

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

58e jaargang

1982/1983

no. 9

mei

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Mw. I. van Breugel - Drs. F. H. Dolmans (hoofredacteur) -
Dr. F. Goffree - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens -
P. E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders -
Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) -
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam. De contributie bedraagt f 45,- per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 30,-; contributie zonder Euclides f 25,-. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894 - 11730. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-550834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 7,- (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

ISSN 0165-0394

Het wiskundeonderwijs in evolutie!*

CHRIS DE MUNTER

De trends in het onderwijs van de wiskunde zijn zowel organisatorisch, inhoudelijk als didactisch te bekijken.

Hoe de ganse programmatie en verdeling van de leerstof over de zes leerjaren van het secundair onderwijs in Vlaanderen ineens zit werd op fantastische wijze door inspecteur R. Laumen uit de doeken gedaan.

Ik zal mij meer naar het didactisch aspect keren en mij voornamelijk bezighouden met het aangeven van hoe wiskundige begrippen en vaardigheden aangeleerd kunnen worden. Wiskunde en uiteraard het onderwijs ervan houdt zich bezig met begrippen en (reken)regels of spelregels. Zo krijgen we de structuren als geschenk.

In dit verhaal wil ik mij dan ook speciaal bezighouden met de begripsvorming en de structuurvorming en dit vervolgens illustreren aan de hand van voorbeelden. Daar de gevoeligheden op het gebied van het onderwijs in Nederland en Vlaanderen verscheiden zijn, wijs ik vooraf op de verschillen.

Begrippen vormen en structuren vormen zijn de topics waarmee de leerpsychologen zich speciaal bezighouden. De overgrote meerderheid beperkt zich tot het begripvormen en aanleren van spelregels. Dit is het gemakkelijkste. Hiertoe kan men zich laten leiden door de inzichten van J. Piaget, P. J. Gal'périn, L. S. Vygótskij, L. N. Lándá e.a.

In Nederland houdt men het momenteel bij de zienswijze van de Sovjetpsychologen en dit onder impuls van Prof. dr. C. F. van Parreren e.a. Zo worden het vormen van begrippen en het aanleren van regels primordiaal gesteld. (Hiervan getuigde de sprankelende voordracht van de heer De Lange.)

In Vlaanderen is de lijn niet zo duidelijk te trekken. Daar wonen immers Vlamingen. Door toedoen van Prof. dr. G. Papy heeft J. Piaget een tamelijk grote invloed. Het gevolg hiervan is dat men niet alleen aan begripsvorming wil doen en rekenregels wil aanleren maar dat ook de structuurvorming reeds in het secundair onderwijs aan bod komt. Volgens J. Piaget verloopt het denken precies volgens bepaalde patronen die men in de wiskunde structuren noemt.

* Voordracht gehouden tijdens de zevende gemeenschappelijke studiedag van NVvW en VVWL op 20 maart 1982.

1 Begripsvorming en structuurvorming

Uit een macroscopische analyse van de programma's valt ons op dat

1° wiskunde te maken heeft met begrippen en

2° wiskunde te maken heeft met rekenregels.

Beide vaststellingen hebben met elkaar te maken en, wat meer is, hebben met het leven van elke dag te maken.

Op het moment dat we bewust beginnen te leven ervaren we onze leefwereld als gestructureerd, alles is gereguleerd. Meestal wordt men dan aanhanger van het structuralisme. Men gaat uit van het feit dat alles gestructureerd is, tenminste impliciet gestructureerd. Aan ons te ontdekken hoe!

Axiomatiserende methode

De activiteiten die van ons verlangd worden zijn heel eenvoudig: zoek en ontdek de spelregels van de structuur. Door op deze wijze te werk te gaan maken we gebruik van wat we de axiomatiserende methode noemen.

P. Teilhard de Chardin daarentegen gaat uit van de veronderstelling dat alles voortdurend gestructureerd wordt, dat alles voortdurend evolueert.

Axiomatische methode

De chaos die ons omringt leggen we spelregels op die een structuur bepalen. Elk kinderspel, voetbal, damspel, schaakspel enz. is voor elk kind een dergelijke ervaring. Door op deze wijze te werk te gaan maken we gebruik van wat we de axiomatische methode noemen.

Door de leerlingen enerzijds een cosmos (een gestructureerde wereld) en anderzijds een chaos van dingen te laten ervaren, vervullen we een essentiële etappe in het leren te structureren. Dit structureren mondt uit in begripsvorming en structuurvorming, twee belangrijke opdrachten voor het wiskundeonderwijs. Niet te verwonderen dat J. Dieudonné in zijn antwoord aan R. Thom (American Scientist vol. 61) schreef:

1° The ultimate goal of teaching mathematics at any level certainly is to give the student a reliable 'intuition' of the mathematical objects he has to deal with!

2° The main goal should be to show a child how the raw and amorphous consciousness of space and time may gradually be organized into some logical structure.

Begripsvorming en structuurvorming zijn gewone fundamentele menselijke activiteiten.

Om tot activiteiten over te gaan moet er actie zijn en deze komt er door operationele rekenregels zoals J. M. Scandura dit zegt in Structural learning.

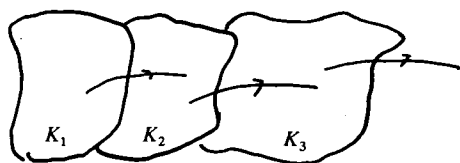
Begripsvorming

In mijn doctorale verhandeling [2] heb ik mij speciaal beziggehouden met de begripsvorming en de wiskundige context die de begripsvorming begeleidt. Binnen het kader van pregeordende¹⁾ verzamelingen worden classificeren en

¹⁾ Een preorde is een relatie die transitief en symmetrisch is.

rangschikken natuurlijke zaken. Begrippen worden gevormd door het uitvoeren van enkele 'expliciete' of 'impliciete' rekenregels. Dit komt tot uiting in

- 1° het maken van partities, waardoor classificaties optreden, en
- 2° het ordenen en rangschikken van deze klassen.



Figuur 1

Het vormen van de klassen (zoals in fig. 1 aangegeven) houdt niet in dat alles in extensie is opgeschreven of aanwezig is, zoals Prof. dr. H. Freudenthal dit aan dr. P. G. J. Vredenduin verwijt. Het aftelrijmpje $0 < 1 < 2 < \dots$ is hiervan een elementair voorbeeld.

De begripsvorming ontstaat door de activiteiten classificeren en rangschikken, uitgevoerd op een 'realiteit'.

Door het ontdekken en vergelijken van rekenregels uit $\mathbb{Z}$, $+$; $\mathcal{D}V$, $\cup$; $\mathbb{R}$, $+$; $\mathbb{R}_0$, $\cdot$; ... vormt men de klasse van de groepen en is men in staat het begrip groep te stichten.

Door op andere wijze te werk te gaan ontdekt men de 'wereld' en kan men hem verder opbouwen als een expansief heelal.

Structuurvorming

De structuurvorming kan op twee manieren gebeuren:

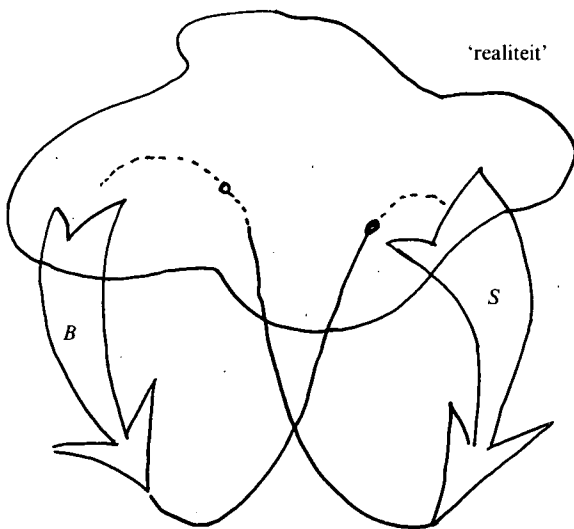
1° uitgaande van een cosmos, een gestructureerd geheel, waarop men rekenregels ontdekt;

2° uitgaande van een chaos, waarop men rekenregels legt.

Wanneer men de leerpsychologische werken inkijkt dan vindt men het zinvoller zich in de eerste situatie te bewegen dan in de tweede omstandigheid. Het is niet verwonderlijk dat een J. Piaget en zijn school aanhangers zijn van het structuralisme. Piaget gaat op ontdekkingstocht en deelt deze in fasen in. Deze fasen houden dan juist verband met het niveau waarop men op ontdekking kan gaan. Of men nu axiomatiserend te werk gaat of axiomatisch, in beide gevallen zullen we de activiteit axiomatiseren noemen.

Veel wiskundeonderwijs blijft hangen op het niveau van het ontdekken en het uitvoeren van de rekenregels. Tot het axiomatiseren in de echte zin van het woord komt het niet, zodat het deductief denken, zo typisch voor de axiomatische spelen of systemen, niet aan bod komt.

De activiteiten van de structuurvorming zijn dus het ontdekken van spelregels en deductie van nieuwe spelregels. Eens de verschillende spelregels ontdekt, kunnen – door de activiteiten van de begripsvorming – nieuwe begrippen opgebouwd worden. Zo ontstaan de zgn. structuren. We krijgen dus een voortdurende wisselwerking van de begripvormende activiteiten (B) en de structuurvormende activiteiten (S). Schematisch kunnen we dit zo voorstellen (fig. 2).



Figuur 2

Door de voortdurende wisselwerking tussen begripsvorming en structuurvorming wordt de 'cosmos' steeds meer individueel gestructureerd. Dit maakt de taak van de leerkracht bijzonder moeilijk maar tevens benijdenswaardig. Deze taak bestaat er voornamelijk in de leerling inzicht te doen verwerven in die 'cosmos' en hem meer en meer naar zijn hand te zetten. Hiervoor zal de leerling steeds verder moeten structureren. Hiermee kom ik in de geest van wat R. R. Skemp zegt in Wiskundig denken [4] p. 54.

2 Illustratie

Uit mijn doctorale verhandeling [2] neem ik nu de invoering van het begrip topologie en de structuur topologische ruimte over.

Het invoeren van het begrip topologie kan op veel manieren gebeuren. Alles hangt, zoals de Sovjetpsychologen zeggen, van de oriënteringsbasis af. Daar ik mij in het kader van pregeordende verzamelingen plaats ga ik uit van een familiestamboom.

Het vastleggen van de plaats van personen in zo'n stamboom kan op verschillende manieren gebeuren:

- Men kan gans de stamboom opstellen.
- Men kan de persoon (personen) geven samen met al zijn (hun) voorouders die in de stamboom voorkomen.
- Men kan de persoon (personen) geven samen met al zijn (hun) afstammelingen.

De wijze waarop de leerlingen het probleem van de plaats van een punt in een graf oplossen leunt aan bij de denkwijze van R. Dedekind, die leidde tot de invoering van de reële getallen [1] p. 319.

'Ist a eine bestimmte Zahl, so zerfallen alle Zahlen des Systems R in zwei Klassen, A_1 , A_2 , deren jede unendlich viele Individuen enthält; die erste Klasse A_1

umfasst alle Zahlen a_1 , welke $< a$ sind, die zweite Klasse A_2 umfasst alle Zahlen a_2 , welke $> a$ sind; die Zahl a selbst kann nach Belieben der ersten oder der zweiten Klasse zugeteilt werden, und sie ist dann entsprechend die grösste Zahl der ersten oder die kleinste Zahl der zweiten Klasse. In jedem Falle ist die Zerlegung des Systems R in die beiden Klassen von der Art, dass jede Zahl der ersten Klasse A_1 kleiner als jede Zahl der zweiten Klasse A_2 ist.'

Om de plaats te bepalen van een persoon of personen in een stamboom kunnen we twee soorten verzamelingen opschrijven:

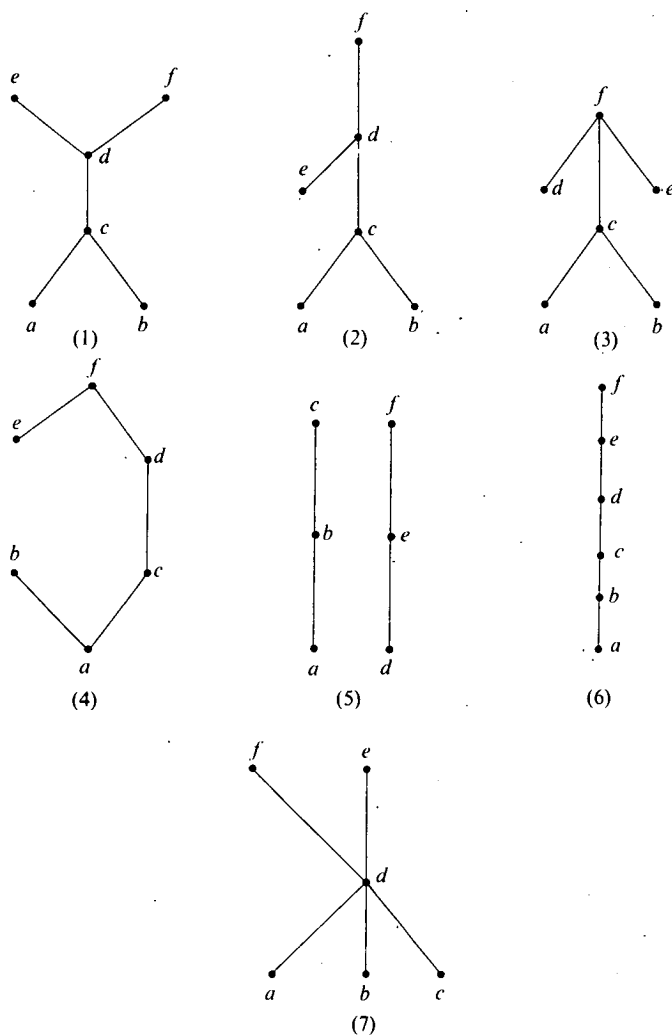
de verzamelingen A die als $a \in A$, alle afstammelingen b van a bevat;

de verzamelingen B die als $a \in B$, alle voorouders b van a bevat.

Deze twee verzamelingen stellen we onder de titel *samen met de afstammelingen* resp. *samen met de voorouders*.

Dit kan voor elk van de stambomen die we op de verzameling $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ kunnen aangeven.

Hier enkele stambomen op V (fig. 3).



Figuur 3

$\begin{array}{c} y \\ | \\ x \end{array}$ staat voor $\begin{array}{c} y \\ | \\ x \end{array}$ en zegt dat x afstamt van y .

We geven hier de twee klassen voor de stamboom (7):

samen met de afstammelingen	samen met de voorouders
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	$\{f\}, \{e\}$
$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$	$\{e, f\}$
$\{a, b, c\}$	$\{d, e, f\}$
$\{a, b, c, d\}$	$\{c, d, e, f\}, \{b, d, e, f\}, \{a, d, e, f\}$
$\{a, b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, f\}$	$\{b, c, d, e, f\}, \{a, c, d, e, f\}, \{a, b, d, e, f\}$
V	W

Op deze wijze krijgen we twee soorten deelverzamelingen van V , die we de linksen resp. de rechtsen noemen. De verzameling van de linksen noemen we $\mathcal{X}_l$, die van de rechtsen $\mathcal{X}_r$.

$\mathcal{X}_l$ | $\mathcal{X}_r$

Ze hebben resp. de eigenschappen:

Als $x \xrightarrow{\quad} y \in \mathcal{D} \in \mathcal{X}_l$	Als $x \in \mathcal{D} \in \mathcal{X}_r \xrightarrow{\quad} y$
dan $x \in \mathcal{D}$	dan $y \in \mathcal{D}$

Dit zijn dan wat de wiskundigen verzadigde delen van links resp. van rechts noemen.

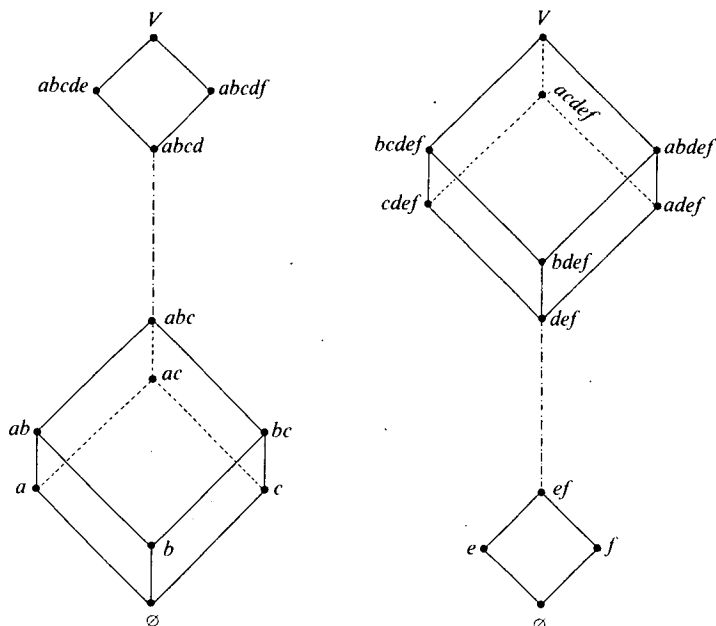
De verzamelingen $\mathcal{X}_l$ en $\mathcal{X}_r$ kan men volgens $\subset$ ordenen. Het Hasse-diagram brengt dan duidelijker inzicht in de band tussen beide. Zo niet, dan moet de leerkracht door een batterij gerichte vragen dit verband door de leerlingen laten ontdekken (fig. 4).

Op grond van de perceptie, de Gestalt, kan de volgende analyse doorgevoerd worden:

- 1 Waarom vinden we links en rechts hetzelfde Hasse-diagram (op een spiegeling na)?
- 2 Hoe komt het dat $\mathcal{X}_l$ en $\mathcal{X}_r$ evenveel elementen bevatten?
- 3 Door welke algebraïsche bewerking kan men van $\mathcal{X}_l$ naar $\mathcal{X}_r$ overgaan?
- 4 Welk verband bestaat er tussen de verzamelingen die door verschillende lijnen aan elkaar gebonden zijn?

Op de eerste drie vragen wordt door complementvorming voldaan. De spelregel luidt:

$$\mathcal{X}_l \subset \mathcal{D}V \rightarrow \mathcal{X}_r \subset \mathcal{D}V: X \rightarrow \overline{X}$$



Figuur 4

Elke *na-stam* van links wordt op zijn complement *voor-stam* in rechts afgebeeld, en vice versa.

Het ontdekken van deze dualiteit is belangrijk voor het inzicht in de mogelijke definities van topologie en laat de leerlingen het denken en handelen in een orderrelationeel kader beoefenen. Langs het ontdekken van de dualiteit komen de leerlingen stilaan tot het besluit dat het volstaat zich met één van de twee ($\mathcal{X}_l$ of $\mathcal{X}_r$) bezig te houden.

Topologie op eindige verzamelingen

Tot nu toe bleef de vraag: 'welke band bestaat er tussen verzamelingen die door verschillende lijnen aan elkaar verbonden zijn?' onbeantwoord.

Hier ontdekt men dat de bewerkingen $\cup$ en $\cap$ de band duidelijk maken. Men komt dan tot de volgende ontdekkingen:

- 1 $\mathcal{X}_l$ is gesloten voor de $\cup$
- 2 $\mathcal{X}_l$ is gesloten voor de $\cap$
- 3 $\cup \mathcal{X}_l = V \in \mathcal{X}_l$ en $\cap \mathcal{X}_l = \emptyset \in \mathcal{X}_l$

De bewerkingen $\cup$ en $\cap$ structureren $\mathcal{X}_l$ tot $\mathcal{X}_l, \cup, \cap$.

Analoog kan men de ontdekkingen doen voor $\mathcal{X}_r$.

Het isomorfisme van $\mathcal{X}_l, \cup, \cap$ naar $\mathcal{X}_r, \cap, \cup$

$$C_V: \mathcal{X}_l \rightarrow \mathcal{X}_r: X \rightarrow C_V X = X$$

wordt gemakkelijk ontdekt dank zij de bekende betrekkingen van De Morgan.

Meestal wordt een topologie op een verzameling bepaald door het aanbrengen van een verzameling open (of gesloten) verzamelingen. De bewerkingen $\cup$ en $\cap$ respecteren in enigermate deze kwaliteit.

Op een eindige verzameling V vinden we:

τ is een topologie op $V \Leftrightarrow \forall X, Y \in \tau: X \cup Y \in \tau \wedge X \cap Y \in \tau$ en bovendien $\emptyset \in \tau$ en $V \in \tau$

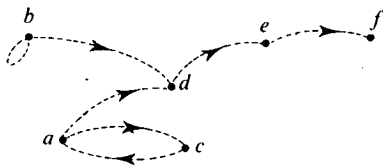
Noemen we de elementen van $\mathcal{X}_1$ open verzamelingen, dan ontdekken we in wat voorafgaat dat $\mathcal{X}_1$ een topologie bepaalt op de verzameling V .

Zijn de leerlingen niet gewoon redeneringen door dualisering uit te voeren, dan kan de controle op $\mathcal{X}_r$ hen steunen in de overtuiging dat dit in dit kader een geldige redeneervorm is.

De aard van de deelverzamelingen (na-stam, voor-stam) hangt af van de stamboomrelatie op V . Door verschillende stambomen op $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ te onderzoeken op grond van de verzadigde delen laat men de leerlingen aanvoelen dat de deelverzamelingen waarmee men de punten in V localiseert, afhangen van de relatie die op V gedefinieerd is.

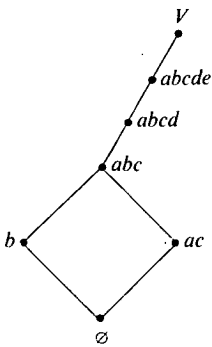
Een volgende stap in het structureren van een verzameling is hetzelfde spel te spelen met niet-stamboomrelaties.

De relaties op V , door volgende graf. bepaald (fig. 5).



Figuur 5

heeft als Hasse-diagram voor $\mathcal{X}_1$ figuur 6.



Figuur 6

Door verschillende relaties R op V te beschouwen en de $\mathcal{X}_1$ en $\mathcal{X}_r$ op te schrijven en te classificeren en te rangschikken ontdekken de leerlingen:

- 1 dat verschillende relaties dezelfde $\mathcal{X}_1$ en $\mathcal{X}_r$ kunnen definiëren;
- 2 dat het kennen van de verzameling $\mathcal{X}_1$ of $\mathcal{X}_r$ voldoende is om de plaats te beschrijven;
- 3 dat het niet zo belangrijk is de relatie R te kennen om topologie te bedrijven, dan wel de verzameling deelverzamelingen waarmee men de plaats gaat beschrijven.

Door axiomatiserend te werk te gaan komt men tot de definitie van een topologie op een eindige verzameling.

Uitbreiding van de strategie naar oneindige verzamelingen leidt tot het veralgemeend begrip topologie en uiteindelijk tot topologische structuren.

Een en ander hierover kan gelezen worden in [2].

Wanneer de allerindividueelste expressie van de allerindividueelste emoties een

weerklink vinden, dan krijgen we een trend. Ik hoop dat het wiskundeonderwijs, door meer nadruk te leggen op de begrip- en structuurvorming, zijn humane taak kan vervullen. Want meer en meer zal men een geoefende en gevormde geest boven een gedrilde geest nodig hebben.

Bibliografie

- [1] Dedekind R., *Gesammelte Mathematische Werke* (2 vol.). Bronx New York, Chelsea Publ. Co. 1919
- [2] De Munter Chr. J. B., *Pregeordende verzamelingen en het wiskundig denken*. Brussel, Eclectica, Monografieën door de Economische Hogeschool Sint-Aloysius 1981
- [3] Scandura J. M., *Structural learning I, Theory and research*. New York, London, Paris, Gordon and Breach, science publ. 1973
- [4] Skemp R. R., *The psychology of learning Mathematics*. Pinguin Books 1971
Nederlandse vertaling: *Wiskundig denken* (vertaald door T. van Dormolen). Utrecht, Antwerpen, Spectrum 1973, Aula 501
- [5] Van Parreren C. F. en Carpay J. A. M., *Sovjetpsychologen aan het woord*. Groningen, Wolters-Noordhoff 1972

Over de auteur:

Chris De Munter is hoogleraar aan de Economische Hogeschool St-Aloysius te Brussel. Hij was van 1965 tot 1968 assistent aan het Belgisch Centrum voor Methodiek van de Wiskunde en is sinds 1970 lector aan de Katholieke Universiteit te Leuven, waar hij de lerarenopleiding verzorgt.

Boekbespreking

E. Müller-Pfeiffer, *Spectral theory of ordinary differential operators*, Ellis Horwood Limited (Chichester, England) en John Wiley and Sons (New York), vertaald uit het Duits, 1981, 247 blz., £16.50.

In dit boek worden recente ontwikkelingen in de spectraaltheorie van zelfgeadjungeerde differentiaaloperatoren van even orde behandeld. De behandeling is gebaseerd op de theorie van de lineaire operatoren in de Hilbertruimte, waaraan een kort inleidend hoofdstuk (zonder bewijzen) gewijd is. Aan drie aspecten van de theorie wordt voornamelijk aandacht geschonken. Dat zijn ten eerste de ligging van het essentiële spectrum als functie van de coëfficiënten van de operator, ten tweede het geval dat er geen essentieel spectrum is (d.w.z. het spectrum is discreet) en ten derde het geval dat er geen eigenwaarden bestaan. Aan het speciale geval van operatoren van de tweede orde (Sturm-Liouville operatoren) is een afzonderlijk hoofdstuk gewijd. De behandelde theorie, voor specialisten bedoeld, omvat een aantal resultaten van de schrijver zelf. De literatuurlijst bestaat uit zestig verwijzingen en gaat tot en met 1978. De uitgave is goed verzorgd.

A. C. Zaanen

Cito-jammer

M. C. VAN HOORN

Inleiding

In Euclides verschenen onlangs twee artikelen van de hand van de heer H. Boertien, medewerker van het Cito ([1] en [2]). De artikelen gaan over het project Leerdoelgerichte Toetsen van het Cito, voor zover dit project het vak wiskunde betreft.

De artikelen geven een rooskleurig beeld van het project. Dat is jammer, want het project is in vele opzichten ondeugdelijk. In dit artikel wordt geprobeerd dat uiteen te zetten.

Opmerking

In dit artikel wordt met 'leerling' even goed bedoeld 'leerlinge', met 'leraar' even goed 'lerares', enz.

Leerdoelgericht werken

De heer Boertien beweert dat er steeds meer nadruk komt op een leerdoelgerichte werkvorm ([1], 1). Reeds zo lang er onderwijs bestaat zijn er leerdoelen geweest (bijvoorbeeld: leerlingen moeten het machtpunt van drie gegeven cirkels kunnen construeren). Pas recentelijk is ontdekt dat je over leerdoelen boeken kunt schrijven en dat je op die manier in je levensonderhoud kunt voorzien.

Uit de toelichting die de heer Boertien bij zijn bewering geeft blijkt geenszins dat de 'filosofie' achter leerdoelgericht werken nieuw is. Enkele zinsneden in die toelichting zijn onbeargumenteerd, zoals de zinsnede: 'Een leerling neemt immers in de les meestal slechts die zaken op die expliciet behandeld worden' ([1], ad 1.1). Zou dat ook gelden voor lange-termijn-leerdoelen?

Toetsing

De heer Boertien schrijft verder: 'Een van de beste stimulansen om er voor te zorgen dat de leerlingen de zaken juist leren, is het regelmatig onderzoeken of de gestelde leerdoelen bereikt zijn' ([1], ad 1.3). Wat wordt hier eigenlijk bedoeld?

Het zal toch niet zo zijn dat het voornaamste doel van toetsing is de leerlingen aan het werk te krijgen?

Zonder te ontkennen dat extrinsieke motivatie voorkomt, kan over toetsing wel meer gezegd worden. En dan gaat het niet alleen over formele toetsing, zoals toetsing door middel van proefwerken e.a. Een leraar stelt vragen in de klas, ziet hoe leerlingen werken en kijkt in schriften en krijgt daardoor indicaties over de vorderingen van de leerlingen. De leraar is in de klas bij uitstek de deskundige, zodat zijn commentaar, zijn hulp aan leerlingen en zijn reacties op vragen de leerlingen houvast geven. Houvast kan niet louter van formele toetsing afhankelijk zijn.

Over de frequentie, de aard en het belang van formele toetsen is discussie mogelijk. Maar in elk geval is formele toetsing slechts een middel en niet zelf een doel. Er behoeft hier niet over gediscussieerd te worden dat van tijd tot tijd formele toetsen wenselijk zijn. Leerlingen krijgen daarmee ook houvast. Maar formele toetsen moeten zó ingepast worden dat ze niet voortdurend leerprocessen, met name lange-termijn-leerprocessen, onderbreken. De leerdoelgerichte toetsen van het Cito bevorderen in de onderbouw slechts aandacht voor smalle korte-termijn-doelen, met verwaarlozing van samenhangen en van leerprocessen die meer dan 2 à 3 lessen in beslag nemen. Deze gevaren worden in de artikelen [1] en [2] in het geheel niet besproken.

Wiskunde-onderwijs in theorie en praktijk

Over wiskunde-onderwijs bestaat een uitgebreide literatuur. Er zijn verschillende theorieën die de onderwijspraktijk als uitgangspunt nemen. In zijn boek 'Wiskundeonderwijs nu' zet Lagerwerf theorieën over wiskunde-onderwijs naast elkaar ([4]). Men kan constateren dat er tussen diverse theorieën zekere overeenkomsten bestaan: algemeen wordt de verwerving van wiskundige kennis en vaardigheid gezien als een leerproces dat een opbouw kent, met verschillende fasen in het leren en niveaus van begrijpen.

Voor een eenduidige, strakke programmering van de wiskundelessen vindt men onvoldoende argumenten. Voorts leren geen twee leerlingen op dezelfde wijze. Het mag dus geen verbazing wekken dat sterk modelmatige werkwijzen (zoals DBK-werkwijzen) nooit een nationaal succes zijn geworden. De natuur is sterker dan de leer.

Een aspect van wiskunde is dat er samenhang is. Bij de verwerving van wiskundige kennis en vaardigheid zullen samenhangen daardoor een rol spelen. Maar een logische opbouw is nog geen didactische opbouw, zoals Freudenthal uitgebreid uiteenzet ([5]), en geen van beide is eenduidig bepaald.

In de artikelen [1] en [2] wordt niet over dit soort dingen gesproken. Daarin gaat het slechts over beheersing van leerdoelen. Naar de interpretatie van 'beheersing' moet men gissen; een leerling die een 10 haalt, zal het leerdoel beheersen (dat valt te hopen), maar wat beheerst een leerling die een 4, 5, 6, 7 of 8 haalt? Niets?

Wiskunde-onderwijs volgens het Cito

Het hoeft niet zo te zijn dat het Cito een veelomvattende visie op wiskunde-onderwijs ontwikkelt. Het is echter bedenkelijk dat belangrijke ideeën over wiskunde-onderwijs genegeerd worden.

In [1], 1 en 2, schrijft de heer Boertien over wiskunde-onderwijs. Hoewel daarin dubieuze uitspraken staan – waarover hiervoor werd geschreven – draagt het verhaal de pretentie van een zekere visie op wiskunde-onderwijs. Over toetsing staat in de inleidende paragrafen: ‘Vanwege het belang van een regelmatige toetsing...’. Er staat niets over het eventuele belang van een frequente formele toetsing. De lezer wordt slechts medegedeeld dat het Cito besloot te starten met het project Leerdooelgerichte Toetsen. Pas in [1], 3.3 blijkt meer: ‘Aangezien de toetsen moeten passen in een werkvorm waarbij toetsing nogal frequent optreedt, ...’ (bedoeld is formele toetsing). Hier wordt dus een eis aan de werkvorm gesteld, voor welke eis geen argumentatie is geleverd. Daarom geldt het volgende:

Stelling

Het zou het Cito sieren indien het de naam van het project (thans: ‘Leerdooelgerichte Toetsen’) zou wijzigen in ‘Toetsgericht Onderwijs’.

Een voorbeeld van samenhang

Leerstof-onderdelen die met elkaar samenhangen zijn: de constructie van loodlijnen, de constructie van het midden van een lijnstuk, definities van middelloodlijnen, eigenschappen van gelijkbenige driehoeken, eigenschappen van vliegers en ruiten, eigenschappen van koorden in cirkels; de bepaling van de symmetrie-as van de grafiek van een tweedegraads functie als twee nulpunten bekend zijn, enz.

Deze onderdelen komen in de diverse leerboeken in verschillende volgordes aan bod. Het is denkbaar dat leerlingen (sommige, niet alle) bepaalde eigenschappen van gelijkbenige driehoeken pas leren kennen tijdens een les over vliegers en ruiten. Zulks terwijl toch die eigenschappen expliciet aan de orde kunnen zijn gekomen bij de behandeling van gelijkbenige driehoeken. Zo kan het ook gebeuren dat sommige leerlingen bij de behandeling van parabolen samenhang gaan zien tussen middelloodlijnen en symmetrie-assen. Als er zulke dingen gebeuren, worden er belangrijke zaken geleerd.

Een leraar die zulke zaken terug wil vinden in de beantwoording van proefwerk-vragen stelt zich voor een opgave. Hij moet rekening houden met verschillende fasen in het leren en met verschillende niveaus van begrijpen. Door zijn vraagstelling zouden de leerlingen de gelegenheid moeten krijgen om hun ‘eigen’ antwoord te geven. Bij elke vorm van toetsing moet de leraar de waarde van gegeven antwoorden bepalen.

Het Cito denkt (?) deze problemen te hebben opgelost door slechts vragen op te nemen over één zogenaamd leerdooel per keer. Het zich voortdurend richten op zulke korte-termijn-doelen (tientallen, blijkens [3]) moet wel voorbij gaan aan

leerdoelen op middellange en lange termijn. Het gaat zeker voorbij aan de samenhang. Het Cito pretendeert ten onrechte de gedachten van leerlingen te kunnen raden. Dat blijkt overigens vaker ([6]).

Nog een voorbeeld van samenhang

Leerstof-onderdelen die met elkaar samenhangen zijn: het tekenen van een rechte lijn met gegeven vergelijking, het afleiden van zo'n vergelijking als twee punten van de lijn gegeven zijn, het oplossen van eerstegraads vergelijkingen, het bepalen van snijpunten van rechte lijnen, het manipuleren met coëfficiënten en haakjes bij het herleiden van eerstegraads veeltermen, het bepalen van de parameters (coëfficiënten) van een tweedegraads functie als drie functiewaarden gegeven zijn, het oplossen van stelsels eerstegraads vergelijkingen, het bepalen van de snijlijn van twee vlakken, enz.

Hierbij past een soortgelijk verhaal als bij het vorige voorbeeld. De hier genoemde leerstof-onderdelen, en ermee samenhangende onderdelen, vormen een leerstofgebied dat veelvuldig aan bod komt. Er zijn diverse lange-termijndoelen bij te noemen. Een leraar wil wellicht weten of en in hoeverre zulke doelen na 1 maand, na $\frac{1}{2}$ jaar, na 1 jaar, na 2 jaar bereikt zijn. Dat geldt ook voor veelomvattende leerdoelen als: leerlingen moeten deductief kunnen redeneren. Het Cito helpt leraren daarbij niet. In [2] schrijft de heer Boertien dat de Cito-toetsen bij lange-termijndoelen na $2\frac{1}{2}$ of 3 jaar afgenomen moeten worden.

Eindtoetsen

De lange-termijndoelen van het Cito zijn dus einddoelen. En de heer Boertien prijst de bijbehorende toetsen dan ook aan als selectiemiddel ([2], 3). Dit doet hij ondanks het feit dat de voorspellende waarde van deze toetsen onbewezen is, zoals hij zelf schrijft.

In zijn toelichting valt nog te lezen: 'Omdat de toetsen zodanig geconstrueerd zijn, dat zo weinig mogelijk een beroep gedaan wordt op beheersing van algoritmen en rekenregels, ...'. Vindt het Cito dat beheersing van algoritmen en rekenregels niet thuis hoort in lange-termijndoelen? Waar haalt het Cito zulke ideeën vandaan?

De korte-termijndoelen zijn kennelijk eveneens einddoelen. De heer Boertien schrijft ([1], 3.1) dat de toetsen moeten aansluiten bij het gegeven onderwijs. Maar nergens schrijft hij over aansluiting van het te geven onderwijs bij toetsresultaten. Hoeft dat niet?

Eén keer, in [1], 3.5.2 schrijft hij over het maken van een foutenanalyse. Dat kan zijns inziens in het geval dat de hele klas de toets gemaakt heeft. Maar een leraar die zijn leerlingen kent – mede op grond van proefwerkresultaten – en die tijdens zijn lessen kijkt hoe zijn leerlingen werken weet eerder en beter welke fouten er gemaakt worden, en kan sneller en efficiënter hulp bieden. Wat moet zo'n leraar met een kast vol correctiemallen?

Een Cito-onderzoek

Door het Cito verricht onderzoek moet gewantrouwd worden. Er is althans een voorbeeld voorhanden van een Cito-onderzoek dat niet deugt. In [7] staat een beschrijving van een 'onderzoek' naar de zogenaamde 'interbeoordelaars-betrouwbaarheid'.

Aan 5 beoordelaars werd gevraagd het examenwerk van 20 leerlingen na te kijken. Geen statisticus durft in zo'n geval het 'onderzoek' voor zijn rekening te nemen; in [7] staat evenwel een tabel met 75 gemiddelde scores (in 2 decimalen), door de 5 beoordelaars toegekend op 15 onderdelen van vraagstukken; de 5 gemiddelde scores bij één vraagstuk-onderdeel zijn daarna herleid tot één gemiddelde score (ook in 2 decimalen). Met behulp van zulk cijfermateriaal 'bewijzen' de auteurs vervolgens wat ze willen bewijzen. Ze noemen zelf al drie effecten ([7], 2) die 'mogelijk wel werkzaam' zijn, maar ze doen geen enkele poging om deze effecten te meten. En met geen woord wordt gesproken over de selectie van de 5 beoordelaars en de 20 leerlingen. Met hetzelfde gemak zou het 'onderzoek' uitgevoerd kunnen zijn met 2 in plaats van 5 beoordelaars.

In elk geval is de Nederlandse taal verrijkt met een woord van 32 letters.

Zand erover.

Nog een Cito-onderzoek

Kenmerkend voor de wijze waarop het Cito de zaken aanpakt is een door de heer E. J. J. Kremers beschreven onderzoek ([8]).

Affectie en motivatie voor wiskunde worden onderzocht met een meerkeuzetoets (het Cito wenst zijn faam als meerkeuze-instituut te bestendigen). De gesloten vraagvorm heeft tot gevolg dat de desbetreffende leerlingen Cito-formuleringen moeten interpreteren, zonder dat het Cito weet of ze de Cito-interpretatie kiezen. En de consequentie is dat het Cito terecht komt in een moeras van 'psychometrische' effecten. De heer Kremers weet beslist niet of verschil in scoring tussen MAVO en LHNO mede veroorzaakt wordt door verschil in leesvaardigheid.

Waarom zulke rompslomp, als met klassegelassen, individuele gesprekken, open enquêtes en dergelijke, een deel van de psychometrische effecten verdwijnt? Leraren kunnen bovendien geïnteresseerd zijn in de ontwikkeling (positief of negatief) van affectie en motivatie voor wiskunde in de loop van de tijd.

Hiermee is niet gezegd dat het desbetreffende artikel niet de moeite waard zou zijn. Het geeft een overzichtelijke inleiding op de (zeker lastige) materie en de auteur stelt zich bescheiden op als het gaat om het geven van verklaringen. Dat (ook) deze auteur zijn vragenlijst geschikt vindt voor diverse gebruiksmogelijkheden ([8], blz. 308) moet men maar op de koop toe nemen.

Toetsen onafhankelijk van leerboeken?

Alvorens de zogenaamde leerdoelgerichte toetsen te ontwikkelen heeft het Cito leerboeken geïnventariseerd ([9]). De meest frequent gebruikte leergangen

worden in feite tot norm verheven ([1], 3.1). Eén gevolg daarvan zal zijn dat de vragen vaak in verzamelingentaal geformuleerd worden. In het algemeen werkt een standaardisering conserverend; wil het Cito dat?

Onderzoek naar leerboeken-gebruik wordt van tijd tot tijd herhaald, maar de lezers van [1] en [2] blijven in het ongewisse over de vraag of sommige toetsen al zijn gewijzigd ten gevolge van gewijzigd leerboekengebruik.

In [1], 4 staat: '(dit) sluit niet uit dat de toetsen bij andere dan de genoemde leergangen ook goed bruikbaar zijn'. Tja, waarom zouden toetsen dan gewijzigd moeten worden?

De vraagvorm

Voordat het Cito bestond braken slechts weinigen zich het hoofd over de vorm waarin vragen aan leerlingen gesteld zouden kunnen worden. Bij schriftelijke toetsing waren open vraagvormen regel. Met open vragen is een veelvormige en gevarieerde vraagstelling mogelijk. Het is niet uitgesloten dat sommige open vragen tamelijk gesloten zijn; zoals:

- van een rechthoekige driehoek zijn de lengtes van de rechthoekszijden 20 en 21; bereken de lengte van de schuine zijde.

Binnen het Cito breken nog steeds slechts weinigen zich het hoofd over de vraagvorm, naar het lijkt. Meerkeuzetoetsen zijn snel te corrigeren, dat is zeker. Voor het overige blijft het een raadsel waarom alleen maar meerkeuzetoetsen worden geproduceerd bij het project 'Leerdoelgerichte Toetsen'. Hiermee wordt niet beweerd dat meerkeuzevragen nooit zouden mogen. In [10] geeft Van Dormolen aan dat meerkeuzevragen soms nuttig kunnen zijn.

In [1] staat over het gebruik van meerkeuzevragen onder meer het volgende: 'Een wijidverbreed misverstand betreffende de vraagvorm is dat men met meerkeuzetoetsen niet op verantwoorde wijze complexe vaardigheden zou kunnen toetsen' ([1], 3.3). De heer Boertien denkt dit 'misverstand' te bestrijden door mede te delen dat het met open vragen ook niet altijd meevalt om complexe vaardigheden te toetsen. Zo'n mededeling bewijst uiteraard niets voor meerkeuzevragen.

Even later, in [1], 3.5.1 staat: 'Omdat de opgaven in de leerdoelgerichte toetsen in het algemeen gericht zijn op het meten van afzonderlijke leerdoelen en niet bedoeld zijn om de beheersing van geïntegreerde leerdoelen vast te stellen, ...'. Wil de heer Boertien misverstanden verbreiden?

Open-vraag-leerdoelen

Hieronder volgt een opsomming van leerdoelen die niet, of niet behoorlijk, te toetsen zijn met meerkeuzevragen. Naar volledigheid is niet gestreefd.

- A Alle leerdoelen die een meetkundige constructie vragen. Bijvoorbeeld: de constructie van het midden van een lijnstuk, de constructie van een driehoek met drie gegeven zijden, de constructie van een rechte hoek, de translatie van een lijnstuk, de lijnspiegeling van een punt, enz. Begripsvorming inzake (bijvoorbeeld) middelloodlijnen wordt bevorderd door de constructie van

het midden van een lijnstuk met passer en liniaal, door de lijnspiegeling van punten enz.

- B Alle leerdoelen die het tekenen van een grafiek vragen. Hierbij valt te denken aan: een lijn met gegeven richtingscoëfficiënt door zeker punt, het kiezen van de eenheden langs coördinaat-assen, het uitvoeren van transformaties op grafieken, enz.

Er is discussie over de vraag in hoeverre grafieken (en constructies) thuis horen in einddoelen, maar ze vormen ongetwijfeld onmisbare hulpmiddelen ([10]).

- C Alle leerdoelen waarbij een vergelijking van de vorm $x^2 = a$ ($a \in \mathbb{R}^+$) optreedt, die opgelost moet worden voor $x \in \mathbb{R}$. Het is uiterst wenselijk dat leerlingen een vergelijking als $x^2 = 25$ zonder enige hint volledig oplossen. Een meerkeuzevraag geeft onder andere de volledige oplossing, al dan niet verdekt opgesteld.

- D Vele andere leerdoelen waarbij substitutie in een vergelijking mogelijk is. Het is zeker belangrijk dat leerlingen kunnen substitueren, maar bij het oplossen van vergelijkingen komt méér kijken:

$\frac{3}{4}x = 2\frac{1}{4}$ oplossen betekent delen en/of vermenigvuldigen van breuken; $x = 3$ substitueren is iets heel anders;

$2x - 9 = 6x + 5$ oplossen is iets heel anders dan links en rechts $x = -3\frac{1}{2}$ substitueren.

- E Veel leerdoelen waarbij herleidingen voorkomen. Bij het oplossen van vergelijkingen vindt herleiding plaats; dat is ook het geval bij ontbinding in factoren, eliminatie van haakjes e.a. In al deze gevallen moet de leerling de zaak aanpakken door een passende redenering te zoeken. Bij gebruik van meerkeuzevragen is niets te bewijzen omtrent gekozen redeneringen of gebruikte oplossingsmethoden. Ook zogenaamde goede afleiders leveren daartoe geen bewijs.

- F Alle leerdoelen waarbij het nodig is dat leerlingen een precieze formulering leveren. Dat leerlingen dat kunnen mag een belangrijk lange-termijn-doel genoemd worden. Volgens de heer Boertien mag dit belangrijke lange-termijn-doel zelfs niet getoetst worden ([1], 3.3).

Nog een stelling

Het zou het Cito sieren als het luid en duidelijk bekend zou maken dat met de zogenaamde 'Leerdoelgerichte Toetsen' zeer veel belangrijke leerdoelen niet getoetst kunnen worden.

Schijn

Het Cito heeft maar liefst 86 leerdoelen geformuleerd bij de wiskunde in onder- en middenbouw ([3]). Dit beoogt kennelijk de schijn van volledigheid te wekken. De hiervoor gegeven opsomming van open-vraag-leerdoelen beoogt aan te geven dat de Cito-lijst van 86 leerdoelen zeer onvolledig is. Wiskunde leren is onder meer het leren van vele met elkaar samenhangende vaardigheden. Het Cito schijnt daar geen weet van te hebben.

In [2], 2 staan 6 zogenaamde lange-termijn-doelen. In 3 van die 6 leerdoelen komt de frase ‘De leerling kan controleren ...’ voor. Ja, de leerling kan controleren of het regent, maar de leerling kan geen regen maken.

In de overige in [2], 2 genoemde leerdoelen komt de frase ‘De leerling kan controleren ...’ niet voor. Toch is ook daarbij controleren soms al toereikend, zoals uit de vraag blijkt die hierbij afgedrukt is.

Leerdoel: De leerling kan gegevens overzichtelijk weergeven (bijvoorbeeld in een tabel, diagram, grafiek of figuur) en dat overzicht gebruiken bij de oplossing van een probleem.

Cirkel c gaat door de punten $(0, 0)$, $(-2, 0)$ en $(4, 2)$.

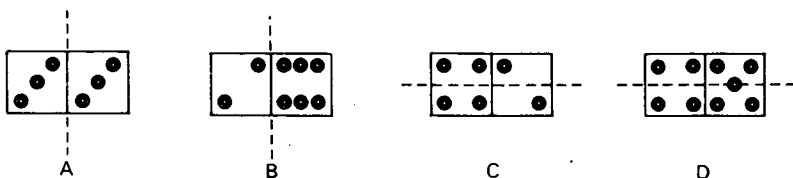
Het middelpunt van deze cirkel is

- A $(0, 5)$
- B $(0, 6)$
- C $(-1, 6)$
- D $(-1, 7)$

(namelijk: de leerling tekent de punten $(0, 0)$, $(-2, 0)$ en $(4, 2)$ en probeert met een passer welk van de punten $(0, 5)$, $(0, 6)$, $(-1, 6)$ of $(-1, 7)$ bruikbaar is als middelpunt).

Ook in [1] staat een aantal voorbeelden. Waaronder het volgende.

Van welke dominosteen is de gestippelde lijn symmetrie-as?



Controleren is weer voldoende. Deze meerkeuzevraag is bovendien heel onzorgvuldig geformuleerd: ten eerste gaat het niet om de symmetrie-as van een dominosteen, maar om de symmetrie-as van het patroon op een dominosteen; en ten tweede deugt de formulering ‘de gestippelde lijn’ niet, omdat er vier gestippelde lijnen staan.

Wat wordt getoetst?

Over het project ‘Leerdoelgerichte Toetsen’ is al vaker gepubliceerd. Een introductie-artikel is [11]. De heer Boertien is de eerste die de Cito-voorkeur voor meerkeuzevragen probeert te onderbouwen; in [11] wordt dat nog niet geprobeerd.

Gebruik van meerkeuzevragen houdt in dat oneigenlijke zaken getoetst kunnen worden. In de Wiskrant heeft Freudenthal driemaal over dit onderwerp

geschreven ([12], [13] en [14]). Dat behoeft hier niet integraal herhaald te worden. De artikelen [12], [13] en [14] geven niet alleen aan dat meerkeuzevragen vaak een inadequaat toetsmiddel vormen, maar ook dat irrelevante vaardigheden méé worden getoetst, en dat de zogenaamde afleiders de vraag kunnen bederven. Het is denkbaar dat meerkeuzetoetsen verbeterd worden. Het is ondenkbaar dat met meerkeuzetoetsen alle relevante vaardigheden, en alleen relevante vaardigheden, getoetst worden.

Bijverschijnselen

De heer Boertien beweert dat 'blind' gokken bij meerkeuzetoetsen weinig voorkomt, hetgeen uit onderzoek zou zijn gebleken ([1], 3.3). Bij meerkeuzevragen is nooit te zien of er al dan niet werd gegokt. Bij open vragen ligt dat geheel anders.

Voorts gaat elke meerkeuzetoets gepaard met een zekere papierwinkel (correctiemallen, scoreformulieren e.a.). Sommige leerlingen vergissen zich snel in het aanstrepen van het goede hokje op een scoreformulier. Deze vergissingen worden meegescoord. Het Cito wil niet geloven dat dit verschijnsel zich voordoet, of het Cito vindt het prima dat accuratesse in kantoorwerk méé getoetst wordt.

Je hoort het Cito ook nooit over leerlingen die gespannen raken ten gevolge van het gebruik van de meerkeuzevorm.

Laatste stelling

Het zou het Cito sieren als het de voortzetting van het project 'Leerdoelgerichte Toetsen' in heroverweging zou nemen.

Verwijzingen

- 1 H. Boertien, *Leerdoelgericht werken in het onderwijs*, Euclides 57, nr. 7, blz. 253-262.
- 2 H. Boertien, *Leerdoelgerichte toetsen bij lange-termijndoelen*, Euclides 57, nr. 8, blz. 303-310.
- 3 *Leerdoelgerichte toetsen* (informatieblad van het Cito), uitgave februari 1982.
- 4 Bram Lagerwerf, *Wiskundeonderwijs nu*, Groningen, 1982.
- 5 H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, Dordrecht, 1973.
- 6 *Toetsmatrjjs*, Euclides 57, nr. 5/6, blz. 207-208.
- 7 A. J. M. de Jong en H. N. Schuring, *De werking van correctievoorschriften bij het CSE HAVO 1979-II*, Euclides 55, nr. 10, blz. 417-426.
- 8 E. J. J. Kremers, *Wat vinden leerlingen van wiskunde?* Euclides 54, nr. 8, blz. 301-310.
- 9 G. Bakker, *Leerboeken wiskunde in de brugklas in 1976/1977*, Euclides 52, nr. 9, blz. 327-331.
- 10 J. van Dormolen, *Korrel (Grafieken op het eindexamen)*, Euclides 53, nr. 7, blz. 325.
- 11 G. Bakker en J. B. A. M. van Bergen, *Leerdoelgerichte toetsen wiskunde*, Euclides 53, nr. 7, blz. 318-324.
- 12 H. Freudenthal, *Meerkeuzetoetsen mavo 3/Ito-c verontrustend!* Wiskrant 12, blz. 1-3.
- 13 H. Freudenthal, *Wat wordt getoetst?* Wiskrant 16, blz. 11 en 13.
- 14 H. Freudenthal, *Driemaal is scheepsrecht*, Wiskrant 22, blz. 16-17.

Naschrift:

Indien men eerst de artikelen (1) en (2) leest en daarna het artikel van Van Hoorn, dan valt onmiddellijk de interpretatie op die hij aan de inhoud van (1) en (2) geeft. De opzet en toon van zijn artikel zijn zodanig dat men geneigd is de vraag te stellen: 'Bedoelt de schrijver serieus de geproduceerde leerdoelgerichte toetsen in discrediet te brengen?' Het kan ook zijn dat hij het CITO de gelegenheid wil geven in Euclides de deugdelijkheid van die toetsen verder te onderbouwen door te doen alsof hij de artikelen verkeerd las en door in zijn artikel heel zorgvuldig voldoende mogelijkheden in te bouwen tot het geven van afdoende antwoorden. Deze opvatting wordt gesteund door zijn vele niet onderbouwde uitspraken, bijvoorbeeld 'Door het CITO verricht onderzoek dient gewantwoord te worden', waar in het geheel niet meer over leerdoelgerichte toetsen gesproken wordt. Ook het wekken van de 'lichte' suggestie dat het voor een bespreking van CITO-onderzoeken en -producten niet nodig is de bijbehorende onderzoeksverslagen en die producten zelf te bestuderen wijst in deze richting: de schrijver betreft nergens de inhoud van de map Leerdoelgerichte Toetsen Wiskunde met de bijbehorende handleiding bij zijn bespreking. Had hij deze handleiding wel gelezen, dan had hij op zeer veel vragen en opmerkingen reeds een antwoord gehad. In hoofdstuk 1 van de handleiding staat namelijk letterlijk: 'Voor leerdoelgerichte werken zijn leerdoelgerichte toetsen een onmisbaar hulpmiddel. De leerdoelgerichte toetsen van het CITO vormen zo'n hulpmiddel. Aan de opzet en vormgeving ervan ligt ondermeer het volgende uitgangspunt ten grondslag: de *docent* is verantwoordelijk voor het vaststellen van de leerdoelen die hij nastreeft Dit uitgangspunt is voor de ontwikkeling van de toetsseries als volgt uitgewerkt:

- de docent zal zelf moeten kunnen bepalen *of* en *wanneer* hij zal toetsen;
- de docent zal zelf moeten kunnen bepalen van *welke* leerdoelen hij op een bepaald moment wil nagaan in welke mate ze bereikt zijn.

De uitwerking van deze punten resulteerde in een serie toetsen die bijzonder flexibel te hanteren is . . .

Leerdoelgerichte toetsen moeten, evenals andere hulpmiddelen, op een juiste wijze in het onderwijs worden ingepast. Gebeurt dat niet dan kunnen bij het leerdoelgericht werken problemen ontstaan zoals versnippering van leerstof, te frequent toetsgebruik, het alleen toetsen van deeltkennis ten koste van het evalueren van geïntegreerde vaardigheden en het te lang vasthouden aan eenmaal vastgelegde leerdoelen.'

De redactie van Euclides liet weten dat er voor het naschrift slechts weinig ruimte geboden kon worden. Daarom zal hierna alleen op de belangrijkste punten van kritiek worden ingegaan ongeacht de bedoeling die Van Hoorn met zijn artikel heeft.

Een opmerking vooraf over de plaats van leerdoelen in het onderwijs is wellicht gewenst. Leerdoelen vormen een efficiënt middel om duidelijk te kunnen spreken over wat men met het onderwijs bereiken wil (zoals verzamelingen een middel vormen om duidelijker te kunnen denken over wiskundige structuren). Zodra het in de maatschappij belangrijk gevonden wordt over onderwijsproblemen systematisch na te denken, zullen er mensen aan het werk gezet worden die

daarbij logischerwijs het begrip leerdoel gaan hanteren.

Uit de geciteerde alinea's uit de handleiding van de map Leerdoelgerichte Toetsen Wiskunde valt al wel af te leiden dat de opzet van het bijbehorende project niet het ondersteunen van een eenvormig strak geprogrammeerd toetsgericht wiskunde-onderwijs is met het hoofdaccent op toetsing van korte-termijndoelen als stok achter de deur voor de leerlingen. Ditzelfde is ook al in andere woorden naar voren gebracht in artikel (1).3 en in het naschrift bij de korrel van de heer De Moor (Euclides 58, nummer 3, bladzijde 105; 106). In (1).3.5 wordt expliciet aangegeven dat bij toetsing van geïntegreerde vaardigheden de docent vooralsnog zelf toetsmateriaal dient te maken. Verder wordt nergens in de artikelen (1) en (2) noch in de handleiding beweerd dat men *uitsluitend* CITO-toetsen moet afnemen, ook niet dat *alle* toetsen uit de bundel moeten worden afgenomen. Wat er wel benadrukt wordt is dat de toetsen het beste tot hun recht komen bij een leerdoelgerichte werkvorm, waarbij de nadruk ligt op het doelgericht en systematisch plannen en organiseren van het lesgeven. Men kan heel goed leerdoelgericht bezig zijn en tevens lessen plannen waarin het speelse element in de wiskunde voorop staat. Ook daarbij zal men bepaalde doelen voor ogen (dienen te) hebben.

Om het gebruik van de bundel wiskundetoetsen bij verschillende werkvormen te vergemakkelijken is gekozen voor een op logica en vakinhoud gebaseerde ordening van de leerdoelen. Een wiskundeleraar kan dan snel zien welke toetsen er in de bundel aanwezig zijn. De opbouw van de bundel is dus niet bedoeld als model voor één of ander leerplan.

In (2).1 staat expliciet dat het aanleren van lange-termijn-doelen meestal impliciet en onsystematisch gebeurt tijdens de behandeling van het oplossen van problemen. Het goed leren beheersen van *alle* vereiste rekenvaardigheden en algoritmen is wel een lange-termijndoel, maar voor het leren beheersen van *elk* van die vaardigheden geldt dat meestal niet: veelal zijn het korte-termijndoelen waarbij reeds toetsen ontwikkeld zijn. Daarom is bij de keuze van een aantal lange-termijndoelen om toetsen bij te ontwikkelen geen verdere aandacht aan rekenvaardigheden gegeven. Een ander probleem is dat bij de toetsing van de beheersing van de wel geselecteerde lange-termijndoelen de beheersing van de rekenvaardigheden en algoritmen van de leerlingen niet of zo weinig mogelijk meegetoetst dienen te worden omdat het anders niet duidelijk is waaraan de behaalde toetsscores te danken zijn.

Tenslotte iets over de vraagvorm. Deze dient men af te stemmen op het voornaamste gebruiksdoel van de toetsen. Als daarbij – zoals bij de leerdoelgerichte werkvorm het geval is – een regelmatige toetsing vereist is, is het belangrijk dat deze efficiënt gebeurt, bijvoorbeeld met meerkeuzevragen. Anders zou men teveel tijd in het onderwijs besteden aan toetsing. Uit onderzoek is gebleken dat deze vraagvorm in de daarvoor geschikte situaties in kwaliteit niet voor de openvraagvorm hoeft onder te doen (zie (3)), integendeel zelfs!

Bij elke toetsing gaat het om het verkrijgen van een redelijke mate van zekerheid omtrent beheersing van het gewenste gedrag. Weliswaar geeft toetsing met behulp van open vragen een goed beeld van de manier waarop de leerling de hem voorgelegde problemen heeft opgelost, maar doordat er dan vaak slechts weinig vragen gesteld kunnen worden, is het toch in het algemeen moeilijk en tijdrovend

uit de toetsresultaten te concluderen wat die leerling werkelijk wel en niet kan. Het precies formuleren en noteren van de oplossingsmethode maakt deze toetsvorm nogal inefficiënt: het komt tamelijk vaak voor dat leerlingen wel in staat zijn de goede oplossingsmanier en de goede antwoorden bij de opgave te vinden, maar niet de tijd om deze op de juiste wijze op het papier te krijgen. Het precies formuleren en noteren van gedachten is weliswaar een zeer belangrijk leerdoel, maar het is geen wiskundeleerdoel, tenzij het wiskundige notaties betreft. Voor de wiskundige komt het er mijns inziens op aan dat hij exact kan denken en dat hij aan anderen kan duidelijk maken – bijvoorbeeld in telegramstijl – hoe hij tot de oplossing van een probleem is gekomen. Het goed gebruik maken van de taal om zijn gedachten te verwoorden dient in het bijzonder in de taallessen onderwezen te worden.

De meerkeuzevraag heeft eveneens enkele zeer duidelijke voor- en nadelen. Zo is het niet te zien, slechts te veronderstellen, hoe een leerling tot een goed antwoord is gekomen en er is steeds de mogelijkheid dat deze een fout antwoord krijgt door onbelangrijke, irrelevante factoren. Dit is één van de redenen waarom het uitproberen van meerkeuzevragen zo belangrijk is. Er kunnen in korte tijd echter relatief veel vragen worden gesteld.

Van Hoorn geeft een lijst van open-vraag-leerdoelen, waarbij men zich kan afvragen of deze correct is. Dat bij bepaalde leerdoelen toetsing met behulp van open vragen meer voor de hand ligt dan toetsing met meerkeuzevragen is evident. Het is echter vrijwel altijd mogelijk – weliswaar met meer inspanning – om er geschikte meerkeuzetoetsen bij te ontwikkelen. De volgende opgave over het tekenen van grafieken bij eerstegraads functies – volgens Van Hoorn een open-vraag-leerdoel – maakt dat aannemelijk:

De x -as en de lijnen $y = -x + 4$ en $3x - 2y = 3$ snijden elkaar in een drietal punten die de hoekpunten van een driehoek vormen. Het aantal roosterpunten binnen deze driehoek bedraagt

- A 0
- B precies 1
- C precies 2
- D meer dan 2

Als een leerling deze opgave goed maakt, is het vrijwel zeker dat hij de juiste grafieken getekend heeft. Door voldoende van dergelijke opgaven in een toets op te nemen is er zelfs genoeg garantie dat de invloed van het mogelijke gokken op de eindscore (ook vaak genoemd als nadeel van meerkeuzevragen) te verwaarlozen is.

H. Boertien

- (1) H. Boertien, *Leerdoelgericht werken in het onderwijs*, Euclides 57, nummer 7, bladzijde 253-262.
- (2) H. Boertien, *Leerdoelgerichte toetsen bij lange-termijndoelen*, Euclides 57, nummer 8, bladzijde 303-310.
- (3) G. J. Mellenbergh, *Studies in studietoetsen*, Amsterdam, 1971.

Oneindig min oneindig en nul maal oneindig

HARRIE BROEKMAN

$$\begin{array}{ll} 5 - 5 = 0 & 0 \times 5 = 0 \\ 103 - 103 = 0 & 0 \times 103 = 0 \\ 10^{23} - 10^{23} = 0 & 0 \times 10^{23} = 0 \\ \infty - \infty = & 0 \times \infty = \end{array}$$

En dat dat laatste niet gedefinieerd is gelooft bijna(?) geen leerling. Wat doe je dan als leraar? Je beroepen op formele regels en definities, of zoeken naar motivering, verduidelijking in andere gebieden van de wiskunde?

Tot voor kort zocht ik het in de formele verklaring – bij gebrek aan beter – maar een van mijn studenten viel me hier op aan. Hij maakte mij het terechte verwijt dat ik hem steeds op het hart drukte om zo veel mogelijk de abstraktere wiskundige begrippen te onderbouwen en/of te ondersteunen. Dit door – daar waar mogelijk – gebruik te maken van contexten, instapproblemen en toepassingen.

Maar hoe kon dat nu als zijn leerlingen bleven zeggen dat ze – ondanks de formele verklaring – niet geloofden dat $\infty - \infty$ geen nul is, evenals $0 \times \infty$ dat niet is.

En wat doe je dan in zo'n geval als didactiekdocent? Zoeken, zoeken en blijven zoeken, tot je eindelijk – 3 jaar later – in het blad voor de Amerikaanse wiskundeleraren een mogelijke oplossing van het probleem tegenkomt. (Math. Teacher 73, May '80).

Oneindig – oneindig

In figuur 1 beweegt P zich ongelimiteerd naar rechts langs de lijn l .

In dit geval groeien de afstanden AP , GP , AE , CE , CP en PE ongelimiteerd.

De verschillen $AP - GP$, $AE - CE$ en $CE - CP$ benaderen daarom allemaal de vorm $\infty - \infty$ als P naar rechts beweegt.

En even later 'Heeft u geen aardig regeltje er voor; u weet wel, zoiets als delen door nul is flauwekul.'

Toen ik hem vroeg waarom hij zo'n regeltje wilde hebben, was zijn antwoord:

'Ik reken met ∞ altijd gewoon en dat werkt (bv. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0$, want $\frac{5}{\infty} = 0$), dus

daar kom ik niet los van.

Het is voor mij hardstikke gek, dat $\infty - \infty$ niet nul is. Ik heb dus iets nog gekkers nodig om het te onthouden.'

De volgende keer zal ik maar voor dat gekke zorgen en de suggestie van de eerste leerling over nemen door een model te maken.

Opmerkingen:

- 1 Nul blijft voor veel leerlingen een raar getal en oneindig een moeilijk begrip. Maar dat er maar één lege verzameling is, is nog veel moeilijker, want dat kunnen we niet laten 'zien'.
- 2 Het is opvallend dat we er – met het terugdringen van de meetkunde – vaak zo moeilijk toe komen om algebraïsche zaken visueel te ondersteunen, laat staan uit het meetkundige te laten voortkomen. Hierbij reken ik het veralgebraïseren van meetkunde door de vectorrekening niet mee.

Boekbespreking

Herbert Meschkowski, *Problemgeschichte der Mathematik II*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 235 blz., DM 36,-.

Dit tweede van het uit drie delen bestaande werk gaat over de wiskunde van de 17e en de 18e eeuw. Een tijdvak waarin zeer veel gebeurd is op wiskundig gebied. Newton en Leibniz gaven de stoot tot de infinitesimaalrekening, Descartes tot de analytische meetkunde, Pascal ontwikkelde al een soort bewijstheorie, Lambert en Legendre hielden zich bezig met het parallellenprobleem. Om nog enkele te noemen: Fermat, De Bernoullis, Taylor, MacLauring, Euler. Met het noemen van de namen zijn tevens de gebieden van de wiskunde die in het centrum aan de belangstelling stonden aangeduid.

Evenals in het eerste deel heeft de schrijver er ook hier niet naar gestreefd zoveel mogelijk feiten naar voren te brengen en op te stapelen. Het ging hem er om duidelijk te maken met welke problemen men zich in die tijd bezighield, wat het verband is van het denken van toen tot de ontwikkeling van de wiskunde. Als voorbeeld hiervan noem ik het idee van Leibniz omtrent het 'oneindig-kleine' en het, door sommigen, vermeende verband met de huidige non-standaard analyse.

Naar mijn mening is de schrijver uitstekend geslaagd in zijn opzet de denkwijze van de wiskundigen uit de 17e en 18e eeuw duidelijk te maken. Het boek leest buitengewoon prettig. Een boeiend geheel, dat ik graag wil aanbevelen.

W. Kleijne

De Tweede Ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1982

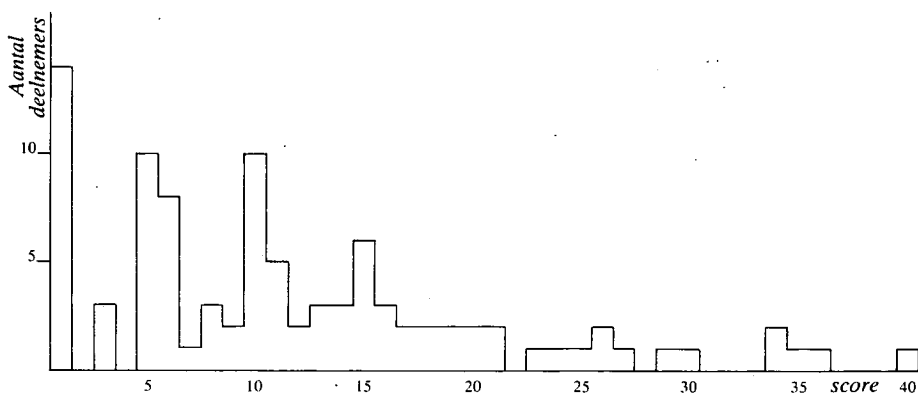
H. N. SCHURING *J. v. d. Gaats*

Op 17 september 1982 is in Utrecht de Tweede Ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1982 gehouden. De 96 deelnemende scholieren hadden 3 uur de tijd om vier opgaven op te lossen. De maximale score per opgave was 10 punten.

Prijswinnaars waren:

1	Daan Krammer, Hengelo (O)	40 ptn.
2	Menke Ubbens, Sneek	36
3	Jasper Schinkel, Bloemendaal	35
4/5	Victor Allis, Aalsmeer	34
	Bart de Smit, Amsterdam	34
6	Daniël Tuijnman, Arnhem	30
7	Erik van Lenthe, Lelystad	29
8	Henk Kreuze, Veeningen	27
9/10	Ronald Beekelaar, Bussum	26
	Niels Ferguson, Eindhoven	26

Het onderstaande staafdiagram geeft een overzicht van de scores van alle deelnemers.



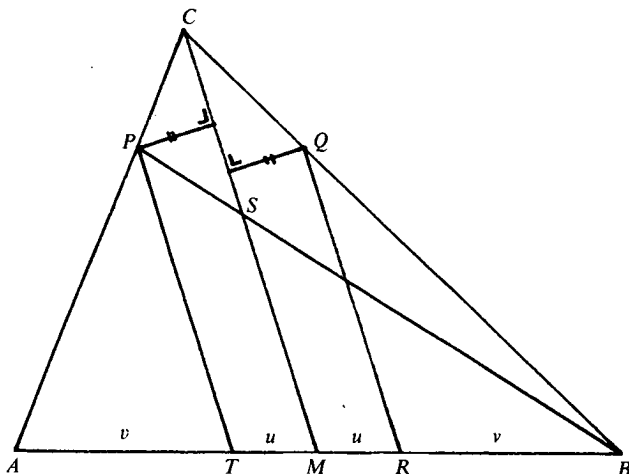
De scholenprijs voor de school met de hoogste totaalscore van vijf deelnemers aan de Eerste Ronde ging dit jaar naar het Gertrudislyceum te Roosendaal (146 punten; de maximale score per deelnemer in de Eerste Ronde was 37 punten).

Opgaven

- 1 Welk van de beide getallen $(17091982!)^2$ en $17091982^{17091982}$ is het grootst?
(Onder $n!$ verstaat men $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$)
- 2 In driehoek ABC is M het midden van het lijnstuk AB en P een willekeurig punt op het lijnstuk AC .
Beschrijf een methode (en bewijs dat die methode juist is) om het punt Q op het lijnstuk BC te vinden dat dezelfde afstand tot de lijn CM heeft als P . Hierbij mag je alleen gebruik maken van een potlood en een liniaal zonder schaalverdeling (dus je kunt wel lijnen trekken maar geen afstanden meten).
- 3 We verdelen 5 knikkers over 7 knikkerzakken. Daarbij veronderstellen we dat voor iedere knikker en voor iedere knikkerzak de kans dat die knikker in die zak terecht komt, even groot is. Het aantal zakken waar precies één knikker in is gekomen, noemen we x .
Dit experiment voeren we n maal uit, bepalen telkens x , en nemen dan het gemiddelde (dus de som van alle x -waarden gedeeld door n). Tot welk getal zal dit gemiddelde naderen als we n steeds groter laten worden?
- 4 Stel $n = 9^{753}$. Bepaal de grootste gemene deler (g.g.d.) van de getallen $n^2 + 2$ en $n^3 + 1$.
(De g.g.d. van twee gehele getallen x en y is het grootste positieve gehele getal g zo, dat x en y beide een geheel veelvoud van g zijn.)

Oplossingen

- 1 Stel i.h.a. dat n een natuurlijk getal groter dan 2 is. We vergelijken $(n!)^2$ en n^n .
 $(n!)^2 = (1 \times 2 \times \dots \times n)^2 =$
 $= (1 \times n)(2 \times (n-1))(3 \times (n-2)) \dots ((n-1) \times 2)(n \times 1)$. Hier staan n factoren van de vorm $(k+1)(n-k)$. Uit $1 \leq k+1 \leq n$ volgt $(k+1)(n-k) \geq n$ (haakjes uitwerken), met gelijkheid alleen maar als $(k+1)$ gelijk is aan 1 of n , dus voor $n > 2$ is $(n!)^2 > n^n$.
- 2 Snijd BP met CM ; het snijpunt noemen we S . Trek AS door tot op BC ; het snijpunt is dan Q .
Om te bewijzen dat de constructie goed is, gaan we omgekeerd te werk: we nemen Q op BC zo dat P en Q gelijke afstand tot CM hebben, en bewijzen dat AQ en BP elkaar op CM snijden.
Stel dat BP de lijn CM snijdt in S , en dat AQ de lijn CM snijdt in S' . Te bewijzen is dat $S = S'$.
In de figuur hieronder zijn PT en QR evenwijdige lijnen op gelijke afstand aan weerszijden van CM . Noem $TM = MR = u$, $AT = RB = v$. Dan is $SM : PT = (u + v) : (2u + v)$ en $PT : CM = v : (u + v)$ dus $SM : CM = v : (2u + v)$.
Net zo bewijs je dat $S'M : CM = v : (2u + v)$ zodat S en S' moeten samenvallen.



- 3 We denken ons de uitslagen van de experimenten in, geordend in een rechthoekig schema van n rijen van 7 zakken, voor elk experiment één rij. Als we het gemiddelde moeten nemen van x , kunnen we eenvoudig alle zakken uit het schema tellen waar precies één knikker in zit, en dit aantal delen door n . Het is handig de vijf knikkers te nummeren. De kans dat bij een bepaalde rij uit het schema knikker 1 alléén in zijn zak zit, is gelijk aan de kans dat de andere vier knikkers *niet* in die zak zitten, dus die kans is $(6/7)^4$. Als n groot is, zal daarom in ongeveer $(6/7)^4 \cdot n$ van alle zakken knikker 1 geïsoleerd zitten. Hetzelfde geldt voor de vier andere knikkers, dus het totale aantal zakken waar precies één knikker in zit, zal ongeveer $5 \cdot (6/7)^4 n$ zijn. De gemiddelde waarde van x wordt dus $5 \cdot (6/7)^4$.
- 4 De ggd van twee getallen x en y verandert niet als je van één van beide een geheel veelvoud van het andere aftrekt. In formule: $\text{ggd}(x, y) = \text{ggd}(x - ky, y)$. Elke gemeenschappelijke deler van het ene paar is immers ook een gemeenschappelijke deler van het andere paar en omgekeerd. Hieruit volgt: $\text{ggd}(n^3 + 1, n^2 + 2) = \text{ggd}(n^3 + 1 - n(n^2 + 2), n^2 + 2) = \text{ggd}(1 - 2n, n^2 + 2)$. Omdat $1 - 2n$ oneven is, kan de ggd geen factor 2 bevatten. We kunnen daarom net zo goed de ggd bepalen van $1 - 2n$ en $2(n^2 + 2)$:
- $$\begin{aligned} \text{ggd}(1 - 2n, n^2 + 2) &= \text{ggd}(1 - 2n, 2n^2 + 4) = \\ &= \text{ggd}(1 - 2n, 2n^2 + 4 + n(1 - 2n)) = \text{ggd}(1 - 2n, 4 + n) = \\ &= \text{ggd}(1 - 2n + 2(4 + n), 4 + n) = \text{ggd}(9, 4 + n). \end{aligned}$$
- De ggd is dus 1, 3 of 9, want het is een deler van 9. Gegeven is dat $n = 9^{753}$, dus n is een drievoud, en daarom is $n + 4$ een drievoud plus 1. De ggd moet dus 1 zijn.

Wiskunde in economie

H. BOLT

Met regelmaat verschijnen publikaties (rapporten, leerboeken) waarin de rol van de WISKUNDE in de ECONOMIE 'dienend en ondergeschikt' wordt genoemd. In het leerplanvoorstel Algemene Economie van de ACLO-ER wordt expliciet melding gemaakt van die ondergeschikte betekenis.

Ik lees dit als wiskunde-docent en ben er tevreden mee. Immers: voorheen deed het economie-onderwijs een te zwaar beroep op het wiskunde-niveau van de VWO-leerlingen. We moeten dus een beetje blij zijn. Dienend en ondergeschikt zijn, misstaat niet. Ook in de natuurkunde heeft de wiskunde diezelfde rol.

We accepteren het dienende en ondergeschikte. Het ligt voor de hand dat je dan nieuwsgierig in een nieuw leerboek voor economie(*) bladert om de wederdienst te vinden die de schrijvers wellicht hebben bereid. Jammer. Ik moet vaststellen dat het nog steeds gebruikelijk is allerlei typisch-economische notaties te hanteren, die op gespannen voet leven met wat in het wiskundeonderwijs gebruikelijk is en die soms ook zonder meer fout zijn.

In het volgende wil ik wat opmerken over:

- de notatie van breukstrepen
- de notatie van functies
- het differentiëren

Breukstrepen

Door het gebruik van de schuine breukstreep wordt een algebraïsche vorm vrijwel altijd misvormd tot een vorm met een andere waarde. Ik vind daarvan veel voorbeelden, zoals $Y_t = 1/k \cdot K_t$.

*

Vergelijking (4) uit het model kan in plaats van op de in deze paragraaf gebruikte manier ook als volgt worden opgeschreven:

$$Y_t = 1/k \cdot K_t$$

Met wat fantasie is hier best wat van te maken. Er staat $Y_t = \frac{1}{k \cdot K_t}$ maar er wordt bedoeld $Y_t = \frac{1}{k} \cdot K_t$ ofwel $Y_t = \frac{K_t}{k}$

Met veel gemak worden vaak op dezelfde bladzijde en zelfs in dezelfde vorm de schuine en de horizontale breukstreep tegelijk gebruikt. Ik vraag mij af welk argument dan beslissend is voor het kiezen voor de ene dan wel de andere notatie. In handschrift is het te begrijpen: je bent (als handelman, denk ik) veel met cijferwerk bezig, doorgaans haastig. Geld? Hoeveelheden? De $\frac{1}{2}$ vloeit dan gemakkelijk als $1/2$ uit de pen. En een breukje als $\frac{1}{5}$ wordt dan $1/5$. Maar $\frac{1}{2}x$ is niet $1/2x$. In drukwerk zoals hieronder evenwel is moedwillig eerst $1/5$ genoteerd en daarna werd bewust gekozen voor $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{20}$. Waarom? Het is goed mogelijk dat de zetter hierin de vrije hand had. Regelhoogte, hoeveelheid wit en andere ruimteproblemen gaan dan een rol spelen. Het belang van de lezende leerling komt ver op de achtergrond.

* (4a) volgt in combinatie met (2a)

$$K_{1981} - K_{1980} = 1/5 \cdot Y_{1980}$$

We delen beide zijden door K_{1980} :

$$\frac{K_{1981} - K_{1980}}{K_{1980}} = 1/5 \cdot \frac{Y_{1980}}{K_{1980}}$$

$$\text{Uit (4a) volgt: } \frac{Y_{1980}}{K_{1980}} = \frac{1}{4}$$

Invullen hiervan leidt tot:

$$\frac{K_{1981} - K_{1980}}{K_{1980}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

Functionies

Dit zijn vergelijkingen en geen functies, althans: in het wiskundelokaal. Eén lesuur verschil is een wereld van twijfel. Daarbij komt dat de x -as zo nu en dan of vaak verticaal loopt en de richtingscoëfficiënt dus een onbetrouwbaar ding is geworden.

* kenen die de goeda gem

$$\begin{array}{ll} \text{de vraagfunctie} & x_v = -10p + 200 \\ \text{de aanbodfunctie} & x_a = 25p - 220 \end{array}$$

het gevraagde aantal Zowel r...

Ik vraag me af wat het bezwaar kan zijn van:

$v(p) = -10p + 200$ en $a(p) = 25p - 220$. Dan zitten we lekker dicht in de buurt van $f(x) = -10x + 200$ en $g(x) = 25x - 220$, bekend terrein. Een totale opbrengstfunctie als $TO = -\frac{1}{2}x^2 + 6x$ zou op z'n minst de gedaante $TO(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x$ moeten hebben, een kleinigheid.

Differentiëren

In het wiskundelokaal kijk je even uit voordat je gaat differentiëren. Mag het? Kan het? Het mag en het lukt ook nog. Maar niet altijd. Soms lukt het goed, maar had het niet gemogen. De leerlingen zijn (vaak) op hun hoede. Examenopgaven lokken je soms in een val. Examinatoren vliegen elkaar in de haren vanwege een onopvallend gegeven of een wat verkreukelde functie. Boeken worden herschreven: hun leer is niet recht genoeg.

Alleen een functie die 'continu is op zijn domein' kan (onder zekere voorwaarden) ook differentieerbaar zijn. Met wat goede wil praten we 'economische functies' nog wel continu (na 1984) maar die differentieerbaarheid haalt het niet. De grafieken van zulke functies bestaan immers uit geïsoleerde punten.

*

Voorbeeld van het vinden van een maximum:

Stel:

$TO = -\frac{1}{2}x^2 + 6x$. Voor $TO_{\max}$ nodig:

a $d(TO)/dx = 0 \rightarrow -x + 6 = 0 \rightarrow = 6$

b $\begin{array}{c} + + + \mid - - - - \\ \hline x < 6 \quad x = 6 \quad x > 6 \end{array}$

Voor waarden van x kleiner dan 6 is

$d(TO)/dx = -x + 6$

positief. Voor waarden groter dan 6, is de eerste afgeleide negatief. De totale functie stijgt tot $x=6$ en daalt vervolgens: ' $x=6$ ' is dus de maximumwaarde.



Toch wordt er gedifferentieerd, ondanks alles, en het gaat nog goed ook! Ik gun het de economen van harte. Iets doen wat niet kan (en dan ook nog met succes) moet een fijn gevoel geven. Toch is het goed dat deze 'spanning' ook hier en daar blijkt in de boeken en in het klasgesprek. Met wat 'knipogen naar de wiskunde' kunnen we 'knippen met de ogen' bij de doorgaans betere leerlingen voorkomen. Er is veel meer. Ook het laatste knipseltje geeft heel wat gesprekstof: de verkeerde pijlen, $= 6$, het dubieuze schema en de absoluut verkeerde conclusie.

Herverkaveling

Met mijn wel erg beknopte kritiek vraag ik geen aandacht voor incidentele gebeurtenissen maar voor een fundamentele zaak: de wijze waarop het vak

economie al vele jaren lang voordeel heeft willen halen uit de vermeende wiskundige kennis bij onze gemeenschappelijke leerlingen.

We gaan straks herverkavelen, er komen dus nieuwe leerboeken. Er zal straks worden gezocht naar vereenvoudiging voor de ene groep en verdieping voor anderen. Verwante zaken worden per decreet bij elkaar geschoven. Ik vind dat het nú tijd is om overbodige verschillen in notaties weg te nemen, dat nú de didactiek- en nomenclatuurcommissies van verwante vakken bij elkaar moeten gaan zitten en dat nú initiatieven moeten worden genomen. Anders is het straks weer te laat en zullen ook volgende generaties zeggen: *'Ze proberen het ons zo lastig mogelijk te maken!'*

* R. Schöndorff, N. Cohen, *Economie Bijvoorbeeld*, J. F. B. Pleus, 1981.

Over de auteur:

H. Bolt is leraar wiskunde aan het Christelijk Lyceum te Veenendaal.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

486. B. Kootstra legde me het volgende probleem voor. Verdeel een driehoek in een minimaal aantal vijfhoeken. Twee vijfhoeken die meer dan één punt gemeen hebben, moeten precies één zijde gemeen hebben. Met bewijs dat het aantal inderdaad minimaal is.

Wie lust heeft, kan daarna het analoge probleem voor verdeling van een vierhoek, vijfhoek, zeshoek in vijfhoeken oplossen.

487. PTT heeft de lokale telefoontarieven verhoogd van 14 naar 15 cent. De interlokale zijn ongewijzigd gebleven. Men mag nu voor 15 cent $\frac{15}{14}$ keer zo lang bellen als vroeger voor 14 cent.

Vroeger 45 sec voor 14 cent, nu 47 sec voor 15. Helemaal eerlijk is dat niet, maar wie hierover valt is een kniesoor. Om ook eventuele kniesoren de wind uit de zeilen te nemen, nemen we aan dat we vroeger 42 sec mochten bellen voor 14 cent en nu 45 voor 15. Nu is alles eerlijk. Reken het maar na.

Telefoongesprekken van verschillende lengtes komen niet alle even frequent voor. De invloed hiervan op de berekening laten we buiten beschouwing.

Oplossingen

483. Gegeven een verzameling kruisjes. A en B verbinden om beurten twee uiteinden van hetzelfde of van verschillende kruisjes door een lijn die geen van de kruisjes snijdt. In de verbindingslijn brengen ze een dwarsstreepje aan waardoor een nieuw kruisje ontstaat. Wie niet meer kan, verliest. Gevraagd een optimale strategie.

Onderstel twee verschillende kruisjes P en Q worden verbonden. We kunnen dan de daaruit resulterende figuur vervangen door één kruisje met evenveel vrije uiteinden als de twee kruisjes samen hadden. Zie figuur 1. PQ wordt tot één punt samengetrokken.

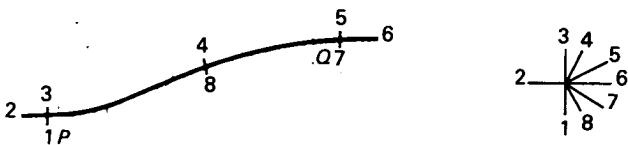


Fig. 1

Onderstel twee vrije uiteinden van hetzelfde kruisje P worden verbonden en bij Q wordt een dwarsstreepje aangebracht. Het vlak wordt daardoor in twee delen verdeeld; één deel binnen de verbindingslijn en één deel erbuiten. Tussen deze beide delen is geen verbinding meer mogelijk. Zie figuur 2. We trekken PQ weer tot één punt samen. Dan ontstaat een kruisje met vier vrije uiteinden; twee binnen de gesloten lijn en twee erbuiten. We vervangen dit kruisje door twee 'kruisjes', één in het binnengebied en één in het buitengebied, elk met twee vrije uiteinden. Deze zijn P_1 en P_2 genoemd.

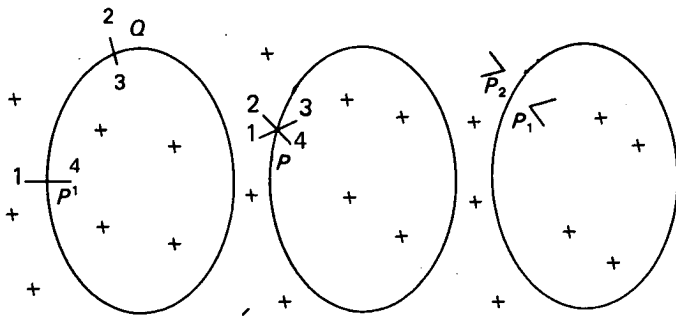


Fig. 2

Als we met n kruisjes beginnen, dus met $4n$ vrije uiteinden, dan zal het aantal vrije uiteinden $4n$ blijven. De enig mogelijke eindtoestand, waarin men geen verbindingslijn meer kan trekken, bestaat dus uit $4n$ punten elk met één vrij uiteinde en elk door een gesloten lijn omgeven. Zie figuur 3.



Fig. 3

(Een van deze $4n$ gebieden is het buitengebied, dat topologisch niet verschillend is van de binnengebieden.)

Men is begonnen met

aantal punten n

aantal gebieden 1

Verbindt men twee punten, dan is de toename van het

aantal punten -1

aantal gebieden 0

Verbindt men twee uiteinden van hetzelfde punt, dan is de toename van het

aantal punten 1

aantal gebieden 1

In de eindtoestand is het

aantal punten $4n$

aantal gebieden $4n$

Wat men ook doet, als men $4n - 1$ keer twee uiteinden van eenzelfde punt verbindt en $n - 1$ keer twee punten, dan is de eindtoestand bereikt. En omgekeerd wordt de eindtoestand alleen maar op deze manier bereikt. In totaal dus door $5n - 2$ keer een verbinding aan te brengen. Als A begint, wint hij bij oneven n en verliest hij bij even n .

En nu het spel maar met een argeloze tegenspeler gaan spelen.

484. Een dronkeman bevindt zich op de x -as in de oorsprong. Hij doet telkens willekeurig een stap naar links of naar rechts. Na gemiddeld hoeveel stappen is hij in de oorsprong terug?

Noem de gemiddelde wachttijd, d.i. het gevraagde aantal stappen, x .

Onderstel hij doet eerst een stap naar rechts en komt in het punt E . Dit geeft een bijdrage 1 tot de gemiddelde wachttijd. Nu is de kans $\frac{1}{2}$, dat hij bij de volgende stap weer in de oorsprong terug is. De kans is echter ook $\frac{1}{2}$, dat hij zich verder van de oorsprong verwijdert. In het laatste geval is de gemiddelde tijd nodig om in E terug te komen, weer x . Omdat hij dan nog niet in de oorsprong terug is, is

$$x > 1 + \frac{1}{2}(1 + x)$$

Nu is de kans, dat hij bij de volgende stap in de oorsprong terug is, $\frac{1}{2}$ en de kans dat hij naar rechts gaat en dus weer een wachttijd x nodig heeft om in E terug te komen, eveneens $\frac{1}{2}$. Hij is dan nog niet in de oorsprong terug en dus is

$$x > 1 + \frac{1}{2}(1 + x) + \frac{1}{2}(1 + x)$$

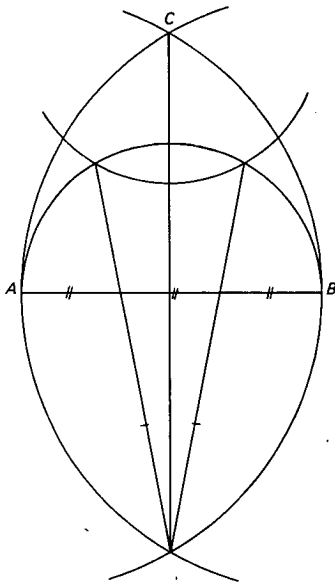
We vinden zo resp.

$$x > 3, x > 7, \dots, x > 2^n - 1, \dots$$

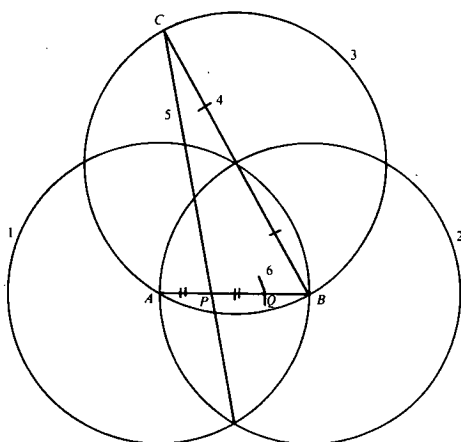
De gemiddelde wachttijd is dus oneindig.

Wie nu denkt dat je hem in de oorsprong nooit meer terug ziet, heeft het nog niet goed begrepen.

485. Het lijnstuk AB is door middel van vier cirkels en drie rechte lijnen in drie gelijke delen verdeeld. De cirkel met middelpunt C heeft als straal $\frac{1}{2}AB$.



De volgende oplossing, waarbij gebruik gemaakt wordt van slechts zes cirkels en rechte lijnen, is afkomstig van Harm Boertien (CITO).



Boekbesprekingen

Edited by A. Seidenberg, *Studies in algebraic geometry*, MAA Studies in Mathematics, vol. 20 (xii + 144 bladzijden).

Zoals de samensteller van dit boekje in zijn voorwoord opmerkt, vereist een groot deel van de literatuur op het gebied van de algebraïsche meetkunde zoveel voorkennis, dat de geïnteresseerde leek er nauwelijks iets aan heeft. Juist voor zo iemand zijn de vier artikelen in dit boek bijeengebracht. M. Rosenlicht geeft een eenvoudige, goed leesbare inleiding in de theorie van de lineair algebraïsche groepen, d.w.z. (isomorfieklassen van) gesloten ondergroepen van $GL(n)$. Hij behandelt o.a. de stelling van Lie en Kolchin, die een voldoende voorwaarde geeft waaronder alle matrices van zo'n groep tegelijkertijd in bovendreihoecksvorm zijn te brengen.

B. L. van der Waerden schrijft over de definitie van (intersectie-)multipliciteiten. Hij laat zien hoe men daarbij gebruik kan maken van een stelling van Zariski over de samenhang van de vezels van een birationale afbeelding. Hij geeft ook een bewijs van deze stelling met 'klassieke' methoden (d.w.z. zonder schoven e.d.). Het voordeel daarvan is dat weinig voorkennis vereist is, maar toch is enige vertrouwdheid met de 'ouderwetse' taal wel nuttig.

J. Ohm vraagt van de lezer van zijn artikel over ruimtekrommen een redelijke kennis van en vertrouwdheid met de homologische algebra. Een ruimtekromme is de verzameling gemeenschappelijke nulpunten van een ideaal van polynomen in 3 inhomogene of 4 homogene onbekenden, d.w.z. de doorsnede van een stel oppervlakken in de affiene of projectieve ruimte. De schrijver behandelt diverse resultaten, waaronder tamelijk recente, betreffende het minimaal benodigde aantal oppervlakken. Het is interessante maar nogal lastige materie.

S. L. Kleiman geeft een erg leuk overzicht over de ontwikkelingen rond een probleem dat in de negentiende eeuw veel aandacht trok, daarna op de achtergrond raakte en de laatste tien jaar weer aan de orde is gesteld. Het gaat over de vraag hoeveel kegelsneden (in het complex-projectieve vlak) raken aan een vijftal gegeven kegelsneden.

De lezer krijgt een duidelijk beeld van de valkuilen die de onderzoeker op zijn pad vindt. Een streng bewijs voor het al in 1864 door Chasles gegeven antwoord is pas onlangs gevonden.

J. A. Vogelaar

R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer, *Ramsey Theory*. J. Wiley (New York, 1980), 174 blz.

Het volgende probleem is zeer bekend: (een typisch wiskunde olympiade vraagstuk) beschouw zes punten en verbind ieder paar door een lijnstuk dat rood of blauw gekleurd wordt. Dan is er een drietal punten waarvoor de bijbehorende drie lijnstukken dezelfde kleur hebben.

Het bekendste bewijs beschouwt eerst de vijf lijnstukken vanuit één vast punt. Hiervan hebben tenminste drie dezelfde kleur, zeg rood. Is hier geen paar bij waaruit een rode driehoek ontstaat dan zijn de drie andere eindpunten van deze lijnstukken de hoekpunten van een blauwe driehoek. Een veel aardiger olympiade vraagstuk is de vraag om aan te tonen dat er tenminste twee zulke 'monochromatische' driehoeken zijn. Dit kan in enkele regels bewezen worden door te tellen hoeveel niet monochromatische driehoeken er kunnen zijn. (Antwoord: niet meer dan 18. Probeert U het eens! Aanwijzing: Tel de hoekpunten waar verschillende kleuren samenkomen.)

F. P. Ramsey (1903-1930) was een briljant filosoof-logicus-econoom. In 1930 verscheen zijn artikel *On a Problem of Formal Logic* waarin de stelling stond die nu bekend is als de stelling van Ramsey. Het bovengenoemde probleem is een eenvoudig voorbeeld. In de algemene stelling beschouwen we n punten en kleuren de verbindingslijnstukken (= ribben) met r kleuren. Verder kiezen we r natuurlijke getallen $l_1, \dots, l_r$.

De afkorting ' $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$ ' betekent: voor iedere kleuring is er een i ($1 \leq i \leq r$) en een deelverzameling T bestaande uit l_i punten zó dat alle ribben in T de i -de kleur hebben. (Ons eerste voorbeeld is dus $6 \rightarrow (3, 3)$). De stelling van Ramsey zegt: Er is een getal $R(l_1, \dots, l_r)$ zó dat voor alle $n > R(l_1, \dots, l_r)$ geldt $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$. Zo is via ons eerste voorbeeld eenvoudig te zien dat $R(3, 3) = 6$.

Als een combinatoricus spreekt over de stelling van Van der Waerden dan bedoelt hij het volgende resultaat uit 1927.

Stelling: Verdeel $\mathbb{N}$ in twee klassen. Dan bevat tenminste één van deze klassen willekeurig lange rekenkundige rijen.

We kunnen dit iets generaliseren en door andere woorden te gebruiken de analogie met het voorgaande demonstreren.

Stelling: Voor alle positieve gehele getallen k en r is er een getal $W(k, r)$ zó dat als we de getallen $1, 2, \dots, W(k, r)$ kleuren met r kleuren er een rekenkundige rij van k termen met dezelfde kleur is.

We noemen nog een stelling van hetzelfde type.

Stelling: Als we de elementen van $\mathbb{N}$ kleuren met r kleuren dan zijn er getallen x, y, z met dezelfde kleur zó dat $x + y = z$. (I. Schur 1916).

We hebben nu drie voorbeelden gegeven van wat tegenwoordig 'Ramsey theorie' wordt genoemd. In de algemene situatie onderscheiden we twee standpunten. In het eerste beschouwen we een *oneindige* verzameling waarvan de elementen worden gekleurd met r kleuren. De vraag is of er een deelverzameling van een of ander voorgeschreven type is zó dat alle punten dezelfde kleur hebben. Bij het tweede is de oneindige verzameling vervangen door een verzameling met n elementen en de gezochte uitspraak is: een monochromatische deelverzameling (van het voorgeschreven type) is er als $n > n_0$.

Er zijn vele varianten mogelijk en diverse aardige (en vaak zeer lastige) vragen die men kan stellen. Om de lezer nog iets meer indruk van dit gebied te geven gaan we op enkele van deze problemen in. De belangstelling voor Ramsey theorie is eigenlijk ontstaan door een artikel van P. Erdős en G. Szekeres uit 1935. De volgende twee leuke stellingen zijn in dit artikel te vinden.

Stelling: Beschouw een rij van $n^2 + 1$ reële getallen. Dan is er een monotone deelrij met tenminste $n + 1$ termen.

Deze stelling is een aardige opgave om zelf eens te proberen om een idee te krijgen van de moeilijkheidsgraad. Merk op dat als we $n^2 + 1$ vervangen door het boven gedefinieerde getal $R(n + 1, n + 1)$ de stelling als volgt is te bewijzen. Verbind twee termen x_i en x_j door een rode ribbe als $i < j$ en $x_i \leq x_j$ en anders door een blauwe. Pas nu de stelling van Ramsey toe. Ook de volgende stelling is een toepassing van een vorm van de stelling van Ramsey.

Stelling: Voor iedere n is er een N zó dat onder N punten in het vlak n zijn te vinden die de hoekpunten zijn van een convexe n -hoek.

De sleutel is het geval $N = 5$, $n = 4$ (al weer een leuk olympiade vraagstuk).

De inleiding van deze bespreking begon met wat later werd beschreven door $R(3, 3) = 6$. Er is ontzettend veel werk gedaan aan de bepaling van de getallen $R(k, l)$, meestal tevergeefs. De actieve lezer moet in staat zijn te bewijzen dat $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$ via de redenering die voor $R(3, 3)$ is gebruikt. Ook $R(3, 4) = 9$ is een aardige opgave voor puzzelaars.

Dat de moeilijkheden hier wel zeer snel toenemen blijkt uit het feit dat op dit moment zelfs met de snelste rekenmachine $R(5, 5)$ niet is te bepalen!

P. Erdős heeft de gewoonte om geldprijzen uit te loven voor de oplossing van openstaande wiskundige problemen. De grootte hangt af van de door hem geschatte moeilijkheidsgraad. In 1974 was hij \$ 1000.- kwijt aan E. Szemerédi die de volgende generalisatie van de stelling van Van der Waerden bewees. Definieer de *dichtheid* van een verzameling $A \subset \mathbb{N}$ door

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup N^{-1} |A \cap [1, N]|.$$

Stelling: Als A positieve dichtheid heeft dan bevat A willekeurig lange rekenkundige rijen.

Het bewijs is zó moeilijk en zó lang dat het niet in het hier te bespreken boek voorkomt. Wel vindt men de stelling van Roth waarin 'willekeurig lang' is vervangen door 'van de lengte drie'. Dat is al moeilijk!

De essentie van het vak dat in het boek van Graham, Rothschild en Spencer wordt behandeld is nu duidelijk. Wie er meer van wil weten kan in het helder geschreven boek terecht. Men dient wel te beseffen dat we hier met een zeer lastig deel van de combinatoriek te maken hebben en dat het boek ook niet goedkoop is. Een voordeel voor de lezer die naast zijn werk nog graag wiskundig actief is, is dat men met dit boek aan deze materie kan werken zonder gedwongen te zijn om steeds weer andere literatuur te raadplegen.

J. H. van Lint.

H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis*, deel 2, B. G. Teubner, Stuttgart, 736 blz., DM 58,-.

Dit tweede deel van het leerboek der analyse is op dezelfde leest geschoeid als deel 1. De schrijver wilde '... die Theorie ausführlich und fasslich darstellen, ausgiebig motivieren und durch viele Beispiele und Übungen zum sicheren Besitz des Lesers machen.

... Brücken schlagen zu den Anwendungen analytischer Methoden in den allerverschiedensten Wissenschaften und dabei das wechselseitig fördernde Ineinandergreifen 'blasser' Theorie und 'handfester' Praxis aufscheinen lassen.

... durch eine klare und auch äusserlich leicht erkennbare Scheidung von Methoden- und Anwendungsteilen dafür sorgen, dass der Leser trotz der Fülle des Materials den roten Faden nicht verliert.'

Evenals in deel 1 is de schrijver er ook in dit deel bijzonder goed in geslaagd deze doelstellingen waar te maken. Voor een algemene beschouwing van het werk moge ik naar de vorige bespreking verwijzen. Hier volsta ik met een opsomming van de inhoud:

Banachruimten, Banachalgebra's en toepassingen; Lebesgue integraal, Fourierreksen, toepassingen; topologische ruimten, differentiaalrekening in $\mathbb{R}^p$, contourintegralen, toepassingen; eenvoudige Riemannintegralen, integraalstellingen, toepassingen; meervoudige Lebesgue-integralen, stellingen van Brouwer, Schauder en Kakutani, toepassingen; 'ein historischer tour d'horizon'; oplossingen van een aantal opgaven; literatuuropgave, register van symbolen, namen en zaken. Een bijzonder goed en gedegen leerboek van de analyse.

W. Kleijne

Mededelingen

Examenbesprekingen wiskunde LBO, MAVO, HAVO, VWO 1983

De examenbesprekingen zijn dit jaar iets anders georganiseerd dan voorgaande jaren. De bijeenkomsten voor LBO en MAVO vallen samen. Voor de pauze wordt het c-examen besproken, na de pauze het d-examen.

Let u op de verschillende aanvangstijden.

De normen vastgesteld door de CEVO zijn bindend, zij mogen *niet* gewijzigd worden.

Binnen de normen kan men verfijningen afspreken.

Uw kritiek op de opgaven en op de normen wordt genoteerd en in een samenvattend verslag ter kennis van de CEVO gebracht.

Examenbesprekingen VWO Wiskunde-1 op dinsdag 17 mei 1983 van 16.00 tot 18.00 uur.

<i>Plaats</i>	<i>Adres van de school</i>	<i>gespreksleider</i>
Amsterdam	Ignatiusgymnasium Ant. van Dyckstraat 1 1077 ME Amsterdam 020-76 38 68	S. Min Appelgaard 5 1689 HP Zwaag 02290-3 77 56
Bergen op Zoom	Mollerlyceum Bolwerk zuid 68 4611 DW Bergen op Zoom 01640-4 15 50	A. L. D. van Merode Kerkstraat 8 5101 BC Dongen 01623-1 37 46
Zutphen	Baudartiuscollege Isendoornstraat 1 7201 NJ Zutphen 05750-1 50 41	J. van Dieren Bergkampweg 20 7231 CN Zutphen 05750-2 21 77
Groningen	Heymanscollege Nieuwe St. Jansstraat 11 9712 JM Groningen 050-12 04 30	J. Houttuin Otto Eerelmanweg 12 9761 HZ Eelde 05907-36 44
Roermond	Bisschoppelijk college Bob. Boumanstraat 30 6042 EH Roermond 04750-2 12 41	J. F. Mayer Heerbaan 4a 6061 ED Posterholt 04742-19 49
Rotterdam	City college Emmaus-Franciscus Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-77 00 33	B. Hillebrand Paulus Potterstraat 17 2931 CX Krimpen a/d Lek 01807-1 52 10

Examenbesprekingen HAVO op dinsdag 17 mei 1983 van 19.00 tot 21.00 uur.

<i>Plaats</i>	<i>Adres van de school</i>	<i>Gespreksleider</i>
Amsterdam	Ignatiusgymnasium Ant. van Dyckstraat 1 1077 ME Amsterdam 020-76 38 68	K. Bouwmeester Herengracht 14 1441 EW Purmerend 02990-2 37 74
Bergen op Zoom	Mollerlyceum Bolwerk zuid 68 4611 DW Bergen op Zoom 01640-4 15 50	Van Dort p/a Bolwerk zuid 68 4611 DW Bergen op Zoom 01640-4 15 50

Zutphen	Baudartiuscollege Isendoornstraat 1 7201 NJ Zutphen 05750-1 50 41	B. J. Winsemius Jan Vermeerstraat 32 7204 CM Zutphen 05750-1 94 69
Groningen	Heymanscollege Nieuwe St. Jansstraat 11 9712 JM Groningen 050-12 04 30	J. V. Jansen Boterdiep westzijde 5 9781 EH Bedum 05900-1 30 43
Roermond	Bisschoppelijk college Bob. Boumansstraat 30 6042 EH Roermond 04750-2 12 41	J. M. F. Wijenberg Houtrustlaan 6 6081 CX Haalen (Lb) 04759-21 14
Rotterdam	City College Emmaus-Franciscus Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-77 00 33	E. van Dongen Walenburgerplein 126 3039 AP Rotterdam 010-67 21 30

Examenbespreking VWO Wiskunde-II op woensdag 18 mei 1983 van 19.00 tot 21.00 uur te:

<i>Plaats</i>	<i>Adres van de school</i>	<i>Gespreksleider</i>
Utrecht	Jaarbeurscongrescentrum Jaarbeursplein 030-95 59 11	dr. Th. J. Korthagen Torenlaan 12 7231 CB Warnsveld 05750-2 34 17

Examenbespreking lbo-c, mavo-c en mavo-d op woensdag 18 mei 1983 van 15.00 tot 18.30 uur.

<i>Plaats</i>	<i>School</i>	<i>Gespreksleiders*)</i>
Alkmaar	Bram Daalder Mavo Rubenslaan 14 1816 MB Alkmaar 072-11 34 38	1 J. Hooyberg, J. Ekelsplein 8, 1816 NT Alkmaar, 072-12 11 35 2 R. Pijning, Tesselschadestraat 7, 1814 EK Alkmaar, 072-11 22 70
Amersfoort	Andreas mavo Ringweg Koppel 7 3813 BA Amersfoort 033-201 03	1 A. J. van Liere, Karhulstraat 27, 7339 AD Ugchelen, 055-33 87 73 2 J. C. Vos, Godivastraat 9, 3813 WE Amersfoort, 033-75 17 19
Amsterdam	Osdorper Schoolgemeenschap Hoekenes 61 1068 MR Amsterdam 020-1983 99	1 E. G. Doevendans, Clara Bartonstraat 14, 1025 KT Amsterdam, 020-36 20 49 2 W. de Groot, Wipmolen 25, 1035 CW Amsterdam, 020-31 14 22
Arnhem	Thorbecke Scholengemeenschap Thorbeckestraat 17 6828 TS Arnhem 085-42 30 28	1 M. Hondelink, Het Elferink 77, 7478 CB Diepenheim, 05475-13 22 2 L. Hoekstra, Rondehof 40, 6662 ZW Elst, 08819-38 60
Breda	Gemeentelijke Technische school Biesdonkweg 33 4826 KS Breda 076-87 47 50	1 A. Braat, Albastdijk 48, 4706 AN Roosendaal, 01650-3 72 42 2 A. Joossen, P. C. Hooftlaan 30, 4707 BP Roosendaal, 01650-3 56 61

Deventer	Gemeentelijke L.T.S. Ludgerstraat 1 7415 DV Deventer 05700-29000 Vanaf NS stadsbus lijn 3	1 K. Selles, Meerkoet 45, 7423 CM Deventer, 05700-50724 2 R. J. Roukema, Buntlaan 34, 3951 VN Maarn, 03432-2895
Eindhoven	Dr. Edith Steinmavo Gen. van Merlenstraat 5 5623 GC Eindhoven 040-43 52 30	1 P. van Erp, Verhulstlaan 65, 5012 GA Tilburg, 013-55 44 43 2 J. C. G. W. van den Berg, Haakakker 26, 5731 EZ Mierlo, 04927-1744
Emmen	Openbare Scholengemeenschap De Dissel Smedingslag 1 7824 HK Emmen 05910-2 34 56	1 J. F. Struik, Liniekampen 12, 7873 BS Odoorn, 05919-2790 2 R. Zwierstra, Oringerbrink 23, 7812 JR Emmen, 05910-1 37 11
's-Gravenhage	Groen van Prinsterer College Albardastraat 25 2555 XP 's-Gravenhage 070-25 62 60	1 W. A. Noordeman, Jacob v.d. Wielelaan 18, 2283 CV Rijswijk, 070-99 72 30 2 W. van der Ley, Q. A. Nederpelstraat 254, 2552 HH 's-Gravenhage, 070-97 37 85
Groningen	Menno van Coehoornschool Goeman Borgesiuslaan 161 9722 RG Groningen 050-25 02 12	1 S. Kooiman, Illegaliteitslaan 11, 9727 EA Groningen, 050-25 12 89 2 L. Wesselink, Jan Ensinglaan 7, 9744 GP Hoogkerk, 050-56 65 09
Haarlem	R.K. Mavoschool Jeroen Overtonstraat 42 2024 XK Haarlem 023-25 17 49	1 B. Janknegt, Rijksweg 432, 2071 CT Santpoort, 023-37 71 58 2 P. van der Meijde, Valckenhoeflaan 77, 2071 RS Santpoort, 023-37 57 57
Hengelo	R.K. Mavo 't Lansink Lansinkweg 80 7553 AK Hengelo 074-91 32 97	1 J. G. M. Smeets, Twickel 2, 7608 BN Almelo, 05490-6 58 29 2 C. Th. J. Hoogsteder, Prins Maurits hof 4, 7061 WR Terborg, 08350-2 43 37
's-Hertogenbosch	Scholengemeenschap De Dommel Emmaplein 19 5211 VZ 's-Hertogenbosch 073-13 56 74	1 M. Bekkers, Vorsenpoel 158, 5283 ZN Boxtel, 04116-7 71 19 2 F. J. Mahieu, Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel, 04116-7 34 68
Hoogezaand	Dr. A. Jacobs Scholen- gemeenschap Nieuweweg 67 9603 BH Hoogezaand 05980-9 23 84	1 J. Borst, Bonenakker 51, 9932 JD Delfzijl, 05960-2 54 64 2 W. Visser, Amalia van Solmslaan 11, 9602 GM Hoogezaand, 05980-2 03 03
Horst	School voor Beroepsonderwijs De Reindonk Bemmelstraat 2 5961 HN Horst 04709-49 00	1 W. H. J. Basten, Renkenstraat 10, 5975 NK Sevenum, 04767-24 16 2 W. Crijns, Den Roover 17, 5953 BM Reuver, 04704-19 46
Leeuwarden	Mavo Nylan Prinsessenweg 4 8931 EG Leeuwarden 05100-2 76 24	1 F. de Boer, L. Hohmanstraat 24, 8802 XW Franeker, 05170-36 10 2 J. Tuinstra, De Finne 36, 9036 KK Menaldum, 05185-15 17

Middelburg	Oranje Nassauschool voor Chr. Mavo Oranje laan 11 4332 VA Middelburg 01180-2 52 74	1 J. A. Blik, Kruisbessenstraat 45, 4413 DA Krabbedijke, 01134-18 42 2 A. Kammeraat, Van Strijenstraat 19, 4371 CH Koudekerke, 01185-22 31
Rotterdam	Christelijke Mavoschool Het lage Land Kromhoutstraat 3-5 3067 AE Rotterdam 010-20 53 93	1 W. de Porto, Schubertthof 47, 2742 BX Waddinxveen, 01828-46 74 2 L. Bozuwa, Abeelstraat 7, 3329 AA Dordrecht, 078-16 39 46
Sittard	Scholengemeenschap St. Catharina Odasingel 90 6131 GZ Sittard 04490-1 75 86	1 O. P. D. Bolech, B. Schrijenstraat 10, 6137 RR Sittard, 04490-1 85 22 2 J. J. H. Plum, Maastrichterweg 16, 6381 RZ Ubach over Worms, 045-31 29 08
Utrecht	R.K. Mavo Overvecht Pahud de Mortagnesdreef 41 3562 AB Utrecht 030-61 69 46	1 M. Taal, Kon. Julianastraat 12, 2731 EG Benthuisen, 079-31 35 72 2 P. Visser, Lekdijk 13, 4121 KG Everdingen, 03472-15 48
Zwolle	Thorbecke Scholengemeenschap Dr. van Heesweg 1 8025 AB Zwolle 05200-4 66 77	1 G. Scheppink, Merelstraat 102, 7731 XE Ommen, 05291-35 26 2 S. R. Zwaan, Krulmate 57a, 8014 KG Zwolle, 05200-5 25 30

*) 1: c-examen, 2: d-examen

Nascholing

Het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde organiseert op 9, 10 en 11 juni 1983 een C-conferentie met als thema: *Rekening houden met verschillen tussen leerlingen*. Waar mogelijk wordt gewerkt met concreet materiaal en steeds zal-gepoogd worden de dagelijkse schoolpraktijk in het vizier te houden. Aan de hand van schoolboekteksten, proef-werken enz. worden de deelnemers meer bewust gemaakt van verschillen tussen leerlingen en van mogelijkheden om met die verschillen rekening te houden.

De conferentie begint op 9 juni om 10 uur en eindigt op 11 juni om 14 uur (na de lunch) en wordt gehouden in Ede (bij Wageningen). Kosten fl 115,- incl. overnachtingen, maaltijden en cursus-materiaal. Geïnteresseerden kunnen zich *uitsluitend schriftelijk* voor 20 mei opgeven bij Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen onder vermelding van C-conferentie juni 1983, naam, adres, tel.

Mededeling voor deelnemers aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade

Leerlingen van niet-eindexamenklassen, die 21 of méér punten behaald hebben in de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1983, kunnen in aanmerking komen voor deelname aan de tweede ronde in september.

H. N. Schuring



STICHTING DE VRIJE LEERGANGEN
MO-OPLEIDINGEN AMSTERDAM

Het Instituut VL-MO verzorgt deeltijdopleidingen tot leeraar en andere beroepen op eerste- en tweedegrads niveau voor de volgende vakken:

Nederlands-A en B
Engels-A en B
Frans-A
Duits-A

Geschiedenis
Theologie-A
Economie
Wiskunde-A en B

Hulpcursussen voor Latijn en Logopedie.

Vooropleiding HAVO-diploma of gelijkwaardig.
Degenen die niet een voor toelating vereist diploma bezitten en 25 jaar of ouder zijn, kunnen aan een toelatingsonderzoek deelnemen.

De colleges worden meestal in de avonden gegeven. De colleges Engels-A en Frans-A kunnen behalve 's avonds ook overdag worden gevolgd.

Voorlichting aan belangstellenden op woensdagavond 27 april, 20.00 uur in het hoofgebouw aan de Vrije Universiteit, De Boelelaan 1105, te Amsterdam-Buitenveldert.

De studiegids en aanmeldingsformulieren zijn verkrijgbaar bij het MO-secretariaat, Postbus 90048, 1006 BA Amsterdam, tel. 020-934921.

INHOUD

C. de Munter: Het wiskundeonderwijs in evolutie 321

M. C. van Hoorn: Cito – jammer 330

H. Boertien: Naschrift 339

H. Broekman: Oneindig min oneindig en nul maal oneindig 342

jud Cracht
~~H. N. Schuring~~: De Tweede Ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 345

H. Bolt: Wiskunde in economie 348

Recreatie 351

Boekbesprekingen 329, 344, 354

Mededelingen 357, 360

ADRESSEN VAN AUTEURS

H. Boertien, CITO, postbus 1034, 6801 MG Arnhem

H. Bolt, Dahliastraat 22, 3911 WD Rhenen

H. Broekman, PDI der RU Utrecht, postbus 80-120, 3508 TC Utrecht

M. C. van Hoorn, Sloep 102, 9732 CE Groningen

Prof. Dr C. de Munter, R. Berrewaertslaan 12, B-1070 Anderlecht, België

H. N. Schuring, CITO, postbus 1034, 6801 MG Arnhem