

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

58e jaargang

1982/1983

no. 8

april

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Mw. I. van Breugel - Drs. F. H. Dolmans (hoofdredacteur) -
Dr. F. Goffree - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens -
P. E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders -
Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) -
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie:

F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 3218. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 45,- per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 30,-; contributie zonder Euclides f 25,-.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894 - 11730. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-550834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 7,- (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.

Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Tendensen in het wiskundeonderwijs (Rijksonderwijs)*

R. LAUMEN

1 Tendensen in de onderwijsstructuren

Hoewel dit steeds saaie materie is en soms moeilijk begrijpelijk voor hen die er niet goed mee vertrouwd zijn moet er toch even naar verwezen worden omdat bepaalde situaties dan in een bepaalde relatie kunnen worden geplaatst.

Vooreerst zijn er – zoals ik ze zou willen noemen – de twee grote structurele perioden:

A de periode vóór 1970: het zogenaamd traditioneel onderwijs

B de periode na 1970: het zogenaamd vernieuwd secundair onderwijs.

A In het traditioneel onderwijs was er grotendeels (alle bijzonderheden worden niet gegeven) volgende verdeling:

LAGER MIDDELBAAR ONDERWIJS

(cyclus van drie leerjaren voor leerlingen van 12-15 jaar)

voor iedereen

4 lessen/week

HOGER MIDDELBAAR ONDERWIJS

(cyclus van drie leerjaren voor leerlingen van 15-18 jaar)

Latijn-Griekse afdeling }
Economische afdeling }
Menswetenschappen }

3 lessen/week

Latijn-Wetenschappen }
Wetenschappelijke B }

5 lessen/week

Latijn-Wiskunde }
Wetenschappelijke A }

7 lessen/week

* Voordracht gehouden tijdens de zevende gemeenschappelijke studiedag van NVvW en VVWL op 20 maart 1982.

LAGER TECHNISCH ONDERWIJS

(cyclus van drie leerjaren voor leerlingen van 12-15 jaar)

Een aantal afdelingen (vooral industrieel gericht)	5 lesuren/week
Andere afdelingen	4 lesuren/week

HOGER TECHNISCH ONDERWIJS

(cyclus van drie leerjaren voor leerlingen van 15-18 jaar)

Een aantal afdelingen (vooral industrieel gericht)	
het eerste leerjaar	6 lesuren/week
het tweede leerjaar	5 lesuren/week
het derde leerjaar	3 lesuren/week
ook wel (5, 5, 3) o.m. in de afdeling Hout	
Een aantal afdelingen (vooral handelsgericht)	
alle leerjaren	3 lesuren/week

Er is één uitzondering nl. de afdeling Industrieel-Wetenschappen waar men veel uren wiskunde heeft (tot 9 uur/week).

Dit alles slaat op de meerderheid van de afdelingen. De afdelingen die afwijkende urenverdelingen hebben zijn niet representatief voor de situatie die we hier willen uiteenzetten.

Tenslotte dienen we nog te vermelden dat het beroepsonderwijs niet wordt besproken omdat het probleem in het beroepsonderwijs slaat op de algemene vorming in zijn geheel en omdat het weinig verband houdt met de specifieke plaats van de wiskunde.

De tendensen van structurele aard die in het traditioneel onderwijs de krachtlijnen bepaalden zijn dus vrij duidelijk nl.:

- in de lagere cyclus, zowel in het middelbaar als in het technisch onderwijs, wil men met een zelfde aantal uren voor iedereen een algemene basis opbouwen;
- in de hogere cyclus van het middelbaar onderwijs een differentiatie van uren al naargelang de doelstellingen van de afdeling;
- in de hogere cyclus van het technisch onderwijs een differentiatie van uren al naar gelang de groepen afdelingen, maar een vermindering naar het laatste leerjaar toe om de technische vakken meer ruimte te geven (maar ook steun).

Algemene opmerking

Men achtte het voor iedereen noodzakelijk wiskunde te 'leren' tijdens de zes leerjaren van het secundair onderwijs.

B In het vernieuwd secundair onderwijs liggen de 'kaarten' als volgt:

EERSTE CYCLUS (cyclus van twee leerjaren van 12-14 jaar)

eerste leerjaar	5 lesuren/week
tweede leerjaar	4 lesuren/week

TWEEDE CYCLUS (cyclus van twee leerjaren van 14-16 jaar)

derde leerjaar doorstroming	4 lessen/week
derde leerjaar korte kwalificatie	2 lessen/week
vierde leerjaar doorstroming	3 lessen/week
voor alle studierichtingen behalve voor de studierichtingen wetenschappen en industrieel-wetenschappen die 5 lessen/week hebben.	
vierde leerjaar korte kwalificatie	2 lessen/week

Het is wel zo dat de scholen de mogelijkheid wordt geboden om in het vierde leerjaar doorstroming voor de studierichtingen met 3 lessen/week toch het pakket van 5 lessen/week te kiezen mits met zekere aanpassingen.

De leerjaren korte kwalificatie zijn in principe eindjaren waarna de leerling het beroepsleven binnenstapt.

DERDE CYCLUS (cyclus van twee leerjaren van 16-18 jaar)

Vijfde en zesde leerjaar doorstroming

In de gemeenschappelijke vorming werd geen wiskunde voorzien, maar wel in verschillende studierichtingen nl.

Wiskunde	}	8 lessen/week
Industrieel-Wetenschappen		
Wetenschappen	}	6 lessen/week
Sport-Wetenschappen		mogen kiezen tussen
Economische Wetenschappen	}	6 of 4 lessen/week
Moderne Talen		
Klassieke Talen	}	
Menswetenschappen		hebben geen wiskunde
Plastische Opvoeding		
Muzikale Opvoeding		

Maar de laatste vijf kunnen via complementaire activiteiten toch 2 lessen/week wiskunde kiezen (iedereen heeft nl. de mogelijkheid complementaire activiteiten te kiezen in een mindere of meerdere mate).

Vijfde en zesde leerjaar kwalificatie

In de gemeenschappelijke vorming werd geen wiskunde voorzien, maar wel in de verschillende studierichtingen.

Behalve de studierichting informatica, die 7 uur wiskunde/week heeft, hebben de meeste industriële studierichtingen (o.m. elektriciteit, elektronica, chemie) het systeem van de keuze tussen 6 of 4 uur wiskunde per week. De bedoeling hiervan staat in functie van verdere studies nl. met 6 uur/week wordt eventueel een hogere studie voor industrieel ingenieur nagestreefd.

Enkele studierichtingen hebben alleen maar 4 uur/week (Hout, Automechanica,) en enkele hebben slechts 2 uur/week.

Tenslotte zijn er enkele (en zeer weinig t.o.v. het totaal aantal studierichtingen) die geen wiskunde, als optie bekeken, bevatten *maar* ook deze – net zoals bij de doorstromingsafdeling – hebben de mogelijkheid wiskunde op te nemen via de complementaire activiteiten.

De tendensen in het vernieuwd secundair onderwijs – dit wat het wiskundeonderwijs betreft – zijn dus vrij gelijklopend met die van het traditioneel onderwijs:

- in de eerste graad, dus in de eerste twee leerjaren, en ook in het eerste leerjaar van de tweede graad (m.a.w. het derde leerjaar) wordt via eenzelfde aantal lesuren voor iedereen een algemene basis opgebouwd;
- vanaf het tweede leerjaar van de tweede graad (d.w.z. het vierde leerjaar) is er een differentiatie van aantal uren al naar gelang de doelstelling(en) van de studierichtingen.

Men kan zich natuurlijk de vraag stellen ‘Zijn de tendensen van structurele aard bij beide onderwijstypes dezelfde?’

Het antwoord is eigenlijk: *ja, bijna*. Het typisch onderscheid tussen de twee onderwijstypes is dat men in het vernieuwd secundair onderwijs twee richtingen kan uitgaan (meestal) met het oog op eventuele verdere studies. Ook dient gezegd dat men het principe verlaten heeft dat iedereen wiskunde moet studeren. Een aantal studierichtingen waarvoor het vak wiskunde niet van onmiddellijk nut is, kunnen een andere keuze maken! Toch bestaat de mogelijkheid voor iedereen om wiskunde te studeren.

Algemeen besluit

Het geheel is soepeler geworden maar men huldigt op structureel gebied ongeveer dezelfde principes.

2 Tendensen in de wiskundeleerplannen

Structuren mogen nog zo goed opgebouwd zijn, nog zo grandioos bepaalde principes trachten te concretiseren en nog zo algemeen aanvaard worden, steeds zullen zij een vulling dienen te krijgen door de inhoud van de leerplannen.

Net zoals bij de structuren tekenen er zich twee grote perioden af nl.:

- de periode vóór 1968, deze van de zogenaamde traditionele wiskunde
- de periode na 1968, deze van de zogenaamde moderne wiskunde.

De periode vóór 1968

De leerstofonderdelen in de zogenaamde traditionele wiskunde vertoonden een aantal zeer sterk gescheiden onderdelen. We hoeven maar te herinneren aan de ‘vakken’ zoals rekenkunde, algebra, vlakke meetkunde, ruimtemeetkunde, driehoeksmmeetkunde, beschrijvende meetkunde en boldriehoeksmmeetkunde. Het ging soms zelfs zó ver dat die onderscheiden vakonderdelen afzonderlijk op de rapporten van de leerlingen waren vermeld.

In sommige van die vakonderdelen werd dan soms een erecultus tot stand gebracht met betrekking tot enkele onderwerpen. Zo kunnen we b.v. aanduiden dat in de vlakke meetkunde een verering aan de dag werd gelegd voor de meetkunde van de driehoek; zo kunnen we b.v. aanduiden dat in de driehoeksmmeetkunde het oplossen van driehoeken tot in de puntjes werd verkend; zo kunnen we b.v. aanduiden dat in de algebra het ontbinden in factoren een koninginnestuk in het schaken waard was en dat in de rekenkunde – vaak als

koningin van de wiskunde betiteld – de deelbaarheid een stevige machtspositie innam. In de klas zelf werden natuurlijk sommige onderdelen verzwakt of versterkt al naar gelang de persoonlijke interesse van de leerkracht.

Verder dient vermeld dat er vrij weinig differentiatie was tussen de leerplannen van de verschillende afdelingen. In het zogenaamde middelbaar onderwijs (algemeen vormend) bestond de differentiatie hierin dat meer uren meer leerstof betekende zonder dat die leerstof op de een of andere wijze verband hield met de gevolgde afdeling. In het technisch onderwijs duurde het zelfs tot de jaren 1962-64 eer officieel leerplannen werden gepubliceerd, d.w.z. luttele jaren vóór de ‘modernisering’ van de wiskunde.

De redenen hiervoor waren vrij duidelijk want de wiskunde speelde in het middelbaar onderwijs een rol te vergelijken met de rol van het latijn en het grieks nl. het aanbrengen van een algemene vorming (wat dit ook moge betekenen, want een bruikbare definitie hiervoor is mij onbekend). Het technisch onderwijs – om nog maar van het beroepsonderwijs te zwijgen – werd als de ‘vuilemmer’ beschouwd voor het middelbaar onderwijs en expliciet als minderwaardig bestempeld.

De periode van 1968 tot nu

Op dat ogenblik (september 1968) werd de zogenaamde moderne wiskunde volledig en progressief in het secundair onderwijs ingevoerd.

Een van de grote krachtlijnen van deze invoering was zonder twijfel het streven naar eenheid. Men streefde er naar de ganse wiskunde (d.w.z. al de vroegere onderdelen) onder te brengen in één systeem. Hiermee werd bedoeld dat alles vanuit bepaalde elementen zou worden opgebouwd. De bouwstenen zijn nu verzamelingen, relaties en functies; dan de studie van de getallen als structuren, de studie van de verschillende verzamelingen van transformaties in de meetkunde en hun algebraïsche structuur, tenslotte de studie van de vectorruimten met dimensie 2 en dimensie 3.

Dit alles gaf aanleiding tot een spectaculaire ommezwaai in onderwerpen en in didactische aanpak.

De ommezwaai in onderwerpen was vooral te merken in de eerste drie leerjaren van het secundair onderwijs met een totale revolutie in de vlakke meetkunde. Weg met de verering van de driehoek, leve de transformatiemeetkunde. Deze transformatiemeetkunde legde evenwel weinig nadruk op het meetkundige (er werd dan nog onderscheid gemaakt tussen affiene en metrische meetkunde) maar wel op het algebraïsche.

En de verering kwam terug! Hoewel de driehoek van zijn voetstuk viel is het nu het groepsbegrip dat alle aandacht opeist. Daarna wordt de fakkel overgenomen door het begrip vectorruimte. De didactische aanpak wordt nu gedomineerd door de allesomvattende algebraïsche structuren.

Het invoeren van het onderwerp van de reële getallen (vroeger slechts vluchtig en dan nog in de hoogste leerjaren) was eveneens een revolutionaire ingreep, niet alleen als onderwerp maar ook vanuit de didactische behandeling waar o.m. de invoering van de bewerkingen met reële getallen via transformatiemeetkunde heel wat controversen heeft opgeroepen.

Het invoeren van het begrip reëel getal via ‘ineenschuivende’ intervallen heeft wel

– dit wegens didactische redenen – het binair talstelsel als hulpmiddel opgeroepen maar deze werkwijze heeft niet zo lang standgehouden wegens o.m. tijdsgebrek en een te abstracte aanpak. Daardoor verdween het binair talstelsel uit de leerplannen als specifiek onderwerp.

De onderwerpen in de laatste drie leerjaren van het secundair onderwijs werden t.o.v. de vorige periode niet zo fundamenteel gewijzigd op de invoering van matrices en beginselen van statistiek na (en in de sterk wiskundige richtingen lineaire en orthogonale transformaties). De wijzigingen zijn hier voornamelijk te vinden in de didactische aanpak o.m. in de behandeling van continuïteit, van limieten van functies en bij sommigen in het invoeren van de neperiaanse logaritme. Zeker anders is de aanpak van de vroegere meetkunde van de ruimte die, beschouwd als driedimensionale vectorruimte, algebraïsch en sterk abstract is. De bedoeling hiervan is duidelijk: het afbouwen of beter gezegd het wegnemen van de schotten die vroeger bestonden tussen o.m. algebra, meetkunde, Een ander onderwerp dat de abstracte tendens van de wiskunde nog versterkt is de invoering van elementaire begrippen van topologie vóór het begin van de analyse.

Algemeen is het vrij eenvoudig de tendensen samen te vatten: de wiskunde verkreeg een eenheidsstructuur en werd daardoor formeler en abstracter.

Hoe hebben al deze tendensen zich nu ontwikkeld? Met andere woorden, hoe kijkt men nu tegen al deze situaties aan?

Het is duidelijk dat bij elke invoering van iets nieuws, bij elke verandering er voor- en tegenstanders zijn en ook een aantal ‘neutralen’. Na veertien jaar kan men echter wel, zonder al te veel apriorismen, duidelijk aangeven in welke richting men denkt.

Laten we hier de verschillende leerjaren – zonder echter te sterk te specificeren – even doorlopen.

De theorie van de verzamelingen en relaties wordt nu niet meer zo uitgediept als in het begin, waardoor ongeveer alleen die begrippen overblijven die ergens essentieel zijn voor het vervolg. Meer nog, vermits vanaf het schooljaar 1984-85 alle leerlingen uit het lager onderwijs reeds vertrouwd zullen zijn met verzamelingen en relaties bestaat er een redelijk sterke tendens om in het eerste leerjaar van het secundair onderwijs de theorie van de verzamelingen en relaties te beperken of zelfs weg te laten en enkel de nadruk te leggen op het gebruik ervan in de studie van de natuurlijke, van de gehele en van de rationale getallen en bij de elementen van de vlakke meetkunde.

Wat de reële getallen aangaat voelt men meer voor een intuïtieve aanpak en er is nog weinig enthousiasme om de bewerkingen met getallen via de transformatie-meetkunde in te voeren. Hoewel heel wat leerkrachten als reden tijdgebrek opgeven zijn de meeste ook van oordeel dat die aanpak veel te abstract is op een ogenblik dat de leerlingen nog volop georiënteerd worden. Aangaande de verschillende verzamelingen transformaties in meetkunde wordt de mening naar voren geschoven dat het meetkundig aspect meer aan bod moet komen en dat het groepsbegrip hier weinig of niets aan bijdrage levert voor verdere behandelingen. Tevens wordt gewezen op het feit dat een aantal basisconstructies zoals het construeren van de loodlijn uit een punt op een rechte, in een punt op een rechte en ook de bissectrice van een hoek zeer dringend terug op het leerplan dienen te

komen. Men wil vanaf het begin ook metrisch werken.

Ook – en dit is vrij algemeen – wordt het voorstellen van rechten als verzameling punten in een Venn-diagram als veel te abstract en zelfs als verwarrend aangeduid. Dit is te situeren in de trend dat vooral de eerste leerjaren minder abstract dient te worden gewerkt. Bij de overige onderwerpen in de eerste leerjaren (tot de vierde leerjaren toe) is men best tevreden met het algebraïsch gedeelte hoewel b.v. het scalair produkt toch ook als abstract wordt ervaren.

In de laatste leerjaren van het secundair onderwijs wijst men alleen op de rampzalige toestand van de meetkunde in de ruimte. De tendens is hier bij de leerkrachten zeer duidelijk nl. geen abstracte, algebraïsche behandeling langs het begrip vectorruimte om, maar een meetkundige behandeling. Het inzicht in de ruimte (zicht op lichamen, vorm,) is een onmisbaar onderdeel voor de wiskundige vorming en dit geldt ook voor sterk-wiskundige richtingen.

Differentiatie van de leerplannen i.v.m. de studierichtingen

Met de invoering van de 'nieuwe' wiskunde werd er meer aandacht besteed aan de differentiatie i.v.m. de studierichtingen van het technisch onderwijs. Toch blijkt nog altijd volgend nadeel aanwezig te zijn: men bemerkt dat de leerplannen van minder wiskundig gerichte afdelingen steeds een soort 'afkooksel' zijn van de sterke afdelingen. Men laat nl. uit de leerplannen van sterke afdelingen het een en het ander weg voor andere afdelingen en dan moet dit maar goed zijn. Deze bewering is misschien nogal sterk maar wijst toch op de tekortkoming dat met de eigen specifieke doelstellingen van een studierichting niet altijd rekening wordt gehouden. De tendens dit wel te doen is nu echter bij velen – en niet in het minst bij de leden van de leerplancommissie – duidelijk aanwezig.

Hierbij dient wel opgemerkt dat bij de invoering van het vernieuwd secundair onderwijs deze tendens moeilijker te verwezenlijken valt want tot en met het derde leerjaar heeft ongeveer iedereen hetzelfde leerplan omdat soepele en pedagogisch haalbare overgangen na het derde leerjaar (soms zelfs na het vierde leerjaar) nog moeten mogelijk zijn.

3 Tendensen in het lesgeven zelf

Over de tendensen binnen dit onderwerp kan wel wat worden gezegd maar niet zonder belang is volgende voorafgaande opmerking: 'De evolutie van de vakdidactiek is, alle verhoudingen in acht genomen, geschied in een langzamer tempo dan de evolutie van structuren en de evolutie van leerplannen.'

Een eerste vraag is nu:

'Heeft de invoering van de moderne wiskunde een invloed gehad op de wijze van lesgeven?'

Hier kunnen we stellen dat in het eerste leerjaar secundair onderwijs dit inderdaad het geval is geweest. De theorie van de verzamelingen en van de relaties bood de leerkrachten de gelegenheid het klassieke voorbeeldenarsenaal van de wiskunde te verlaten en te gaan putten uit de realiteit van de omgeving. Dit veroorzaakte bij de leerlingen een verhoging aan motivatie die op haar beurt

een bijkomende stimulans betekende voor de leerkrachten. Het bleek echter dat die verhoging aan motivatie bij de leerlingen slechts van tijdelijke aard was. In de andere leerjaren kwamen dan vele situaties terug in de oude plooi op het gebied van lesgeven, behalve dan misschien het geven van bewijzen. Heel wat meetkundige situaties worden experimenteel onderzocht en niet altijd wordt een bewijs gegeven of gevraagd. De oorzaak is hier wel voornamelijk te vinden in de zwaar beladen programma's waarvan het afwerken heel wat tijd vergt en dan wordt er soms tijd gezocht door bewijzen weg te laten. Dit was vroeger wel een ondenkbare werkwijze. Het kadert bovendien ook wel in de trend dat er meer aan zelfstandig werk dient te worden gedaan.

Maar een *tweede vraag* gaat dit alles nu doorkruisen:

'Heeft de invoering van het vernieuwd secundair onderwijs een invloed gehad op de wijze van lesgeven?'

Alhoewel in het antwoord op deze vraag niet mag worden overdreven en men zich moet behoeden voor apriorismen mag men toch een sterker ja laten horen dan op de vorige vraag.

Inderdaad ging de invoering van het vernieuwd secundair onderwijs – specifiek voor wiskunde – gepaard met twee maatregelen nl.:

1° In de eerste vier leerjaren werd één van de lesuren wiskunde gesplitst, d.w.z. op dat ogenblik werd de klas ongeveer gehalveerd (b.v. in groep A en groep B). Wanneer groep A wiskunde heeft, heeft groep B moedertaal of 2de taal want de maatregel werd ook ingevoerd voor moedertaal en 2de taal. Op een ander ogenblik krijgt groep B dan wiskunde. Kort gezegd, de leerkracht heeft één lesuur maar ongeveer de helft van de leerlingen. Dit zogenaamd gesplitst lesuur wordt besteed aan herhaling en uitdieping van de leerstof (individueel of in groep) met behulp van gedifferentieerde oefeningen. Zonder te willen beweren dat vroeger niet herhaald werd, of dat men nooit gedifferentieerde oefeningen gaf moet toch worden gezegd dat dit zelden op zulk een georganiseerde manier gebeurde. Er zijn zelfs handboeken die hierop hebben ingespeeld met het invoeren van basis- en extra oefeningen.

2° Ten tweede werden o.m. voor wiskunde inhaallessen/bijwerklessen voorzien voor het inhalen van achterstanden of het bijwerken van bijzondere vakonderdelen d.w.z. voor alle pedagogisch verantwoorde situaties i.v.m. het onderwijs in de wiskunde.

Deze twee structurele maatregelen brachten zeer duidelijk een nieuw element in het onderwijs in de wiskunde dat complementair is aan het klassikale onderwijs. Het bracht dan ook de opstelling mee van een heleboel nieuwe oefeningspakketten.

Een *derde vraag* die men moet stellen werd misschien vroeger verwacht:

'Hoe is het gesteld met het gebruik van de zakrekenmachine?'

In dit verband zijn reeds enkele onderzoeken doorgevoerd o.m. één, waarvan het verslag verscheen in Wiskunde en Onderwijs nr. 27 door G. PLANCKE-SCHUYTEN en K. ZENNER-YDE.

Eenvoudig samengevat kan gesteld worden dat vanaf het derde leerjaar de zakrekenmachine meer en meer wetenschappelijke hulp geeft met vooral deze

kwaliteit, naar de laatste leerjaren toe, dat meer en meer numeriek ingewikkelder oefeningen kunnen worden gemaakt. Dit heeft dus duidelijk pedagogische voordelen. In het lager onderwijs en in de eerste twee leerjaren van het secundair onderwijs aarzelt men nog om de ZRM te gebruiken omdat de vrees bestaat dat inzicht in het rekenen het slachtoffer zou zijn.

In de leerplannen wordt geen systematisch gebruik van de ZRM aangeduid maar er wordt wel gewezen op de noodzaak dit gebruik in te voeren. Tenslotte komt hier nog een 'extra'-situatie naar voren nl. deze dat in vele scholen wiskundeleerkrachten, op vrijwillige basis, lesuren inleggen na het klasrooster om de beginselen van programmeren met geïnteresseerde leerlingen (en er zijn er vele!) door te nemen. Dit heeft dan weer extra-oefeningen op de leerstof tot gevolg zodat het onderwijs in de wiskunde extra-impulsen krijgt.

Een *vierde vraag* die een gevolg is van de derde en van de huidige evolutie is: 'Heeft het eventueel gebruik van de microcomputer invloed op het onderwijs in de wiskunde?'

Het zal geen grote verbazing wekken als vermeld wordt dat het gebruik van de microcomputer in lesverband nog in zijn kinderschoenen staat, dit wat lesgeven in het algemeen betreft. Dit schooljaar (1981-82) is echter een mijlpaal geweest. In ongeveer 75 secundaire scholen kunnen de leerlingen van de laatste twee jaren als complementaire activiteit 'Informatica en programmeren' kiezen waarbij o.m. heel wat wiskundige toepassingen worden behandeld. In deze 75 scholen werden nl. microcomputers geplaatst en ver over de 1000 leerlingen hebben van dit aanbod gebruik gemaakt.

Dit heeft weer tot gevolg dat heel wat wiskundige redeneringen vanuit een andere hoek worden bekeken en dit vooral op concrete wijze zodat een tegengewicht gevormd wordt met abstracte werkwijzen. De aanwezigheid van beide denk- en redeneervormen is een waarborg voor een verdere, evenwichtige uitbouw van het onderwijs in de wiskunde.

Ook dient vermeld dat heel wat scholen – via financiële steun van o.m. vriendenkringen – zich reeds een microcomputer hadden aangeschaft of dit plannen voor de toekomst.

Over de auteur:

René Laumen studeerde wiskunde aan de Rijksuniversiteit te Gent. Van 1956 tot 1968 was hij leraar wiskunde aan het Hoger Rijksinstituut voor Kernenergiebedrijven te Mol. Vanaf 1968 is hij rijksinspecteur wiskunde en bovendien vanaf 1978 Algemeen pedagogisch inspecteur.

Verhoudingen en evenredigheden

J. J. SLOFF

Verhoudingen en evenredigheden spelen in de praktijk een belangrijke rol. In wiskundeboeken krijgen ze echter weinig aandacht. In dit artikel worden in de eerste drie paragrafen de verhoudingen en evenredigheden in een wiskundige structuur geplaatst; vervolgens zal een gebruik van deze structuur in praktische situaties geschetst worden.

1 Waar en hoe treden verhoudingen op?

Voorbeeld 1: In klas 2a zitten 12 meisjes en 16 jongens; verhouding meisjes, jongens: '12 op 16' of '12 staat tot 16' of $(12, 16)$.

Voorbeeld 2: Op de veemarkt worden 70 koeien, 15 paarden en 40 schapen aangevoerd; 'verhouding: 70 staat tot 15 staat tot 40' of $(70, 15, 40)$.

Dit is uit te breiden tot verhoudingen tussen n grootheden. De uitdrukking 'staat tot' is nogal omslachtig om op te schrijven; vandaar de schrijfwijze $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. De schrijfwijze met dubbele punt, zoals $12 : 16$ of $70 : 15 : 40$ kan gelezen worden als een deling en schept daardoor verwarring (zie par. 2).

Voorbeeld 3: Volgens een koekrecept zijn onder meer de volgende hoeveelheden ingrediënten nodig: 500 gram bloem, 100 gram suiker en 200 gram boter; verhouding $(500, 100, 200)$. Had men als eenheid van gewicht 'ons' genomen in plaats van 'gram', dan was de verhouding $(5, 1, 2)$. De verhoudingen $(500, 100, 200)$ en $(5, 1, 2)$ zijn verschillend in die zin, dat men niet kan zeggen $(500, 100, 200) = (5, 1, 2)$.

Moeten er beperkingen gesteld worden aan de getallenverzameling, waaruit in de verhouding $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de getallen a_i gekozen worden? De verhouding geeft er geen aanleiding toe. Hoogstens de kontekst waarbinnen de verhouding optreedt. Is er een kontekst te bedenken, waarbij de verhouding $(0, 0)$ optreedt? Ja, de doelpuntenverhouding bij een voetbalwedstrijd: uitslag 2-1, doelpuntenverhouding $(2, 1)$; uitslag 0-0, doelpuntenverhouding $(0, 0)$.

De volgende voorbeelden illustreren hoe men kan rekenen met verhoudingen.

Voorbeeld 4: Uit de voetbalwereld.

1e wedstrijd Jannen tegen Pieten, uitslag 2-3, verhouding $(2, 3)$.

2e wedstrijd Jannen tegen Pieten, uitslag 1-2, verhouding $(1, 2)$:

einduitslag 3-5, verhouding $(3, 5)$.

Dit voorbeeld geeft zicht op de optelregel voor verhoudingen: zijn (a, b) en (c, d) verhoudingen, dan is $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ of algemeen:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

Voorbeeld 5: Bij het koekbakken in voorbeeld 3 wil men vier keer zoveel koek hebben als in het recept staat. De benodigde hoeveelheden ingrediënten zijn nu: $4 \cdot (500, 100, 200) = (2000, 400, 800)$.

Dit geeft zicht op de scalaire vermenigvuldiging:

$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n).$$

2 Verhoudingen, breuken, evenredigheden

Vaak wordt het voorgesteld alsof een verhouding een breuk of een quotiënt is. Uit par. 1 blijkt, dat dit niet juist is. De optelling en scalaire vermenigvuldiging gelden niet voor breuken; een verhouding $(5, 2, 3)$ kan men niet als breuk schrijven. Verder zouden verhoudingen als $(12, 16)$, $(9, 12)$ en $(3, 4)$ aan elkaar gelijk zijn. Dan moet er wel eerst vastgesteld worden, wat 'gelijk zijn' in dit verband betekent. Opvallend is, dat men niet zegt '12 staat tot 16 IS 3 staat tot 4', maar wel '12 staat tot 16 ALS 3 staat tot 4' of '12 en 16 verhouden zich als 3 en 4'. Blijft de vraag, welke betrekking er dan wel bestaat tussen verhoudingen en breuken. Welnu, als een verhouding uit een getallenpaar bestaat, kan men aan deze verhouding een getal toevoegen. Men definieert daartoe de afbeelding

$$E: V' = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid b \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}: (a, b) \rightarrow \frac{a}{b}.$$

Het is eenvoudig in te zien, dat deze afbeelding de verzameling V' verdeelt in ekwivalentieklassen door de relatie 'heeft onder de afbeelding hetzelfde beeld als'. Zo'n ekwivalentieklasse noemt men een evenredigheid.

Voorbeeld 6: De verhoudingen $(12, 16)$, $(9, 12)$ en $(3, 4)$ hebben onder E het beeld $\frac{3}{4}$; deze verhoudingen zijn element van de evenredigheid $\{\dots, (12, 16), (9, 12), (3, 4), \dots, (-6\sqrt{3}, -8\sqrt{3}), (1\frac{1}{2}, 2), \dots\}$.

Verenigt men V' met $\{(a, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \neq 0\}$ en $\{(0, 0)\}$, dan heeft men de gehele verzameling V met elementen van het type (a, b) ingedeeld in ekwivalentieklassen. Formeel is er geen bezwaar tegen om $\{(a, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \neq 0\}$ een evenredigheid te noemen. Voor $\{(0, 0)\}$ heeft dit weinig zin. Deze manier om evenredigheden te definiëren is echter alleen bruikbaar voor verhoudingen van het type (a, b) . Om ook iets te vinden voor verhoudingen van het type $(5, 2, 3)$ enz. kan men de volgende weg bewandelen. Uit bovenstaande definitie volgt: als (a, b) en (c, d) elementen zijn van dezelfde evenredigheid, dan is er een $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, zodat $c = ka$ en $d = kb$. Deze regel kan men ook gebruiken als definitie voor evenredigheid met als voordeel, dat ze bruikbaar is voor verhoudingen, die bestaan uit n

getallen. Stel $V_n = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$. De verhoudingen $(a_1, \dots, a_n) \in V_n$ en $(b_1, \dots, b_n) \in V_n$ zijn evenredig als er een $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ is, zodat voor elk paar (a_i, b_i) uit deze twee verhoudingen geldt $b_i = ka_i$. Door deze definitie wordt de verzameling V_n ingedeeld in ekwivalentieklassen; zo'n ekwivalentieklasse heet een evenredigheid.

3 Verhoudingen, vectoren, evenredigheden

$V_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ is de verzameling van verhoudingen van n getallen dus van getallenrijtjes. In V_n kan men een optelling en een scalaire vermenigvuldiging definiëren (zie par. 1) Het is eenvoudig na te gaan, dat V_n met deze optelling en scalaire vermenigvuldiging een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ is. Een verhouding kan daarom gerepresenteerd worden door een vector. Een evenredigheid bestaat uit een verzameling evenwijdige vectoren. Meetkundig gezien wordt de evenredigheid gerepresenteerd door een lijn door de oorsprong met uitsluiting van de oorsprong.

E is een evenredigheid; de verhouding $\bar{a}$ is een element van E . Volgens de definitie van evenredigheid is $k \cdot \bar{a}$ ook element van E als $k \neq 0$. Een voor het rekenwerk eenvoudige notatie voor een evenredigheid is de evenredigheidsmatrix:

$$\begin{bmatrix} a_1 & k \cdot a_1 & l \cdot a_1 & k \cdot a_1 + l \cdot a_1 & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & k \cdot a_2 & l \cdot a_2 & k \cdot a_2 + l \cdot a_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & k \cdot a_n & l \cdot a_n & k \cdot a_n + l \cdot a_n & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

De kolommen in deze matrix zijn verhoudingen van de evenredigheid.

Enkele eigenschappen van deze matrix:

- 1 Door vermenigvuldiging van alle elementen van een kolom met een scalair krijgt men een kolom uit de matrix.
- 2 Door twee kolommen uit de matrix bij elkaar te tellen krijgt men een kolom uit de matrix.
- 3 Door $l = -k$ te nemen blijkt dat de matrix een kolom bevat, waarvan alle elementen gelijk zijn aan 0.
- 4 Men kan een evenredigheidsmatrix met minder rijen maken door een of meer rijen uit de matrix te schrappen.
- 5 Men kan een nieuwe evenredigheidsmatrix met $n + 1$ of meer rijen maken door het toevoegen van bijvoorbeeld $\text{rij}_{n+1} = p \times \text{rij}_i + q \times \text{rij}_j$.
- 6 Om een evenredigheidsmatrix te maken heeft men precies één verhouding uit de evenredigheid nodig.
- 7 Zijn E en F evenredigheidsmatrices van dezelfde orde, dan is $E + F$ een evenredigheidsmatrix.

4 Voorbeelden van rekenwerk

Bij elk voorbeeld is de klas vermeld, waarin het behandeld is. In plaats van het woord 'matrix' wordt vaak het woord 'tabel' gebruikt. Cursief gedrukte getallen of berekeningen staan niet in de opgave, maar worden door de leerling in de matrix geschreven. Het rekenwerk wordt uitgevoerd met een zakrekenmachine.
Voorbeeld 1: Klas havo-2. Naar aanleiding van een kamp in België anno 1979. 1 ltr. melk kost 16,5 Bfr; de inkoopprijs van 1 Bfr is 7 cent. Hoeveel kost 2 liter melk, resp. 14 liter melk? Hoeveel melk kun je kopen voor 150 Bfr. Reken de bedragen om in guldens.

Liter	1	2	14	$150 \times \frac{1}{16,5}$	$\frac{1}{16,5}$
Bfr.	16,5		$14 \times 16,5$	150	1
Gulden				$150 \times 0,07$	0,07

Het is zaak om in elke rij een 1 te plaatsen en de overige elementen van de daarbijbehorende kolom te berekenen. Dit vereenvoudigt het rekenwerk.

Voorbeeld 2: Klas havo-2. Een bepaald soort touw kost 64 cent per meter; 1 meter van dit touw weegt 60 gram.

Vragen: Hoeveel kost 20 meter touw? Wat is het gewicht van 20 meter touw. Hoeveel touw kan je kopen voor f16, — ? Hoe lang is en wat kost 3 kg touw?
 Oplossing: maak een tabel en vul de lege plaatsen in.

lengte in meter	1	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{0,64}$	20	$16 \times \frac{1}{0,64}$	$3000 \times \frac{1}{60}$
gewicht in gram	60	1				3000
bedrag in guldens	0,64	$\frac{0,64}{60}$	1		16	$3000 \times \frac{0,64}{60}$

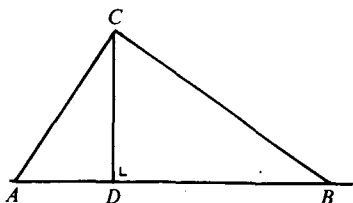
Voorbeeld 3: 2e klas havo of vwo.

Driehoek ABC; $\angle C = 90^\circ$; $CD \perp AB$; $AC = 6$, $BC = 8$ (en dus $AB = 10$).

Bereken AD, BD en CD. (Zie tek. volgende blz.).

Oplossing: De driehoeken ABC, ACD en BCD zijn gelijkvormig;
 afkortingen: krz = korte rechthoekszijde, lrz = lange rechthoekszijde, sz = schuine zijde.

	krz	lrz	sz	
ABC	6	8	10	$1 (= 10 \times \frac{1}{10})$
ACD	$0,6 \times 6$	$0,6 \times 8$	6	0,6
BCD	$0,8 \times 6$	$0,8 \times 8$	8	0,8



Voorbeeld 4: Klas 3 havo of vwo. Sweers en Vianen, Natuurkunde op corpusculaire grondslag, deel 2, par. 2.29, opgave 6.

Hoeveel kost het om langs elektrische weg 180 liter water te verwarmen van 20°C tot 100°C , als er geen warmte verloren gaat en 1 kilowattuur 8 cent kost? In het boek is te vinden: $1\text{kWh} = 3,6 \times 10^6$ Joule en om 1 kg water 1 graad C in temperatuur te verhogen is $4,2 \times 10^3$ Joule nodig.

Oplossing: maak een tabel en vul alleen die plaatsen in, die je voor de berekening nodig hebt.

kWh	1	$\frac{4,2}{3,6 \times 10^6}$	$\frac{4,2 \times 180}{3,6 \times 10^3}$	$\frac{4,2 \times 180 \times 80}{3,6 \times 10^3}$
Joule	$3,6 \times 10^6$	$4,2 \times 10^3$		
Kg. water		1	180	180
graden C		1	1	80
prijs in guldens	0,08			$\frac{4,2 \times 180 \times 80 \times 0,08}{3,6 \times 10^3}$

Na het invullen van de tabel wordt de prijs met behulp van de zakrekenmachine uitgerekend. Het opstellen en invullen van de tabel is te beschouwen als programmeren.

Toelichting op het invullen: Om de prijs te berekenen moet eerst het aantal kWh vastgesteld worden en daarvoor moet $4,2 \times 10^3$ J uitgedrukt worden in kWh, dat betekent overgaan van rij₂ naar rij₁ en dat houdt in 'delen door $3,6 \times 10^6$ '. Vervolgens gaan we over van 1 kg water naar 180 kg water; dat betekent de getallen uit kolom 2 vermenigvuldigen met 180 om kolom 3 te krijgen; enz.

Voorbeeld 5: Hans Steur, Levende Wiskunde, par. 9.2.

Hoeveel liter zuurstof en hoeveel liter waterstof wordt bij 0°C en 1 atm. gebruikt bij de vorming (via knalgas) van 2,5 gram water?

2H_2	2 mol	4 gram	$2 \times 22,4$ liter	$2 \times 22,4 \times \frac{1}{36}$	$2,5 \times 2 \times 22,4 \times \frac{1}{36}$
O_2	1 mol	32 gram	$1 \times 22,4$ liter	$1 \times 22,4 \times \frac{1}{36}$	$2,5 \times 22,4 \times \frac{1}{36}$
$2\text{H}_2\text{O}$	2 mol	36 gram		1 gram	2,5 gram

Voorbeeld 6: Hans Steur, *Levende Wiskunde*, par. 9.1.

Hoeveel koper en hoeveel chloor worden gebruikt bij de vorming van 15 gram CuCl_2 ? Nu eens een tabel met een andere vormgeving.

	$\text{Cu} +$	$\text{Cl}_2 \rightarrow \text{CuCl}_2$	
1 mol	1 mol	1 mol	
63,5	71	134,5	gram
$63,5 \times \frac{1}{134,5}$	$71 \times \frac{1}{134,5}$	1	gram
$63,5 \times \frac{15}{134,5}$	$71 \times \frac{15}{134,5}$	15	gram

Ter afsluiting een paar opmerkingen:

1 Het begrip 'evenredigheidsmatrix' is geïntroduceerd door Dr. P. M. van Hiele (*Begrip en Inzicht*, hoofdstuk 1; *Euclides*, 46e jrg. 1970/71, blz. 41). Bij de toepassingen in par. 4 van dit artikel is de tabelvorm gebruikt om de aanduidingen in de marge mogelijk te maken. Binnen de tabel worden de eigenschappen van de evenredigheidsmatrix gebruikt.

2 Om met een evenredigheidsmatrix te kunnen werken moet je eerst weten, dat je met een evenredigheid te doen hebt. In de praktijk is dat vaak niet het geval. Als de prijs voor 5 kg aardappelen $f3,-$ is, dan is het mogelijk, dat de groentehandelaar voor 3 kg aardappelen $f2,-$ vraagt in plaats van $f1,80$.

3 In het bovenstaande is niet gesproken over 'kruislings vermenigvuldigen' of 'diagonaalprodukten'. In Alders, *Algebra voor M.O. en V.H.O.*, dl. 1, staat dit nog vermeld als hoofdeigenschap (par. 120): het produkt van de buitenste termen is gelijk aan het produkt van de middelste. Maar in par. 119 van dit boekje staat: Bepalingen: onder de verhouding van de getallen a en b ($a \neq 0$ en $b \neq 0$) verstaat men de breuk $a:b$. In dit artikel wordt onder verhouding iets anders verstaan en dat is een reden om kruislings vermenigvuldigen niet te gebruiken. Een tweede reden is, dat deze rekenwijze niet te gebruiken is bij verhoudingen, die uit meer dan twee getallen bestaan. Een derde reden is dat een leerling deze regel al heel snel hanteert als een onbegrepen routineregels, die het juiste zicht ontnemt op wat er precies gebeuren moet en gedaan wordt. In par. 4, voorbeeld 2 kan een leerling inzien, dat als 1 meter touw 60 gram weegt en 64 cent kost, dan zal 20 meter touw 20×60 gram wegen en 20×64 cent kosten. Dat bereik je niet met kruislings vermenigvuldigen. Dat een geroutineerd rekenaar het kruislings vermenigvuldigen gebruikt, zal niet ontkend worden. Maar zo'n rekenaar heeft een zeer grote ervaring en herkent de situatie, waarin zo'n verkorting hem profijt kan opleveren. Leerlingen hebben niet de gelegenheid die routine op te bouwen en vast te houden.

Literatuur: Behalve de hierboven reeds genoemde boeken

Euclides 49ste jrg. 1973/74, blz. 1 e.v., A. F. van Tooren, *Wat is een verhouding?*

SMP, Teacher's Guide for book 2, Cambridge University Press 1966, 1972, hoofdstuk 11.

P. G. J. Vredenduin Korrel CL III; *Verhoudingen en evenredigheden*, *Euclides* 45ste jrg. 1969/1970 blz. 89-90.

Meisjes en Wiskunde

MARJA MEEDER

Binnen de groep 'vrouwen en wiskunde' wordt nagedacht over de oorzaken van de geringe belangstelling van meisjes voor wiskunde in het voortgezet onderwijs. Een belangrijk gevolg van die geringe belangstelling voor wiskunde is een nog geringere belangstelling voor deelname aan technische vakken en beroepen. In dit artikel probeer ik duidelijk te maken dat het hier niet om een overzichtelijke oorzaak-gevolg-keten gaat: omdat meisjes geen wiskunde kiezen, komen ze niet in aanmerking voor een technisch beroep. Je zou bijvoorbeeld oorzaak en gevolg kunnen verwisselen: omdat een technisch beroep niet in aanmerking komt voor een meisje (vrouw), kiezen meisjes geen wiskunde. Maar ook die voorstelling van zaken is te simpel.

Dit artikel is bedoeld als stimulans om na te denken over de problematiek van meisjes en wiskunde. Het is voor mij – en ik hoop ook voor velen van U – onacceptabel dat veel meisjes en vrouwen zo weinig meegenieten van de wiskunde, zo weinig van hun (mogelijke) wiskunde kwaliteiten kunnen gebruiken, zo weinig kunnen bijdragen aan de ontwikkeling van ons vak. Ik vind het vooral ook onacceptabel, omdat ze daardoor uitgesloten zijn van allerlei andere vakgebieden.

De problematiek is er niet één die eenvoudig in elkaar zit, is ook niet gemakkelijk te beschrijven en zal ook niet met eenvoudige middelen op te lossen zijn. Het is een zeer complexe materie, waarin factoren van psychologische, pedagogische, didaktische en sociologische aard een rol spelen. Voor de goede orde wil ik hier stellen, dat ik niet namens de groep vrouwen en wiskunde schrijf, maar als individu. Het is echter wel zo dat mijn ideeën en de ontwikkeling daarvan zeker beïnvloed zijn door die groep.

Wiskunde als filter

Geen belangstelling voor wiskunde hebben betekent dat je het niet in je vakkenpakket kiest, dat je een diploma haalt zonder wiskunde, waardoor veel vakgebieden ontoegankelijk zijn. Alle studies en beroepsopleidingen in wiskundige, fysische, chemische, technische, medische, economische, biologische, nautische, agrarische richting vallen af. De verplichting van veel studierichtingen om wiskunde I in het eindexamenpakket te hebben op het VWO zal wel één van de oorzaken zijn van het feit dat het percentage meisjes met wiskunde in het

pakket op het VWO het hoogste is (52 % van de meisjes en 78 % van de jongens). Die duidelijkheid werkt kennelijk gunstig voor meisjes. Maar we moeten ons niet blind staren op dat 'hoge' percentage meisjes voor wiskunde I, want het percentage meisjes dat wiskunde II kiest is bedroevend laag (4 % van de meisjes en 23 % van de jongens).

Op MAVO- en HAVO-niveau ligt het percentage meisjes dat wiskunde kiest veel lager (30 % van de meisjes en 60 % van de jongens op HAVO en 30 % van de meisjes en 66 % van de jongens op MAVO-4). Vervolgopleidingen op MBO- en HBO-niveau zijn minder duidelijk dan de universiteiten en hogescholen over de eisen die gesteld worden ten aanzien van wiskunde in het vakkenpakket. Duidelijk is wel dat wiskunde in het vakkenpakket ook hier meer mogelijkheden geeft. Het feit dat de vakkenkeuze hier eerder valt zal ook een rol spelen bij het lagere percentage meisjes met belangstelling voor wiskunde op MAVO en HAVO.

Na het eindexamen

Het perspectief van een beroep is een belangrijker faktor. Rekening houden met de eisen van een vervolgstudie en/of beroepsopleiding bij het samenstellen van het vakkenpakket betekent in ieder geval dat er waarde wordt gehecht aan een goede (beroeps)opleiding. Maar werken in een beroep wordt door meisjes en hun opvoeders nog vaak als tijdelijk gezien, ter overbrugging van de periode tussen van school komen en het getrouwd zijn/kinderen krijgen. Ik vind dat meisjes aangemoedigd moeten worden om een degelijk beroep te leren, dat ze gestimuleerd moeten worden om hun capaciteiten te ontwikkelen. En om meer mogelijkheden te hebben bij vervolgschool- en beroepskeuze moeten ze daarom op alle niveau's aangemoedigd worden om wiskunde te kiezen. Op die manier hebben meisjes later zelf de keuze of ze een beroep willen uitoefenen of niet. Nu is de keuze helaas al vaak gemaakt, omdat de vooropleiding gebrekkig is. Maar ook al werk je niet in een beroep dan nog zijn de vaardigheden die je bij wiskunde leert van groot belang. Zaken als omgaan met getallen, gebruiken van tabellen en grafieken, ordenen van gegevens, ruimtelijk inzicht, enz. zijn basisvaardigheden die iedereen zou moeten leren, omdat ze noodzakelijk zijn voor ieders maatschappelijk functioneren.

Wiskunde zou daarom van het voetstuk af moeten waarop het ondanks alle vernieuwingen nog steeds staat. Het moet af van de naam dat je er een knobbel voor moet hebben om het te kunnen leren. Tot op zekere hoogte kan iedereen het leren; iedereen zou het ook moeten leren. Een eeuw geleden was het ondenkbaar dat je het analfabetisme zou willen bestrijden; nu vinden velen het nog acceptabel dat er zoveel wiskunde analfabeten (vooral vrouwen) rondlopen.

Wiskunde verplicht in het vakkenpakket?

Misschien is het een oplossing als wiskunde net als Nederlands en een vreemde taal een verplicht vak wordt bij het eindexamen. Nu is het jammergenoeg zo dat wiskunde als een soort filter werkt. Kom je niet door die filter heen – en veel meisjes lukt dat kennelijk niet – dan is een hele reeks vervolgmogelijkheden uitgesloten. En dan doel ik niet alleen op vervolgopleidingen. Door het niet deelnemen aan wiskunde is een scala aan mogelijkheden uitgesloten. Het gaat

ook om inzicht in allerlei situaties, om 'problem solving' vaardigheden. Afknappen op wiskunde bezorgt velen een al dan niet bewust minderwaardigheidscomplex. Bij sommigen neemt dat zulke vormen aan dat ze voor het leven een cijferangst overhouden. In Amerika heeft men deze fobie onderkend en er zijn zelfs speciale 'klinieken' opgezet om volwassenen van hun 'math anxiety' af te helpen. Als wiskunde een verplicht vak wordt op het eindexamen, moet er natuurlijk ook iets aan de wiskunde-eisen veranderen en aan de manier van lesgeven. We kunnen dan niet meer het elitaire karakter van ons vak overeind houden. Het zal zo aangepast moeten worden, dat de meeste leerlingen in het voortgezet onderwijs ermee uit de voeten kunnen en de kans krijgen om vaardigheden te leren die nuttig zijn voor de rest van het leven. Wiskunde zou veel minder geïsoleerd bedreven moeten worden, maar zou juist veel raakpunten met de realiteit moeten hebben. Het zou ordening moeten brengen in de dingen om je heen. Op die manier staat wiskunde niet los van het leven en de wereld, maar heeft het er alles mee te maken. En ik denk dat juist deze benadering ook meisjes zal aanspreken. Het zien van toepassingen is voor meisjes heel belangrijk. IOWO heeft wat dat betreft al veel goed werk gedaan.

Het beeld van wiskunde

Dat er iets met ons vak aan de hand is, merk ik altijd het duidelijkst als ik in antwoord op de vraag wat ik doe, meedeel dat ik wiskunde-lerares ben. Ook een man zal na deze mededeling wel met ontzag behandeld worden. Als je dat moeilijke vak wiskunde doet, moet je wel echt knap zijn, is de gedachte achter de reactie. Maar als vrouw wiskunde bedrijven, vinden velen helemaal vreemd. 'Wiskunde is toch niks voor een vrouw!' zie je ze denken of 'oh, wat knap!' krijg je te horen.

Het beeld dat buitenstaanders van ons vak hebben is dat van een droog, abstract vak, dat niets met de werkelijkheid te maken heeft. Wiskunde is onwrikbare waarheid, waar geen discussie over mogelijk is. Iets is waar of niet waar, andere mogelijkheden zijn er niet. Ik denk, dat het niet vreemd is dat buitenstaanders met dit beeld van ons vak rondlopen. Velen hebben op school wiskunde geleerd, die aan bovenstaande beschrijving voldoet. Zij werden getraind in abstracties, waarvan het onduidelijk was waar ze vandaan kwamen en waar ze voor dienden. Wiskunde op school was (is?) ook het gekonfronteerd worden met eindproducten. Die kreeg je op een presenteerblaadje aangeboden en dan was het happen, kauwen en slikken. Van de moeizame weg die afgelegd was om bij die eindproducten te komen, hoorde je niets. Echt bij het begin beginnen, spelen met wiskunde, zelf zoeken en ontdekken, vragen stellen, nuances aanbrengen was er meestal niet bij. Daar was geen tijd voor. Verder moesten ze dan weer, om het programma af te krijgen, om het eindniveau te halen. En wie die race niet bij kon houden, die viel af of in het mammoet-jargon: die liet wiskunde vallen.

De rol van de ouders

Ouders die deze ervaringen met wiskunde hebben, moeten nu hun kinderen voorlichten over ons vak. Is het dan een wonder dat ze dergelijke informatie geven?

Ouders die geen wiskunde hebben genoten, geven toch ook een beeld van wiskunde door aan hun kinderen. 'Abstract', 'saai', 'voor knappe koppen' zijn ook hier de meest opvallende kwalifikaties; maar ook het onbekende van al die rare tekentjes. Het lijkt wel goochelen. 'Andere dingen die je niet weet kan je nog opzoeken in een encyclopedie, maar bij wiskunde schiet je daar ook niets mee op', heb ik eens iemand horen zeggen. En als de ouders niet een vreemd beeld van wiskunde overbrengen gaat het wel via anderen. Kinderen wordt meestal aangeraden om maar goed hun best te doen voor dat vak, want het is erg moeilijk en heel belangrijk.

Wiskunde op school

Wiskunde op school; je kan het of je kan het niet, een tussenweg is er niet. Ruimte voor fantasie of associaties is er niet. Je moet het rechte pad van de wiskundige denktrant volgen, want stappen opzij zijn desastreus. Gevoelens en emoties spelen in deze visie geen rol bij wiskunde. Of het zouden gevoelens van angst en onzekerheid moeten zijn bij degenen bij wie wiskunde niet lukt (of gelukt is). Nu kunnen we ons natuurlijk niets aantrekken van deze beeldvorming rond ons vak en de verantwoording daarvoor bij buitenstaanders leggen. Ik wil dat niet doen. Ik vind dat dit beeld ten dele terecht is, ten dele echter onjuist en daarom moet het veranderd worden. Maar een andere belangrijke reden waarom ik me ermee wil bezig houden, is dat dit beeld van wiskunde een reden is waarom meisjes niet geïnteresseerd zijn in wiskunde. Om meisjes wel geïnteresseerd te maken zal, naast allerlei andere aanpassingen, dit beeld moeten veranderen. Dat kunnen wij als wiskunde-docenten niet alleen, maar we kunnen er wel een belangrijke bijdrage aan leveren.

Schoolloopbaan van een meisje

Als we de schoolloopbaan van meisjes bekijken in vergelijking met die van jongens is er op de lagere school meestal nog niet zoveel opmerkelijks. De prestaties van jongens en meisjes lopen ongeveer gelijk op. Bij de CITO-toetsen, aan het einde van de lagere school, worden wel al kleine verschillen gemeten in de resultaten van jongens en meisjes. Zo scoren meisjes iets hoger dan jongens bij taal; jongens scoren iets hoger bij rekenen en informatie-verwerking. Echt opmerkelijke verschillen komen pas in het voortgezet onderwijs en dan meestal nog niet in de eerste klas, maar pas opvallend in de tweede en derde klas. Dan gaan de resultaten van meisjes, vooral bij wiskunde, achteruit. En na de vakkenpakketkeuze blijken meer jongens dan meisjes wiskunde in het pakket gekozen te hebben. Sommige mensen beweren dat ze het tot nu toe alleen op ijver en netheid hebben gered. Ik denk dat ook andere dingen een rol spelen. Of blijkt in het voortgezet onderwijs dat meisjes geen aanleg voor wiskunde hebben? Toch zou het unfair zijn de schuld voor de verschillen in wiskunde-prestaties of wiskunde-keuzen, die zich in het voortgezet onderwijs manifesteren, uitsluitend aan de docenten in dat schooltype te geven. De basis hiervoor is natuurlijk al veel eerder gelegd, o.a. op de lagere school en in de opvoeding.

Een oorzaak voor deze verschillen ligt mijns inziens in de stereotiepe rollen die mannen en vrouwen in onze cultuur/maatschappij opgelegd krijgen. Mannen/-jongens moeten sterk zijn, moeten zich in technische vaardigheden bekwamen en

worden opgeleid om later de kost te kunnen verdienen; vrouwen/meisjes moeten aantrekkelijk zijn, moeten zich in sociale vaardigheden bekwamen en moeten later voor huis en gezin zorgen. Dat deze beschrijving zwart-wit is en op deze manier niet (meer) door alle opvoeders gehanteerd wordt, geef ik graag toe. Gelukkig begint de laatste jaren het besef door te dringen dat eigenschappen en vaardigheden die eerst alleen voor mannen gereserveerd waren, nu ook voor vrouwen acceptabel zijn en omgekeerd.

Een mooi voorbeeld van deze doorbraak is autorijden. Nog niet zo heel lang geleden werden er grappen gemaakt over een vrouw achter het stuur die alleen maar brokken kon maken. Nu is het besturen van die 'machine' door een vrouw geheel geaccepteerd. Toch denk ik, dat deze stereotiepe verdeling van taken tussen mannen en vrouwen wel degelijk een rol speelt, bewust of onbewust, bij het samenstellen van het vakkenpakket en bij de resultaten voor een vak als wiskunde.

Dubbele houding

Meisjes krijgen in hun opvoeding een dubbele boodschap mee en dit dualisme in onze houding als opvoeder maakt het meisjes moeilijk in de puberteit. De ene boodschap luidt, net als voor jongens: 'Doe goed je best op school, zorg dat je goede cijfers haalt op school!'. De andere boodschap luidt: 'Zorg ervoor dat je aardig en aantrekkelijk gevonden wordt!'. Met die twee opdrachten worden meisjes van jongs af opgevoed. Lange tijd hoeven deze twee opdrachten elkaar niet echt in de weg te zitten. Goed je best doen maakt, dat mensen je aardig vinden. Maar in het begin van de puberteit, als meisjes zich gaan oriënteren op hun rol als vrouw, blijken deze twee opdrachten wel met elkaar in botsing te komen, zeker als het gaat om een exakt vak als wiskunde.

Voor jongens ligt dat veel gemakkelijker. Hard werken voor wiskunde, goede prestaties leveren in dat vak ligt in het verlengde van wat er van je verwacht wordt als aankomende man. Voor meisjes werken de krachten tegen elkaar in. Hard werken en veel belangstelling hebben voor wiskunde en daar ook goed in zijn, degradeert ze bijna als vrouw (meisje).

Ik ken voorbeelden van meisjes die gemakkelijk wiskunde hadden kunnen leren, maar toch niet tot prestaties komen, omdat dat niet paste bij hun image als meisje. Opmerkelijk is ook dat meisjes op meisjesscholen tot betere resultaten komen in wiskunde dan meisjes op gemengde scholen. Meisjes hebben daar meer kansen om hun intellectuele mogelijkheden te ontwikkelen. Ze komen daar niet direct in conflict met de dubbele boodschap, alleen indirect. Op school kunnen ze rustig goed zijn in wiskunde; er zijn toch geen jongens in de buurt.

Wiskunde hoort thuis in de mannenwereld. Het beeld dat over ons vak bestaat en dat ik hiervoor wat overdreven getekend heb, laat alleen maar deze conclusie toe. Dat wiskunde meer voor mannen dan voor vrouwen is, wordt nog eens door allerlei overzichtelijke oorzaken bevestigd. Het aantal manlijke wiskundeleraars is nog steeds veel groter dan het aantal vrouwelijke docenten. Als de ouders hun kinderen al kunnen helpen met huiswerk, zal vader meestal aangesproken worden voor wiskunde en moeder voor de talen. Ook hier is er dus voor de meeste meisjes al geen identificatie-mogelijkheid met iemand die het wel gelukt is om 'het vrouw zijn' te combineren met 'het wiskundige zijn'.

Konklusie

Ik hoop dat U na het lezen van dit artikel niet de indruk hebt dat ik weer terug wil naar het voor-mammoet-tijdperk van jongens- en meisjesscholen. Wel hoop ik duidelijk gemaakt te hebben dat de geringe belangstelling van meisjes voor wiskunde diepere oorzaken heeft en dat de houding van de wiskunde-docent ten aanzien van meisjes in hun klas heel belangrijk is. Jongens kiezen toch wel wiskunde omdat het zo belangrijk is voor later. Meisjes hebben vaak wat extra stimulans nodig, hebben soms baat bij een andere aanpak in de wiskunde-les, moeten extra aangemoedigd worden om de drempels te kunnen nemen, die voor hen opgeworpen zijn.

Over de auteur:

Marja Meeder is, na 11 jaar lesgeven in het 'gewone' middelbaar onderwijs, nu werkzaam in het onderwijs aan volwassenen: naast opleidingen voor het MAVO-, HAVO- en VWO-diploma ook in cursussen voor buitenlanders en in Open Schoolprojecten.

Ontvangen

'*Studeren in deeltijd*', voorlichtingsbrochure van de deeltijdopleidingen eerste en tweede graad, voortgekomen uit de M.O.-opleidingen. Het is een publicatie van de M.O.-overlegraad in samenwerking met de sectie Lerarenopleiding van de HBO-raad.

De opleidingen verkeren thans in een periode van herstructurering en herprogrammering. De Raad hoopt hiermee een krachtige opruiming te houden onder nog op veel plaatsen aan te treffen volstrekt verouderde denkbeelden over zijn opleidingen.

Secretariaat M.O.-overlegraad: Postbus 65811, 2506 EC 's Gravenhage, tel. 070-23 38 67.

Secretariaat HBO-raad: Postbus 123, 2501 CC 's Gravenhage.

Het uitwendig produkt

P. G. J. VREDENDUIN

Het uitwendig produkt van twee vectoren speelt in de wiskunde en de natuurkunde een belangrijke rol.

Een georiënteerd parallellogram wordt opgespannen door het geordende vectorpaar (v_1, v_2) . Aan het uitwendig produkt $v_1 \times v_2$ kan men zien in welk vlak dit parallellogram ligt en wat de oppervlakte ervan is.

Een georiënteerd parallelepipedum wordt opgespannen door het geordende vectortripel (v_1, v_2, v_3) . De inhoud ervan is $(v_1 \times v_2) \cdot v_3$.

In de natuurkunde kennen we de wet $i \times B = F$, waarin i de stroomsterkte, B de magnetische veldsterkte en F de lorentzkracht voorstelt.

Het uitwendig produkt gedraagt zich blijkbaar keurig als een vector. Toch zijn er rasmathematica die ontkennen dat het een vector is.

Er is één ding verdacht aan het uitwendig produkt. Het is als vector gedefinieerd in R_3 . Zodra de ruimte een andere dimensie heeft, zwijgt men er angstvallig over.

1 Axiomatische fundering

Ik wil een schuchtere poging wagen het uitwendig produkt axiomatisch te funderen en me daarbij niet direct vastpinnen op een R_3 . Het wordt dan een afbeelding van $R_n \times R_n$ in een of andere vectorruimte V waarvan ik niet a priori aanneem dat $V = R_n$.

Ik ga uit van de volgende axioma's.

$$A1 \quad v_1 \times (v_2 + v_3) = v_1 \times v_2 + v_1 \times v_3$$

$$A2 \quad v_1 \times \lambda v_2 = \lambda(v_1 \times v_2)$$

$$A3 \quad v_1 \times v_2 = -(v_2 \times v_1)$$

Hieruit volgt:

$$T1 \quad (v_1 + v_2) \times v_3 = v_1 \times v_3 + v_2 \times v_3 \quad (A1, A3)$$

$$T2 \quad (\lambda v_1) \times v_2 = \lambda(v_1 \times v_2) \quad (A2, A3)$$

$$T3 \quad v \times v = 0 \quad (A3)$$

$$T4 \quad \times \text{ is een bilineaire afbeelding } (A1, A2, T1, T2)$$

2 Consequenties van T4 en A3

Ik beperk me voorlopig tot T4. Neem aan dat f een bilineaire afbeelding van $R_n \times R_n$ is. Een basis van R_n is $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Stel

$$f(e_i, e_j) = e_{ij}$$

Dan is

$$f(\sum a_i e_i, \sum b_j e_j) = \sum a_i b_j e_{ij}$$

Nemen we aan dat de e_{ij} 's lineair onafhankelijk zijn, dan is de beeldruimte van $R_n \times R_n$ een vectorruimte met dimensie n^2 en basis $(e_{11}, e_{12}, \dots, e_{nn})$.

Nu A3. Dit axioma heeft als gevolg

$$e_{ii} = 0 \quad \text{en} \quad e_{ji} = -e_{ij}$$

Dit heeft als gevolg dat de dimensie van de beeldruimte niet meer n^2 is, maar gereduceerd wordt tot $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Laten we $n = 0$ buiten beschouwing, dan is

$$\frac{1}{2}n(n-1) = n \Leftrightarrow n = 3$$

Nu zien we waarom het ons lukt, uitgaande van A1-3, de beeldruimte van $R_3 \times R_3$ te identificeren met R_3 , terwijl dat niet lukt in andere dimensies.

Een wiskundige vindt dit een mager resultaat en zal proberen het uitwendig produkt in drie dimensies te zien als een bijzonder geval van een afbeelding van $R_n \times R_n$. Daarbij zal hij niet meer eisen dat de beelden vectoren van R_n zijn. Dat is de achtergrond van de ietwat slordige uitspraak 'het uitwendig produkt is geen vector'.

Wie meer te weten wil komen over deze generalisatie moet een of ander boek over multilineaire algebra raadplegen.

Ondanks de sombere vooruitzichten wil ik een poging doen het uitwendig produkt in R_3 te generaliseren over R_n . En wel zo, dat het ook in R_n een vector is. Daartoe eerst enige voorbereidingen.

3 De oppervlakte van een georiënteerd parallellogram

In R_2 is $\{e_1, e_2\}$ een orthonormale basis. OA_1BA_2 (fig. 1) is een parallellogram opgespannen door het geordende paar vectoren (v_1, v_2) .

$$v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$$

$$v_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2$$

Het beeld van v_1 bij een rotatie om O over $\frac{1}{2}\pi$ is de vector

$$v_1^* = -a_{12}e_1 + a_{11}e_2$$

De van een teken voorziene hoogte van het parallellogram is $\frac{v_1^* \cdot v_2}{\|v_1^*\|}$.

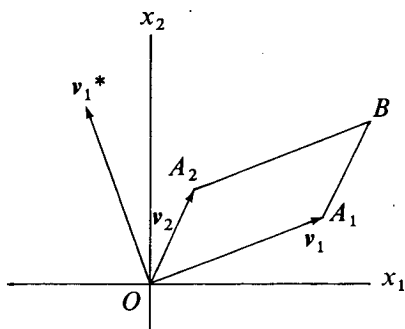


Fig. 1

De van een teken voorziene oppervlakte is

$$\frac{v_1^* \cdot v_2}{\|v_1^*\|} \|v_1\| = v_1^* \cdot v_2 = -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Beide uitkomsten zijn positief als v_2 en v_1^* aan dezelfde kant liggen van de drager van v_1 , en negatief als ze aan verschillende kant liggen.

Het teken van de oppervlakte verandert dus als v_1 en v_2 verwisseld worden, dus als we het parallellogram opgespannen denken door (v_2, v_1) i.p.v. door (v_1, v_2) . Het teken verandert ook als we e_1 en e_2 verwisselen, dus als we als basis kiezen (e_2, e_1) i.p.v. (e_1, e_2) . In dat geval krijgen we namelijk fig. 2.

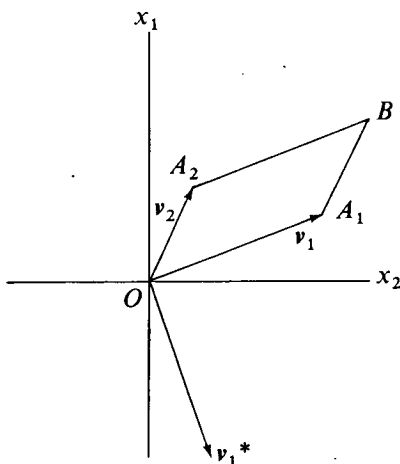


Fig. 2

Een rotatie om O over $\frac{1}{2}\pi$ is immers een draaiing in de richting van e_1 naar e_2 , dus nu rechtsonder.

Essentieel is dus dat als basis van R_2 niet een ongeordend tweetal vectoren $\{e_1, e_2\}$ gekozen is, maar een geordend paar (e_1, e_2) .

Een ruimte waarvan de basis een geordend stel vectoren is, heet een georiënteerde ruimte.

De oppervlakte van het parallellogram opgespannen door (v_1, v_2) in de georiën-

teerde ruimte met orthonormale basis (e_1, e_2) is dan $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$.

4 Het uitwendig produkt in R_3

We gaan uit van een georiënteerde ruimte R_3 met orthonormale basis (e_1, e_2, e_3) . We willen het uitwendig produkt $v_1 \times v_2$ van (v_1, v_2) zo definiëren dat het een vector w is die

a loodrecht staat op v_1 en v_2

b een norm heeft die gelijk is aan de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door v_1 en v_2

c overgaat in zijn tegengestelde als (v_1, v_2) vervangen wordt door (v_2, v_1) .

Onderstel

$$v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3$$

$$v_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3$$

en

$$w = m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3$$

We bepalen m_1, m_2 en m_3 zo, dat aan a, b en c voldaan is.

a w staat loodrecht op v_1 en v_2 , is gelijkwaardig met

$$a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_{13}m_3 = 0$$

$$a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_{23}m_3 = 0$$

Hieraan is voldaan als in de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & m_1 \\ a_{12} & a_{22} & m_2 \\ a_{13} & a_{23} & m_3 \end{vmatrix}$$

de elementen m_1, m_2 en m_3 gelijk zijn aan hun eigen minor. Dus als

$$m_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \quad m_2 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \quad m_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

We bewijzen dat bij deze keuze van m_1, m_2 en m_3 ook aan b en c voldaan is.

b Noem de projecties van v_1 en v_2 op het vlak $x_1 = 0$ resp. v_{11} en v_{21} (fig. 3). Dan is

$$v_{11} = a_{12}e_2 + a_{13}e_3 \quad \text{en} \quad v_{21} = a_{22}e_2 + a_{23}e_3$$

$$m_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = \text{opp. parallellogram opgespannen door } (v_{11}, v_{21}) \text{ in}$$

$$\text{het vlak } x_1 = 0 \text{ met basis } (e_2, e_3) \quad (1)$$

Analoge resultaten vinden we voor m_2 en m_3 .

Omdat $\angle(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3, e_1) = \angle(\text{vlak}(v_1, v_2), x_1 = 0)$

en $|m_1| = |\text{opp. parallellogram opgespannen door } v_{11} \text{ en } v_{21}|$

geldt $\|m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3\| = |\text{opp. parallellogram opgespannen door } v_1 \text{ en } v_2|$.

c Uit (1) en de analoge resultaten voor m_2 en m_3 volgt: als v_1 en v_2 verwisseld worden, dan gaan m_1, m_2 en m_3 over in hun tegengestelde en gaat dus ook de vector $m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3$ over in zijn tegengestelde.

Aan de gestelde eisen is dus voldaan als we definiëren:

$$v_1 \times v_2 \stackrel{\text{def}}{=} m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3$$

waarin

$$m_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \quad m_2 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \quad m_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

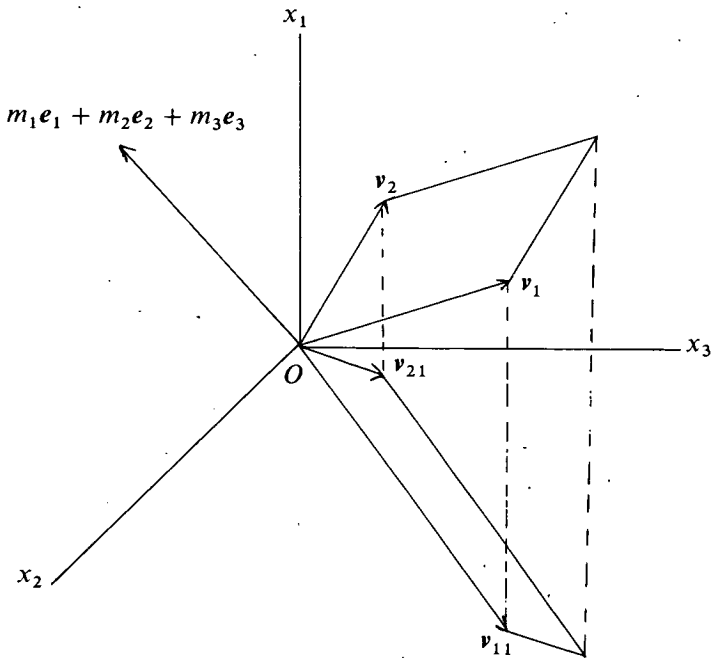


Fig. 3

5 De inhoud van een georiënteerd parallellepipedum

In een georiënteerde R_3 met orthonormale basis (e_1, e_2, e_3) wordt parallellepipedum $OA_1BA_2.A_3CDE$ opgespannen door het geordende tripel (v_1, v_2, v_3) (fig. 4).

$$v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3$$

$$v_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3$$

$$v_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3$$

We gaan te werk analoog aan de in 3 gevolgde manier.

De van een teken voorziene hoogte van het parallellepipedum is $\frac{(v_1 \times v_2) \cdot v_3}{\|v_1 \times v_2\|}$.

De van een teken voorziene inhoud is

$$\begin{aligned} \frac{(v_1 \times v_2) \cdot v_3}{\|v_1 \times v_2\|} |\text{opp. } OA_1BA_2| &= \frac{(v_1 \times v_2) \cdot v_3}{\|v_1 \times v_2\|} \|v_1 \times v_2\| = \\ &= (v_1 \times v_2) \cdot v_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Beide zijn positief als v_3 en $v_1 \times v_2$ aan dezelfde kant liggen van het vlak door v_1 en v_2 , en negatief als ze aan verschillende kant liggen.

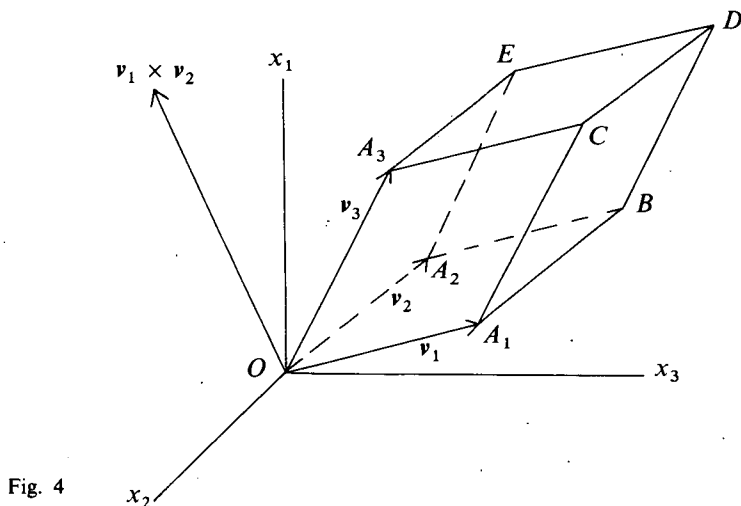


Fig. 4

6 Generalisatie in R_n

a R_4

In de georiënteerde ruimte R_4 met orthonormale basis (e_1, e_2, e_3, e_4) zijn drie vectoren gegeven:

$$v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 + a_{14}e_4$$

$$v_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3 + a_{24}e_4$$

$$v_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3 + a_{34}e_4$$

In de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & m_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & m_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & m_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & m_4 \end{vmatrix}$$

zijn m_1, m_2, m_3, m_4 gelijk aan hun eigen minor.

Verder is

$$w = m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4$$

Enkele afspraken:

de projectie van v_i op $x_j = 0$ noteren we v_{ij}

de inhoud van het parallellepipedum opgespannen door (u_1, u_2, u_3) in een georiënteerde R_3 noteren we $I(u_1, u_2, u_3)$

de superinhoud van een superparallellepipedum opgespannen door (u_1, u_2, u_3, u_4) in een georiënteerde R_4 noteren we $I(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

We zien:

a $w \perp v_1, w \perp v_2, w \perp v_3$

b en c

$$m_1 = I(v_{11}, v_{21}, v_{31}) \text{ in de georiënteerde } R_3 \text{ met basis } (e_3, e_2, e_4)$$

$$m_2 = I(v_{12}, v_{22}, v_{32}) \text{ in de georiënteerde } R_3 \text{ met basis } (e_1, e_3, e_4)$$

$$m_3 = I(v_{13}, v_{23}, v_{33}) \text{ in de georiënteerde } R_3 \text{ met basis } (e_1, e_4, e_2)$$

$$m_4 = I(v_{14}, v_{24}, v_{34}) \text{ in de georiënteerde } R_3 \text{ met basis } (e_1, e_2, e_3)^1)$$

Hieruit volgt:

$$\|w\| = |I(v_1, v_2, v_3)|$$

m_1, m_2, m_3, m_4 en dus ook w gaan over in hun tegengestelde bij verwisseling van twee van de vectoren v_1, v_2, v_3 .

De analogie van deze resultaten met die in R_3 is voldoende reden voor ons de vector w per definitie het uitwendig produkt van (v_1, v_2, v_3) te noemen.

Notatie: $\times (v_1, v_2, v_3)$.

Kies nog een vierde vector

$$v_4 = a_{41}e_1 + a_{42}e_2 + a_{43}e_3 + a_{44}e_4$$

Nu is

hoogte superparallellepipedum opgespannen door $(v_1, v_2, v_3, v_4) =$

$$= \frac{\times (v_1, v_2, v_3) \cdot v_4}{\|\times (v_1, v_2, v_3)\|}$$

$$I(v_1, v_2, v_3, v_4) = \frac{\times (v_1, v_2, v_3) \cdot v_4}{\|\times (v_1, v_2, v_3)\|} \|\times (v_1, v_2, v_3)\| =$$

¹⁾ Deze bases doen vreemd aan; een nadere verklaring volgt in 7.

$$= \times(v_1, v_2, v_3) \cdot v_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Beide zijn positief als $\times(v_1, v_2, v_3)$ en v_4 aan dezelfde kant liggen van de R_3 opgespannen door v_1, v_2, v_3 , en negatief als ze aan verschillende kant liggen.

b R_n

Met volledige inductie gaan we verder en komen tot het volgende.

In de georiënteerde ruimte R_n met basis $(e_1, \dots, e_n)$ zijn gegeven n vectoren

$$v_i = a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n$$

In de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n-1,1} & m_1 \\ \dots & & & \\ a_{1n} & \dots & a_{n-1,n} & m_n \end{vmatrix}$$

zijn alle m_i gelijk aan hun eigen minor.

$$\times(v_1, \dots, v_{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} m_1e_1 + \dots + m_ne_n$$

Deze vector heeft de drie sub a, b en c genoemde eigenschappen. Aan de axioma's A1, A2 en A3 is voldaan.

Verder is

$$I(v_1, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Dit is positief als $\times(v_1, \dots, v_{n-1})$ en v_n aan dezelfde kant liggen van de R_{n-1} opgespannen door $v_1, \dots, v_{n-1}$, en negatief als ze aan verschillende kant liggen.

c Terug naar R_2

We passen de definitie van het uitwendig produkt in R_n toe op R_2 . Daar is het uitwendig produkt dan gedefinieerd als het uitwendig produkt van één vector.

We gaan uit van

$$v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$$

We schrijven op de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & m_1 \\ a_{12} & m_2 \end{vmatrix}$$

waarin m_1 en m_2 gelijk zijn aan hun eigen minor. Dus

$$m_1 = -a_{12} \quad \text{en} \quad m_2 = a_{11}$$

Dan is per definitie

$$\times v_1 = m_1 e_1 + m_2 e_2 = -a_{12} e_1 + a_{11} e_2$$

Dit is de vector v_1^* uit 3 die het beeld is van v_1 bij rotatie om O over $\frac{1}{2}\pi$.
We vonden daar reeds

$$I(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

in overeenstemming met het in R_n gevonden resultaat.

Verrassend is dat we zo in R_2 , mits georiënteerd, ook reeds beschikken over een uitwendig produkt. Het uitwendig produkt van v is hetgeen vroeger wel de nevenvector van v genoemd werd.

7 Oriëntatie

Het uitwendig produkt is alleen gedefinieerd in een georiënteerde ruimte. Dit is reden voor ons nader stil te staan bij het begrip oriëntatie.

Omdat we het ons daar goed kunnen voorstellen, begin ik met R_3 .

Oriënteer R_3 door de basis (e_1, e_2, e_3) . Uit de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & m_1 \\ 0 & 1 & m_2 \\ 0 & 0 & m_3 \end{vmatrix}$$

zien we dat

$$e_1 \times e_2 = e_3$$

Net zo zien we dat

$$e_2 \times e_3 = e_1$$

$$e_3 \times e_1 = e_2$$

Kies nu als basis hetzelfde drietal vectoren, maar anders geordend, nl. (e_2, e_1, e_3) .

Nu is

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uit de determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & m_1 \\ 1 & 0 & m_2 \\ 0 & 0 & m_3 \end{vmatrix}$$

zien we dat nu

$$e_1 \times e_2 = -e_3$$

Inderdaad, als we twee kolommen van een determinant verwisselen, dan gaat de determinant over in zijn tegengestelde en is dat ook het geval met de minoren van de elementen in de overige kolommen.

Evenzo is nu

$$e_2 \times e_3 = -e_1$$

$$e_3 \times e_1 = -e_2$$

Wegens

$$\sum a_{1i} e_i \times \sum a_{2j} e_j = \sum a_{1i} a_{2j} (e_i \times e_j)$$

gaan bij verwisseling van e_1 en e_2 ook alle uitwendige produkten over in hun tegengestelde.

Dit is het geval bij elke verwisseling van twee basisvectoren. Na twee verwisselingen hebben alle uitwendige produkten hun oorspronkelijke waarde weer teruggekregen enz.

De uitwendige produkten blijven dus onveranderd bij alle even permutaties van (e_1, e_2, e_3) en gaan in hun tegengestelde over bij alle oneven permutaties.

Ze zijn dus hetzelfde bij (e_1, e_2, e_3) , (e_2, e_3, e_1) , (e_3, e_1, e_2) en krijgen de tegengestelde waarde bij (e_2, e_1, e_3) , (e_3, e_2, e_1) , (e_1, e_3, e_2) .

Dit is voor ons aanleiding van slechts twee oriëntaties te spreken en daarbij het eerste drietal te identificeren en het tweede drietal eveneens. Dit klopt met hetgeen we ons in R_3 aanschouwelijk plegen voor te stellen.

Nu in R_n . Als basis kiezen we $(e_1, \dots, e_n)$. Weer geldt: bij elke even permutatie blijven de uitwendige produkten onveranderd; bij elke oneven permutatie gaan ze over in hun tegengestelde. Het bewijs is hierboven al gegeven. De relatie 'dezelfde pariteit hebben' is een ekwivalentierelatie in de verzameling van de permutaties van $(e_1, \dots, e_n)$. De twee ekwivalentieklassen waarin deze relatie de verzameling van de permutaties verdeelt, noemen we oriëntaties van R_n . Nu hebben we het eindelijk correct geformuleerd. Elke R_n ($n > 1$) heeft dus precies twee oriëntaties.

Terug naar R_4 . In 6a beschouwden we de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & m_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & m_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & m_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & m_4 \end{vmatrix}$$

waarin m_1, m_2, m_3, m_4 gelijk waren aan hun eigen minoren. Dus is

$$m_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Daaruit concludeerden we:

$$m_4 = I(v_{14}, v_{24}, v_{34}) \text{ in de georiënteerde } R_3 \text{ met basis } (e_1, e_2, e_3).$$

We zeggen dan ook wel dat de oriëntatie (e_1, e_2, e_3, e_4) in de R_3 met basisvectoren e_1, e_2 en e_3 de oriëntatie (e_1, e_2, e_3) induceert.¹⁾

Welke oriëntatie wordt nu geïnduceerd in de R_3 met basisvectoren e_1, e_2 en e_4 ?

We zoeken eerst een representant van de oriëntatie van R_4 waarin e_3 (zoals daarnet e_4) achteraan staat. Dat is bijv. (e_1, e_4, e_2, e_3) .

Nu is

$$m_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}$$

waaruit volgt:

$$m_3 = I(v_{13}, v_{23}, v_{33}) \text{ in de georiënteerde } R_3 \text{ met basis } (e_1, e_4, e_2).$$

De georiënteerde R_4 induceert dus in de R_3 met basisvectoren e_1, e_2 en e_4 de oriëntatie (e_1, e_4, e_2) .

Analoge resultaten vinden we voor m_2 en m_1 .

In ruimten met oneven dimensie hebben we van deze 'springerigheid' geen last.

In R_5 induceert de oriëntatie $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ in zijn zij- R_4 's de oriëntaties (e_1, e_2, e_3, e_4) , (e_2, e_3, e_4, e_5) , (e_3, e_4, e_5, e_1) , (e_4, e_5, e_1, e_2) , (e_5, e_1, e_2, e_3) .

8 Oriëntatie van $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ in een georiënteerde R_n

R_n is een georiënteerde ruimte met orthonormale basis $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. In R_n is $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ een geordend n -tal vectoren. We definiëren als volgt een oriëntatie hiervan.

$(v_1, v_2, \dots, v_n)$ is positief georiënteerd $\stackrel{\text{def}}{=} I(v_1, v_2, \dots, v_n) > 0$

$(v_1, v_2, \dots, v_n)$ is negatief georiënteerd $\stackrel{\text{def}}{=} I(v_1, v_2, \dots, v_n) < 0$

Als $I(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$, dan zijn $v_1, v_2, \dots, v_n$ afhankelijk en is geen oriëntatie gedefinieerd.

Omdat $I(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$, is de basis $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ positief georiënteerd.

Het loont de moeite de consequenties hiervan in R_2 te bezien. Daarbij laten we de nulvectoren buiten beschouwing.

Onderstel

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} \text{ en } v_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

We weten dat

$$v_1 \cdot v_2 = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}$$

Denk onze R_2 ingebed in een georiënteerde R_3 met orthonormale basis (e_1, e_2, e_3) . Dan is in deze R_3

¹⁾ Gemakshalve spreken we van de oriëntatie (e_1, e_2, e_3, e_4) en (e_1, e_2, e_3) , als dit representanten van de bedoelde oriëntaties zijn.

$$v_1 \times v_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_3$$

We definiëren nu

$$\sin(v_1, v_2) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{\|v_1\| \|v_2\|}$$

$$\cos(v_1, v_2) = \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{\|v_1\| \|v_2\|}$$

We zien dat er een duidelijk verband bestaat tussen sinus en cosinus en resp. uitproduct en inproduct.

Verder zien we dat $\sin(v_1, v_2)$ positief, negatief of 0 is al naarmate (v_1, v_2) positief georiënteerd, negatief georiënteerd of afhankelijk is.

We hebben hierbij aansluiting gekregen bij het artikel van Rik Verhulst, *Brengen we de hoeken soms niet om het hoekje?*, Euclides 57, nr. 8, en wel speciaal met wat daarin onder 5 gezegd is.

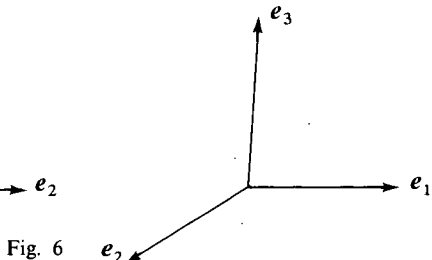
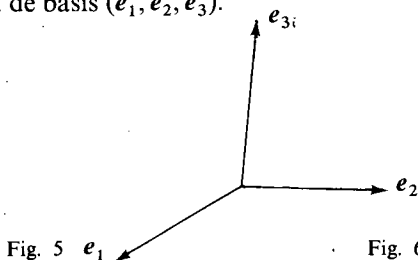
9 De kurketrekkerregel

In het vlak zijn twee oriëntaties mogelijk. We kennen die als de draaiing linksom (tegen de wijzers van de klok in) en de draaiing rechtsom (met de wijzers van de klok mee). We noemen ze ook wel: de positieve en de negatieve draairichting. Dat laatste begint al wiskundig te klinken.

Hoe definiëren we in de wiskunde de positieve draairichting? We hebben dit impliciet al gezegd. We kiezen een geordende orthonormale basis (e_1, e_2) . Daarmee is de oriëntatie bepaald die we de positieve noemen. De oriëntatie die hieruit ontstaat door verwisseling van de basisvectoren, dus door (e_1, e_2) te vervangen door (e_2, e_1) , heet dan de negatieve.

Kunnen we de keuze zo verrichten, dat er verband ontstaat tussen de positieve oriëntatie en de draaiing linksom? Neen. De draaiing linksom kan men fysisch definiëren, maar wiskundig niet. Voor wie strikt binnen de wiskunde blijft, is het verband tussen positieve oriëntatie en draaiing linksom dus niet alleen afwezig, maar zelfs zinledig. Als levend wezen maken we echter bij onze wiskundige beschouwingen tekeningen. En daarbij kunnen we conventies in acht nemen. Zo'n conventie is dat we de beide basisvectoren zo tekenen dat door een draaiing over 90° linksom de eerste basisvector overgaat in de tweede.

In R_3 is de situatie analoog. In figuur 5 en figuur 6 zijn twee tekeningen gemaakt van de basis (e_1, e_2, e_3) .



We weten dat $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$.

Kijk naar figuur 5. Als je de kurketrekker draait in de richting van e_1 naar e_2 , dan wordt de schroef voortbewogen in de richting van e_3 . In deze figuur geldt dus de kurketrekkerregel.

In figuur 6 geldt daarentegen de kurkeduwerregel. Hier wordt de kurk juist de fles ingedreven.

Conventie is het assenkruis zo te tekenen, dat de kurketrekkerregel geldt, dus conform figuur 5.

Door middel van continuïteitsoverwegingen kunnen we dan duidelijk maken, dat meer algemeen de kurketrekkerregel geldt voor $(v_1, v_2, v_1 \times v_2)$.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

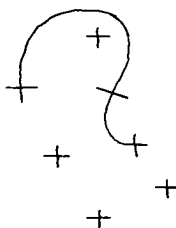
Opgaven

483. In het alleraardigste boekje van Martin Gardner, *Mathematical Carnival* (Pelican Books 1978) vond ik de volgende opgave.

Gegeven een hoeveelheid kruisjes. A en B verbinden om beurten twee uiteinden van hetzelfde of van verschillende kruisjes met een lijn die geen van de kruisjes snijdt. Op deze verbindingslijn brengen ze een dwarsstreepje aan, waardoor een nieuw kruisje ontstaat (met nog slechts twee vrije uiteinden).

Wie niet meer kan heeft verloren. Bedenk een optimale strategie.

De auteur voegt de opmerking toe, dat het resultaat verrassend is. En m.i. heeft hij daarin gelijk.



484. Een dronkeman bevindt zich in de oorsprong van de x -as. Hij doet telkens at random een stap naar links of naar rechts. Na gemiddeld hoeveel stappen is hij weer in de oorsprong terug?

485. Verdeel met behulp van passer en liniaal een lijnstuk in drie gelijke delen. Gebruik daarbij een minimaal aantal cirkels en rechte lijnen. Het kan met zeven. Mocht iemand het met minder kunnen, dan houd ik mij aanbevolen. (B. Kootstra)

Oplossingen

479. Van een toren (fig. 1) wordt een steen geworpen met beginsnelheid v_0 ; $|v_0|$ is gegeven. Bewijs: bereik maximaal $\Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$.

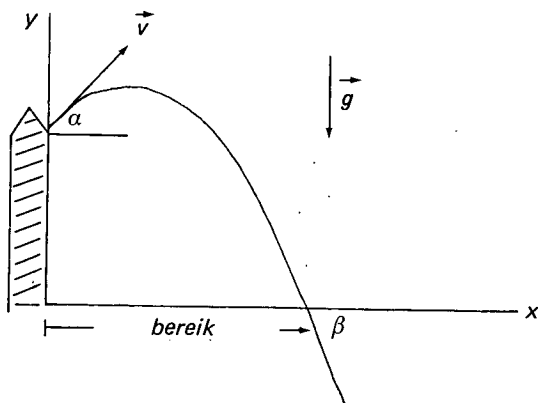


Fig. 1

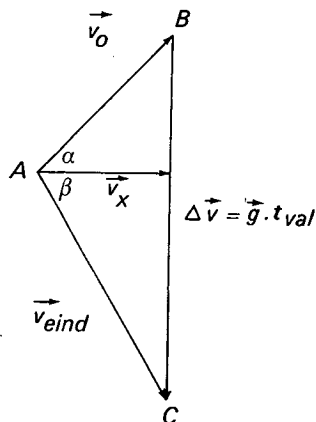


Fig. 2

Omdat

afname potentiële energie = toename kinetische energie
is de grootte van de eindsnelheid bepaald.

In figuur 2 zijn de snelheden getekend. Noem de valtijd t_{val} . Dan is

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_{eind} - \vec{v}_0 = t_{val} \vec{g}$$

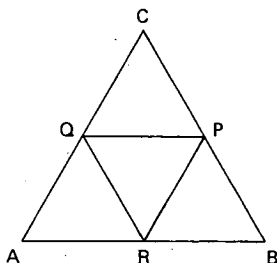
Het bereik is gelijk aan

$$|\vec{v}_x| t_{val} = \frac{2}{|g|} \text{ opp. } \triangle ABC$$

Hieruit zien we

bereik is maximaal $\Leftrightarrow$ opp. $\triangle ABC$ is maximaal $\Leftrightarrow \vec{v}_{eind} \perp \vec{v}_0$
q.e.d.

480. Vijf punten liggen in het inwendige van een gelijkzijdige driehoek met zijde a . Bewijs dat minstens twee ervan een afstand hebben die kleiner is dan $\frac{1}{2}a$.



$\triangle ABC$ is de gelijkzijdige driehoek; P , Q en R zijn de middens van de zijden.

Twee punten binnen $\triangle ABC$ die een afstand hebben $\geq \frac{1}{2}a$, kunnen niet beide tot $\triangle AQR$ behoren en evenmin beide tot $\triangle BPR$, $\triangle CPQ$, $\triangle PQR$. Hieruit volgt dat er niet meer dan vier punten binnen $\triangle ABC$ zijn waarvan alle onderlinge afstanden kleiner zijn dan $\frac{1}{2}a$.

481. Een positief geheel getal wordt met 2 vermenigvuldigd en het wordt ook zeventallig geschreven. De twee uitkomsten bestaan uit dezelfde cijferrijen. Welk kan dat getal zijn?
 Onderstel de cijferrij die ontstaat na de vermenigvuldiging met 2 en dus ook na het zeventallig schrijven, is $\overline{abcd}$.

Dan is
 $a \cdot 7^3 + b \cdot 7^2 + c \cdot 7 + d = \frac{1}{2}(a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d)$
 waarin $0 \leq a, b, c, d \leq 6$

Dit is gelijkwaardig met
 $a \cdot 314 + b \cdot 2 - c \cdot 4 - d = 0$

Hieruit blijkt dat $a = 0$ en tevens dat we uitkomsten met meer dan vier cijfers ook buiten beschouwing kunnen laten.

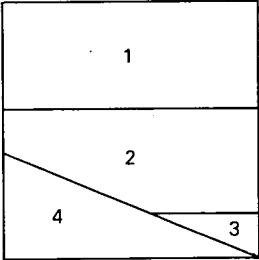
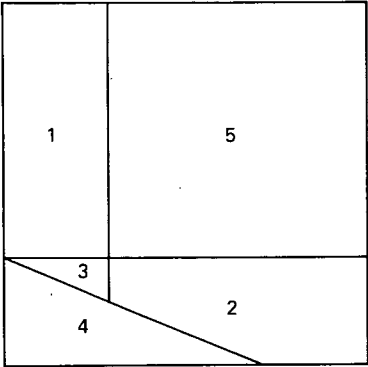
Dus moeten we de oplossingen zoeken van $2b - 4c - d = 0$.

Deze zijn

b	c	d	b	c	d	b	c	d
1	0	2	3	0	6	5	1	6
2	1	0	4	2	0	6	3	0
2	0	4	4	1	4	6	2	4
3	1	2	5	2	2			

De gevraagde getallen zijn dan 51, 105, 102, 156, 153, 210, 207, 261, 258, 315, 312.

482. Het linker vierkant is door drie sneden in vijf delen verdeeld. Met de delen 1, 2, 3 en 4 is rechts een vierkant gelegd. Het ermee congruente vierkant is 5.



Mededeling

Op zaterdag 23 april wordt de vierde landelijke dag van de groep ‘Vrouwen & Wiskunde’ gehouden.
 Plaats:Kindergemeenschap De Werkplaats, Kees Boekelaan 10, Bilthoven.
 Tijd: 10.00-16.00 uur. Lunch: f4,—.
 Thema voor de dag is: ‘Een speciale didaktiek voor meisjes, bestaat dat?’
 Voor informatie: Coby Geijssel, tel. 03404-2 54 39.

Boekbesprekingen

G. Scheja, U. Storch, *Lehrbuch der Algebra, deel I*, Stuttgart, B. G. Teubner Verlag, 408 bl., DM 48, —.

Met dit deel uit de 'Mathematische Leitfäden' wordt een vrij klassiek overzicht gegeven van de algebra. In het hoofdstuk over de verzamelingenleer behandelen de auteurs de bekende zaken van verzamelingen, afbeeldingen, relaties, machtigheid. Vervolgens bespreken zij groepen, ringen, modulen en algebra's waarna de homomorfismen van groepen, ringen en modulen wordt besproken. Tot slot geven de schrijvers nog een hoofdstuk lineaire algebra.

Het geheel wordt grondig en goed behandeld op een wijze die we ook kennen uit de bekende Nederlandse leerboeken.

W. Kleijne

Stowasser/Mohry, *Rekursive Verfahren*, 1978 Schroedel Verlag Hannover 104 blzn, ISBN 3-507-83201-1

Dit boekje is een inleidende cursus in het oplossen van problemen op rekursieve wijze. Het volgende voorbeeld, dat aan het boekje is ontleend, moge verduidelijken hoe het boekje is opgebouwd.

De torens van Hanoi (Lucas' torenspel) bestaat uit drie pinnen met op één van de drie een aantal ringen (bijv. 6). De toren van 6 pinnen moet naar één van de andere pinnen verplaatst worden door per zet één ring te verplaatsen. Een kleinere ring mag slechts op een grotere geplaatst worden. De vraag is hoeveel zetten dit kost.

We geven dit aantal met $M(6)$ aan. Veronderstel dat er 5 ringen verplaatst zijn, dit kost $M(5)$ zetten. Hierna moet de onderste ring verplaatst (1 zet) en de 5 ringen er weer bovenop ($M(5)$ zetten). Totaal $M(6) = 2M(5) + 1$, $M(1) = 1$. Voor een zeker aantal ringen n geldt een dergelijke formule. Zo'n formule heet een rekursieve formule. De bedoeling is vervolgens een expliciete formule af te leiden. Enig proberen geeft dan $M(n) = 2^n - 1$. Om deze formule te bewijzen is het bewijsprincipe van de volledige inductie nodig.

Uit dit voorbeeld volgt de opbouw van het boekje. Er is een probleem (meestal een telprobleem). Eerst wordt een rekursieve formule opgesteld, vervolgens een expliciete, die eventueel met volledige inductie wordt bewezen.

Naast deze opbouw is minstens zo aardig het grote aantal problemen waaraan deze specifieke tak van wiskunde bedrijven wordt gedemonstreerd. Het volgende lijstje moge een indruk geven. Het Nimspeel, weeg- en geldwisselproblemen, sneeuwvlokkrommen, getallenrijen op meetkundige patronen geënt (bijv. de driehoeksgetallen), het aantal delen waarin het vlak (de ruimte) door lijnen (vlakken) te verdelen is, de getallen van Fibonacci, van Pascal (taximeetkunde, lotto) exponentiële groei, enz. Dit boekje bevat een schat aan problemen die het wiskundeonderwijs op alle schooltypen kan verlevendigen. Natuurlijk zal elke docent zelf voor de geschiktmaking ervan voor zijn klas nog moeten zorgen.

Bert Zwaneveld

R. Halin, *Graphentheorie I* (Erträge der Forschung 138) Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1980, XIX + 320 pp.

Graphentheorie kent vele vertakkingen, vandaar dat verschillende boeken er heel verschillend kunnen uitzien. Deze auteur heeft gekozen voor: ongerichte graphen, nadrukkelijk ook oneindige, zonder toepassingen, met vermindering van grotere doorsnede met bestaande boeken.

We treffen aan: I. Grundbegriffe II. Darstellungsformen (Matrices, Produktgraphen, Lijngraph) III Menger etc. (allerlei generalisaties, König-Hall, Factoren) IV Bäume (Normale Warzelbäume,

Wohlquasiordnung) V Reichhaltigkeitssätze (Extremaalproblemen, Ramsey en uitbreidingen, Hamiltontheorie) VI Färbungsprobleme.

Hoofdstuksgewijs is een uitgebreide literatuurlijst gegeven waar de tekst actief op attendeert; ook recente literatuur komt aan bod (tot ± 1975) en de titel van de reeks wordt alle recht gedaan. Door de nadrukkelijke aanwezigheid van oneindige graphen ademt het boek inderdaad een eigen sfeer. Het is niet groot maar telt toch 300 bladzijden en de inhoud mag rijk worden genoemd. Aanbevolen voor wie zich op bovenstaande terreinen gedegen wil oriënteren (er zijn trouwens ook veel vraagstukken). Voor een eerste kennismaking is het boek minder geschikt: moeilijke stellingen en beknopte bewijzen. Bovendien is de entree niet uitnodigend: de lezer moet na 12 pagina's de betekenis van 40 symbolen kennen (er is gelukkig een lijstje) en het eerste bewijs is onbegrijpelijk.

Het boek is keurig ingenaaid, maar de tekst is gereproduceerd van tikwerk waarin alle symbolen en niet latijnse letters met de hand zijn ingebracht, en het hoofdstuknummer komt alleen op de eerste pagina van het hoofdstuk voor wat terugzoeken bemoeilijkt. De prijs is mij onbekend. Het aangekondigde deel II behandelt o.a. planaire graphen, matroiden en groepen.

R. Jeurissen

W. Krabs. *Einführung in die Kontrolltheorie.*

Dit boek is een elementaire inleiding in de theorie van optimale besturingen. In deze theorie beschouwt men (fysische, chemische, etc.) systemen waarvan het dynamisch gedrag wordt beschreven door gewone differentiaalvergelijkingen waarin een stuurfunctie voorkomt, dus een vergelijking van de vorm

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Hierbij kan x een vectorwaardige functie zijn. Men wil nu de stuurfunctie u zodanig kiezen dat de Een typisch voorbeeld is tijdoptimaliseringsprobleem, waarbij men zoekt naar een minimale $T > t_0$ wijze. Hierbij moet dan natuurlijk een optimaliteitscriterium gedefinieerd zijn. De algemene theorie, waarin het maximumprincipe van Pontryagin een grote rol speelt, geeft methoden aan om zulk een optimale besturing u te bepalen.

Een typisch voorbeeld is tijdoptimaliseringsprobleem, waarbij men zoekt naar een minimale $T > t_0$ waarvoor de variabele $x(t)$ (de toestand genoemd) een zeker punt x_1 of een zekere verzameling X_1 bereikt. Zo kan men een slinger waarvan de uitwijkingen niet te groot zijn modelleren door de vergelijking $\ddot{x} + x = u$, die natuurlijk in de vorm van bovenstaande (vector)vergelijking kan worden geschreven. Als men bijv. eist dat de opgelegde kracht u in absolute waarde niet groter is dan een gegeven getal K , dan kan men het probleem beschouwen een bewegende slinger in minimale tijd tot stilstand te brengen. Dit speciale probleem kan op betrekkelijk eenvoudige manier worden opgelost, maar het algemene optimaliseringsprobleem is nogal gecompliceerd en de theorie is niet gemakkelijk toegankelijk.

De auteur is er in geslaagd een goed leesbare eenvoudige inleiding in deze theorie te geven. Uiteraard wordt bij lange na niet de algemeen theorie behandeld, maar deze inleiding geeft toch een goed beeld van de typische problemen en oplossingsmethoden in dit vakgebied. De methoden die in dit boekje gebruikt worden zijn van functionaal-analytisch karakter. Door middel van functionaalanalyse kan men een elegante behandeling geven van deze problemen, althans van de problemen voor zover deze in dit boekje worden behandeld.

M. L. J. Hautus

A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley & Sons, New York, etc., 1979, VIII + 704 p. Prijs £ 21.35.

Het onderhavige boek is een uitvoerig werk over niet-lineaire trillingen, een hoofdstuk uit de mechanica. Als uw recensent zich verplaatst in de positie van een lezer die het voornemen heeft kennis te nemen van geavanceerde trillingstheorie, dan moet dit boek als inleidend leerboek worden ontraden; hij zou het reeds na enige pagina's ontmoedigd sluiten. De schrijvers zeggen in hun

voorwoord dat hun werk bedoeld is 'for classroom use as well as for a reference to searchers' (waarbij 'classroom' wel als collegezaal vertaald moet worden) en dat het 'nearly self-contained' is. Een didactisch verantwoorde behandeling zou dan, ons inziens, met een bespreking der lineaire trillingen hebben moeten beginnen waarbij, met de harmonische beweging als uitgangspunt, de lineaire demping en de respons van het systeem op een uitwendige periodieke kracht een goede aanloop zouden zijn geweest naar de gecompliceerde verschijnselen die een gevolg zijn van niet-lineaire omstandigheden. In plaats daarvan geven de auteurs als eerste hoofdstuk een warrige introductie van 38 pagina's, een soort samenvatting van wat volgen zal en waarin reeds van limit-cycles, van der Pol en Duffing sprake is. Het tweede hoofdstuk is een meer systematische behandeling van conservatieve stelsels met één vrijheidsgraad (maar het tweede voorbeeld gaat al over een beweging in een vlak). Het lijkt zinloos hier een bespreking te laten volgen van dit volumineuze werk, dat vooral door zijn vele voorbeelden rijk is aan informatie over het onderwerp, maar dat mede door zijn eigenaardige compositie weinig aanbevelenswaardig is voor de lezers van ons tijdschrift. Voor 'researchers' is het een nuttig verzamelwerk, vooral door de behandeling van niet-lineaire systemen met meer vrijheidsgraden en door de bibliografie van maar liefst zeventig pagina's.

O. Bottema

Hoskins, R. F.; *Generalised Functions*. Chichester, Ellis Horwood Ltd., 1979, 192 blz. £ 15, —.

Het doel van dit boek is met zo weinig mogelijk voorkennis van de Functionaal-Analyse (alleen de standaardkennis van de analyse wordt voorondersteld) de delta-functie in te voeren en wel op zodanige wijze dat deze kan worden toegepast in o.a. control-theorie, elektrische netwerk-theorie. Zoals bekend, is de theorie van de gegeneraliseerde functies (distributies) ontwikkeld naar aanleiding van de delta-functie.

We noemen in het kort de inhoud van de diverse hoofdstukken:

In het eerste hoofdstuk worden een aantal begrippen en stellingen uit de Analyse herhaald.

Hoofdstuk 2 behandelt de *delta-functie van Dirac* en de eenheidsstapfunctie. De essentiële eigenschap van de δ -functie luidt: Als f een in de omgeving van de oorsprong continue functie is, dan geldt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0).$$

In hoofdstuk 3 ontmoet men de eigenschappen van de δ -functie en wordt aan het differentiëren en integreren van de δ -functie enige aandacht besteed.

In hoofdstuk 4 behandelt de schrijver de toepassing van de δ -functie in tijds-invariante lineaire systemen en de δ -functie als gegeneraliseerde functie.

In hoofdstuk 5 komt de Laplace-transformatie en in hoofdstuk 6 de Fourier-reeks en de Fourier-transformatie aan de orde.

In hoofdstuk 7 worden andere typen van gegeneraliseerde functies m.b.v. testfuncties ingevoerd. Via genormeerde ruimten en continue lineaire functionalen wordt het begrip distributie behandeld, tevens komen de begrippen reguliere en singuliere distributies aan de orde.

Hoofdstuk 8 tenslotte behandelt de samenhang tussen gegeneraliseerde functies en integralen.

Uiteraard kan men de theorie van de distributies (gegeneraliseerde functies) zich het beste eigenmaken uit de boeken van Schwartz, *Théorie des Distributions* of Gelfand-Shilov, *Generalised Functions*, 5 delen, doch deze vereisen wel meer voorkennis.

Er wordt in dit werk uitvoerig aandacht besteed aan de Fourier- en Laplace-transformatie in samenhang met de δ -functie. Er zijn veel voorbeelden aanwezig en bovendien maken een aantal opgaven het mogelijk een en ander te verwerken en toe te passen. Aan het eind van het boek zijn korte uitwerkingen en antwoorden van de opgaven opgenomen. Ook kan nog worden opgemerkt dat het boek weinig drukfouten bevat.

Samengevat: Het is een uitstekend boek en men krijgt een redelijke indruk van de mogelijkheden van de δ -functie.

W. Wesselius

P. J. Kelly and M. L. Weiss, *Geometry and convexity. A study in mathematical methods*, X + 261 pp., John Wiley and Sons, New York, etc. (1979), £ 29.25.

Om de titel van dit originele boek toe te lichten zij gezegd dat de auteurs als doel hebben een vrij ver gaande theorie van convexe verzamelingen in de n -dimensionale ruimte te ontwikkelen voor lezers met een bescheiden mathematische bagage die volgens hen zich zou kunnen beperken tot enige kennis van de lineaire algebra. Om het boek zoals dat heet *self-contained* te maken zijn zij verplicht de eerste hoofdstukken te wijden aan de grondslagen der euclidische meetkunde. Daarbij ontmoeten zij onderwerpen als elementaire topologie, analyse en affine ruimten en op de daarbij ontwikkelde mathematische methodieken zinspeelt de ondertitel van het boek. Bij dit interessante programma kwam bij de recensent de paradox in herinnering door de auteur van een niet lang geleden verschenen werk, luidende: dit boek verlangt generlei voorkennis en is dus voor beginners ongeschikt. Hoe het zij, voor de lezers van het werk van Kelly en Weiss zal het niet hinderlijk zijn over een zekere wiskundige rijping en ervaringen met abstracte redeneringen te beschikken. Wij zien nu maar af van de wellicht wat ambitieuze doelstelling en constateren met voldoening dat een boeiend, helder geschreven en didactisch verantwoord geschrift voor ons ligt.

Het eerste hoofdstuk (p. 1-59) behandelt algemene metrische ruimten waarna in het tweede (p. 60-105) de specialisatie tot de euclidische meetkunde volgt, waarbij uiteraard die facetten aan de orde komen, die voor later nodig zijn. Tegen het eind (p. 102) volgt de gebruikelijke definitie van een convexe puntverzameling. De zorgvuldige en zakelijke tekst wordt afgewisseld met goed gekozen voorbeelden en vraagstukken.

De rest van het boek wordt aan het hoofdthema gewijd en wij hebben de uitvoerige behandeling als uitnemend ervaren. Hoofdstuk 3 behandelt de basisstructuur van convexe lichamen en oppervlakken (waarbij de recensent een vraagteken plaatst bij de opmerking op p. 106-107 over de betekenis van deze begrippen voor de mathesis van de 19e eeuw). Hoofdstuk 4 geeft een algemene theorie der convexiteit, waarbij affine en barycentrische coördinaten, raak- of beter 'steunpunten' en convexe omhulsels aan de beurt komen; de voorbeelden worden meer dan eens aan de elementaire meetkunde ontleend.

In de hoofdstukken 5 en 6 komt de meer geavanceerde theorie aan de orde. Wij noemen het bekende theorema van Helly (als van $n + 2$ convexe verzamelingen in de n -ruimte elk $n + 1$ -tal een niet lege doorsnede heeft, dan hebben zij minstens één punt gemeen) met uitbreidingen en toepassingen; lineaire combinaties van convexe verzamelingen; de Hausdorff-afstand van twee verzamelingen en de daaruit voortkomende metriek (p. 233). Om de rijke en veelzijdige inhoud van het boek nog eens te karakteriseren zij medegedeeld dat het eindigt met een behandeling van het isoperimetrische probleem.

O. Bottema

Mededeling

Op de algemene ledenvergadering van 30 oktober 1982 is besloten de kontributie met $f 5,-$ te verhogen.

Met ingang van 1 augustus 1983 wordt de kontributie:

leden (inklusief abonnement op Euclides) $f 50,-$

leden (zonder abonnement op Euclides) $f 30,-$

Belgische leden tevens lid VVWL*) $f 35,-$

studentleden*) $f 35,-$

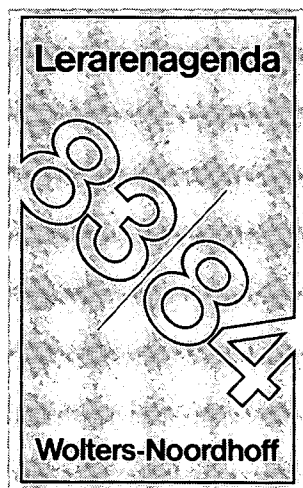
*) inklusief abonnement op Euclides.

Alle tarieven gelden per verenigingsjaar.

De penningmeester

Weer leverbaar:

de WN-Lerarenagenda 83/84



- aangepast aan de vakantieregeling voor het onderwijs van het Ministerie van O. en W.
- geschikt voor verschillende schooltypen en variabele werktijden

De nieuwe *WN-Lerarenagenda* is uitgebreid tot 200 pagina's en bevat onder meer:

- tabellen voor notatie van rapport-, proefwerk- en tentamencijfers
- tabellen voor berekening van deze cijfers
- jaarkalenders voor 1983, 1984 en 1985
- memorandum over de periode augustus 1983 tot maart 1985

Prijs: f 5,50

In verband met de leverbaarheid bij voorkeur vóór 1 juni 1983 bestellen bij uw schooladministratie of bij de boekhandel.



Wolters-Noordhoff

Interne differentiatie is vaak een kwestie van *organiseren*. Daarom is de docent, die differentiatie wil toepassen, gebaat bij leerstof die door zijn ordeningsvorm gedifferentieerd lesgeven mogelijk maakt.

Op het gebied van

wiskunde en rekenen

heeft Educaboek enkele gedifferentieerde methodes beschikbaar, zoals de gerenommeerde wiskundemethode

Getal en ruimte

een complete methode voor mavo, havo en vwo.

Kenmerken

- BHE-differentiatie-model in klas 1 en 2, alsmede bovenbouw mavo (Basisstof – Herhaalstof – Extra stof en D-toetsen)
- Binnen dit model kan de docent toch zelf bepalen hoe ver hij met differentiatie wil gaan (ook 'traditionelere' lesvormen blijven mogelijk)
- In de bovenbouw havo/vwo wordt het BHE-model geleidelijk losgelaten
- **T.b.v. schooljaar 1983/84 verschijnen geheel nieuwe brugklasboeken met een sterk verbeterd BHE-model**
- Vraag onze nieuwe Documentatie aan



Educaboek

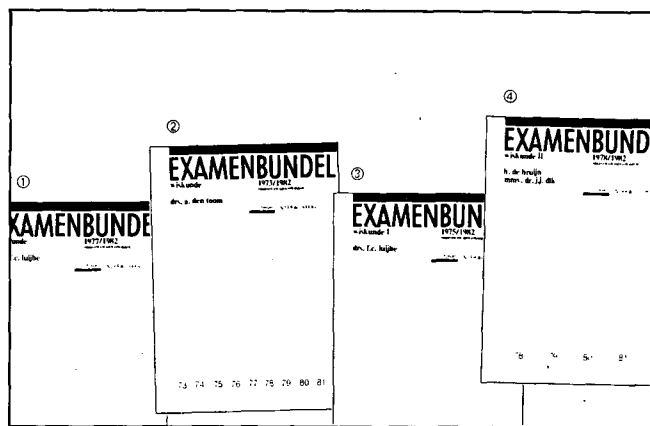
Postbus 48
4100 AA Culemborg
Telefoon: 03450-71 911

opgaven en uitwerkingen

Leerlingen willen oefening. In de loop van het examenjaar als ze zich voorbereiden op schoolonderzoeken en na het laatste schoolonderzoek als ze zich voorbereiden op het examen. De ene leerling wil plotseling een serie oude examens doorwerken, de andere maakt het liefst systematisch iedere week een aantal opgaven. De een loopt makkelijk vast en heeft per opgave een duwtje nodig, de ander oefent moeiteloos maar wil wel steeds even weten of zijn werk in orde is.

Dankzij de uitwerkingen in onze EXAMENBUNDELS kunt u de *klassikale behandeling* van examens beperkt houden en hebt u meer tijd om in te gaan op de leerstof. Iedere leerling kan in zijn eigen tempo oefenen op de momenten dat hij zich het best concentreert.

De uitwerkingen maken ook een doeltreffender *individuele begeleiding* mogelijk. Zwakkere leerlingen die u extra laat oefenen kunnen hun werk zelf nakijken. Dat stelt ze in staat nauwkeurig aan te geven op welke punten ze nadere uitleg nodig hebben.



Bovendien scheppen de uitwerkingen de mogelijkheid tot *zelfstandige voorbereiding* op het examen in de periodes dat er geen lessen zijn: de vakanties en de laatste weken die voorafgaan aan het examen.

Onze uitgaven zijn verkrijgbaar bij de boekhandel. Wilt u inlichtingen, aarzelt u dan niet ons te bellen.

uitgeverij **ONDERWIJSPERS**

Hobbemakade 73
1071 XN Amsterdam
020-768026

- ① MAVO EXAMENBUNDEL WISKUNDE
1977 I/m 1982
f10,-
- ② HAVO EXAMENBUNDEL WISKUNDE
1973 I/m 1982
f12,50
- ③ VWO EXAMENBUNDEL WISKUNDE I
1975 I/m 1982
f12,50
- ④ VWO EXAMENBUNDEL WISKUNDE II
1978 I/m 1982
f12,50

MALMBERG,

VOOR INFORMATICA-ONDERWIJS

en microcomputertoepassingen in de school.

Informatica met de microcomputer

Een leerboek bestemd voor leerlingen van de bovenbouw van het avo en mbo, waarin het begrip informatica vanuit verschillende invalshoeken benaderd wordt. Probleemformulering en probleemanalyse staan daarbij centraal.

Computer-werk

Een praktische inleiding in burgerinformatica en de plaats van de computer in de dagelijkse omgeving. Het boekje is bestemd voor leerlingen van het lbo/mavo en onderbouw havo/vwo, en leert de leerlingen aan de hand van alledaagse situaties probleemoplossend werken en communiceren met de microcomputer. Bij het leerlingenboek behoort een softwarepakket.

Microcomputers in het onderwijs

Een praktisch boek voor docenten in de exacte en technische vakken, waarin aan de hand van een verzameling uitgewerkte programma-voorbeelden de mogelijkheden van de microcomputer bij het onderwijs worden aangegeven.

MES/MAS

Malmbergs Educatieve Software/Malmbergs Administratieve Software

Direct toepasbare microcomputerprogramma's voor gebruik in de klas verschijnen voortdurend binnen het MES-project. Daarnaast is een compleet programmapakket voor de administratie van de school verkrijgbaar.

Hardware

Last but not least, de hardware is bij Malmberg/Fysica verkrijgbaar; zowel voor de administratieve toepassingen als voor onderwijskundig gebruik.

Voor meer informatie: vraag onze uitgebreide informatica-brochure aan.

Malmberg,
Postbus 233,
5201 AE Den Bosch,
tel.: 073-215565.



malmberg

UITGEVER BV DEN BOSCH

Op het gebied van

wiskunde en rekenen

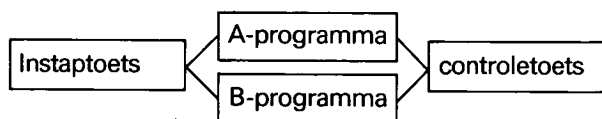
heeft Educaboek enkele gedifferentieerde methodes beschikbaar, zoals de rekenmethode

Uitgekiend!

voor mavo en lbo

Kenmerken

– Model



- De instaptoets, het synchroon hiermee lopende A-programma en de controlettoets onderzoeken de rekenvaardigheid vanaf de 3e klas van de basisschool.
- Uitleg en oefenstof m.b.t. de rekenproblemen in het A-programma (B-programma is een 'vrij' programma).
- Uitgekiend! is een volwaardig rekenprogramma, maar houdt rekening met de praktische mogelijkheden voor rekenen op school.
- Deel 1 Basisvaardigheden / deel 2 herhaling deel 1 + metriek (incl. handleidingen en antwoordenboekjes).
- Voor nadere informatie



Educaboek

Postbus 48
4100 AA Culemborg
Telefoon: 03450-71 911

INHOUD

R. Laumen: Tendensen in het wiskundeonderwijs (Rijksonderwijs) 281

J. J. Sloff: Verhoudingen en evenredigheden 290

M. Meeder: Meisjes en Wiskunde 296

P. G. J. Vredenduin: Het uitwendig produkt 302

Recreatie 314

Boekbesprekingen 317

Mededelingen 301, 316, 320

ADRESSEN VAN AUTEURS

R. Laumen, Zeearendstraat 24, B 2100 Deurne, België

Mw M. Meeder, Willibrordusstraat 35", 1074 XJ Amsterdam

J. J. Sloff, Kostvliet 10, 9462 TR Gasselte

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth