variabelen die beschrijven hoe de gang van zaken tijdens de les was. Deze zijn verkregen uit vragenlijsten aan de leraren, vragenlijsten aan de leerlingen en observaties van lessen. Deze variabelen noem ik 'proces-variabelen', omdat ze de onderwijs-leerprocessen beschrijven.

De analyse van de gegevens die ik voor dit artikel heb verricht is vrij grof en zal later aangevuld moeten worden met meer verfijnde analyses. Ik heb per procesvariabele twee correlatie-coëfficiënten bepaald: een met de eindkennis en een met de eindhouding[1]). Deze correlatie-coëfficiënten zijn ook apart berekend voor de groepen leraren die respectievelijk de series Getal en Ruimte, Moderne Wiskunde en Sigma gebruiken. Per proces-variabele had ik dus in totaal 8 correlatiecoëfficiënten.
Met deze gegevens heb ik als volgt verder gewerkt. De proces-variabelen die een of meer significante correlatie-coëfficiënten opleverden (5% overschrijdingskans, tweezijdig) heb ik proberen te groeperen tot 'clusters'[2]) van variabelen met een gemeenschappelijke betekenis. Dit leverde tien clusters van proces-variabelen op. Daarna ging ik de andere proces-variabelen onderbrengen bij de tien clusters. Nu bleken vijf van de tien clusters een eenduidig beeld op te leveren, de andere vijf clusters gaven onduidelijke, tegenstrijdige resultaten te zien. Op de vijf eenduidig te interpreteren clusters wil ik hier verder ingaan.

3 De vijf eenduidige clusters van proces-variabelen

De resultaten van de vijf eenduidige clusters van proces-variabelen zijn weergegeven in tabel 1. Elke proces-variabele is kort omschreven. Daarachter zijn de 8 correlaties vermeld. Eerst zijn de correlaties met kennisresultaten vermeld bij achtereenvolgens Getal en Ruimte, Moderne Wiskunde, Sigma en de gehele groep leraren. Daarna volgen de overeenkomstige correlaties met houdingsresultaten. Voor de overzichtelijkheid heb ik niet de correlaties zelf vermeld, maar een aanduiding van de sterkte van de correlaties d.m.v. plus- en mintekens; hoe sterker de correlatie, hoe meer tekens.

Bij elke variabele is aangegeven wat de bron van de informatie is: de lerarenvragenlijst (D), de leerlingen-vragenlijst (L), de momentopnamen tijdens observaties (5 keer per les) (M), of de interaktie-coderingen tijdens de observaties (5 keer per les gedurende 5 minuten) (I).
Het meest duidelijke cluster van variabelen dat met leerresultaten samen blijkt te hangen is de *orde tijdens de les*. Het zal weinigen verbazen dat orde in verband staat met kennis-resultaten, maar opvallend is dat ook de houding tegenover wiskunde bij de leraren met goede orde significant beter is dan bij andere leraren. Het blijkt dat deze resultaten voor alle drie de boekenseries gelden, al is er een tendens dat het effekt bij Sigma, en dan speciaal wat de kennis betreft, wat sterker is.
De variabelen die tot dit cluster behoren, komen van verschillende bronnen van informatie. In totaal zijn er 6 variabelen in het cluster: het aantal malen dat de observator bij een klassikale les de leraar niet kon verstaan, het aantal malen dat de leraar disciplinaire opmerkingen maakte, het oordeel van de leerlingen over de orde in de lessen, het gemiddeld aantal door de observator geschatte aandachtige leerlingen, e.d. Samenvattend kan men stellen dat er zowel betere kennis- als houdings-resultaten zijn bij leraren die goede orde en rust in de klas hebben met veel aandachtige leerlingen, terwijl er weinig tijd expliciet wordt besteed aan het handhaven van de orde.

Het tweede cluster van variabelen heeft te maken met het *controleren en nabespreken van huiswerk* en andere opgegeven taken. Hiertoe behoren vier variabelen, o.a. hoe vaak de leraar huiswerk controleert, hoe vaak de leraar het huiswerk mee laat tellen voor het rapport, en hoe vaak de leraar het werk nabespreekt. Dit cluster hangt zowel met kennis als met houding samen. Er is een lichte tendens dat dit cluster bij de gebruikers van Getal en Ruimte iets sterker en bij de gebruikers van Sigma iets minder sterk een rol speelt.

Het derde cluster zou men kunnen omschrijven als *aanvullend leermateriaal en aanvullend onderwijs*. Hiertoe behoren zeven variabelen, o.a. of de leraar vaak dikteert, of hij veel gebruik maakt van zelfgeschreven stencils, hoe vaak hij aanvullend onderwijs geeft aan leerlingen die iets niet blijken te beheersen, of hij ter aanvulling van geprogrammeerde instructie gebruik maakt, e.d.
Het blijkt dat ook dit cluster met zowel kennis- als houdings-resultaten samenhangt. Bij de gebruikers van Getal en Ruimte is de samenhang duidelijk wat minder sterk. Misschien komt dat doordat deze leerboekenserie zelf al aanvullend materiaal bevat in de vorm van herhalings- en verrijkingsgedeelten na elk hoofdstuk.

De laatste twee clusters hebben te maken met de werkvormen die de leraar hanteert. Het vierde cluster bevat variabelen als het aantal vragen dat aan de klas of aan een groep leerlingen gesteld wordt, het aantal malen dat de leraar leerlingen op elkaars antwoorden laat reageren door een vraag door te spelen, e.d. Ik heb de naam '*klassegesprek*' aan dit cluster gegeven. Er behoren 10 variabelen toe. Dit cluster houdt vooral verband met kennis-resultaten. Wat de houdings-resultaten betreft is er een tendens dat het klassegesprek vooral belangrijk is bij Sigma-gebruikers, waarbij degenen die meer het klassegesprek toepassen minder goede resultaten hebben.

Het laatste van de eenduidige clusters heb ik de naam '*zelfwerkzaamheid*' gegeven, omdat alle 6 variabelen waaruit dit cluster is opgebouwd, te maken hebben met werkvormen waarin de leerlingen apart of in groepjes werken en de leraar rondloopt door de klas of aan zijn bureau werkt. De resultaten zijn niet zo ondubbelzinnig als bij de vorige clusters. De overwegende tendens is dat zelfwerkzaamheid met minder wenselijke resultaten geassocieerd is. Er is een lichte tendens te bespeuren dat de houdings-resultaten vooral bij gebruikers van Getal en Ruimte in negatieve zin met de hoeveelheid zelfwerkzaamheid samenhangt.
Ik wil me voorlopig niet wagen aan een poging tot verklaring van de verschillen tussen de 3 leerboekenseries. In elk geval is hier materiaal aangedragen, dat doet vermoeden dat er verschillen zijn. Dat zou betekenen dat de 3 leerboekenseries geassocieerd kunnen worden met verschillende optimale onderwijsstijlen.

4 Besluit

Een paar opmerkingen moeten nog gemaakt worden over wat *niet* gevonden is. Heel veel variabelen hadden betrekking op andere aspecten van lesgeven. Om er enkele te noemen: het aantal denkvragen (vs. kennis- of routinevragen) dat de leraar stelt, de afwisseling in werkvormen, het struktureren van de leerstof (bijvoorbeeld d.m.v. bedoeling, overzicht, samenvatting geven), toepassingen van de wiskunde in het onderwijs betrekken. Al deze variabelen hebben in de voorlopige analyse ofwel geen, ofwel onderling strijdige verbanden met leerresultaten.
Dat wil niet zeggen dat daarmee aangetoond is dat deze zaken niet van belang zijn. Evengoed kan men het niet vinden van consistente verbanden toeschrijven aan de soort toetsen die afgenomen zijn in dit onderzoek, het middelen over klassen zoals dat hier gebeurd is, en nog een dozijn andere oorzaken.

Noten

[1]) In feite zijn niet gewone correlaties genomen, maar partiële correlaties. Daarbij is bij de kennis-resultaten gecorrigeerd voor de begin-kennis, en bij de houdings-resultaten voor de beginhouding. De reden hiervoor is, dat zeer veel proces-variabelen zoals bekend beïnvloed worden door beginkennis en houding van de leerlingen. Maar ook eindresultaten worden door de begingegevens beïnvloed. Men mag dus verwachten dat er veel onechte verbanden tussen proces-variabelen en eindgegevens gevonden zouden worden, als er gewone correlaties berekend zouden worden.
[2]) Dat ik hier en in het vervolg de term 'cluster' gebruik, wil niet zeggen dat hier cluster-analyse verricht is en dat de door mij gevonden groepen van variabelen zo als cluster zijn aangewezen. Men kan i.p.v. 'cluster' desgewenst lezen 'groep', 'verzameling' of iets dergelijks.
[3]) Bij controle blijkt dat de steekproef van leraren vrij goed representatief is wat betreft leeftijd, opleiding, school-type, e.d. Ik acht het berekenen van signifikanties dan ook terecht. Opgemerkt moet worden dat correlatiecoëfficiënten bij 50 leraren al gauw signifikant zijn. Bijvoorbeeld is een correlatie-coëfficiënt van 0,235 al signifikant op het 5% niveau.

Tabel 1. Vijf belangrijke clusters van proces-variabelen en de correlaties met leerresultaten.

Bron van de gegevens staat tussen haken: (D) = docenten-vragenlijst, (L) = leerlingen-vragenlijst, (M) = momentopnamen tijdens observaties, (I) = interaktie-scores tijdens observaties. GR = Getal en Ruimte, MW = Moderne Wiskunde, S = Sigma.
+/− 10% sign, ++/−− 5% sign, +++/−−− 1% sign.[3])

	Kennis-resultaten				*Houdings-resultaten*			
	(GR)	(MW)	(S)	(Alle)	(GR)	(MW)	(S)	(Alle)
<u>ORDE</u>								
(D) Schatting hoeveel tijd de leraar besteedt aan orde handhaven en disciplinaire maatregelen.	0	−−	0	−−	−−	−−	0	−−
(L) Oordeel door leerling (8 items) over leiderschapskwaliteiten van de leraar.	0	+++	−−	+++	+	++	++	+++
(M) Gemidd. (over 40 momentopnamen) van de fraktie aandachtige leerlingen.	0	0	+++	++	0	0	++	0
(I) Bestraffing van leerling (méér dan alleen verbaal) o.g.v. inhoudelijk antwoord.	−	−	0	−−	−−	−−−	0	−−−
(I) Disciplinaire uitingen door leraar tot groep of klas i.v.m. ongewenst gedrag.	0	0	−−−	−−	0	0	0	0
(I) Observator kan tijdens klassikale les de leraar niet verstaan.	0	0	−−−	−−−	0	0	0	−
<u>CONTROLEREN</u>								
(D) Hoe vaak leraar huiswerk laat meetellen voor het rapportcijfer.	0	+	0	+	++	++	0	++
(D) Hoe vaak leraar huiswerk gebruikt om nieuwe opdrachten te geven of hiaten vast te stellen (niet voor cijfer)	++	0	0	0	++	0	0	0
(L) Hoe vaak leraar controleert of de leerling het werk gemaakt heeft.	++	0	++	++	0	++	0	+++
(M) Fraktie momentopnamen waarin eerder gemaakt werk wordt nabesproken of gecontroleerd.	0	0	0	+	+	0	0	++
<u>AANVULLING</u>								
(D) Hoe vaak de leraar extra leermateriaal geeft ter aanvulling op het boek.	++	+	0	++	0	+	0	0
(D) Hoe vaak de leraar bepaalde belangrijke zaken dikteert.	0	+	0	++	+	0	0	++
(D) Hoe vaak de leraar zelfgeschreven stencils e.d. gebruikt.	++	0	++	+++	0	0	++	0
(D) Hoe vaak de leraar aanvullende hulp geeft aan leerlingen die behandelde leerstof nog niet beheersen.	0	0	0	0	0	++	0	0

(D) Hoeveel leerlingen de afgelopen 2 weken aanvullende hulp gehad hadden.	0	0	0	0	0	++	0	++
(D) Hoe vaak leraar ter aanvulling bepaalde leerlingen het oorspronkelijk leermateriaal laat herhalen.	0	0	++	++	0	++	+++	++
(L) Hoe vaak leraar extra hulp aan de leerling geeft bij moeilijk werk.	0	++	0	0	0	++	+++	+++
<u>KLASSEGESPREK</u>								
(D) Hoe vaak de leraar vragen stelt aan en beantwoordt van de hele klas.	++	0	0	++	++	–	0	0
(L) Hoe vaak de leerling aangemoedigd wordt ideeën aan te dragen voor het oplossen van problemen.	++	+++	0	+++	+	+++	+++	+++
(M) Fraktie van de momentopnamen waarin leerlingen discussiëren.	0	0	0	0	0	0	– – –	–
(I) Aantal malen dat leerlingen in koor antwoorden.	0	0	0	+	0	0	– –	–
(I) Aantal malen dat de klas of een groep als geheel tegen leraar praat.	++	0	0	+	0	0	– –	0
(I) Aantal vragen gericht aan hele klas of groep.	++	0	0	+	0	0	– –	–
(I) Aantal malen dat een denkvraag aan de hele klas gericht wordt.	0	0	+	++	0	0	0	0
(I) Aantal malen dat een vraag wordt doorgespeeld naar een andere leerling.	0	– –	0	0	0	0	– –	0
(I) Aantal malen dat een vraag meer dan eenmaal wordt doorgespeeld.	0	0	0	0	0	++	++	+++
(I) Aantal malen dat doorgevraagd wordt, gericht op een groep of de hele klas.	+	0	0	+	0	0	– – –	– –
<u>ZELFWERKZAAMHEID</u>								
(D) Hoe vaak leraar door klas loopt terwijl de leerlingen in groepjes werken.	0	0	0	–	– –	0	0	– –
(D) Hoe vaak leraar door klas loopt terwijl de leerlingen apart werken.	++	0	0	0	0	0	0	0
(D) Hoe vaak leraar aan zijn bureau werkt terwijl de leerlingen alleen of in groepjes werken.	0	0	0	0	0	+++	0	0
(M) Fraktie van de momentopnamen waarin leerlingen zelfstandig of in groepjes vraagstukken maken.	0	0	0	– –	0	0	0	0
(I) Aantal denkvragen dat leraar richt aan een groepje leerlingen.	0	0	+	++	–	0	0	0
(I) Alle interakties tussen leraar en leerlingen terwijl leraar rondloopt door de klas.	0	++	0	0	0	0	0	0

Doorbraak in de getallentheorie

HENK NIELAND

Jonge wiskundige werpt licht op eeuwenoud probleem

Een van de beroemdste problemen in de wiskunde is nu een stap dichterbij zijn oplossing gekomen. Dat is het werk van Gerd Faltings, een 29-jarige professor uit Wuppertal. Het probleem in kwestie is het reeds 350 jaar oude 'laatste theorema van Fermat'. In een voordracht aan de Universiteit van Münster begin juni bewees Faltings een zeer belangrijke stelling die onder meer een nieuw licht werpt op het probleem van Fermat. Deze stelling was al zestig jaar geleden geformuleerd door de Britse wiskundige Mordell, maar nooit bewezen. Het 40 pagina's dikke bewijs – resultaat van anderhalf jaar zwoegen – bracht Faltings' vakgenoten in extase. De door hem gebruikte combinatie van reeds door andere wiskundigen ontwikkelde technieken opent namelijk zoveel nieuwe perspectieven dat de gevolgen ervan nog nauwelijks te overzien zijn. Deze liggen op het gebied van de zuivere wiskunde, een wetenschap die niet direct verband houdt met praktische toepassingen. Overal ter wereld worden nu colleges gewijd aan de mogelijkheden die door Faltings' werk zijn aangegeven. Daarbij is de Universiteit van Amsterdam in een bevoorrechte positie; in het kader van een project van de Nederlandse Organisatie voor Zuiver-Wetenschappelijk Onderzoek (ZWO) heeft Faltings daar in de eerste helft van oktober colleges gegeven.

Doorbraak

De theorema's van Fermat en Mordell liggen op het terrein van de getallentheorie, een oeroude tak van de wiskunde waarin eigenschappen van gehele getallen worden onderzocht. Getallentheorie werd lang beschouwd als de zuiverste vorm van wiskunde, ontbloot van enige praktische toepassing. Dat beeld is inmiddels wel achterhaald: er zijn verschillende toepassingsgebieden, onder meer de cryptografie (het coderen van boodschappen) en het zo goed mogelijk laten verlopen (optimaliseren) van processen, bijvoorbeeld produktieprocessen in bedrijven. Het theorema van Mordell zegt iets over de oplossingen in gehele getallen van bepaalde typen vergelijkingen.
In vaktaal luidt het: 'Een algebraïsche kromme van geslacht groter dan één heeft slechts eindig veel punten met rationale coördinaten'. Praktisch nut heeft deze stelling niet, maar theoretisch des te meer. Volgens prof. dr. M. Hazewinkel van

het Centrum voor Wiskunde en Informatica (voorheen het Mathematisch Centrum) te Amsterdam betekent Faltings' bewijs vooral een psychologische doorbraak, mede omdat er geen algemene theorie bestaat voor deze vergelijkingen: 'Eerst wisten we vrijwel niets van hun oplossingen, nu weten we dat het er maar eindig veel zijn. Dat is een grote stap voorwaarts. Maar we weten nog niet hoeveel oplossingen er zijn. Het kunnen er tien zijn, of een miljard, of nog veel meer. Helaas levert het bewijs van Faltings ons geen aanknopingspunten voor het antwoord op die vraag. Misschien kunnen we via een andere weg bewijzen dat er niet meer dan een bepaald aantal oplossingen is. Zo'n bovengrens is echter in de praktijk vaak zo groot dat het stuk voor stuk opsporen van de oplossingen met behulp van de computer zelfs in principe onmogelijk is. Daarvan zijn in de wiskunde wel meer voorbeelden.
Overigens is Faltings' bewijs wel illustratief voor de stormachtige ontwikkelingen die de zuivere wiskunde nu doormaakt. Opvallend veel lang openstaande theorema's zijn de laatste tijd bewezen, bijvoorbeeld het beroemde 'vierkleurenprobleem' (de vraag of je een landkaart met vier kleuren zo kan kleuren dat er geen landen met dezelfde kleur aan elkaar grenzen, het antwoord is ja)'.

Harde noot

Het theorema van Mordell gaat over zgn. diophantische vergelijkingen. Deze stammen al uit de oertijd van de wiskunde en zijn genoemd naar Diophantes van Alexandrië (3e eeuw na Chr.). De oplossingen ervan moeten gehele getallen zijn. Een eenvoudig voorbeeld is de vergelijking $x + y = z$. Deze heeft een oplossing $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$. Maar ook $x = 2$, $y = 2$, $z = 4$ is een oplossing, en zo kun je doorgaan. Het is duidelijk dat er oneindig veel oplossingen zijn. Iets ingewikkelder wordt het met de zgn Pythagoreische getallen, die moeten voldoen aan de vergelijking $x^2 + y^2 = z^2$ (genoemd naar Pythagoras, 6e eeuw voor Chr., dit heeft natuurlijk direct te maken met zijn beroemde stelling over de rechthoekige driehoeken). Oplossingen zijn bijvoorbeeld $x = 3, y = 4, z = 5$, of $x = 5, y = 12, z = 13$. Het is een eenvoudige opgave om aan te tonen dat ook deze vergelijking oneindig veel oplossingen heeft.

Maar de vergelijkingen $x^n + y^n = z^n$ voor $n = 3, 4, 5 \ldots$ bleken een heel wat hardere noot om te kraken. Door de eeuwen heen oefenden zij een magische aantrekkingskracht uit op de wiskundigen. Hierover gaat het 'laatste theorema van Fermat'. De Franse jurist Pierre de Fermat (1601-1665) beoefende in zijn vrije tijd de wiskunde, en wel op zo'n hoog niveau dat hij met Pascal en Descartes tot de grootste Franse wiskundigen van de zeventiende eeuw wordt gerekend. Hij vermoedde dat deze vergelijkingen géén oplossingen hebben. In zijn exemplaar van het boek van Diophantes schreef hij daarover in 1637: 'Ik heb een zeer opmerkelijk bewijs ontdekt, maar deze kantlijn is te smal om het op te schrijven'. Misschien bedroog Fermat zichzelf, en daarmee ook de wereld, want men wacht nog steeds op het bewijs, ondanks de grote hoeveelheid energie die vele generaties wiskundigen eraan hebben gegeven. Het is wel – met behulp van zeer ingewikkelde methoden – bewezen voor bepaalde klassen getallen en met de computer heeft men kunnen uitrekenen dat het vermoeden klopt tot $n = 100.000$, maar een algemeen bewijs ontbreekt. Sommigen begonnen zelfs te vermoeden dat het vermoeden van Fermat principieel nooit bewezen kon worden.

Praktijk

Nu zegt het theorema van Mordell dat bepaalde typen diophantische vergelijkingen, waartoe ook de Fermat-vergelijkingen voor $n = 4, 5 \ldots$ behoren, maar een eindig aantal oplossingen hebben. Hieruit volgt natuurlijk nog niet dat deze vergelijkingen géén oplossingen hebben, maar door dit theorema te bewijzen heeft Faltings het probleem van Fermat wel dichter bij zijn oplossing gebracht. Afgezien van hun grote historische rol zijn de Fermat-vergelijkingen op zichzelf niet zo belangrijk. Met name is er geen verband met enig praktisch probleem. Verscheidene andere diophantische vergelijkingen echter zijn direct of met één tussenstap afkomstig van praktische probleemstellingen. Prof. Hazewinkel: 'Maar dan zijn ze meestal veel ingewikkelder van structuur. Ze duiken bij de meeste produktieprocessen op, bijvoorbeeld als een schoenfabriek uit een stuk leer zoveel mogelijk schoenzolen wil snijden met zo efficiënt mogelijk gebruik van de apparatuur. In de coderingstheorie zijn er diophantische vergelijkingen voor het aantal bruikbare woorden in een bepaalde code. Het is heel goed mogelijk dat op sommige vergelijkingen uit de 'design theorie', een stuk wiskunde dat uit de toegepaste statistiek is ontstaan, het theorema van Mordell van toepassing zal zijn. Heel algemeen komen diophantische vergelijkingen overal voor waar een vraag rijst van het type: 'Op hoeveel manieren kan iets op zijn best worden gedaan?'. Zulke vragen doen zich ook voor bij verschillende problemen in de biologie en de natuurkunde'.

Grote gevolgen

Het 'theorema van Fermat' mag dan geen praktische betekenis hebben, de letterlijk marginale opmerking van drie en een halve eeuw geleden heeft wel enorme gevolgen gehad voor de ontwikkeling van de wiskunde. De algebraïsche getallentheorie en de algebraïsche meetkunde hebben zeer veel te danken gehad aan hardnekkige pogingen om 'Fermat' te bewijzen. Op haar beurt speelt die meetkunde een belangrijke rol in de door Faltings gebruikte methodes. Deze waren al eerder ontwikkeld door bekende wiskundigen, o.a. de Rus Shafarewitsj en de Amerikaan Tate. De eerste stap is om bij een algebraïsche vergelijking (d.i. een vergelijking waarin alleen de vier basisbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen voorkomen) het bijbehorende 'Riemann-oppervlak' te construeren. Zo vindt men bij de Fermat-vergelijking voor $n = 2$ een boloppervlak en voor $n = 3$ een ringvormig oppervlak. Eigenschappen van de vergelijking vindt men door de structuur van zijn Riemann-oppervlak te bestuderen. Dat is dan eigenlijk een meetkundig probleem. Belangrijk is het aantal gaten in zo'n oppervlak. In een bol zit geen gat, in een ring één, in een krakeling twee, etc. Het theorema van Mordell geldt voor alle algebraïsche vergelijkingen waarbij oppervlakken met twee of meer gaten horen. Wegens de algemeenheid van dit theorema en vooral van de bij het bewijs door Faltings gebruikte methodes zijn de verwachtingen omtrent de gevolgen van deze doorbraak nu hoog gespannen.

(De Letter W)

Dr H. M. Nieland studeerde theoretische natuurkunde in Utrecht. Na zijn promotie (Nijmegen, 1971) werkte hij bij het Rekencentrum der Rijksuniversiteit Groningen. Sinds 1981 is hij wetenschapsvoorlichter bij de Dienst Wetenschapsvoorlichting te Amsterdam.

Boekbesprekingen

Prof. dr. S. D. Chatterji e.a., *Jahrbuch Überblicke Mathematik 1981*, Bibliographisches Institut, Mannheim, DM 38,–.

Dit zevende deel uit deze serie geeft weer een aantal belangwekkende artikelen op diverse gebieden. Ook nu weer overzichtsartikelen voor een zo breed mogelijke lezerskring van niet-specialisten. Ik volsta met het geven van de titels van de artikelen:
Harmonische Räume; Catastrophe Theorie; A Survey of some Sparse Matrix Theory and Techniques; Normalformen von Bewegungen; Inessential Maps and Classical Euclidean Topology; Numerisches Rechnen – wie es ist und wie es sein könnte; Primzahltests und Primfaktorzerlegung; Anwendung von Monotoniesätzen zur Einschliessung der Lösungen von Gleichungen; Rubiks Zauberwürfel; Notiz zu ICME IV; Was ist Produktintegration?; Wolfgang Gröbner zum Gedenken; Encyclopedia of Mathematics and its Applications.

W. Kleijne

Prof. dr. S. D. Chatterji e.a., *Jahrbuch Überblicke Mathematik 1982*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 218 blz., DM 38,–.

Ook dit jaar heeft men weer geprobeerd:
'... eine Reihe von Aufsätzen zu bringen, die die Vielfalt der Mathematik und des mathematischen Lebens in lebendiger und leicht zugänglicher Form schildern'.
De volgende artikelen zijn opgenomen:
Chaos in Dynamics; Veralgemeinerte Integraltransformationen; Einige Betrachtungen über inverse Probleme, Identifikationsprobleme und inkorrekt gestellte Probleme; Geometrische Aspekte des Laplace-Operators; Heaps; Vektorrechner: Die schnellsten Rechenanlagen; Die Programmiersprache Ada; Nachruf auf Carl Ludwig Siegel; Leopold Vietoris – 90 Jahre; Eine Stilkunde des Raumbegriffs–Spekulationen zwischen Kunst- und Mathematikgeschichte; Experiments in Mathematics Education in Hungary; Zur Geschichte der Mathematik an der Technischen Universität Budapest; Mathematik in Berlin (1750-1933); Recent Books on the History of 19th and 20th Century Mathematics: An Essay and a Bibliography.

W. Kleijne

Aan de deelnemers van de nascholingscursus HEWET

Ondergetekenden zijn wiskundedocenten die op dit moment deelnemen aan de nascholingscursus HEWET in Haarlem. Dit betekent dat we het komende schooljaar met het nieuwe wiskundeprogramma van start gaan. Het materiaal dat voor het HEWET-team is ontwikkeld voor wiskunde-A en dat we de afgelopen weken hebben bekeken, stemt ons tot tevredenheid en heeft ons laten zien op welke wijze het nieuwe wiskundeprogramma vertaald is in concrete leerstof.
In onze groep is ter sprake gekomen dat er aan de invoering van het nieuwe programma in 1985 *op alle scholen* nogal wat haken en ogen zitten. Deze hebben geen betrekking op de inhoud van de beide nieuwe wiskundeprogramma's, maar hebben te maken met voorwaarden die ons inziens nodig zijn om een goede en verantwoorde invoering mogelijk te maken. Door middel van deze brief willen wij jullie hiervan op de hoogte brengen en tegelijk een aantal voorstellen doen.

1 *De tijd tussen de invoering van het nieuwe wiskundeprogramma op de 40 scholen en de invoering op alle scholen is te kort (1 jaar). Er kan onvoldoende gebruik gemaakt worden van de ervaringen van deze scholen.*
2 *De keuzebegeleiding van leerlingen in het vierde leerjaar vereist veel aandacht.* Hoe moeten/kunnen docenten op een verantwoorde wijze adviseren bij de keuze van wiskunde-A, wiskunde-B of beide?
Hoe kun je leerlingen zicht geven op wat ze aankunnen?
Hoe weet een leerling welke wiskunde voor hem/haar het meest geschikt is?
3 *Er heerst grote onbekendheid bij velen omtrent de invoering van de nieuwe wiskundeprogramma's.*
- *bij wiskundedocenten:*
voor hen betekent wiskunde -A en wiskunde -B een verandering van inhoud en werkwijze van het wiskundeonderwijs; er is een tekort aan nascholing; een snelle invoering zou kunnen betekenen dat het positieve karakter van dit nieuwe programma gedeeltelijk teniet wordt gedaan en dat wiskundedocenten extra worden belast.
- *bij dekanen:*
Aangezien de keuze voor wiskunde-A of wiskunde-B of beide gevolgen heeft voor de beroepsmogelijkheden van de leerlingen, is het belangrijk dat goed wordt nagedacht over de voorlichting aan leerlingen bij deze keuze; ons inziens zijn de dekanen daar niet voldoende op voorbereid. Bovendien is op dit moment nog niet bekend welke wiskunde door HBO-instellingen wordt geëist.
- *bij schoolleidingen en andere secties:*
Het is niet uitgesloten dat na de invoering van het nieuwe programma een groter aantal leerlingen wiskunde zal kiezen; dit heeft ongetwijfeld gevolgen voor de keuze van andere vakken. Kleinere scholen en scholen voor dag- en

avondonderwijs komen in de problemen omdat beide vakken aangeboden zouden moeten worden (in tegenstelling tot de huidige praktijk, waar wiskunde II niet per sé op de lessentabel hoeft voor te komen). Bovendien zal op een aantal scholen aan de lessentabel gesleuteld moeten worden (bijv. 8 uur we/7 uur wt nu wordt 8 uur wiA/8 uur wiB), met gevolgen voor de urenaantallen van andere secties.

4 *Er kan en moet nog beter worden nagedacht over het huidige materiaal.*
Vooral het wiskunde-A programma zal consequenties hebben voor het programma op de vierde klas. Weliswaar is er IOWO-materiaal, maar wij vrezen dat dit niet bij alle scholen voldoende bekend is. Scholen voor dag- en avondonderwijs hebben minder uren beschikbaar en kunnen minder eenvoudig het nu ontwikkelde materiaal gebruiken, niet alleen vanwege de tijdsdruk, maar ook vanwege de manier van werken. Het zou daarom een goede zaak zijn wanneer de ervaringen op dit gebied, opgedaan door de 2 dag- en avondscholen die bij de 40 scholen behoren, gebruikt kunnen worden.

Bovengenoemde overwegingen hebben er bij ons toe geleid dat wij er voor zijn de definitieve invoering op alle scholen van het nieuwe wiskundeprogramma één jaar uit te stellen. Dit betekent onder meer dat scholen bij het examen in 1986 nog de keus hebben tussen wiskunde-A/B en wiskunde I/II.
In die tijd zou dan een aantal zaken geregeld kunnen worden, naar onze mening noodzakelijk voor een verantwoorde invoering.
We noemen:

a de ervaringen van de 40 scholen gebruiken bij de definitieve invoering, met name betreffende de keuzebegeleiding, het materiaal voor de vierde klas, het materiaal voor het dag- en avondonderwijs en de consequenties van de invoering binnen de scholen.

b informatie geven aan alle wiskundedocenten, dekanen, schoolleidingen omtrent de nieuwe programma's.
We denken hierbij aan:
- het maken van een informatiebrochure, toegespitst op elk van bovengenoemde groepen en aan ieder persoonlijk toe te sturen
- het geven van gerichte nascholing aan genoemde groepen
- het houden van informatiebijeenkomsten
- het instellen van een begeleidingscommissie die adviezen geeft betreffende de keuze wiskunde-A en/of wiskunde-B. Deze commissie zou moeten bestaan uit dekanen, schoolleidingen, wiskundedocenten en leden van de bestaande begeleidingscommissie en van het HEWET-team.

Ook als uitstel niet plaats vindt, kan een aantal van deze aanbevelingen worden uitgevoerd.

Ons verzoek aan jullie is na te gaan in hoeverre jullie je hierin kunnen vinden. We hopen dat er op de eerstvolgende cursusmiddag tijd kan worden ingeruimd om over deze materie te praten.
Ons plan is een en ander op de jaarvergadering van de NVWL op 12 november a.s. naar voren te brengen.
We zouden het prettig vinden jullie reacties op onze plannen *voor 6 november* te vernemen.

We hebben contact met het HEWET-team, de begeleidingscommissie en het bestuur van de vereniging over deze plannen.
Hartelijk dank voor jullie medewerking.

Met vriendelijke groeten,

MarjaMeeder, Nico Olofsen, Rindert Reijenga, Jophien van Vaalen

Contactpersonen:
Jophien van Vaalen, Korte Prinsengracht 109, 1013 GR Amsterdam (Joke Smit Scholengemeenschap); tel.: 020-25 08 71.
Nico Olofsen, 2e Keucheniusstraat 6 hs, 1051 VR Amsterdam (Ignatius College); tel.: 020-82 99 40.

Amsterdam, 20 oktober 1983

Reactie van het bestuur

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft kennis genomen van het initiatief van een aantal docenten om te komen tot een verzoek aan het departement van onderwijs en Wetenschappen de invoering van wiskunde A en B op het v.w.o. een jaar uit te stellen.
Uit de brief spreekt een oprechte bezorgdheid voor leerlingen en leraren die binnenkort te maken krijgen met een aanzienlijke verandering in het wiskunde-onderwijs. Die bezorgdheid spitst zich toe op de problemen met betrekking tot de keuze die in de vierde klas door leerlingen in samenspraak met leraar en schooldecaan gemaakt zal moeten worden, een keuzeprobleem dat in het schooljaar 1984/1985 actueel wordt op alle scholen voor v.w.o.
Het bestuur deelt deze bezorgdheid en stelt het initiatief op hoge prijs.
Alvorens zich achter het initiatief te stellen wil het bestuur echter de pro's en contra's van integrale invoering in 1985 naast elkaar zetten en maakt daarbij dankbaar gebruik van de brief van de initiatiefnemers.

De kern van het probleem is als volgt.
Door de invoering van wiskunde A en B worden leerlingen gedwongen in de vierde klas een keuze te doen tussen wiskunde A, wiskunde B, zowel wiskunde A als B, geen wiskunde. Momenteel ligt die keuze minder ingrijpend tussen wiskunde I en geen wiskunde. (Dat ook wiskunde II gekozen kan worden is hier niet relevant, omdat dit geen gevolgen heeft voor de studiekeuze.) Momenteel kan een leerling, die nog niet goed weet wat voor studie te kiezen, zich bepalen tot wiskunde I, waardoor de definitieve studiekeuze nog open ligt tot in de zesde klas. Wie straks zijn toekomstmogelijkheden zo breed mogelijk wil houden zal moeten kiezen voor wiskunde A èn B.
Het kiezen voor beide wiskundevakken beperkt echter de mogelijkheden voor

andere vakken. Wil men zich dus beperken tot één van de wiskundevakken dan moet men een duidelijk beeld hebben zowel van de inhoud van elke daarvan, als van eigen interesse en capaciteiten en toekomstperspectieven.
Dit betekent dat de leerstof in de vierde klas goed uitgewogen en goed gedoseerd moet worden. Het betekent ook, dat zowel leraren als decanen een goed beeld moeten hebben van wat er voor de leerlingen op het spel staat.
Aan beide eisen wordt op de meeste scholen nog niet voldaan. Dit is althans de inschatting van de opstellers van de brief en het bestuur is geneigd hen daarin te volgen.
Voor scholen voor volwassenen-onderwijs komt daar dan nog een extra probleem bij dat de bovenbouw daar langer dan twee jaar is.

Bezien wij de *contra's* van integrale invoering in 1985.

- Er kan niet efficiënt gebruik gemaakt worden van de vierdeklaservaring van de 40 scholen, die in augustus 1984 met het nieuwe programma starten. Deze scholen doen in het nu lopende cursusjaar ervaring op met de keuze problematiek. De verwachting van de initiatiefnemers is, dat deze ervaringen niet tijdig doorgegeven kunnen worden naar alle scholen, die in het schooljaar daarop met hun vierde klas aan de slag moeten gaan. Er zijn natuurlijk wel ervaringen in de 12 scholen die al met het nieuwe programma zijn begonnen, maar die zijn wellicht onvolledig door de kleine en ook selecte groep.
- Het begint bij veel scholen nu pas langzaam duidelijk te worden, dat het nieuwe programma doorgevoerd zal gaan worden. Leraren en decanen moeten zich inwerken in de nieuwe problematiek. Dat kost tijd, nog afgezien van de beschikbare informatie, die momenteel nog summier is. Wiskundeleraren die een nascholingscursus gaan volgen doen dat in hetzelfde jaar als waarin zij hun leerlingen in de vierde klas duidelijk moeten kunnen maken waar het om gaat.
- Er is vierdeklasmateriaal gemaakt door het HEWET-team. Dit kan gebruikt worden naast of in plaats van gangbare leergangen. Dit materiaal kan gebruikt worden om de leerlingen ervaringen op te laten doen met verschillende aanpakken van wiskunde. Bezwaarlijk hierbij is dat het materiaal nog niet geïntegreerd is in een volledige leergang voor de vierde klas. Dat betekent, dat leraren veel tijd nodig hebben om op eigen kracht aan die integratie te werken. Ook daarbij hebben zij informatie nodig, die momenteel nog ontbreekt.
- De invoering van het nieuwe programma zal consequenties hebben voor de urentabel. Een goede samenspraak tussen collega's en schoolleiding hierover eist ook alweer een degelijke informatie.

Pro's voor de integrale invoering in 1985 zijn:

- Een tachtigtal scholen die al in 1984 wilden starten kregen daar geen toestemming voor. Op deze scholen was men blijkbaar van mening dat het daar kon. Een herhaalde afwijzing zou van die kant wel eens op sterke protesten kunnen stuiten.
- Hetzelfde geldt voor scholen, die geen verzoek hebben ingediend om eerder met het nieuwe programma te beginnen, maar zich wel degelijk nu al voorbereiden op de invoering in 1985.

- Een groot aantal leerlingen dat al wel in de vierde klas weet, dat zij een richting op willen waarvoor wiskunde A noodzakelijk en gewenst is, krijgt daarvoor de kans niet en moet zich twee jaar door de leerstof van wiskunde I worstelen. En dat terwijl nu al wel duidelijk is, dat de leerstof van wiskunde A uitermate geschikt is juist voor deze groep.

Overwegingen bij een *tussenoplossing*.
Het is het bestuur bekend dat zo'n half jaar geleden in de HEWET-begeleidingscommissie uitvoerig van gedachten is gewisseld over een mogelijk uitstel van de algemene invoering van de nieuwe leerplannen. Bovengenoemde pro's zijn daarbij aanleiding geweest dit uitstel niet aan te vragen.
Als tussenoplossing is ter sprake gebracht scholen in 1985/1986 de gelegenheid te bieden op vrijwillige basis te starten met wiskunde A en B.
Nadelen van deze oplossing zijn:

- er ontstaat een jaar waarin het w.o. en het h.b.o. te maken krijgen met een wel zeer divers aanbod van wiskundig-opgeleide studenten,
- verhuizingen van leerlingen van scholen met wiskunde A/B naar scholen met wiskunde I/II (of omgekeerd) zullen op grote schaal voorkomen met alle nadelen van dien.
- het nieuwe wiskundeprogramma zou op een groot aantal scholen gebruikt kunnen worden als concurrentiemiddel bij het werven van instroomleerlingen in de bovenbouw.

Op grond van deze bezwaren en na een peiling van de departementale ideeën omtrent uitstel, heeft de HEWET-begeleidingscommissie ook niet aangedrongen op deze tussenoplossing. Een uitzondering is gemaakt voor scholen voor volwassenen-onderwijs, o.a. vanwege het feit dat die scholen met een vierjarige bovenbouw werken. Voor die scholen is aangedrongen op de mogelijkheid tot uitstel (op vrijwillige basis). Het departement lijkt aan dit verzoek een willig oor te willen verlenen.

Maatregelen die genomen kunnen worden bij een eventueel uitstel.
De initiatiefnemers noemen:

a De ervaringen van de 40 scholen gebruiken bij de definitieve invoering, met name betreffende de keuzebegeleiding, het materiaal voor de vierde klas, het materiaal voor het dag- en avondonderwijs en de consequenties van de invoering binnen de scholen.
b Informatie geven aan alle wiskundedocenten, decanen en schoolleidingen omtrent de nieuwe programma's.
  We denken hierbij aan:
  - het maken van een informatiebrochure, toegespitst op elk van bovengenoemde groepen en aan ieder persoonlijk toe te sturen,
  - het geven van gerichte nascholing aan genoemde groepen,
  - het houden van informatiebijeenkomsten,
  - het instellen van een begeleidingscommissie die adviezen geeft betreffende de keuze wiskunde A en/of wiskunde B. Deze commissie zou moeten bestaan uit decanen, schoolleidingen, wiskundedocenten en leden van de bestaande begeleidingscommissie en van het HEWET-team.

Maatregelen die genomen kunnen worden als geen uitstel plaats vindt.

- Ervaringen van de 12 experimenterende scholen met vierdeklasmateriaal en met de keuzebepaling kunnen nu al worden doorgegeven.
  Het HEWET-team rekent zich tot taak om in dit schooljaar de wiskundedocenten van alle v.w.o.-scholen te informeren over de stand van zaken van het HEWET-experiment. Daartoe zal een aantal regionale bijeenkomsten worden georganiseerd, waarvan de eerste gepland is op 24 november 1983 in Haarlem en waarvoor 99 scholen (circa 20% van het totaal) zijn uitgenodigd.
- Het bestuur zal er bij het HEWET-team op aandringen om alle scholen ook op een andere wijze te informeren, bijvoorbeeld via een brochure.
- Voor het schooljaar 1984/1985 zijn er, zoals bekend, 32 nascholingscursussen gepland. Bij een gemiddelde van 25 cursisten per groep kunnen er dan 800 leraren worden voorbereid op de invoering van wiskunde A en B. De resterende wiskundeleraren kunnen in het daaropvolgende jaar deelnemen aan de HEWET-nascholing en hopelijk komt er nog een derde ronde.
- Wat betreft de decanen zij opgemerkt dat er in het blad 'Decanoloog' een artikel van C. Lagerwaard en J. de Lange heeft gestaan, waarin de consequenties van de keuze van wiskunde A of B bij verdere studie duidelijk worden uiteengezet. Dit artikel kan op een wat grotere schaal worden verspreid, bij voorbeeld in eerdergenoemde brochure.
- Het bestuur wil er graag bij de begeleidingscommissie HEWET en bij het departement op aandringen gerichte voorlichtingsbijeenkomsten te geven aan anderen dan wiskundeleraren, met name aan schooldecanen en schoolleiders.

Conclusies

De pro's en contra's van invoering in 1985 afwegend in samenhang met mogelijke maatregelen die genoemd zijn, is het bestuur van mening dat de pro's het winnen. Wel vindt zij dat de scholen voor volwassenenonderwijs een uitzondering moeten vormen en de gelegenheid moeten krijgen de invoering een jaar uit te stellen.
Het bestuur gelooft stellig dat de invoering van wiskunde A tegemoet komt aan de behoefte van een groot aantal leerlingen in het v.w.o. Het is de vraag of we nog een generatie leerlingen die wiskunde A moeten onthouden. Zeker nu in alle publikaties van departement en HEWET-team de verwachting is gewekt dat in 1985/1986 alle scholen zouden beginnen.

Vademecum voor de Wiskundeleraar

In de adreslijst van het Vademecum zijn veel wijzigingen. In verband daarmee zijn de bladzijden 100, 101, 102 en 103 (deels) hieronder in verbeterde versie opgenomen. Van de overige bladzijden zijn alleen de wijzigingen vermeld.

Mevr. drs. N. C. Verhoef	Grote Kreek 12	
	8032 JC Zwolle	038 - 53 89 57

gironummer 143917 t.n.v. de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam

Didactiekcommissie

drs. C. Holleman	A-Kerkhof 28	
	9711 JC Groningen	050 - 12 24 62
C. Th. J. Hoogsteder	Prins Mauritshof 4	
	7061 WR Terborg	08350 - 2 43 37

inlichtingen omtrent de commissie bij C. Th. J. Hoogsteder

Leesportefeuille

A. Hanegraaf	Heemskerkstraat 9	
	6662 AL Elst (Gld)	08819 - 24 02

gironummer 1039886 t.n.v. A. Hanegraaf te Elst

Euclides

F. H. Dolmans	Heiveldweg 6	
hoofdredacteur	6603 KR Wijchen	08894 - 1 17 30
Mevr. H. S. Susijn-van	Curaçaoweg 5	
Zaale	6524 ST Nijmegen	080 - 22 71 44
eindredactrice		
P. E. de Roest	Blijhamsterweg 94	
secretaris	9672 XA Winschoten	05970 - 2 20 27
dr. P. G. J. Vredenduin	Dillenburg 148	
penningmeester	6865 HN Doorwerth	085 - 33 38 07
Mevr. W. C. M. van	Souvereinhof 15	
Breugel	5551 TR Valkenswaard	04902 - 4 40 82
W. M. J. M. van Gaans	Basaltdijk 8	
	4706 DL Roosendaal	01650 - 4 31 65
dr. F. Goffree	Bremlaan 16	
	3537 KJ Bosch en Duin	030 - 78 37 23
W. Kleijne	Treverilaan 39	
	7312 HB Apeldoorn	055 - 55 08 34
L. A. G. M. Muskens	De Steenen Kamer 14	
	5481 GD Schijndel	04104 - 9 28 46
drs. C. G. J. Nagtegaal	Emmalaan 14	
	3581 HT Utrecht	030 - 51 14 78

gironummer 933434 t.n.v. de penningmeester van de redactie van Euclides te Doorwerth

Inspectie lbo

J. J. G. Toutenhoofd	Van Ghentlaan 9	
	1215 PN Hilversum	035 - 1 63 81

Inspectie avo

J. Boersma	Ninaberstraat 18	
	1461 BE Zuidoost-	
	beemster	02990 - 2 49 37
drs. B. J. Westerhof	Bakenbergseweg 108	
	6814 ML Arnhem	085 - 43 23 98

Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven

subsectie lbo-mavo

Nieuwe samenstelling wordt t.z.t. meegedeeld.

subsectie havo-vwo

drs. B. J. Westerhof	Bakenbergseweg 108	
vakcoördinator	6814 ML Arnhem	085 - 43 23 98
J. E. Broekhuizen	Dr. ten Bokkel Huininkweg	
namens de AVS	13	
	7241 HT Lochem	05730 - 15 57
dr. Th. J. Korthagen	Torenlaan 12	
namens de NVvW	7231 CB Warnsveld	05750 - 2 34 17

Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde

Prof. dr. H. J. A. Duparc	Insulindeweg 26	
voorzitter	2612 EM Delft	015 - 12 15 92
H. N. Schuring	Van Heemstralaan 21	
secretaris	6814 KB Arnhem	085 - 43 51 28
drs. J. M. Notenboom	Gerard Doustraat 5	
penningmeester	3583 SB Utrecht	030 - 51 66 75
Prof. dr. J. H. van Lint	Beukenlaan 15	
national representative	5671 AM Nuenen	040 - 83 14 66
ICMI		

Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde

drs. L. J. M. Kuijk	Ringweg 40	
voorzitter	6141 LZ Limbricht	04490 - 2 25 67
correspondentieadres		
F. H. Dolmans	Heiveldweg 6	
	6603 KR Wijchen	08894 - 1 17 30

Pythagoras

drs. L. J. M. Kuijk	Ringweg 40	
voorzitter	6141 LZ Limbricht	04490 - 2 25 67
drs. L. J. G. M. Wiegerink	Egelantierstraat 107^{II}	
secretaris	1015 PZ Amsterdam	020 - 25 28 83
drs N. T. Lakeman	Corn. Krusemanstraat 60^{II}	
eindredacteur	1075 NS Amsterdam	020 - 73 22 45

verdere wijzigingen
Stichting Jeugd en Wiskunde wordt opgeheven

CITO

schrappen F. Bosman

Onderzoek van Wiskundeonderwijs

drs. J. de Lange Jzn	Heerensteeg 10	
	2311 SJ Leiden	071 - 14 41 80

Nieuwe Wiskrant

drs. J. de Lange Jzn	idem	

SLO

drs. P. F. L. Verstappen		05416 - 15 77

Wiskundig Genootschap

Prof. dr. J. Korevaar	Universiteit Amsterdam	
voorzitter	Mathematisch Instituut	
	Roetersstraat 15	
	1018 WB Amsterdam	020 - 5 22 30 82
dr. ir. C. Roos	TH Delft	
secretaris	onderafd. wisk. en inf.	
	Julianalaan 128	
	2628 BL Delft	015 - 78 25 30

Mathematisch Centrum
naam gewijzigd in *Centrum voor Wiskunde en Informatica*

Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde

W. A. van der Spek	postbus 112	
	8900 AC Leeuwarden	058 - 15 35 72

tel. nr. WN, afd. periodieken wijzigen in 050 - 22 65 33

VVWL

tel.nrs. als volgt wijzigen:

dr. G. Bosteels		03 - 2 39 15 54
F. Laforce		03 - 4 40 31 94
A. Schoeters		03 - 2 37 90 72
Th. Coppens	Selbstbaan 24	03 - 6 65 05 97
R. Pelsmaeckers		03 - 4 49 74 51
Prof. dr. R. Holvoet		03 - 3 21 32 46
Prof. dr. A. Vermandel		03 - 8 28 29 88

toevoegen:

Prof. dr. A. Warrinnier	Ophemstraat 52	
redacteur voor de wiskunde	B-3031 Oud-Heverlee	016 - 47 76 07

Recreatie

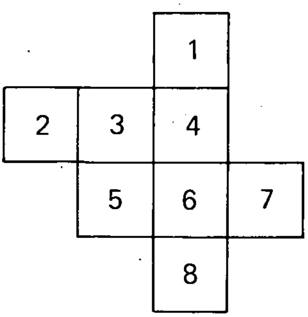
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

In de Dover Publications is verschenen George J. Summers, *Test your logic*. Het boekje bevat een serie van vijftig opgaven. Het speciale karakter is, dat men uitgaande van een aantal gegevens deductief een bepaald resultaat moet bereiken zonder zijn toevlucht te hoeven nemen tot een geniale ingeving. Zowel het een als het ander heeft zijn eigen charme.
Om u een indruk te geven van de aard van de opgaven hierbij een drietal.

504. *A* en *B* spelen een kaartspel met de volgende regels:
a als een van beiden met een bepaalde kaart uitkomt, moet de ander, als hij dat kan, een kaart van dezelfde kleur bijspelen; kan hij dat niet, dan mag hij bijspelen wat hij wil;
b een speler die een slag wint, moet in de volgende slag uitkomen;
c één van de vier kleuren is troef.
Gegeven is:
1 *A* heeft vier kaarten, t.w. schoppen, schoppen, harten, ruiten.
B heeft vier kaarten, t.w. schoppen, harten, klaver, klaver.
2 Elke speler komt twee keer uit.
3 Elke speler wint twee slagen.
4 Geen enkele keer worden in één slag twee kaarten van dezelfde kleur gespeeld.
5 Elke keer wordt met een andere kleur uitgekomen.
Vraag: in de hoeveelste slag werd er geen enkele schoppen gespeeld?

505. Acht kaarten liggen op tafel als volgt gerangschikt:

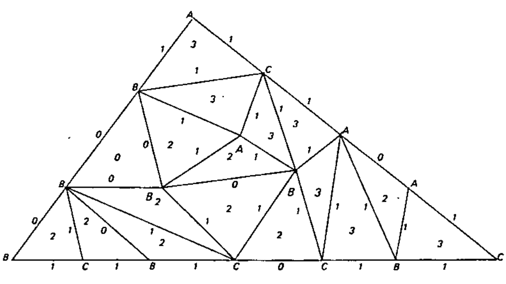


Gegeven is:
1 Er zijn twee azen, twee heren, twee vrouwen en twee boeren.
2 Elke aas grenst aan een heer.
3 Elke heer grenst aan een vrouw.
4 Elke vrouw grenst aan een boer.
5 Geen twee kaarten van dezelfde soort grenzen aan elkaar.
Vraag: welke kaart is nr. 6?
Opmerking. De auteur voegt nog als zesde gegeven toe: geen vrouw grenst aan een aas. Daar dit gegeven overbodig is, heb ik het weggelaten.

506. *A*, *B* en *C* hebben elk precies drie van de volgende vijf kwaliteiten: knap (van uiterlijk), sterk, geestig, intelligent en pathetisch.
Gegeven is:
1 Twee van hen zijn knap, twee sterk, twee geestig, twee intelligent en één pathetisch.
2 Van *A* weten we:
  a als hij geestig is, dan is hij knap
  b als hij knap is, dan is hij niet intelligent.
3 Van *B* weten we:
  a als hij geestig is, dan is hij intelligent
  b als hij intelligent is, dan is hij knap.
4 Van *C* weten we:
  a als hij knap is, dan is hij sterk
  b als hij sterk is, dan is hij niet geestig.
Wie is er pathetisch?

Oplossingen

501. Driehoek *ABC* wordt verdeeld in driehoeken. Geen hoekpunt van deze driehoeken is inwendig punt van een zijde van een andere. De hoekpunten worden *A*, *B* en *C* genoemd. Geen hoekpunt op de zijde *AB* heet *C*, geen op de zijde *AC* heet *B*, geen op de zijde *BC* heet *A*. Bewijs dat het aantal driehoeken met hoekpunten *A*, *B* en *C* oneven is.
Ken aan elke zijde met gelijknamige hoekpunten het getal 0 toe en aan elke zijde met verschillende hoekpunten het getal 1.
Ken aan elke driehoek het getal toe dat gelijk is aan de som van de drie getallen toegekend aan de zijden.
Aan een driehoek met drie dezelfde hoekpunten wordt dan het getal 0 toegekend;
aan een driehoek met precies twee dezelfde hoekpunten het getal 2;
aan een driehoek met drie verschillende hoekpunten het getal 3.
Bijv. als volgt:



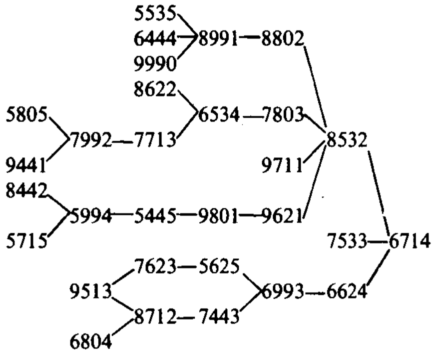
Tel de getallen toegevoegd aan de driehoeken op. De som is gelijk aan:
de som van de getallen toegevoegd aan de zijden op de omtrek van de grote driehoek en
twee maal de som van de getallen toegevoegd aan de zijden binnen de grote driehoek.
De som van de getallen toegevoegd aan de zijden op de zijde *AB* van de grote driehoek, is, gezien de restrictie, oneven, en eveneens de som van de getallen toegevoegd aan die op de zijden *AC* en *BC*.
De som van alle getallen toegevoegd aan de driehoeken, is dus oneven.
Het aantal driehoeken waaraan het getal 3 toegevoegd is, is dan oneven. Waarmee de stelling bewezen is.

502. Kies een getal van vier cijfers; niet alle cijfers hetzelfde. Vorm hieruit twee getallen door de cijfers in afdalende resp. opklimmende volgorde te rangschikken. Trek deze getallen af. Herhaal deze bewerking. Onderzoek wat het eindresultaat wordt.
Er zijn twee mogelijkheden:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ \hline a-d & b-c-1 & 9+c-b & 10+d-a \end{array} \quad \text{met } a \geqslant b > c \geqslant d$$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ \hline a-d-1 & 9 & 9 & 10+d-a \end{array} \quad \text{met } a \geqslant b = c \geqslant d \text{ en } a > d$$

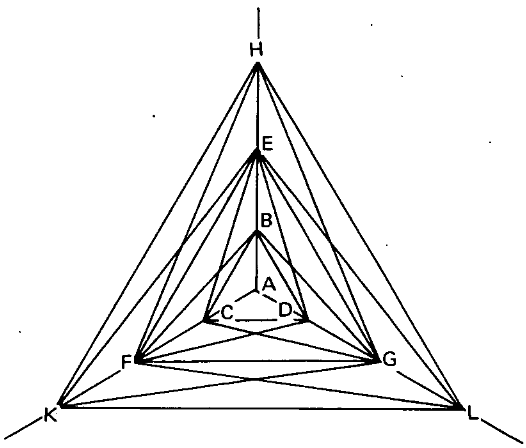
In het eerste geval zijn de uiterste getallen samen 10 en beide $\neq 0$. Dit geeft 25 mogelijkheden voor de vier cijfers.
In het tweede geval zijn de uiterste samen 9. Dit geeft 5 mogelijkheden.
In totaal moeten we dus 30 mogelijkheden individueel nagaan. Dit geeft:



Omdat 6714 weer 6714 geeft, is het eind steeds 6714.

503. Alle roostervierkanten van het vlak met hun diagonalen vormen een graaf waarin in elk hoekpunt (roosterpunt) acht lijnstukken samenkomen. Kan die in één trek doorlopen worden?
Begin in een hoekpunt A. De acht in A samenkomende lijnstukken moeten doorlopen worden. Als het achtste lijnstuk doorlopen is, zijn we weer in A terug en kunnen niet meer wegkomen. Het doorlopen van de graaf in één trek is niet mogelijk.
Oorzaak: als een eindige graaf met in elk hoekpunt een even aantal lijnstukken in één trek doorlopen wordt, is deze trek gesloten; een aftelbaar oneindige gesloten trek is echter niet mogelijk. (Precisering van de begripsvorming is noodzakelijk; ik laat dat aan de lezer over.)
Nu een triangulatie die wel in één trek doorlopen kan worden.

In het hoekpunt A komen een oneven aantal lijnstukken samen en in alle andere hoekpunten een even aantal.
Begin in A. Trek $ABCADB$. Dan is het vlakdeel begrensd door BCD geheel doorlopen op lijnstuk CD na.
Trek nu $BEFCDGBFDECGE$. Dan is het vlakdeel begrensd door EFG geheel doorlopen op lijnstuk FG na.
Zo kunnen we doorgaan. De triangulatie wordt dan in één aftelbaar oneindige trek doorlopen.



Boekbesprekingen

Ulco de Jong, Frans van der Heyden, *Computer Werk*. Malmberg ('s Hertogenbosch) 111 blz.

COMPUTER WERK is een leerstof pakket bestaande uit een leerlingentekst (*f* 17.95), een docentenhandleiding (*f* 10,-) en software om het leerlingen materiaal te ondersteunen (ongeveer *f* 200,-).
Met dit materiaal kunnen leerlingen ervaringen opdoen met allerlei facetten van burgerinformatica. Essentieel daarbij is het omgaan met een (micro)-computer. Leerlingen leren OVER informatica doordat ze werken met programma's, inzicht krijgen in de opbouw van een computer, principes van een programmeertaal leren hanteren, ...
Leerlingen maken kennis met veel TOEPASSINGEN van computergebruik en worden zich bewust van de MAATSCHAPPELIJKE consequenties die de opkomst en uitbreiding van de mechanische gegevensverwerking met zich mee brengt.
De auteurs hebben Basic als programmeertaal gekozen. Zij hebben een heel aanvaardbare methode ontwikkeld om een modulaire opbouw in programma's aan te brengen. Leerlingen leren problemen te analyseren in deelproblemen, de analyse wordt vertaald in blokschema's en de blokschema's worden gecodeerd in Basic. Door veelvuldig gebruik van subroutines blijft de modulaire opbouw ook in de programma's herkenbaar. Veel aandacht wordt besteed aan de leesbaarheid van de programma's.
Het leerlingenboek bestaat uit twaalf hoofdstukken. In hoofdstuk 1 is een uitgebreide leestekst opgenomen. Hierin worden diverse situaties opgeroepen waarin computers een rol spelen. De voorbeelden zijn zo gekozen dat een veelzijdig beeld van computertoepassingen kan ontstaan; bovendien zijn het voorbeelden die door de leerlingen herkend kunnen worden. Daarnaast is er een kennismaking met de micro-computer die in de klas aanwezig is.
In hoofdstuk 2 is de gas/water/licht rekening van een gemeentelijk energiebedrijf de aanleiding om de computer als rekenmachine te leren gebruiken. In hoofdstuk 3 wordt uitgelegd welke processen er zich in de computer afspelen bij die eenvoudige rekenopdrachten. De auteurs hebben in dit hoofdstuk de termen gepopulariseerd. Zo wordt er gesproken over 'opzichter', 'rekenlokaal', 'magazijn' waar bedoeld wordt de besturings- en de reken-eenheid van de Centraal Verwerking Eenheid (CVE), en het intern geheugen.
In de hoofdstukken 4 t/m 11 worden, steeds uitgaande van een probleem, verdere stappen gezet in de probleemanalyse, het vertalen in blokschema's en de codering in Basic. Problemen die als instap dienen zijn o.a. het schrijven van een brief (tekstverwerking), de uitslag vaststelling bij een WK

schaatsen, samengestelde interest, het maken van toetsen, het simuleren van een digitale klok op het beeldscherm en het vaststellen van een verkiezingsuitslag.
Het laatste hoofdstuk is weer een uitgebreide leestekst. Hierin zijn opgenomen een verdere uitwerking van de verhalen over opzichter en magazijn, historische ontwikkelingen van relais, transistor tot chip, beroepen rondom de computer, de macht en de gevaren van de computer.
De bijbehorende software is onmisbaar voor een goed verloop van een cursus. Het pakket bevat twee speelse programma's, een ter kennismaking met het fenomeen computer en een ter afsluiting van een cursus. Verder zijn er twee 'drill'-programma's, een over de voorrangsregels in het rekenen en een over het gebruik van variabelen in Basic. Daarnaast zijn er demonstratieprogramma's over de WK schaatsen. Maar er zijn ook 'gebruikers'-programma's voor de leerling, bijvoorbeeld een (simpele) tekstverwerker, een programma over leningen op annuïteitsbasis, een telefoonklapper, en enkele educatieve spelletjes. De software is leverbaar voor de meest gebruikelijke machines.
Het pakket is uitgeprobeerd in een drie mavo klas, een vier gymnasium klas en in een tweede en derde klas lhno. In de docentenhandleiding schrijven de auteurs hierover: 'De verschillen in de leerlingengroepen uitten zich in verschillen tijdens de uitvoering. In de tweede en derde klas lhno was sprake van een tamelijk gestuurde en centrale begeleiding, terwijl de leerlingen van 4 gymnasium het materiaal veel zelfstandiger doorwerkten.'
De lay-out van het leerlingen boek is erg druk. Er zijn veel foto's en tekeningen. Het verband met de tekst is er wel maar de leraar zal daar aandacht aan moeten geven, omdat soms het verband wel erg kryptisch is. De grote foto's aan het begin van ieder hoofdstuk verbergen dat er een nieuw hoofdstuk begint. Ook de titels van de hoofdstukken geven op een kryptische manier informatie over de inhoud. Niet elke leerling zal dat doorhebben.
Het pakket als algemene kennismaking met de informatica voor leerlingen van 12 tot 16 jaar wordt van harte aanbevolen. Het biedt veel aanknopingspunten met voor leerlingen bekende situaties, neemt veel onbegrip voor de computer weg en geeft net genoeg van een programmeertaal om er over mee te praten in huis-, tuin- en keukenconversaties.

N. van Etten

R. Lidl en G. Pilz, *Angewandte abstrakte Algebra I*, Bibl. Inst., Mannheim, ISBN 3-411-01620-5, 249 blz., DM 36,–.

Het boek is opgebouwd uit zes hoofdstukken. Drie ervan, I, IV en V bevatten de voor de toepassingen benodigde algebra en in de resterende drie staan de toepassingen centraal.
In hoofdstuk I worden halfgroepen behandeld, in hoofdstuk IV groepen en in hoofdstuk V ringen, moduli en algebra's. Deze hoofdstukken bevatten zeer veel, en niet alleen elementaire, informatie in de vorm van defінties, stellingen en bewijzen, regelmatig onderbroken door verduidelijkend en aanvullend proza alsmede vele voorbeelden en opgaven zodat de monotone stelling-bewijs-stelling-bewijs-cadans zoveel mogelijk wordt vermeden. Een aantal resultaten kan in dit beknopte kader natuurlijk alleen worden gegeven zonder bewijs, zoals: Sylowstellingen, hoofdstelling der eindig voortgebrachte abelse groepen, ontbinding in primaire idealen in Noetherse ringen, de basisstelling van Hilbert en de stelling van Wedderburn-Artin uit de structuurtheorie van ringen.
In de hoofdstukken II en III wordt ingegaan op toepassingen van halfgroepen in de informatica (theorie der automaten en formele talen), in de biologie (bij het kruisen van organismen en in de genetica) en in de sociologie (bij bestudering van sociale netwerken). In hoofdstuk VI worden toepassingen behandeld van groepen, ringen, moduli en algebra's in de wiskunde (gewone representaties van eindige groepen), in de chemie (symmetriegroepen van moleculen), in de systeemtheorie (gedrag van lineaire systemen als toepassing van de theorie van moduli over hoofdideaalringen) en in de computertechniek (gebruik van de chinese reststelling ter bekorting van rekentijd). In een laatste paragraaf van dit hoofdstuk worden op beknopte wijze verdere toepassingen van de algebra in de wiskunde, sociologie, logica informatica, natuurkunde, astronomie en kosmologie geschetst.
Het boek wordt besloten met een uitgebreide bibliografie met behulp waarvan de ongetwijfeld geïnteresseerd geraakte lezer via een duidelijk systeem van in de tekst aangegeven verwijzingen dieper op de bestudering der toepassingen kan ingaan.
Samenvattend is dit boek te beschouwen als een goede en goedkope gids voor het bijzonder

uitgebreide gebied van de algebra en zijn vele, in sommige gevallen verrassende, toepassingen. Vol verwachting kan dan ook worden uitgezien naar het verschijnen van het tweede deel.

M. A. J. G. van der Vlugt

P. M. Cohn, *Algebra*, vol. 1, 2^{e} druk, John Wiley & Sons, Chichester, 410 blz., £ 9,95.

Voor ons ligt het bekende leerboek der algebra van P. M. Cohn. De stof is op de welbekende en vrij traditionele wijze gegroepeerd: verzamelingen, afbeeldingen, gehele en rationale getallen, deelbaarheid en congruenties, groepen, vectorruimten en lineaire afbeeldingen, lineaire vergelijkingen, ringen, lichamen, determinanten, kwadratische vormen, uitbreiding van de groepentheorie (stelling van Jordan-Hölder, Sylow-groepen e.d.), ringen en modulen, normaalvormen voor matrices.
Een gedegen leerboek, met vele opgaven waarvan de uitwerkingen achterin het boek zijn opgenomen. Aanbevolen.

W. Kleijne

Prof. dr. G. Ewald, *Probleme der geometrischen Analysis*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 156 blz., DM 19,80.

Het meetkundige aspect, het zien, het weten en zien wat een formule of een begrip voorstelt, het zijn alle uitingen van het aspect waaraan dit boekje is gewijd: 'wir verbinden Anschauung mit präzisen Begriffen und genauer Formulierung von Sätzen und verstehen in diesem Sinne 'geometrische Analysis".
Zo probeert de schrijver van een groot aantal zaken uit de analyse een tekening te maken, een aanschouwelijke voorstelling te geven. Hij gaat hierbij allereerst in op het tekenen van figuren bij verschillende stand van het assenstelsel. Vervolgens analyseert en tekent hij diverse oppervlakken: de parabolische spiegel (elliptische paraboloïde), het paardezadel (hyperbolische paraboloïde), de ellipsoïde, de één- en de tweebladige hyperboloïde, het apezadel. Daarna gaat hij uitvoerig in op totale en partiële differentieerbaarheid, waarbij diverse functies ten tonele worden gevoerd. Steeds begeleiden tekeningen van de betreffende oppervlakken de tekst.
Zo ook met onderwerpen als extremen en zadelpunten van functies van twee variabelen, kromming, integreerbaarheid, dubbelintegralen, integraalstellingen van Green en Stokes e.d.
Het door de schrijver aangehaalde woord van Poincaré is wel zeer op z'n plaats:
'Wer wagt zu entscheiden, ob es besser sei, dass Weierstrass nie etwas geschrieben hätte, oder dass es keinen Riemann gegeben hätte?' Een boekje dat ik met veel interesse heb gelezen. Ik wil het dan ook van harte in de belangstelling aanbevelen.

W. Kleijne

Mededelingen

De negende gemeenschappelijke studiedag van NVvW en VVWL

Reminder: deze studiedag vindt plaats op *zaterdag 24* maart in motel Brabant te Breda.
Voor het programma, dat integraalrekening, lineaire algebra en differentiaal vergelijkingen behelst, zie het vorige nummer.
Lunchbijdrage van *f* 15,— s.v.p. storten *voor 15 maart*, onder vermelding 'lunch 24 maart'.
We hopen dat velen aanwezig zullen zijn en dat daardoor het contact tussen Vlamingen en Nederlanders weer verstevigd wordt.

Het bestuur

Examenbesprekingen 1984

De regionale besprekingen van het examen wiskunde voor HAVO worden gehouden op *vrijdag 11 mei 1984* van 16.00 h tot 18.00 h, voor VWO I van 19.00 h tot 21.00 h.
Het examen wiskunde II voor VWO wordt besproken op *maandag 14 mei 1984* te Utrecht in het Jaarbeurskongrescentrum van 19.00 h tot 21.00 h.
De open vragen van het examen wiskunde voor LBO-c, MAVO-c en MAVO-d worden besproken op *dinsdag 15 mei 1984* van 15.00 h tot 18.00 h.
Een nadere aankondiging volgt in het meinummer van Euclides.

Foutieve vermelding rekeningnummer Examen wiskunde l.O.

Van de staatssecretaris O & W ontvingen wij de volgende rectificatie:
'In het afschrift van mijn kennisgeving aan de Nederlandse Staatscourant van 22 november 1983 betreffende de staatsexamens voor de akte wiskunde l.o. 1984, welke u is toegezonden, is per abuis een foutief rekeningnummer vermeld.
Het juiste rekeningnummer is **437399** ten name van: de voorzitter van de examencommissie wiskunde l.o. te Almelo.'
Zie voor de betreffende mededeling Euclides 59, 5, pag. 277.

Examen wiskunde m.o.A. en m.o.B

De staatssecretaris van onderwijs en wetenschappen brengt ter kennis van belanghebbenden, dat degene die in 1984 wenst te onderwerpen aan het examen wiskunde m.o. A of m.o. B, af te nemen door de *Algemene Commissie, zich voor 1 mei 1984* dient aan te melden door storting van *f* 105,– op postrekening 172007 ten name van de voorzitter van de Algemene Examencommissie Wiskunde m.o. te 's-Gravenhage met vermelding van de *volledige naam* en *het adres* van de kandidaat en met de aanduiding *m.o. A* of *m.o. B*. Na 1 mei 1984 ontvangen de aangemelde kandidaten nadere instructies van de examencommissie.
Alle kandidaten worden geëxamineerd volgens de nieuwe programma's zoals die zijn omschreven in het 'Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde', jrg. 63 afl. 2, nov. 1975, blz. 86–93.
Men kan deze programma's verkrijgen door storting van *f* 2,– op bovengenoemde postrekening, met vermelding 'examenprogramma'.
Het schriftelijk gedeelte, zowel van het A-examen als van het B-examen, wordt afgenomen op *donderdag 23 en vrijdag 24 augustus 1984* in het congresgebouw te 's-Gravenhage.

COI-activiteiten

Het Centrum voor Onderwijs en Informatietechnologie (COI), gevestigd op de TH Twente, vestigt de aandacht op:
– *voorlichtingsmiddag* voor het v.o. op 8 februari 1984, kosteloos, telefonisch opgeven 053-89 21 90
– *cursus 'Burgerinformatica'* vanaf 10 april 1984 voor docenten die burgerinformatica (gaan) geven. Kosten *f* 250,–.
– *documentatie*
COI-doc 1, overzicht van instellingen in Nederland die zich met de computer in het onderwijs bezighouden;
COI-doc 2, 'Computertoepassingen in het onderwijs'.
Exemplaren zijn te verkrijgen door *f* 7,50 over te maken op gironummer 10.20.732 tnv TH Twente, postbus 217, 7500 AE Enschede, onder vermelding van COI-doc 1 of 2.
Overige informatie: tel. 053-89 21 90.

CWI-vakantiecursus

Het 'Centrum voor Wiskunde en Informatica' (voorheen het MC) zal in augustus 1984 weer een vakantiecursus voor leraren organiseren.
Onderwerp:
wiskundige achtergronden van en voor het HEWET-programma
Afhankelijk van het aantal deelnemers wil het CWI de vakantiecursus '84 in drie plaatsen verzorgen, te weten Amsterdam, Eindhoven en Zwolle en wel op donderdag en vrijdag in de laatste week van de zomervakantie van resp. de rayons 'west', 'zuid' en de 'rest' van Nederland'.
De kosten voor cursus en syllabus zullen ongeveer *f* 50,– bedragen.
Het CWI verzoekt ieder die in principe aan de cursus zou willen deelnemen dit nu al per briefkaart of telefoon aan onderstaand adres te melden:
Centrum voor Wiskunde en Informatica, t.a.v. de Heer C. E. Thomson, Postbus 4079, 1009 AB Amsterdam, Tel. 020-5 92 40 11/41 75.

Wiskunde & Onderwijs

Velen hebben hun abonnement over 1984 nog niet voldaan. Willen zij, ter vermijding van inningskosten, voor 10 februari *f* 23,– storten op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth?
Bij voorbaat mijn dank.

P. G. J. Vredenduin

Kalender

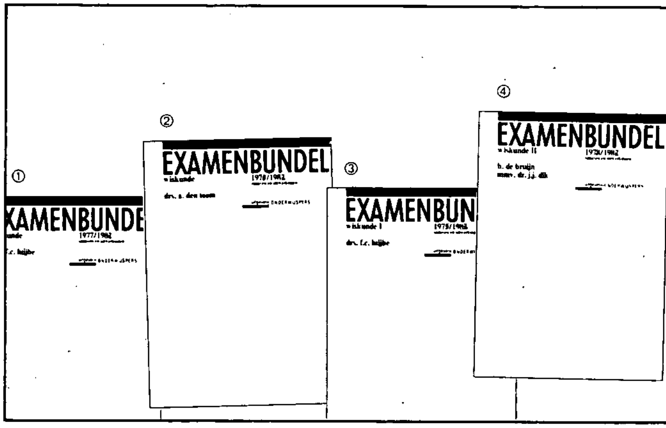
(zie voor nadere informatie ook de mededelingen hierboven en in de vorige nummers)
23-24 februari 1984: VULON congres, Beekbergen
woensdag 25 februari 1984: vergadering afgevaardigden besturen V&W (Vrouwen en Wiskunde) en NVvW, Utrecht
13-16 maart 1984: Bundestagung für Didaktik, Oldenburg, Duitsland
20-24 maart 1984: Internationale Lehrmittelmesse DIDACTA 84, Basel, Zwitserland
zaterdag 24 maart 1984: 9de gemeenschappelijke studiedag NVvW-VVWL, Breda
v.a. 10 april 1984: cursus Burgerinformatica, COI, Enschede
vrijdag 11 mei 1984: examenbesprekingen HAVO-VWO I
maandag 14 mei 1984: examenbesprekingen VWO II
dinsdag 15 mei 1984: examenbesprekingen LBO-c, MAVO-c en MAVO-d
zomervakantie 1984: CWI-cursus

opgaven en uitwerkingen

Leerlingen willen oefening. In de loop van het examenjaar als ze zich voorbereiden op schoolonderzoeken en na het laatste schoolonderzoek als ze zich voorbereiden op het examen. De ene leerling wil plotseling een serie oude examens doorwerken, de andere maakt het liefst systematisch iedere week een aantal opgaven. De een loopt makkelijk vast en heeft per opgave een duwtje nodig, de ander oefent moeiteloos maar wil wel steeds even weten of zijn werk in orde is.

Dankzij de uitwerkingen in onze EXAMENBUNDELS kunt u de *klassikale behandeling* van examens beperkt houden en hebt u meer tijd om in te gaan op de leerstof. Iedere leerling kan in zijn eigen tempo oefenen op de momenten dat hij zich het best concentreert.

De uitwerkingen maken ook een doeltreffender *individuele begeleiding* mogelijk. Zwakkere leerlingen die u extra laat oefenen kunnen hun werk zelf nakijken. Dat stelt ze in staat nauwkeurig aan te geven op welke punten ze nadere uitleg nodig hebben.



Bovendien scheppen de uitwerkingen de mogelijkheid tot *zelfstandige voorbereiding* op het examen in de periodes dat er geen lessen zijn: de vakanties en de laatste weken die voorafgaan aan het examen.
Onze uitgaven zijn verkrijgbaar bij de boekhandel. Wilt u inlichtingen, aarzelt u dan niet ons te bellen.

uitgeverij ONDERWIJSPERS
Hobbemakade 73
1071 XN Amsterdam
☎ 020-768026

① MAVO EXAMENBUNDEL WISKUNDE
1978 t/m 1983
f 10,-

② HAVO EXAMENBUNDEL WISKUNDE
1973 t/m 1983
f 12,50

③ VWO EXAMENBUNDEL WISKUNDE I
1975 t/m 1983
f 12,50

④ VWO EXAMENBUNDEL WISKUNDE II
1979 t/m 1983
f 12,50

een maand na het examen verschijnen bijgewerkte herdrukken, met daarin de opgaven van 1984

INHOUD

ADRESSEN VAN AUTEURS

H. Broekman, Ped. Did. Inst. der RU Utrecht, Heidelberglaan 2, postbus 80-120, 3508 TC Utrecht

H. Krammer, TH Twente, postbus 217, 7500 AE Enschede

Dr H. M. Nieland, Dienst Wetenschapsvoorlichting, Nieuwezijds Voorburgwal 120, 1012 SH Amsterdam

L. A. Rang, Traaij 92, 3971 GR Driebergen