

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

58e jaargang

1982/1983

no. 5

januari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Dr. F. Goffree - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens -
P. E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders -
Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) -
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester) -
B. Zwaneveld (hoofredacteur)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam. De contributie bedraagt f 45,- per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 30,-; contributie zonder Euclides f 25,-. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9", 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1\frac{1}{2}$.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 7,- (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-620 78/620 79. Telex 33014.

Grafieken op het eindexamen, of: Grafieken in het onderwijs.

A. J. TH. MAASSEN

1 Van Dormolen heeft in Euclides 53 (1977/78) no 7 (maart) een paar opmerkingen gemaakt en een vraag gesteld over grafieken op het eindexamen. Ik vat zijn KORREL hier even samen:

'Met een examen wil je toetsen of je leerlingen sommige doelstellingen van het wiskunde-onderwijs bereikt hebben.'

Op examens wordt aan kandidaten opgedragen, grafieken te tekenen.

Is het kunnen tekenen van grafieken een onderwijsdoel?

Waarom dienen eigenlijk grafieken?

'Ik denk dat het is om eigenschappen van een functie op het spoor te komen die op een andere manier niet of veel lastiger te ontdekken zijn. Door naar de grafiek te kijken (of naar punten van die grafiek) kan ik beslissingen nemen of vermoedens uiten over de functie.'

Uiten van vermoedens, van beslissingen wordt op examens vwo, havo niet gevraagd; gevraagd wordt wel: allerlei dingen over die functie te zeggen die je door berekeningen kunt vinden (extremen, ..., symmetrie, ..., buigpunten, ...); die worden vertaald in een grafiek: klaar!

'Daarmee is het kunnen tekenen van de grafiek gepromoveerd tot examendoel. Het kan echter geen doel van wiskunde-onderwijs zijn, want er wordt met de grafiek niets gedaan.

Wel mag je zeggen dat, om echt goed grafieken te leren lezen, je goed eigenschappen van de functie moet kunnen vertalen in grafische beelden. Wat we op het examen dus vragen is een vaardigheid die helpen kan een bepaalde doelstelling te bereiken. Die doelstelling zelf toetsen we niet.

Waarom eigenlijk niet?'

2 'Waarom eigenlijk niet?'

Maakt u zich geen zorgen: ik zal die vraag niet proberen te beantwoorden. (Een mens mag al blij zijn als hij van de meeste dingen die hij zelf wel doet, kan aangeven waarom hij die wel doet.)

Hebben het college van inspecteurs of de Commissie Vaststelling Opgaven die vraag van Van Dormolen beantwoord?

Mij is zo'n antwoord niet bekend.

Van Dormolen heeft met die vraag vast een discussie willen losslaan; naar ik

meen: tot dusver tevergeefs; dat heeft me verbaasd. Hier zijn een paar opmerkingen en vragen, waarvan ik denk dat zij een bijdrage tot zo'n discussie vormen.

3a Kan het tekenen van de grafiek van een functie geen onderwijsdoel zijn?

Het is duidelijk dat één van de doelen van onderwijs in wiskunde in havo of vwo is: beheersing van technieken waarmee functies van bepaalde klassen kunnen worden onderzocht; het is verstandig om de resultaten van zo'n onderzoek samen te vatten, bijvoorbeeld in een plaatje dat voldoende nauwkeurig is ter illustratie van de relevante resultaten van dat onderzoek.

Examenopgaven in de trant 'onderzoek deze functie en teken de grafiek ervan' liggen dus erg voor de hand.

Van Dormolen bestrijdt dat in zijn Korrel trouwens niet.

(Dat men omwille van wat 'objectief toetsen' genoemd wordt, tot afspraken is gekomen over wat precies bedoeld wordt met zo'n opdracht – afspraken die alleen gekend worden door de examencandidaten, hun wiskundeleraren en nog een paar mensen – kun je betreuren: de leerlingen leren, tengevolge van de existentie van zulke afspraken, om zich bij zo'n onderzoek meer te laten leiden door de regels die voor dat onderzoek bestaan dan door het te onderzoeken object; en dat – lijkt me – is verwerpelijke didactiek van wiskunde. Zulke afspraken schijnen evenwel onvermijdelijk te zijn; je mag misschien wel hopen dat alle leerlingen van het bedrijven van wiskunde inmiddels zoveel hebben geleerd dat zij door zulke ongunstige ervaringen niet geschaad worden.

Ik heb niet de indruk dat Van Dormolen in zijn Korrel op deze zaak doelt.)

3b Het is waar dat wiskundigen grafieken gebruiken als heuristisch hulpmiddel bij hun onderzoekingen (trouwens toch ook: fysici, technici, economen?). Soms worden door hen ook 'beslissingen genomen op grond van het verloop van (delen van) de grafiek'.

Onder.4 geef ik daarvan een paar voorbeelden.

3c Kun je toetsen of iemand heuristische middelen kan kiezen en effectief benutten? Het is onzinnig, kandidaten op te dragen bij een of ander probleem een bepaalde heuristiek te proberen: de keuze van het middel dien je nu juist aan de candidaat over te laten.

Je zou kandidaten kunnen opdragen een nauwkeurig verslag te doen van hun pogingen het probleem op te lossen, ook van die pogingen die gefaald hebben. Maar hoe beoordeel je zulke verslagen? (Over objectief toetsen gesproken...) Ik denk dat je pas op langere duur (dan die van een examen) kunt vaststellen dat iemand heuristische middelen op produktieve wijze kan gebruiken. Vaststellen dat iemand (die het niet kan) dat niet kan, lijkt me nog geweldig veel moeilijker. Werpt het project Problem-Solving van het Cito daar meer licht op? Ik zie er met spanning naar uit.

3d Mag je conclusies trekken uit plaatjes?

Sommige conclusies wel, sommige niet.

Het vereist een behoorlijke wiskundige rijpheid te beoordelen welke wel en welke niet; ik citeer een eerstejaars student die een van zijn hoogleraren toevoegt: 'u

hebt ons altijd gezegd dat je uit plaatjes niets kunt concluderen, en nu moet ik dat opeens wel doen; u doet het nota bene zelf!

We weten allemaal dat je voorzichtig moet zijn met argumenten in de trant van 'dat zie je toch aan dat plaatje'; je bedoelt er meestal mee: 'dat volgt uit sommige van de overwegingen die ons ertoe hebben gebracht dat plaatje juist zó te tekenen; laten we ons nú het hoofd er niet over breken uit precies welke van die overwegingen dat volgt'.

Zolang leerlingen maar onware beweringen, als zg. conclusies, doen, kun je hen gemakkelijk ervan overtuigen dat 'je dat niet kunt concluderen'; véél moeilijker is het, hun duidelijk te maken waarom een bepaalde reeks van ware beweringen met ten minste één onduidelijk 'dus' niet als bewijs wordt geaccepteerd.

Zulke – overigens heel leerzame – moeilijkheden zul je te overwinnen krijgen, als je aan je leerlingen toestaat, conclusies uit grafieken (of andere plaatjes) te trekken.

3e De kwestie die Van Dormolen in zijn Korrel heeft aangesneden, is heel belangrijk; ik denk vooralsnog, belangrijker voor het onderwijs in de wiskunde dan voor examens; dat denk ik zelfs terwijl ik de grote invloed erken die examens op het onderwijs hebben.

Wie zou zijn leerlingen niet willen leren, grafieken en andere plaatjes op vruchtbare wijze te gebruiken, hetzij als heuristisch middel, hetzij als bewijsmiddel?

Is het érg belangrijk dat het dan ook nog wordt geëxamineerd?

4 De toegezegde demonstraties.

Ik kies niet al mijn voorbeelden op het niveau van of uit de zg. school-wiskunde. Uitsluiting van voorbeelden van wat hoger niveau zou de waarde van de demonstراتies maar verzwakken.

Die voorbeelden zijn genummerd: A, B, C, D, E, F, G, H, J, K.

De voorbeelden A, B, C, D, H en J liggen op 5, 6-vwo-niveau; K duidelijk daaronder. Wiskundigen – i.h.b. analytici – hebben mij verzekerd, dat zij geregeld grafieken gebruiken, zowel als heuristisch als ook als bewijsmiddel: zij staven die bewering met voorbeelden: met bekende en door velen gebruikte, maar ook met meer particuliere: ik neem er daarvan enkele op: zie in het bijzonder: E, F en G.

I.v.m. de voorbeelden, B, D, F, H vermeld ik omwille van duidelijkheid mijn volgende veronderstellingen:

– $\ln$ is geconstrueerd als integraalfunctie van $x \rightarrow \frac{1}{x}$ op $\mathbb{R}^+$;

$\ln$ is (dus) monotoon stijgend, continu en differentieerbaar; het bereik van $\ln$ is $\mathbb{R}$;

– e is gedefinieerd als dat ene reële getal e waarvoor: $\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$;

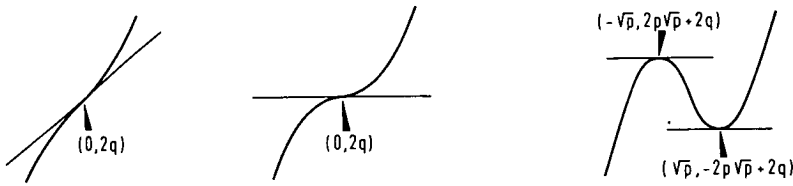
– $x \rightarrow e^x$ (op $\mathbb{R}$) is gedefinieerd als de inverse van $\ln$.

A *Probleem*: Voor welke $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ geldt:

de vergelijking $\underset{x \in \mathbb{R}}{?} (x^3 - 3px + 2q = 0)$ heeft drie oplossingen?

Oplossing van het probleem:

We weten dat de grafiek van zo'n functie $x \rightarrow x^3 - 3px + 2q$ er als volgt uitziet:
 zó, als $p < 0$; zó, als $p = 0$; zó, als $p > 0$:



Figuur 1

We weten dat al die functies continu (op $\mathbb{R}$) zijn, en dus doorlopend.

Dus: die vergelijking heeft drie oplossingen,

dan en alleen dan als: $p > 0$ en $2p\sqrt{p} + 2q > 0$ en $-2p\sqrt{p} + 2q < 0$,

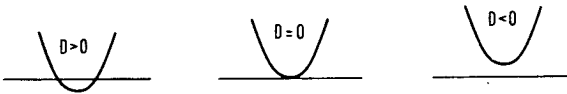
en dus: dan en alleen dan als: $-2p\sqrt{p} < 2q < 2p\sqrt{p}$,

en dus: dan en alleen dan als: $q^2 < p^3$.

Deze oplossing van dit probleem is kennelijk op het niveau van (zeg:) 5 vwo of 5 havo; voor leerlingen is de overtuigingskracht ervan volledig bepaald door hun inzicht in die drie plaatjes (inclusief die eigenschap van doorlopendheid). Zoiets geldt natuurlijk ook voor de overtuigingskracht van een oplossing van het probleem:

Voor welke $p \in \mathbb{R}$ geldt: de vergelijking $\underset{x \in \mathbb{R}}{?} (x^2 - 2px + 1 = 0)$ heeft geen wortels?

met behulp van de plaatjes:

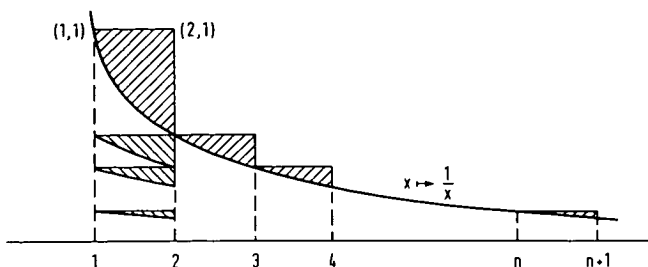


Figuur 2

B *Bewering*:

De rij $n \rightarrow \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n+1)$ is stijgend en naar boven begrensd (bijvoorbeeld door 1).

Bewijs:



Figuur 3

De n^e term van die rij is de som van de oppervlakten van de vlakstukjes die aangeduid zijn met de arcering van rechtsboven naar linksonder:

op het stukje, behorende bij:

$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid i \leq x \leq i+1 \wedge \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{i} \right\}$ laten we werken: de translatie $T \begin{pmatrix} -i+1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Je ziet: voor elke $n \in \mathbb{Z}^+$: $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n+1) < \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right) - \ln(n+2)$;

en ook: voor elke $n \in \mathbb{Z}^+$: $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n+1) < 1$ (zelfs: $\dots < \frac{3}{2} - \ln 2$; zelfs: $\dots < \frac{11}{6} - \ln 3$).

Je kunt bovendien aflezen:

voor elke $n \in \mathbb{Z}^+$: $\ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} < \ln 2$ (zelfs: $\dots < \ln 3 - \frac{1}{2}$; zelfs: $\dots < \ln 4 - \frac{5}{6}$).

C Ik heb mijn TI-50 voor mij liggen;

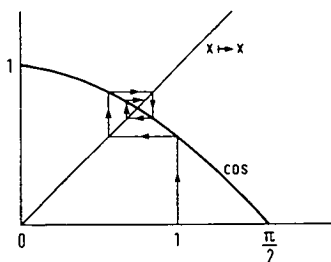
ik druk op ON/C, vervolgens op 1, dan op DRG en vervolgens vele malen (een stuk of vijfenveertig keer) op COS;

in het venster is dan gekomen: 0,7390851.

Ik druk weer vele malen op COS: in het venster komt telkens: 0,7390851.

Dat schijnt de beste benadering te zijn die mijn TI-50 kan maken van de oplossing van de vergelijking $\underset{x \in \mathbb{R}}{?} (\cos x = x)$.

De verklaring voor wat ik heb gedaan, ligt in het volgende plaatje:



Figuur 4

D Stelling:

Voor elk rijtje van positieve reële getallen geldt:

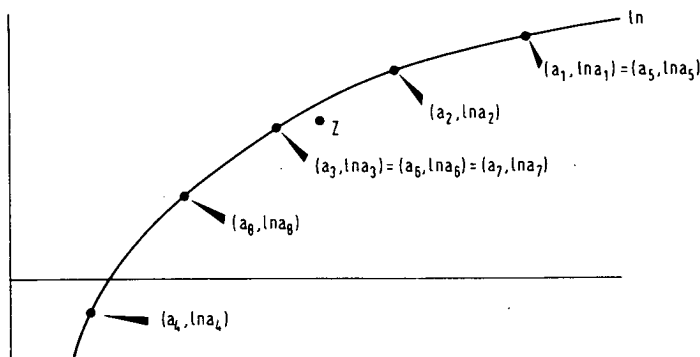
het meetkundig gemiddelde ervan is ten hoogste het rekenkundig gemiddelde ervan.

Bewijs:

Zeg: n is een natuurlijk getal.

Laat $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ een n -rijtje van positieve reële getallen zijn.

Bekijk het n -rijtje van elementen van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $(a_1, \ln a_1), (a_2, \ln a_2), \dots, (a_n, \ln a_n)$.



Figuur 5

Omdat de grafiek van $\ln$ een bolle kant heeft en die bolle kant naar boven gekeerd is (immers de afgeleide van $\ln$ is een dalende functie), ligt het zwaartepunt Z van dat n -rijtje van elementen van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ niet boven de grafiek van $\ln$. Dus:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln(a_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i\right).$$

$$\text{En dus: } \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{1}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

E Stelling:

Voor elke functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$: Als f convex is, dan is f continu.

Wat is ook alweer de definitie van convexiteit?

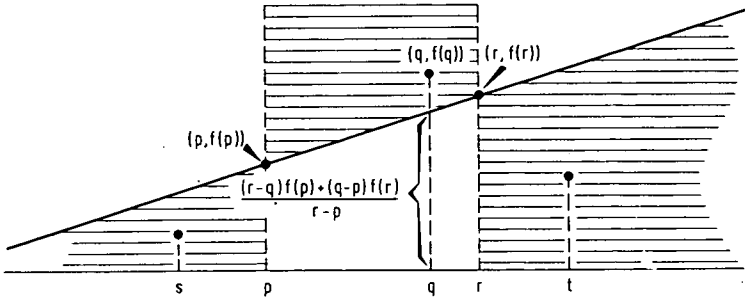
(Ik kies die van convexiteit van onderen.)

Met 'de functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is convex' bedoelen we:

Voor elke $(p, q, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

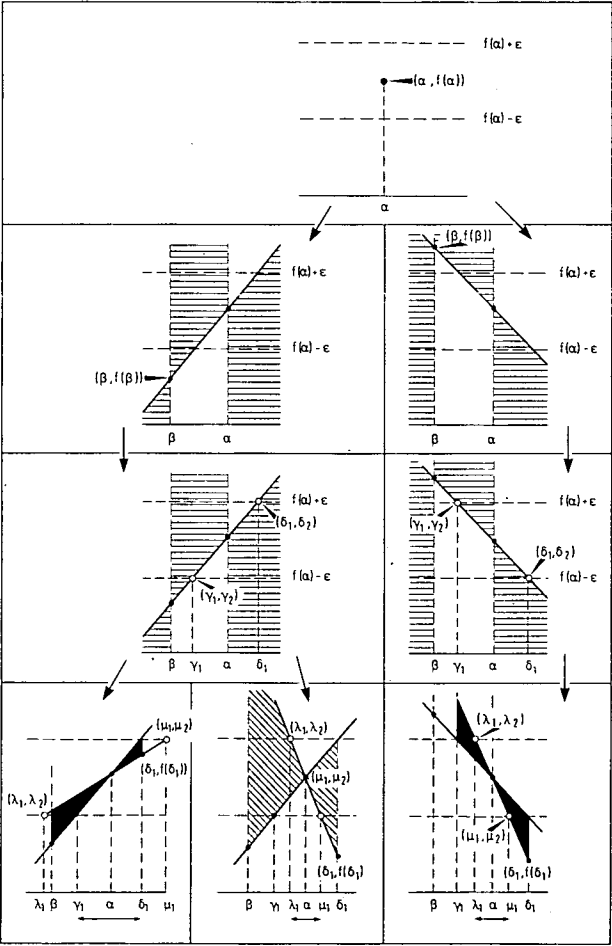
$$\text{als } p < q < r, \text{ dan: } f(q) \geq \frac{(r - q) \cdot f(p) + (q - p) \cdot f(r)}{r - p};$$

het volgende plaatje illustreert dat:



Figuur 6

de grafiek van f ligt in het gebied dat door die arcering is aangeduid.
 Een bewijs van deze stelling is te vinden in de serie plaatjes afgedrukt in figuur 7 ('een sprekende Papy-film').



Gegeven:
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 f is convex (van anderen)
 $\alpha \in \mathbb{R}$
 Te bewijzen:
 f is continu te α
 Laat iemand een positief reëel getal geven: " ϵ ".

Veronderstel:
 $\beta \in \mathbb{R}$ en $|f(\beta) - f(\alpha)| > \epsilon$
 (Zeg: $\beta < \alpha$)

Neem $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ zó dat
 $\gamma_1 < \alpha < \delta_1$ en
 $\{\gamma_2, \delta_2\} = \{f(\alpha) - \epsilon, f(\alpha) + \epsilon\}$ en
 $\{\alpha, f(\alpha), (\beta, f(\beta)), (\gamma_1, \gamma_2), (\delta_1, \delta_2)\}$
 collineair is.

Merk op: $f(\delta_1) \leq \delta_2$

Neem $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ zó dat
 $\lambda_1 < \alpha < \mu_1$ en
 $\{\lambda_2, \mu_2\} = \{f(\alpha) - \epsilon, f(\alpha) + \epsilon\}$ en
 $\{\alpha, f(\alpha), (\delta_1, f(\delta_1)), (\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2)\}$
 collineair is.

Zeg: $U := \{\max\{|\gamma_1, \lambda_1|; \min\{\delta_1, \mu_1\}\}$
 DAN: Voor elke $x \in U$:
 $|f(x) - f(\alpha)| \leq \epsilon$

Figuur 7

F De Formule van Stirling: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$

Tussen haakjes: mijn TI-50 vertelt mij:

$$\frac{10!}{10^{10} \cdot e^{-10} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2\pi}} \approx 1,0083654;$$

$$\frac{20!}{20^{20} \cdot e^{-20} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{2\pi}} \approx 1,004175;$$

$$\frac{30!}{30^{30} \cdot e^{-30} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{2\pi}} \approx 1,0027816.$$

I Even iets opfrissen.

Bekijk de rij $K: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}: n \rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x dx.$

Uit de grafieken lees je direct af dat die rij K dalend en naar beneden begrensd is (door 0 bijvoorbeeld); K heeft dus een limiet.

Je bewijst d.m.v. integratie gemakkelijk:

voor elke $n(\in \mathbb{N}): (n+2) \cdot K(n+2) = (n+1) \cdot K(n).$

Door te bedenken dat $K(0) = \frac{1}{2}\pi$; $K(1) = 1$,

en zóiets op te merken: $\frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2n) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2}$, vind je:

voor elke $n(\in \mathbb{N}): K(2n) = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$ en $K(2n+1) = \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}.$

Verder zien we:

voor elke $n(\in \mathbb{N}): (n+2) \cdot K(n+2) \cdot K(n+1) = (n+1) \cdot K(n+1) \cdot K(n) =$
 $= \dots = 1 \cdot K(1) \cdot K(0) = \frac{\pi}{2}.$

En dus (immers K is een dalende rij van positieve getallen):

voor elke $n(\in \mathbb{Z}^+): n \cdot (K(n))^2 \leq n \cdot K(n) \cdot K(n-1) = \frac{\pi}{2} =$
 $= (n+1) \cdot K(n+1) \cdot K(n) \leq (n+1) \cdot (K(n))^2.$

Dus: voor elke $n(\in \mathbb{Z}^+):$

$$\sqrt{n} \cdot K(n) \leq \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \pi} \leq \sqrt{n+1} \cdot K(n) = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \cdot \sqrt{n} \cdot K(n).$$

En dus: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} \cdot K(n)) = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}.$

II Bekijken we nu de rij $S: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}: n \rightarrow \frac{n!}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n}}.$

Merk op: $n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n} \cdot S(n)$ en $(2n)! = (2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2n} \cdot S(2n).$

Dus voor elke $n(\in \mathbb{Z}^+):$

$$\begin{aligned}\sqrt{2n} \cdot K(2n) &= \sqrt{2n} \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} = \\ &= \sqrt{2n} \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{(2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2n} \cdot S(2n)}{2^{2n} \cdot n^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot n \cdot (S(n))^2} = \pi \cdot \frac{S(2n)}{(S(n))^2}\end{aligned}$$

Nemen we nu eens even aan dat de rij S een limiet heeft, zeg: $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = : \sigma$.

Dan (neem maar limiet van linker- en rechterlid van een paar regels terug):

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\pi = \pi \cdot \frac{1}{\sigma}; \text{ en dus: } \sigma = \sqrt{2}\pi.$$

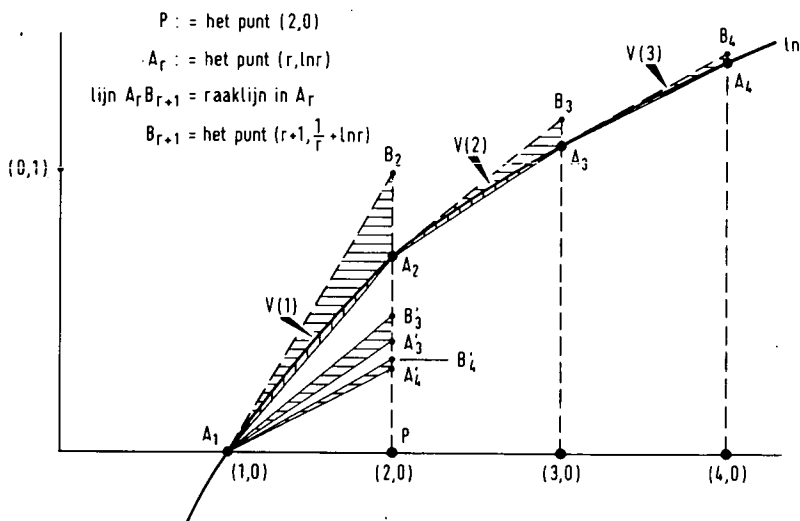
III We moeten nog bewijzen dat de rij S een limiet heeft.

Ik heb van prof. Van Rooij geleerd hoe je dat bewijs uit een plaatje kunt aflezen.

Definieer de rij $V: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ als volgt:

$$V(r) = \left(\int_r^{r+1} \ln t dt \right) - \frac{1}{2} (\ln r + \ln(r+1)).$$

Bekijk het volgende plaatje.



Figuur 8

De grafiek van $\ln$ heeft een bolle kant; die bolle kant is naar boven gekeerd.

Dus: voor elke $n \in \mathbb{Z}^+$: $V(n) \leq \text{opp. } (\triangle A_n A_{n+1} B_{n+1})$.

Maar ook bijvoorbeeld:

de richtingscoëfficiënt van lijn $A_2 A_3 <$ de r.c. van de raaklijn in A_2 , en:

de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $A_3 <$ de r.c. van lijn $A_2 A_3$.

En zelfs: voor elke $n \in \mathbb{Z}^+$:

r.c. (raaklijn in $A_{n+1}) <$ r.c. (lijn $A_n A_{n+1}) <$ r.c. (raaklijn in A_n).

Pas nu de translatie $T_{(-r+1, -\ln r)}$ toe op dat vlakstukje waarvan de oppervlakte $V(r)$ is; je ziet dan:

$n \rightarrow \sum_{r=1}^n V(r)$ is een stijgende rij, die naar boven begrensd is, bijvoorbeeld door $\frac{1}{2}$ (zijnde de oppervlakte van het driehoekige gebied A_1PB_2).

En nu maar even rekenen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} V(i) &= \sum_{i=1}^{n-1} \int \left(\int_i^{i+1} \ln t dt - \frac{1}{2}(\ln i + \ln(i+1)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left((i+1) \ln(i+1) - (i+1) - (i \ln i - i) - \frac{1}{2} \ln i - \frac{1}{2} \ln(i+1) \right) \\ &= n \cdot \ln(n) - n + 1 - \frac{1}{2} \ln((n-1)!) - \frac{1}{2} \ln(n!) \\ &= \ln(n^n) - n + 1 - \ln(n!) + \frac{1}{2} \ln(n) \\ &= \ln \left(\frac{n^n \cdot e^{-n} \cdot e \cdot \sqrt{n}}{n!} \right) = \ln \left(\frac{e}{S(n)} \right). \end{aligned}$$

Dus: de rij S is dalend en naar beneden begrensd (bijvoorbeeld door $\sqrt{e}$).

G Stelling:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Je kunt dit gemakkelijk afleiden uit (*).

$$(*) \text{ Voor elke } n (\in \mathbb{N}): \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} \leq \int_1^2 \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Zó bijvoorbeeld:

$$\text{zeg: } P \text{ is de rij } n \rightarrow \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

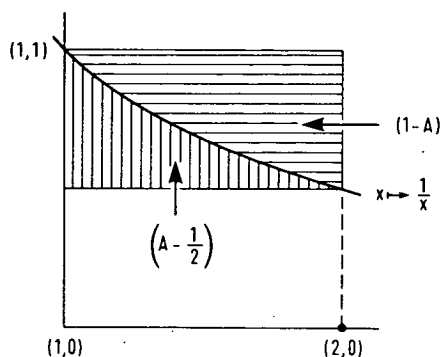
$$\text{en: } Q \text{ is de rij } n \rightarrow \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1};$$

dan: P is stijgend en Q is dalend en voor elke n :

$$0 \leq Q(n) - P(n) \leq \frac{1}{2n+2} \quad \text{en} \quad \text{voor elke } n: P(n) \leq \int_1^2 \frac{dx}{x} \leq Q(n);$$

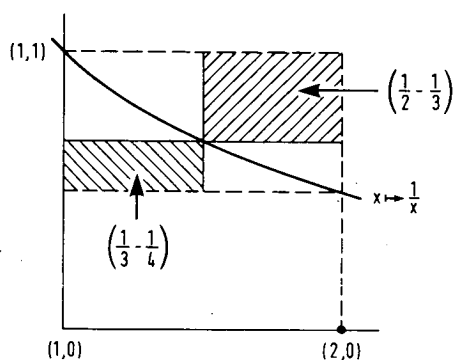
$$\text{en dan: } P \text{ en } Q \text{ convergeren en } \lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q(n).$$

Een bewijs van (*) kun je aflezen uit de volgende serie plaatjes:



We spreken even af:

$$A := \int_1^2 \frac{dx}{x} ;$$

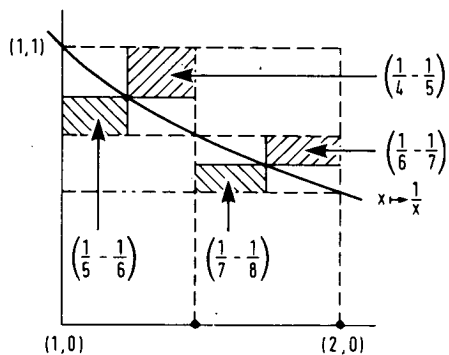


We lezen af:

$$1 - A > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} ;$$

en ook:

$$A - \frac{1}{2} > \frac{1}{3} - \frac{1}{4} ;$$



We lezen af:

$$1 - A > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) ;$$

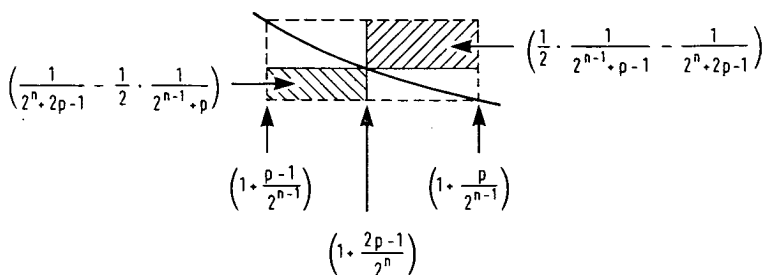
en ook:

$$A - \frac{1}{2} > \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) ;$$

enz.

Figuur 9

Om het goed te begrijpen, generaliseren we dit (zie figuur 10):



Figuur 10

Dus: voor elke $n \in \mathbb{N}$:

$$A - \frac{1}{2} > \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n+1}-1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \text{ en}$$

$$1 - A > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n+1}-2} - \frac{1}{2^{n+1}-1}\right).$$

Een beetje anders geschreven:

$$\text{voor elke } n \in \mathbb{N}: A - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2} + P(2^n - 1) \text{ en } 1 - A > 1 - Q(2^n - 1).$$

Dus: voor elke $n \in \mathbb{N}$: $P(2^n - 1) < A < Q(2^n - 1)$.

En zelfs (immers P is een stijgende en Q een dalende rij):

voor elke $n \in \mathbb{N}$: $P(n) < A < Q(n)$

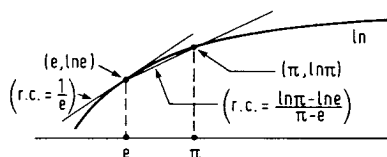
(dit laatste is voor wie goed naar die plaatjes kijkt, maar een overbodige opmerking uit de pen van een formalist).

Ben ik met de voorbeelden E, F en G te ver weggelopen van de schoolwiskunde?
Ik keer ijlings op mijn schreden terug.

H/ Onlangs werd mij de volgende vraag gesteld:

Welke van de twee getallen π^e , e^π is het grootst?

Het antwoord kun je bijvoorbeeld zó vinden:



Figuur 11

Je leest af: $\frac{1}{e} > \frac{\ln \pi - \ln e}{\pi - e}$. Dus: $\pi > e \cdot \ln \pi$.

En dus: $e^\pi > e^{e \cdot \ln \pi} = \pi^e$.



Redactie en uitgever van Euclides vragen graag uw aandacht voor het volgende nagekomen bericht.

Voor de voorbereiding van de 23ste jaargang van Pythagoras (1983/1984) wordt gezocht naar uitbreiding van de redactie en van de kring van medewerkers.

Het is de bedoeling in een periode van een paar jaar te komen tot een profielwijziging die het tijdschrift meer geschikt maakt voor jeugdige lezers en ook diegenen aanspreekt die (nog) geen uitgesproken belangstelling voor wiskunde hebben.

LERAREN die in staat en bereid zijn een deel van hun vrije tijd op te offeren om een jaarlijkse bijdrage aan de kopij voor het tijdschrift te leveren, kunnen toetreden tot de kring van medewerkers. Zij die reeds over redactionele ervaring beschikken, kunnen in aanmerking komen voor opname in de redactie.

Indien Pythagoras u ter harte gaat en u tot één van de hierboven genoemde categorieën behoort, kunt u contact opnemen met Wolters-Noordhoff (D.W. Soeteman 050-162120). Een informatiemapje is beschikbaar. Verder kunt u informatie inwinnen bij de heer G. Schoemaker, lid van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde (030-611611).

Wolters-Noordhoff bv
Postbus 58
9700 MB Groningen

Bijlage bij Euclides
58e jaargang 1982/1983
no. 5 januari 1983

Pythagoras



wiskundetijdschrift voor jongeren

H2 Welk is het grootste van de twee $3^\pi, \pi^3$?

De manier van H1 lijkt nu te falen; we proberen het anders. We moeten vergelijken 3^π en π^3 ;

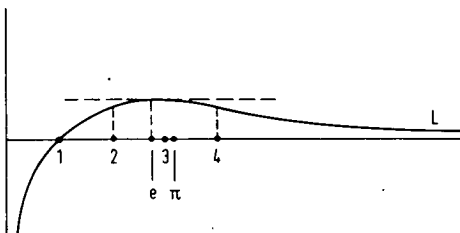
we moeten dus vergelijken $\pi \cdot \ln 3$ en $3 \cdot \ln \pi$;

we moeten dus vergelijken $\frac{\ln 3}{3}$ en $\frac{\ln \pi}{\pi}$.

Laten we de volgende functie in de arm nemen:

$$L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{\ln x}{x};$$

de grafiek van L ziet er zó uit:



Figuur 12

We lezen af: $L(3) > L(\pi)$; en dus: $3^\pi > \pi^3$.

H3 Vraag Voor welke $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : x < y$ en $x^y = y^x$?

Kennelijk is $(2, 4)$ een oplossing; aan de grafiek van die functie L van H2 zie je dat er geen andere oplossingen zijn; immers voor $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$:

als $x < y$ en $x^y = y^x$, dan $x < y$ en $L(x) = L(y)$, dan $1 < x < e$ en $L(x) = L(y)$, en dan $(x, y) = (2, 4)$.

H4 Hoe staat het met de volgende vergelijking?

Voor welke $(x, y) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ : x < y$ en $x^y = y^x$?

Je verifieert gemakkelijk (gewoon door het even na te rekenen):

$$\text{er is } n \in \mathbb{Z}^+ : x = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \text{ en } y = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow x < y \text{ en } x^y = y^x.$$

(Het volgende is zelfs waar, maar voor dit voorbeeld niet relevant:

voor elke $(x, y) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ :$

$$x < y \text{ en } x^y = y^x \Leftrightarrow \text{er is } n \in \mathbb{Z}^+ : x = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \text{ en } y = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.)$$

Laten we even afspreken: A is de rij $n \rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$,

B is de rij $n \rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$,

L is de functie op $\mathbb{R}^+ : x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$.

Dan geldt voor elke $n(\in \mathbb{Z}^+) : A(n) < B(n)$ en $L(A(n)) = L(B(n))$.

Aan de grafiek van de functie L zie je:

voor elke $n(\in \mathbb{Z}^+) : A(n) \leq e \leq B(n) \quad (= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot A(n))$.

Dus:

voor elke $n(\in \mathbb{Z}^+) : 0 \leq B(n) - A(n) = \frac{1}{n} \cdot A(n) \leq \frac{1}{n} \cdot e$.

Dus: $\lim_{n \rightarrow \infty} (B(n) - A(n)) = 0$.

Bovendien: voor elke $n(\in \mathbb{Z}^+) : 0 \leq e - A(n) \leq B(n) - A(n)$.

En dus: $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = e$.

J1/ Bereken: $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$.

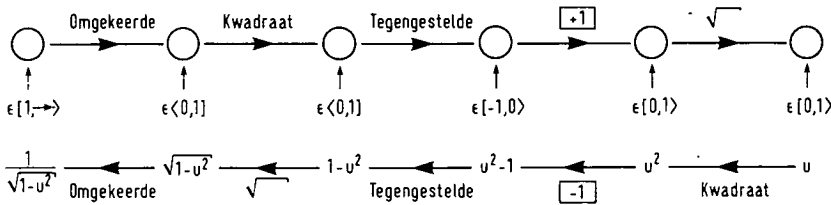
Je kunt een primitieve vinden van de functie op $[1, \rightarrow) : x \rightarrow \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ (laten we die 'j' noemen) door een handig gekozen substitutie (' $x = \frac{1}{u}$ ', ' $x = \frac{1}{\sin u}$ ', ...? ...).

Is zo'n substitutie voor vwo-leerlingen méér dan magie?

Ik erken volledig dat primitiveren op didactisch uitstekende wijze als zwarte kunst kan worden gepresenteerd: 'waar je het vandaan tovert, moet je zelf weten; als je maar laat zien dat het zg. konijn werkelijk een konijn is'.

Ik wil hier alleen maar wijzen op een andere mogelijkheid.

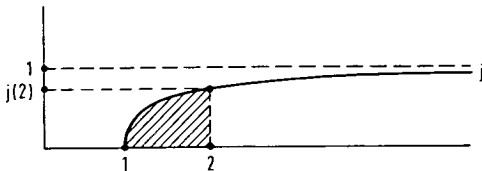
We sporen even de inverse van die functie j op (zie Figuur 13):



Figuur 13

De inverse van j is dus de functie op $[0, 1) : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; en van die functie kennen we een primitieve!

De grafiek van j^{inv} is gemakkelijk te tekenen, die van j dus ook.



Figuur 14

We lezen uit het plaatje af:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = \int_1^2 j = 2 \cdot j(2) - \int_0^{j(2)} j^{\text{inv}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \text{bgsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

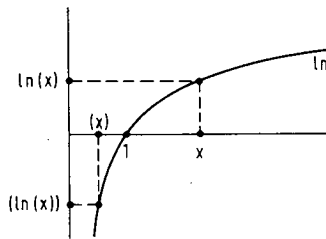
Algemener:

$$\int_1^x \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t} dt = x \cdot j(x) - \text{bgsin}(j(x)) = \sqrt{x^2 - 1} - \text{bgsin} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}.$$

Daarmee hebben we een primitieve van j :

$$x \rightarrow \sqrt{x^2 - 1} - \text{bgsin} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}.$$

J2 Je kunt die methode natuurlijk ook gebruiken om een primitieve te vinden van elke van de volgende functies: $\ln$, bgsin , bgcos , bgtg ; bijvoorbeeld:



Figuur 15

$$\int_1^x \ln(t) dt = x \cdot \ln(x) - \int_0^{\ln(x)} \ln^{\text{inv}}(t) dt = x \cdot \ln(x) - (e^{\ln(x)} - 1) = x \cdot \ln(x) - x + 1$$

dat is goed voor elke $x \in [1, \rightarrow)$ en ook voor elke $x \in (0, 1)$.

Dus: $x \rightarrow x \cdot \ln(x) - x$ is een primitieve van $\ln$.

Primitieven van $\ln$, bgsin , bgcos , bgtg vinden vwo-leerlingen doorgaans door partieel primitiveren; nieuws leren zij hiermee dus niet.

Misschien ligt er een element van verrassing in de vraag:

Wat heeft een primitieve van f^{inv} te maken met een primitieve van $x \rightarrow x \cdot f'(x)$ (voor fatsoenlijke functies f)?

Laten we de identieke functie op $\text{Dom}(f)$ even ' I ' noemen; dan:

$$(x \rightarrow x \cdot f'(x)) = I \cdot f' = (f^{\text{inv}} \circ f) \cdot f';$$

als nu H een primitieve is van f^{inv} , dan is $H \circ f$ er een van $x \rightarrow x \cdot f'(x)$.

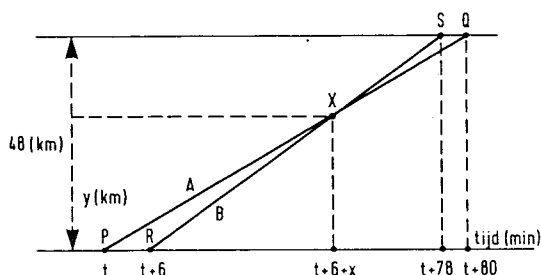
K Een paar voorbeelden uit het (zeg) pre-analytische secundaire wiskunde-onderwijs.

K1 Een stel wielrenners verrijden een tijdrit over een afstand van 48 km.

Veronderstel dat renner A met een constante snelheid rijdt van 36 km/uur;

dat B 6 minuten later vertrekt dan A en met een constante snelheid van 40 km/uur dat traject aflegt.

Wordt A door B ingehaald? Zo ja, waar en wanneer?



Je ziet: $\frac{SX}{XR} = \frac{2}{6};$

dus: $RX = \frac{3}{4} \cdot RS;$

en dus: $x = 54$ en $y = 36.$

Figuur 16

Sommige studenten die zich met didactiek van wiskunde bezighouden, blijken geheel verrast als zij zo'n oplossing van zulke problemen zien; is dat niet verbazingwekkend?

K2 Zeg: een Marsjaar is 1,88 Aardejaar.

Op 16 november 1958 waren Mars en de Zon in oppositie.

Wanneer zijn ze het weer?

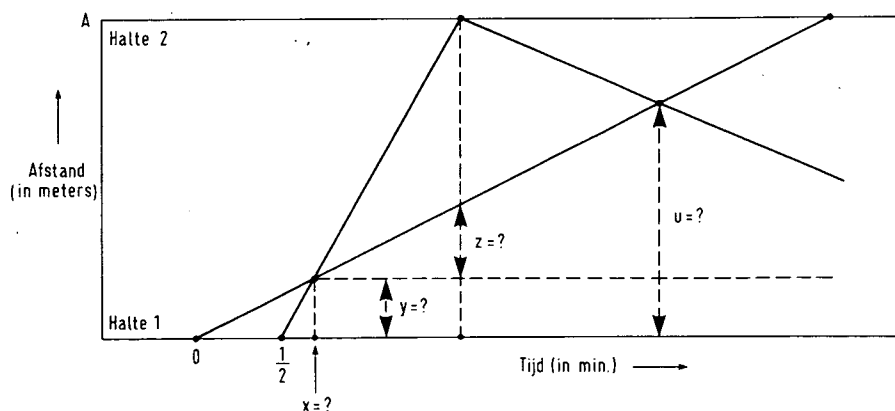
K3 Mensen die tussen twee tramhalten wonen, staan soms voor het volgende dilemma:

uitstappen bij de eerste halte en verder naar huis lopen;

doorrijden tot de tweede halte en teruglopen naar huis.

Wat kunnen die mensen (verlangend zo vlug mogelijk thuis te zijn) het beste doen? (Zeg: tussen de halten rijdt de tram met een snelheid van 18 km/uur; die mensen wandelen met een snelheid van 6 km/uur; de tram staat bij elke halte 30 seconden stil.)

In figuur 17 staat een zuiver grafische oplossing van dit probleem.



Figuur 17

Merk op: 18 km/uur = 300 m/minuut, 6 km/uur = 100 m/minuut.

Verder:

(i) snelheid van de tram = $3 \times$ die van wandelaar; dus: $x = \frac{3}{4}$:

(ii) $y = \frac{3}{4} \times 100$ (of: $y = \frac{1}{4} \times 300$), dus: $y = 75$;

(iii) $z = \frac{1}{3}(A - 75)$;

(iv) $u = 75 + \frac{1}{3}(A - 75) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(A - 75) = \frac{2}{3}A + 25$.

Dus: wie minder dan $\frac{2}{3}A + 25$ meter van halte 1 woont (en bij halte 1 onmiddellijk kan uitstappen), doet er goed aan bij halte 1 uit te stappen.

Het Mavo Projekt en wiskunde didactiek

HANS AALMOES

Het zal een ieder wel zijn opgevallen dat het maandblad van onze vereniging niet wordt overspoeld door informatie vanuit het Mavo Projekt. Toch gebeurt daar het één en ander op het terrein van de didactiek, dat de lezer van Euclides best ter ore mag komen. Naast de oorspronkelijke doelstelling om de leerlingen op te leiden tot een examen, waarbij zij kunnen kiezen uit twee niveaus en de daaruit voortvloeiende begeleiding met betrekking tot de differentiatieproblematiek zijn daar wel andere zaken bij gekomen. Het accepteren van verschillen en het omgaan daarmee heeft geleid tot het zoeken naar andere leerwegen om de leerlingen naar bepaalde doelen te brengen.

Centraal hierbij staat het streven, dat de leerlingen allemaal het Mavo-4 examen kunnen doen, gebonden als we zijn aan de huidige examens Mavo-3 en Mavo-4. Bij de begeleiding van de Mavo-docenten komen niet alleen technische zaken aan de orde zoals een basisstof/extrastof-model (waaronder de diagnostische toets) en schoolonderzoekperikelen. Het gaat ook om aspecten die te maken hebben met veranderende visies op het wiskunde-onderwijs.

De afhaker, de motivatie, de niveaus, concreet-formeel wiskunde-onderwijs enz. zijn belangrijke thema's op de bijeenkomsten. Daarover wordt dan gediscussieerd, maar ook worden elkaars ervaringen uitgewisseld. Ten behoeve van discussies in de vakbegeleidingsgroep Wiskunde worden er allerlei introductiestukjes geschreven. Deze discussies dienen ter ondersteuning van de leden als zij vakbijeenkomsten leiden. Eén van de onderwerpen betrof het relationeel versus het instrumenteel onderricht. Dit stukje volgt hier.

Enkele notities over relationeel en instrumenteel onderricht

Kinderen willen graag weten hoe ze iets moeten doen. Ze willen graag een regeltje om daarmee een aantal sommen te kunnen maken. Ik – als leraar – wil graag dat kinderen weten wat ze aan het doen zijn. Ik wil dat ze iets begrijpen. Een vergelijking oplossen demonstreer ik met een weegschaal. Als je er aan de ene kant iets bij doet dan moet je, wil je de zaak in evenwicht houden, dus de gelijkheid bewaren, aan de andere kant hetzelfde er bij doen. Toch komt de volgende dag een 'onverlaat' vertellen dat zijn vader, die het goed bedoelde maar toch de echte 'onverlaat' is, het hem veel gemakkelijker heeft uitgelegd door 'het naar de andere kant brengen met een minteken'. Daar zit je dan in de problemen! Relationele uitleg kost even wat tijd. We investeren die tijd in het laten begrijpen en deze investering heeft uiteindelijk de bedoeling er op den duur beter van te worden. In dit geval duurt het even voordat de kinderen worden losgelaten op sommen, zoals dat jongetje met zijn 'helpende' vader al wilde maken.

Je hoopt dat jouw leerlingen iets gaan begrijpen, dat ze inzien waarom ze iets op een bepaalde manier doen.

Dat vind ik namelijk wiskunde.

Er zullen ook leraren zijn die hier anders over denken en liever zo gauw mogelijk (een) resultaat willen zien, ongeacht de achtergronden. Deze leraren hebben dus een andere visie op wat wiskunde is.

Elke week vind je wel voorbeelden waar dit dilemma van instrumenteel of relationeel onderricht zich in de klas afspeelt. Onlangs kwam ik twee van die voorbeelden tegen. Het eerste was het resultaat van een vroeger geleerd regeltje. In een vierde klas vwo stonden de leerlingen plotseling voor de opgave 1 : $1/5$. Dit gaf de nodige problemen. Enkele kreten uit de klas in de trant van: daar heb je een trucje voor en je moet iets omdraaien brachten ons niets verder. De leerlingen wisten gewoon niet wat delen was. Toen ik echter vroeg hoeveel keer $1/5$ op 1 gaat was voor iedereen duidelijk dat het antwoord 5 moest zijn. Ik heb dat moment nog wel even aangegrepen om te vertellen wat delen is en het verband laten zien met 'delen door is vermenigvuldigen met het omgekeerde'.

Het voorval versterkte mijn vermoeden dat in een te vroeg stadium het delen door breuken wordt aangeleerd. Als kinderen nog niet aan dit formele gedoe toe zijn, doe het dan ook niet. Met dat regeltje aanleren, zonder enige notie van wat delen is, schieten de leerlingen niets op. Het lijkt op resultaatvoetbal. Je hebt schijnbaar een succesje doordat er met die regel wat sommetjes gemaakt kunnen worden, maar de kinderen hebben er niets aan. Op den duur vergeten ze zelfs die regel zoals in mijn klas bleek (en gelukkig maar, want anders dacht ik ook nog dat ze het snapten).

Het tweede voorbeeld betrof juist een dreiging om er een regeltje in te stampen. In een 3 vwo-klas waren we in de tweede les bezig met het opstellen van een vectorvoorstelling van een lijn bij gegeven steunvectoren en richtingsvector. Na enkele voorbereidende oefeningen en mededelingen kon ik bij $\vec{v} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ iets vertellen als: je gaat eerst langs vector $\vec{a}$ en vervolgens in de richting van $\vec{b}$ (een 'aantal keren' in de richting van $\vec{b}$, want die λ is variabel) en ik zei nog iets over het 'steunen' in allerlei standen van die lijn op de vector $\vec{a}$ (je probeert tenslotte van alles ...). Algoritmisches als leerlingen zijn ingesteld, wilde één meisje na enige tijd en veel gemaakte fouten toch weten of de vector die voor aan staat of die vector met die λ er bij steunvector was en welke dan richtingsvector was. Dit was een belangrijk punt op basis waarvan ik verder kon gaan. Ik gaf haar de opdracht nu eens vier verschillende plaatsvectoren $\vec{v}$ te tekenen bij $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ en $\lambda = -1$. Na enig tegengesputter, haar buurmeisje was al drie opgaven verder, begon ze er toch aan (want het optellen van vectoren beheerste ze). Na de eindpunten van de plaatsvectoren door een lijn te hebben verbonden zag ze de gevraagde lijn en ze zag ook de richting. Een tweede oefening had ze niet meer nodig. Ze ging verder. Ik hoop nu maar zó, dat ze het begrijpt ...

Over de auteur:

Hans Aalmoes, 40 jaar; is leraar aan de Rijksscholengemeenschap te Schagen en is als vakdidacticus van de vakbegeleidingsgroep Wiskunde werkzaam in het Mavo Projekt.

Huiswerk voor wiskunde (1)

H. J. SMID, A. VERWEIJ

'Maar daar worden ze juist zo knap van. Van dat huiswerk maken', probeerde de officier de verdachte te overtuigen,

De Leidse Courant, 2 juni 1981

Een van de meest vanzelfsprekende zaken in het voortgezet onderwijs is wel, dat voor bijna alle vakken huiswerk wordt opgegeven, in de lagere klassen wat minder, in de hogere klassen wat meer. Huiswerk is iets wat er nu eenmaal bij hoort, en het nut ervan lijkt voor iedereen vast te staan. Hoeveel leraren vragen niet op een ouderavond aan de ouders van een zwakke leerling: 'Werkt hij thuis wel voldoende?' Veel huiswerk maken lijkt wel een nodige, zij het ook niet voldoende, voorwaarde voor goede studieresultaten. Dat ligt ook erg voor de hand: hoe meer tijd en inspanning iemand aan een vak besteedt, hoe beter het wel zal gaan. Het systeem van 'Mastery Learning' is zelfs voor een belangrijk deel gebaseerd op de gedachte dat de factor tijd een essentiële variabele in het leerproces is.

Toch bekropen ons de afgelopen jaren steeds meer twijfels over het nut van huiswerk voor wiskunde. Uit hoofde van ons beroep zien we vaak studenten, die op schoolpracticum zijn, wiskundelessen geven. Vele lessen hebben we groten-deels of geheel zien opgaan aan het bespreken van huiswerk; lessen vol verveling voor leerlingen, die de huiswerkopgaven wel behoorlijk gemaakt hadden, lessen die hoofdzakelijk uit het overpennen van op het bord voorgemaakte sommen bestonden voor leerlingen, die deze thuis niet hadden kunnen of willen maken. Hoe effectief is dan eigenlijk voor deze leerlingen het thuis werken aan wiskundesommen en het meemaken van de bespreking van het huiswerk in de les geweest? En is zo'n les, waarin alle opgaven toch uitvoerig op het bord uitgewerkt worden, geen premie op het maar niet eens proberen je huiswerk te maken?

De vraag, die dan opkomt, is: kan huiswerk voor wiskunde ook zó opgegeven worden, dat een en ander wel voor iedere leerling nuttig werk thuis en zinnige lessen op school oplevert? Het probleem leek ons de moeite waard om onderzoek naar te verrichten. We zijn begonnen met het verzamelen en bestuderen van literatuur over huiswerk, vooral gericht op huiswerk voor wiskunde. De

resultaten van die studie vonden we interessant genoeg om er twee artikelen in een blad als Euclides aan te wijden.

Het eerste wat ons opviel toen wij de literatuur begonnen te verzamelen was, hoe weinig er eigenlijk over zo'n ruim verbreid verschijnsel als huiswerk geschreven is. Uit de periode van de afgelopen vijftig jaar hebben we niet meer dan een honderdtal boeken, proefschriften, artikelen en artikeltjes gevonden, de meeste uit Amerikaanse en Duitse (zowel Oost- als Westduitse) bronnen, maar ook enkele uit de Nederlandse en Belgische literatuur. Is huiswerk zó vanzelfsprekend, dat het verschijnsel grotendeels aan de aandacht van onderwijsonderzoekers is ontsnapt? Hierbij moet wel gezegd worden, dat wij ons bij het zoeken naar Amerikaanse literatuur uitdrukkelijk tot huiswerk voor wiskunde beperkt hebben. We vermoeden dat de Amerikaanse literatuur over huiswerk in het algemeen en/of huiswerk voor andere vakken nog heel wat meer omvat dan wat wij nu alleen voor wiskunde gevonden hebben. Bij het bestuderen van Europese literatuur hebben wij ons niet beperkt tot huiswerk voor wiskunde, om de eenvoudige reden dat dat nauwelijks zinvol zou zijn; er is hierin bijna alleen literatuur te vinden, die op meerdere vakken (waaronder dan wel vaak wiskunde) betrekking heeft.

In veel artikelen, vooral in die uit de Europese literatuur, kwamen we overigens meer opinies en opvattingen tegen dan feiten en gegevens die stoelen op empirisch of experimenteel onderzoek. Dit wijst toch wel op een betrekkelijke verwaarlozing van het verschijnsel huiswerk bij het onderzoek van met name het Europese onderwijs. Er is ons op het terrein van huiswerk in het Nederlandse onderwijs zelfs geen enkel serieus experimenteel onderzoek bekend; wel zijn hier wat enquêtes, zij het op beperkte schaal, gehouden. We zijn dus grotendeels op de buitenlandse literatuur aangewezen. Dat betekent, dat wij wel voorzichtig moeten zijn met het van toepassing verklaren van de resultaten uit die onderzoeken op de Nederlandse situatie. Schoolstelsel en -organisatie is in andere landen vaak anders, en dientengevolge ook de plaats en de rol van het huiswerk. Toch lijkt ons niet, dat daarom uit deze buitenlandse onderzoeken niets voor de Nederlandse situatie te leren zou zijn. Daarvoor is te veel ervan voor ons herkenbaar en bekend.

Een handzame indeling van de literatuur is de volgende: ~

- a* literatuur die betrekking heeft op de opvattingen van leraren, leerlingen en ouders met betrekking tot het verschijnsel huiswerk;
- b* literatuur waarin op basis van empirisch onderzoek de gebruikelijke huiswerkpraktijk beschreven is;
- c* literatuur waarin op basis van experimenteel onderzoek het effect van de gebruikelijke huiswerkpraktijk beschreven is;
- d* literatuur waarin, eveneens op basis van experimenteel onderzoek, het effect van allerlei 'alternatieve' vormen van huiswerk opgeven en bespreken is beschreven.

In dit artikel zullen we verder alleen aandacht besteden aan *a* en *b*, en in een tweede artikel aan *c* en *d*.

a Opvattingen van leraren, leerlingen en ouders

De discussie over positieve en negatieve aspecten van het maken van huiswerk wordt weliswaar niet zo frequent, maar wel al van oudsher, in de literatuur gevoerd. In 1907 verscheen bijvoorbeeld een Amerikaans boek, 'The teaching of mathematics' van J. W. A. Young, waarin een aantal gunstige effecten van huiswerk opgesomd werd, zoals 'the opportunity for quiet thinking' en 'to incalculable neatness'. Maar enkele jaren later werd, ook in Amerika, in het 'Ladies Home Journal' van 1913, gewaarschuwd tegen 'the useless and really dangerous practice of carrying books home and asking pupils to do evening studies'. De Westduitse onderzoeker Bernhard Wittman heeft in zijn boek 'Vom Sinn und Unsinn der Hausaufgaben', verschenen in 1970, een overzicht gegeven van de positieve en negatieve effecten, die auteurs van de door hem bestudeerde artikelen en boeken aan huiswerk toekenden. De veronderstelde effecten liepen uiteen van enerzijds bijvoorbeeld het vergroten van de schriftelijke uitdrukkingsvaardigheid en het vormen van een goede studiehouding tot anderzijds bijvoorbeeld het oproepen van spanningen in het gezin en het aanzetten van kinderen tot liegen! Dát er huiswerk gemaakt moet worden lijkt voor de meeste auteurs overigens wel een vanzelfsprekende zaak te zijn. De verschillende opvattingen over het effect van huiswerk zijn in de loop van deze eeuw in talloze bewoordingen steeds weer herhaald, zonder dat – op twee uitzonderingen na – ooit de juistheid van deze opvattingen werkelijk geverifieerd is. De uitzonderingen zijn: de voor de meeste auteurs boven alle twijfel verheven opvatting dat huiswerk bevorderlijk is voor de schoolprestaties, en de veronderstelling dat huiswerk, hetzij positieve, hetzij negatieve invloed heeft op de attitude van de leerling ten aanzien van het betreffende vak. Op deze punten komen wij onder c terug.

Opvattingen over effecten van huiswerk bestaan uiteraard niet alleen bij schrijvers van artikelen en boeken. Uit de verslagen van enquêtes m.b.t. huiswerk, die wij in de literatuur van 1965 tot 1980 tegenkwamen, blijkt dat leraren, maar ook ouders en leerlingen, voornamelijk positieve effecten van huiswerk verwachten. Amerikaanse, Duitse, Belgische en Nederlandse enquêtes stemmen hierin overeen dat steeds een overgrote meerderheid van de ondervraagde leerlingen, ouders en leraren zonder meer van het nut van huiswerk overtuigd is; men vindt huiswerk onmisbaar voor het bereiken van behoorlijke prestaties op school en waardevol voor de ontwikkeling van een goede werkhouding en het vermogen om zelfstandig te kunnen werken. Dit beeld wordt in het recente onderzoek van C. Veenstra nog eens bevestigd. Bij de enquête, die zij in de cursus '79/'80 gehouden heeft onder leerlingen, ouders en leraren van vijf scholen voor voortgezet onderwijs in de stad Groningen, antwoordde 71 % van de leraren dat verbeteren van leerprestaties een erg belangrijke waarde van huiswerk is, en 63 % van de ouders en leerlingen vond het zelfstandig leren werken een erg belangrijke waarde van huiswerk. Enigszins in tegenspraak hiermee lijkt, dat zo'n 60 % van de ondervraagde ouders en leerlingen wel voelt voor afschaffing van het huiswerk en verlenging van de schooldag; 67 % van de ondervraagde leraren voelt hier echter niets voor.

Uit al deze gegevens blijkt duidelijk: huiswerk is een weinig omstreden zaak, het nut ervan lijkt voor het overgrote deel van alle partijen vast te staan. Hoe weinig gefundeerd dit in feite is, zullen wij in ons volgend artikel beschrijven.

b De gebruikelijke huiswerkpraktijk

Natuurlijk hebben de hierboven beschreven opvattingen van leerlingen, ouders en leraren over de waarden van huiswerk vooral betrekking op de situatie rond huiswerk, waarmee zij vertrouwd zijn. Als een leraar bijvoorbeeld denkt dat zijn leerlingen door huiswerk te maken zelfstandig leren werken en problemen op zijn vakgebied leren oplossen, dan hecht hij die waarden aan *zijn* manier van huiswerk opgeven en bespreken. Maar er zijn nogal wat verschillen denkbaar wat betreft de manier van voorbereiden en opgeven van huiswerk in de les, de soort huiswerkopgaven, de hoeveelheid opgegeven werk, de hulpmiddelen die beschikbaar gesteld worden (zoals antwoordenlijsten), de mogelijkheid om huiswerk onder leiding van een (bijles-)leraar te maken, de hulp die thuis gegeven wordt, de tijd die door de leerling aan het huiswerk besteed wordt, de omstandigheden waaronder thuis gewerkt wordt en de controle en de bespreking van het huiswerk in de volgende les. Zijn er in de praktijk veel verschillen op deze punten, of is er zoiets als een 'gebruikelijke' huiswerkpraktijk?

Met betrekking tot de huiswerkpraktijk in het Nederlandse voortgezet onderwijs zijn ons alleen wat summiere gegevens bekend over de tijd die leerlingen aan hun huiswerk besteden, de omstandigheden waaronder zij huiswerk maken (in een eigen kamer? staat de radio aan?), en de mate waarin de leerlingen bij het huiswerk geholpen worden. Deze gegevens zijn gebaseerd op enkele enquêtes onder leerlingen en/of ouders en/of leraren. In de zestiger en zeventiger jaren zijn er kleine enquêtes gehouden op een l.t.s., enkele u.t.s.'en en een mavo/havo-school. De in het voorafgaande al genoemde enquête van C. Veenstra, in '79/'80 op verschillende scholen voor voortgezet onderwijs in Groningen gehouden, was wat uitgebreider.

Bij deze enquêtes bleek, dat leerlingen van l.b.o.-scholen gemiddeld $\frac{1}{2}$ à 1 uur per dag aan huiswerk besteden en dat leerlingen van mavo/havo-scholen zo'n $1\frac{1}{2}$ à 2 uur per dag huiswerk maken. Opmerkelijk is dat leraren, uitgezonderd de docenten van l.b.o.-scholen, in het algemeen de tijd die hun leerlingen aan het huiswerk besteden onderschatten, een verschijnsel dat ook bij onderzoek in België, West-Duitsland en Amerika naar voren is gekomen.

Een opvallende bevinding bij de enquête op de u.t.s.'en is, dat juist de zwakste leerlingen van die schoolsoort de meeste tijd aan huiswerk besteedden. In dit verband is interessant, dat bij een meer recent Westduits onderzoek bleek, dat er bij leerlingen van diverse schoolsoorten géén samenhang te vinden was tussen de 'inzet' voor het huiswerk voor wiskunde en de prestaties voor dit vak op school. De vraag van leraren aan ouders van zwakke leerlingen of hun kind thuis wel hard genoeg werkt, is dus waarschijnlijk heel wat minder voor de hand liggend dan menigeen denkt!

Wat betreft de omstandigheden, waaronder leerlingen thuis huiswerk maken, is aardig om op te merken dat uit de in Nederland gehouden enquêtes blijkt, dat het percentage leerlingen met een eigen kamer in de loop van de laatste twintig jaren steeds hoger geworden is. Dit is waarschijnlijk een gevolg van het kleiner worden van de gezinnen en het vaker het huis uit trekken van de oudere kinderen.

Uit het onderzoek van Veenstra blijkt, dat het merendeel (78 %) van de ondervraagde Groningse tweede klas leerlingen zo nu en dan thuis bij het huiswerk geholpen wordt. Bij de eerdere Nederlandse enquêtes werd veel minder hulp van ouders gemeld. De omvang van de hulp bij het huiswerk is in de Nederlandse situatie in elk geval duidelijk geringer dan voor leerlingen van Westduitse gymnasia. Bij het onderzoek van G. Eigler en V. Krumm, gehouden rond 1970, bleken de ouders van Westduitse gymnasiasten zéér veel hulp te bieden, en: hoe hoger de sociale klasse, hoe meer hulp.

Er zijn ons geen Nederlandse onderzoeksgegevens bekend over de soort huiswerkopgaven die leraren opgeven (noch voor wiskunde, noch voor andere vakken) en al evenmin over de manier waarop leraren met opgegeven huiswerk in de klas omgaan. De schaarse gegevens, die ons hierover ter beschikking staan, zijn afkomstig uit Oost- en Westduitse bronnen. Die gegevens roepen een niet zo vrolijk beeld op. Hoewel de leraren meestal vrij hooggestemde doelen met het opgeven van huiswerk zeiden na te streven, zoals het zelfstandig en creatief leren werken van de leerlingen, bleek de praktijk daarmee niet erg in overeenstemming te zijn. Dit gold ook voor het vak wiskunde. Het grootste deel van de opgaven was namelijk gericht op het inoefenen en vastleggen van het geleerde, meestal in de vorm van eentonige en mechanische oefenopgaven. Slechts zelden kwamen opgaven voor die gericht waren op praktische toepassing. De opgaven waren vrijwel nooit op de individuele leerling afgestemd; meestal werd aan alle leerlingen hetzelfde werk opgegeven. Het huiswerk werd vaak haastig aan het eind van de les opgegeven, soms nauwelijks toegelicht. Bij de bespreking van het huiswerk waren meestal maar enkele leerlingen actief. De bespreking was zelden individueel gericht. Het zou onjuist zijn deze gegevens zonder meer ook voor de Nederlandse situatie van toepassing te verklaren. Onderzoek naar de huiswerkpraktijk in Nederland lijkt dan ook de moeite waard.

Over de auteurs:

Beide auteurs hebben wis- en natuurkunde gestudeerd aan de R.U. Leiden en zijn werkzaam geweest als leraar resp. lerares wiskunde. Daarna zijn zij als docent wiskunde en vakdidactiek verbonden geweest aan de leraren opleiding ZWN. Thans zijn zij als wetenschappelijk medewerker verbonden aan de T.H. Delft, waar zij o.a. belast zijn met de lerarenopleiding wiskunde.

BOVO

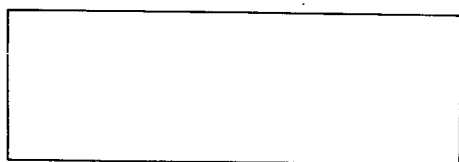
ED DE MOOR

Op een BOVO-cursus houden wij (onderwijsgeevenden uit B.O. en V.O. en opleiders) ons bezig met het aansluitingsprobleem rekenen/wiskunde. Omdat er nog al eens klachten zijn over de rekenvaardigheid van de brugklasleerling wordt er materiaal, dat bij rekenlesjes in de brugklas gebruikt kan worden, verzameld en ontwikkeld. Eén van de collega's ontwierp daartoe een werkblad over het vermenigvuldigen van een breuk met een breuk.

Eerst werden 8 vraagstukjes aangeboden, die een visuele herbewustmaking beoogden van het principe:

'Een deel van een deel van een geheel'.

Een voorbeeld:



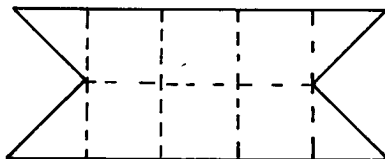
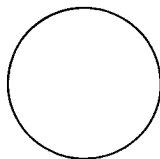
(maten 6 bij 2 cm.)

Arceer met potlood: 1/3 deel.

Kleur nu met rood: 1/2 deel van 1/3 deel.

Vul in: 1/2 deel van 1/3 deel is deel.

Dit gebeurde acht maal in totaal met drie verschillende figuren: de rechthoek, een cirkel en een 'diabolo' met roosterverdeling:



Daarna volgende 'dezelfde' acht sommetjes, maar nu in de volgende vorm:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \dots$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \dots$$

$$\frac{1}{5} \times \frac{5}{8} = \dots$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \dots$$

$$\frac{1}{8} \times \frac{3}{4} = \dots$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{8} = \dots$$

Tenslotte werd de vraag gesteld wat de overeenkomst tussen beide series was.

Eén leerling (brugklas vwo-havo, maart 1982), fungeerde vrijwillig als proefkonijn.

Bij de eerste serie (arceren en kleuren) ontstond geen enkel probleem. Daarna vulde hij in:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

$$\frac{1}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8} \times \frac{6}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{8}{40} \times \frac{25}{40} = \frac{200}{40} = 5$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{24}{40} \times \frac{25}{40} = \frac{600}{40} = 15$$

Op de laatste vraag kwam als antwoord dat het 'allebei over breuken' ging.

Deze leerling kan een breuk als fractie van een geheel interpreteren. Ook kan hij een deel van een deel 'zien' (c.q. tellen) en er een notatie bij geven.

Het verband, dat er bestaat tussen ' $\frac{1}{3}$ deel van' en ' $\frac{1}{3}$ maal' (of ' $\frac{1}{3} \times$ ') wordt op z'n minst niet herkend.

Als we hier even wat dieper over nadenken is deze overeenkomst ook niet zo evident. Kennelijk geeft het maal-teken in dit geval een signaal, dat een heel andere betekenis heeft dan bij het vermenigvuldigen met natuurlijke getallen ($2 \times 8 = 8 + 8$).

Het is dan ook echt niet verwonderlijk dat een leerling bij het vermenigvuldigen van de breuken als rekengetallen (de getallen zijn dan van alle betekenis ontdaan) zo kan ontsporen.

'Dit zijn rijtjes, en bij rijtjes horen regeltjes. En die regeltjes heb ik vroeger geleerd'.

Maar ja, de leerling heeft zoveel regeltjes geleerd en het is al bijna een jaar geleden, dat hij er nog mee oefende. Allicht, dat die regels niet alle foutloos opgeroepen kunnen worden.

Ik ga niet in op mogelijke didactische aanpakken van dit probleem. Het gaat hier ook niet om een analyse of beoordeling van ons breukenonderwijs. Zeker wil ik geen verwijten uiten naar het B.O. We dienen ons te beseffen dat in het B.O. vaak onder enorme druk wordt gewerkt om het 'rekenen rond te krijgen'.

Dit artikel is bedoeld om onszelf bewust te maken, dat rekenen niet een aangelegenheid is van de lagere school alleen.

Het is mijn stellige overtuiging dat het goed is vroeger geleerde zaken nog eens opnieuw aan de orde te stellen. Men kan iets, wat men begrepen heeft 'opnieuw begrijpen', 'beter begrijpen'. En binnen het rekenen liggen zoveel begripsmatige zaken, welke in het V.O. best nog eens aan een hernieuwd onderzoek onderworpen kunnen worden.

Is dit misschien iets voor het komende 'voortgezet basisonderwijs'? Voorlopig zullen we in ons leerplan nog wel met het gat tussen rekenen en wiskunde blijven zitten.

Fibonacci met brugklassers? Waarom eigenlijk niet?

HARRIE BROEKMAN

In het artikel 'Het klopt toch!?'¹⁾ heb ik via een drietal voorbeelden duidelijk proberen te maken dat het bereid zijn tot controle niet alleen nuttig is, maar ook stimulerend kan werken. Tevens gaf ik daar aan dat het serieus nemen van de door leerlingen aangedragen suggesties en deze te bespreken een mogelijkheid biedt van een samen (wiskundig) bezig zijn.

Een voorbeeld van dit laatste werd besproken op de laatste Paasconferentie van de A.T.M. Ik heb het met een aantal brugklassers, 4 havo-leerlingen én leraren uitgeprobeerd.²⁾

De *werkwijze* was als volgt:

- 1 via een aantal voorbeelden werd de leerlingen (én de leraren) duidelijk gemaakt wat we onder een Fibonacci-rij verstaan (bv. 1, 5, 6, 11, 17).
- 2 de leerlingen werd gevraagd een aantal rijen voort te zetten (bv. -2, 5, 3, ..., ..).
- 3 de leerlingen werd gevraagd een aantal rijen 'naar-links' uit te breiden (bv. ..., ..., 3, 7, 10).

Via deze 'aanvulling' naar rechts resp. links werd de stap gezet naar de eigenlijke *probleemstelling*:

Is het mogelijk een 'gat' in een concrete Fibonacci-rij éénduidig te vullen als we alleen de getallen er direct naast kennen? En twee gaten naast elkaar? En drie gaten?

Aangezien ik het erg onjuist zou vinden om u het plezier van het zelf aanpakken van deze vraagstelling te ontnemen zal ik de mogelijke uitwerkingen en aanpakken hier niet vermelden. Wel wil ik een aantal waarnemingen vermelden n.a.v. het werken met leerlingen én leraren aan de probleemstelling. Tevens geef ik de tekst die daarbij door mij werd gebruikt, zodat u er eerst zelf aan kunt werken.

FIBONACCI

Het is eenvoudig de getallen van een Fibonacci-rij te vinden als je twee opvolgende getallen kent.

Maar *wat gebeurt er* als je alleen het eerste en het derde getal kent?

Voorbeeld: 5, , 12

Welk getal hoort op de plaats van het gat te staan?

Hoe kun je daar achter komen?

Kun je een regel ontdekken?

Kun je die regel verklaren?

Probeer nu ook de volgende:

4, , 8
5, , 8
12, , 20

Je kunt zelf nog wat voorbeelden maken om een regel te ontdekken, of om je gevonden regel te controleren.

Wat gebeurt er als je alleen het eerste en het vierde getal kent?

1, , , 9
5, , , 29
8, , , 29

Welke getallen horen op de plaats van de gaten te staan?

Probeer die getallen te vinden.

Probeer een regel te ontdekken en verklaar die regel.

Wat gebeurt er als je alleen het eerste en het vijfde getal kent?

Een aantal waarnemingen:

- a Na de introductie van de Fibonacci-rijen en het voortzetten door optellen, werd bij punt 3 vrijwel vanzelf afgetrokken. Bij de eigenlijke vraagstelling kwam een opmerkelijk verschil naar voren tussen brugklassers, leraren en studenten wiskunde.

Student wiskunde (bij 2 gaten):

'dat is nogal simpel; je krijgt de rij 1, x, y, 9 en dan kun je zeggen'

Leraar wiskunde (bij 2 gaten):

'tja, laat eens kijken. Je kunt hier niet simpel aftrekken. Noem het tweede getal maar eens a dan krijg je $1 + a$ als derde getal. Ja en dan natuurlijk'

Brugklasleerling 1:

'nou ja ik probeer maar eens een 3, dan krijg ik 1, 3, 4, 9. Nee dat klopt niet, dat is te weinig. Laat ik dan maar eens een 4 proberen,'

Brugklasleerling 2:

'tja, laat ik die 1 van de 9 aftrekken. Dan krijg ik 8. Daar de helft van is 4. En dat klopt 1, 4, , 9'

- b In de groepjes waar ik slechts een korte introductie gaf en van punt 2 direct naar één getal ging (met één voorbeeld) en toen onmiddellijk vroeg hoe het met twee gaten zat, stopten niet alleen veel leerlingen, maar ook een paar leraren.

Commentaar van een van hen:

'Ja, daar trap ik niet in. Je verwacht waarschijnlijk dat ik hier ook ga aftrekken; maar dat kan natuurlijk niet.'

- c Erg veel leerlingen, maar ook leraren vermijden het werken met variabelen (letters) zo lang dit maar mogelijk is.

Een paar 4 havo-leerlingen – én een aantal leraren – wilden het twee-gaten-probleem te lijf met 2 letters (zie bij a) en kregen van hun collega's te horen:

'doe niet zo stom, je kunt dit toch wel gewoon met je boerenverstand.'

- d Het aan elkaar beschrijven van de gevolgde werkwijze³⁾ leverde op dat een paar leerlingen systematisch gingen proberen:

'Eerst probeerde ik maar wat getallen, maar Jan deed het stap voor stap, eerst een klein getal en toen dat te weinig was een beetje groter. Dat is best handig als je het niet gelijk ziet.'

- e Leerlingen van een mavo-brugklas ontdekten dat het handig is dat je een letter kunt gebruiken. Een van de leerlingen zei toen protesterend:

'hè nee, het was net leuk en nu maak je er weer wiskunde van.'

Enig commentaar:

- Ad a en b* Het verwondert me toch telkens weer hoeveel brugklasleerlingen plezier kunnen hebben in dat spelen met getallen.⁴⁾ Juist ook bij dat 'spelen' is het van belang dat de leerling een vraagstelling krijgt voorgeschoteld die hij of zij als een uitdaging aanvaardt. Een Fibonacci-rij is daarvoor – en niet alleen door de naam – voor veel leerlingen van alle leeftijden zowel makkelijk als moeilijk genoeg.

Ad c en d In feite is dit niets nieuws. Wel drukt het ons weer eens op het feit dat het niet zo vanzelfsprekend is om de algebra te gebruiken. Mijns inziens zouden we wat meer moeten wachten met het invoeren van letters (variabelen) tot de noodzaak zich voordoet. We kunnen natuurlijk ook zorgen voor die noodzaak door meer van dit soort instapproblemen te gebruiken.⁵⁾ De tijd die we vrij krijgen door niet in de brugklas te hoeven exerceren met letterrekenen en het steeds weer moeten uitleggen dat $(3x^3)^2$ iets anders is dan $3(x^3)^2$ kan benut worden voor het oog krijgen voor regelmaat (structuur) zowel bij getallen als bij meetkundige zaken.

Ad e Misschien zei dit meisje iets dat veel leerlingen dachten. Het was immers een extra'tje en zolang het dat was had zij toch maar de vragen met 'één gat' en een vraag met 'twee gaten' goed beantwoord. Bij dit groepje leerlingen maakte ik echter de fout om ze zelfstandig door te laten werken en niet tussentijds hun resultaten (vooral werkwijze) aan elkaar te laten vertellen.

Belangrijke opmerking van een l.b.o.-docent:

'Mijn leerlingen kunnen slecht verwoorden. Daarom liet ik ze eerst weinig zeggen en nog minder opschrijven. Dat hielp niet en daarom ben ik ze vaker gaan vragen om te vertellen hoe ze een opgave aanpakten. Daarna heb ik ze ook vaker gevraagd dat eens op te schrijven. Het lukt nog lang niet zo goed als ik graag zou zien, maar ze proberen het nu tenminste.'

Belangrijke opmerking uit een rapport van het South Notts Project:

'Eigen regels/taal maken geeft inzicht in onderliggende structuren en zodra dat inzicht bereikt is kan de leerling ook overstappen op een andere, meer gebruikelijke notatie.'

Moet Fibonacci nu met brugklassers?

Mijn antwoord zal na het voorgaande hopelijk duidelijk zijn. Het hoeft wat mij betreft niet, maar het kan wel. Doe het alleen niet als het zoveelste foefje of regelkje, maar wel als een mogelijkheid om de leerlingen te laten spelen, ontdekken en trots te zijn op hun ontdekkingen.

Noten

- 1 Euclides 57^e jrg. nr. 9, mei 1982.
- 2 De door mij gebruikte tekst is overgenomen van Roger Beeney van de Imberhorne School te East Grinstead.
- 3 Het zoeken en beschrijven van een regel is ingebouwd om de leerling tot reflectie te dwingen. Mede hierdoor gaat hij/zij zich oriënteren op de essentiële opgave-gegevens.
- 4 Nieuwe Wiskrant 1^e jrg. nr. 3, pag. 15-20.
- 5 Nieuwe Wiskrant 1^e jrg. nr. 4, pag. 7-10.

Gedachtenspinsel van een brugklasleerling

ARJAN HAKKERT

Arjan Hakkert heeft als hospitant een paar maanden in de brugklas gewerkt. Samen met twee andere studenten hebben we het lesgebeuren van Arjan geobserveerd. We bespraken wat was waargenomen en we overlegden met elkaar hoe een volgend optreden tot groter heil van het kind zou kunnen leiden. Arjan was soms niet tevreden. Hij vroeg zich af welk doel we wilden bereiken bij deze jonge kinderen? Wat willen ze eigenlijk leren? Wat begrijpen ze nu echt? Praten ze halfbegrepen dingen na? Hij heeft geprobeerd in de huid van een brugklasleerling te kruipen. Deze 'brugklasleerling' heeft toen het volgende verhaal geproduceerd:

Ik mag wel zeggen dat ik de lagere school, zeker wat betreft het vak rekenen, redelijk succesvol heb doorlopen. Optellen en aftrekken gingen bijzonder goed en vermenigvuldigen en delen deed ik beter dan de gemiddelde leerling. Het was dus niet verwonderlijk dat ik naar de brugklas van een lyceum gestuurd werd. Aldaar maakte ik kennis met het vak wiskunde. Dat was wel even wat anders dan rekenen, zeg. Al die x -en en y 's, en noem maar op. Maar ja, de leraar had liever dat wij i.p.v. 7, 8, 100 of 1 000 een x opschreven en die man bleef maar volhouden; dus op het laatst deed ik z'n zin maar.

Wat me laatst echter overkomen is, slaat toch wel alles!

Het blijkt, dat we de hele lagere schooltijd verkeerd opgeteld hebben. Het moet niet zijn $6 + 2$, maar eigenlijk, als je het netjes wilt zeggen, $+6 + 2$. Hadden we potverdorie al die zes jaar die plus vergeten. Gelukkig heeft het voor mij geen schadelijke gevolgen gehad, want ik zit nu maar mooi in deze brugklas.

De laatste paar weken is me duidelijk geworden, dat ik veel meer plussen ben vergeten. Wat blijkt n.l.: het is niet $6 - 4$, maar 'gewoon' $6 + -4$. Gelukkig vond de leraar dit ook erg moeilijk op zo'n manier, want hij kon het geeneens uit z'n hoofd uitrekenen. Elke keer als hij zo'n som voordoet moet-ie een getallenrechte tekenen of zoiets. Ik onthoud gewoon dat plus min weer min wordt en dat gaat veel sneller en het werkt altijd. Het leuke van de zaak is nu, dat door al die moeilijke rekenpartijen onze leraar zelfs niet meer één, twee, drie kan vermenigvuldigen. Vroeger betekende 2×3 gewoon, dat je twee keer drie moest nemen en dan zes kreeg. Tegenwoordig is 2×3 het volgende: teken een getallenkromme met je geodriehoek die je niet bij je hebt; als je daarin tweemaal de vector 3 tekent en achter elkaar legt, kom je bij zes uit.

Het gekke bij b.v. -2×3 is dat $-2 \times 3 = 3 \times -2$ (goed zeg). In mijn ogen is

dat gewoon 2×3 met een min er voor. Wat doet die leraar van ons? Hij tekent weer zo'n lijn met pijlen er boven, die nu niet naar rechts wijzen maar naar links. Dan moet je al die pijlen weer achter elkaar leggen en dan kom je ook in -6 uit. Dat wist ik natuurlijk al lang. Die leraar van ons komt volgens mij nog eens lelijk in de knoei met z'n vectoren annex pijlen.

En jawel hoor, wat ik reeds voorspelde geschiedde.

De som in het boek luidde -2×-3 . Ik wist al dat dit gewoon, 2×3 en $\text{min} \times \text{min} = \text{plus}$ dus, 6 opleverde. Vraagt die man of je dat met een getallen-rechte aan kon tonen, want hij wist het zelf ook niet meer. Onze hele klas heeft toen meegeholpen. Maar ja, wij kwamen er ook niet meer uit. We konden hem hier echt niet mee helpen.

Toen heeft hij maar de tafel van -3 op het bord geschreven, en toen wist-ie het opeens weer $-2 \times -3 = 6$.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Chris de Munter bespreekt in zijn dissertatie (zie boekbespreking in dit nummer) de volgende variaties op de transitieve eigenschap:

rechts vergelijkbaar: $x R y \wedge x R z \Rightarrow y R z$

links vergelijkbaar: $x R z \wedge y R z \Rightarrow x R y$

kringloop: $x R y \wedge y R z \Rightarrow z R x$

Deze relaties zijn de moeite van een onderzoek waard. Vandaar de volgende twee recreatieopgaven.

472. In een verzameling V geldt een rechts vergelijkbare relatie.

Welke structuren kan deze relatie in V teweegbrengen?

473. V is aftelbaar oneindig. Noem de elementen van V gemakshalve $0, 1, 2, 3, \dots$

De relatie R is een kringloop. Gegeven is dat

$0 R 1, 1 R 2, 2 R 3, \dots$

Welke structuren kan R in V teweegbrengen?

474. De som van een aantal gewichten is n . Alle gewichten zijn positieve gehele getallen. Kies ze zo, dat

a alle gewichten $1, 2, 3, \dots, n$ gevormd kunnen worden door een of meer gewichten op een schaal te zetten

b geen enkel van deze gewichten op meer dan één manier gevormd kan worden.

Men kan bijv. met $1, 2, 2, 3$ alle gewichten van 1 tot en met 8 vormen. Maar niet slechts op één manier, want $1 + 2 + 2 = 2 + 3$.

Gevraagd wordt bij elke n het minimale aantal gewichten te vinden, dat aan de gestelde twee eisen voldoet.

Aanbeveling. Probeer het eerst eens met resp. $n = 10, n = 34, n = 29$.

Oplossingen

469. Men heeft de getallen 1 tot en met 100 op een rij gezet. Laat deze rij zijn

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_{100} \quad (1)$$

Men kiest twee getallen, verwisselt die en doet dit zo vaak totdat de natuurlijke volgorde

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad 100 \quad (2)$$

bereikt is. Wat is het kleinste aantal verwisselingen dat hiertoe in elk geval toereikend is?

(1) is een permutatie van (2). Elke permutatie is een produkt van cyclische verwisselingen. Een invariant element beschouwen we als een cykel met 1 element.

Een verwisseling kan zijn

a een verwisseling van twee elementen uit dezelfde cykel;

b een verwisseling van twee elementen uit verschillende cyclen.

Geval a. In figuur 1 is links een cykel getekend. De elementen p en q worden verwisseld. Men ziet rechts het resultaat: de cykel is in twee cyclen uiteengevallen.



Figuur 1

Geval b. In figuur 2 zijn links twee cyclen getekend. De elementen p en q worden verwisseld. Men ziet rechts dat de cyclen daardoor tot één cykel versmolten worden.



Figuur 2

Wie nog twijfelt, kan aan een concreet voorbeeld zich overtuigen.

Geval a. De situatie bestond uit één cykel:

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 1$$

Verwissel 1 en 5 en er komt:

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 6 \quad 7 \quad 5$$

hetgeen uit twee cyclen bestaat.

Geval b. De situatie bestond uit twee cyclen:

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 5$$

Verwissel 1 en 5 en er komt:

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 1$$

dus nog maar één cykel.

De vereiste eindtoestand is de identieke permutatie. Deze bestaat uit 100 cyclen, elk met 1 element. Heeft men aanvankelijk p cyclen, dan zijn dus minimaal $100 - p$ verwisselingen vereist om de eindtoestand te bereiken.

Bestaat de begintoestand uit 1 cykel, dan zijn minimaal 99 verwisselingen nodig. Een voorbeeld van een begintoestand met 1 cykel is

2 3 4 ... 100 1

Het kleinste aantal verwisselingen waarin men in elk geval de eindtoestand kan bereiken, is dus 99.

470. De letters van

voorspoedig negentiendriëntachtig

zijn door elkaar geraakt. Door middel van een minimaal aantal verwisselingen moet de goede volgorde hersteld worden. Welk minimum is in elk mogelijk geval voldoende?

De letter e komt 6 keer voor, i en n 4 keer, o, g en t 3 keer, d en r 2 keer.

We vervangen de letterserie door de ietwat prozaïser, maar overzichtelijke cijfersuite

1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6 6
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23

7 7 8 8 9 10 11 12 13 14
24 25 26 27 28 29 30 31 32 33

Onder de cijfers staan de plaatsnummers. De cijfers zijn door elkaar geraakt en moeten op hun plaats teruggebracht worden, met dien verstande dat een cijfer 1 op één van de plaatsen 1, 2, 3, 4, 5, 6 terecht moet komen enz.

Breng alle cijfers 2 tot en met 14 op hun plaats. Dat kan in elk geval in 27 verwisselingen. De zes cijfers 1 komen dan vanzelf op hun plaats. In elk geval zijn 27 verwisselingen dus voldoende.

We construeren nu een cijferrij waarbij 27 verwisselingen minimaal noodzakelijk zijn.

2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6 6 7 7 8 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22

10 11 12 13 14 1 1 1 1 1 1
23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33

De goede stand wordt bereikt door een permutatie van deze 33 getallen. Deze permutatie is samengesteld uit cyclen. Een cykel krijgen we bijv. als volgt.

Zet het cijfer 2 met plaatsnummer 1 op een plaats waar het thuishoort, bijv. op plaats 10. Daar staat een 4. Zet deze 4 op een plaats waar hij thuishoort, bijv. op plaats 17. Daar staat een 6. Zet deze 6 op plaats 23. Daar staat een 10. Zet deze 10 op plaats 29. Daar staat een 1. Zet die op plaats 1. We noteren deze cykel:

1 - 10 - 17 - 23 - 29 - 1

Voor het uitvoeren van deze cyclische permutatie zijn 4 verwisselingen nodig.

Daarna voeren we bijv. de volgende cyclen uit:

2 - 9 - 16 - 22 - 28 - 2

3 - 8 - 14 - 20 - 27 - 33 - 3

4 - 7 - 13 - 19 - 25 - 31 - 4

5 - 12 - 18 - 24 - 30 - 5

6 - 11 - 15 - 21 - 26 - 32 - 6

Elke cykel begint op een van de plaatsen 1, 2, 3, 4, 5, 6, is stijgend en eindigt op één van de plaatsen 28, 29, 30, 31, 32, 33.

Het aantal cyclen bedraagt dus 6. Voor een cykel van n elementen zijn $n - 1$ verwisselingen nodig. Er zijn 33 elementen. We hebben dus $33 - 6 = 27$ verplaatsingen nodig.

Het antwoord op de vraag luidt dus: voor het herstellen van de heilwens zijn in elk geval minimaal 27 verwisselingen voldoende.

En daarmee wenst de puzzelredactie zijn lezers datgene wat de zetter in de war gestuurd heeft.

Boekbesprekingen

Chris de Munter, *Pregeordende verzamelingen en het wiskundig denken*, 'Eclectica', reeks monografieën door de Economische Hogeschool Sint-Aloysius, Brussel, 43-44, 1981, 146 blz. (dissertatie, 1979), 300 BF.

Centrale vraag voor de didactiek van de wiskunde is: hoe leert men wiskundig denken? De beantwoording van deze vraag zal afhangen van wat men bij het wiskundig denken centraal stelt. De auteur kiest voor het centraal stellen van pregeordende verzamelingen.

Een preorde is een relatie die transitief en reflexief is. Sommige preordes zijn van speciaal belang. Door aan een preorde de eis van symmetrie op te leggen, ontstaat de ekwivalentierelatie; door antisymmetrie te eisen ontstaat de orderelatie. De hiermee verbonden activiteiten zijn resp. classificeren en ordenen. Beide zijn van fundamenteel belang.

De orderelatie wordt nader geanalyseerd en verwantschap aangetoond tussen begrippen betreffende de ordening en taalkundige begrippen (zoals superlatieven). Het mathematische belang van preordes wordt bevestigd door de historie. Bij Cantor speelden de preordes een grote rol, zowel bij het aanbrengen van het begrip kardinaalgetal (ekwivalentierelatie) als bij de ordinaalgetallen (orderelatie). Ook de definitie van reële getallen volgens Dedekind berust op ordening.

Wie zo groot belang aan preordes hecht, zal ook proberen bij de wiskundige begripsvorming de preorde zoveel mogelijk een rol te laten spelen. Vandaar de propaganda voor de definitie van doorsnede en vereniging van twee verzamelingen als de grootste verzameling die in beide bevat is resp. de kleinste verzameling die beide omvat.

Ook een ander fundamenteel begrip kan met behulp van preordes ingevoerd worden: de topologie. We beginnen met in een partieel geordende eindige verzameling een element a te bepalen door de verzameling die bestaat uit dat element plus al zijn voorgangers resp. afstammelingen. Dit geeft een eerste aanzet voor het invoeren van open en gesloten verzamelingen. Nu gaan we over op de reële rechte met daarop de open en gesloten staarten naar links resp. naar rechts. Die naar links noemen we bijv. de open verzamelingen en die naar rechts de gesloten. Verenigingen van open verzamelingen zijn weer open, doorsneden van een eindig aantal open verzamelingen eveneens. Van hieruit komen we tot het algemene begrip topologie.

In een apart hoofdstuk worden verschillende didactische situaties besproken, waarbij het werk van Frédérique goede aanknopingspunten biedt. Ook bespreekt de schrijver nog enkele variaties op de transitieve eigenschap en toepassing daarvan om de situatie rond het conservatieprobleem van Piaget te verduidelijken (blz. 59-65). Ik moet bekennen dat ik hem hier slechts moeizaam volgen kon, maar de relaties mij boeiden. In de rubriek recreatie vindt u de neerslag hiervan.

P. G. J. Vredenduin

P. Hackl, *Testing the Constancy of Regression Models over Time*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1980. (Angewandte Statistik und Okonometrie; Heft 16) 132 blz., prijs onbekend.

Beschouw het volgende lineaire model $Y = X\beta + U$, waarbij U n -dimensionaal verdeeld, $EU = 0$ en de covariantie matrix van U is $\sigma^2 I$, X een $(n \times k)$ matrix en β een k dimensionale vektor. Er bestaat een uitgebreide literatuur over deze modellen.

In deze studie beschrijft de auteur statistische methoden of hypothesen te toetsen omtrent a) de parameter β verandert in de tijd (d.w.z. met n) of b) de varianties van de componenten van U veranderen in de tijd. De auteur geeft een opsomming van de in de literatuur bekende technieken. Verder geeft hij resultaten van simulaties van het onderscheidend vermogen van genoemde toetsen. Tenslotte geeft hij een toepassing uit de economie. Een nuttige studie voor toegepast statistici en econometristen.

J. L. Mijnheer

E. Harzheim, 'Einführung in die kombinatorische Topologie', Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1978, XVII + 328 p.

Het onderhavige boek is een inleiding in de algebraïsche topologie, ook wel (vooral in een vroegere fase van de ontwikkeling) aangeduid als kombinatorische topologie. De auteur kiest in de titel van zijn werk voor de laatstgenoemde term, omdat in een groot deel van zijn boek (m.n. het eerste tweederde deel) kombinatorische methoden een hoofdrol spelen.

In de theorie zoals die in het genoemde eerste tweederde deel van het boek (de hoofdstukken I t/m V) wordt ontwikkeld, staat de behandeling van de afbeeldingsgraad centraal. Deze wordt ingevoerd met behulp van elementair-kombinatorische middelen.

In hoofdstuk I wordt de theorie der simpliciale complexen in detail behandeld.

Hoofdstuk II geeft de grondbegrippen van de homotopietheorie.

In hoofdstuk III wordt dan de afbeeldingsgraad uitvoerig behandeld. Daarbij krijgt de axiomatisering (van Nagumo) van de afbeeldingsgraad ruime aandacht.

In hoofdstuk IV worden toepassingen van de afbeeldingsgraad gegeven. Men vindt er o.a. de stelling van Jordan-Brouwer-Alexander over de invariantie van het aantal wegcomponenten van het complement van een compacte verzameling in $\mathbb{R}^n$. En ook de stellingen betreffende de invariantie van open gebieden en de invariantie van de dimensie, en de dekpuntsstelling van Brouwer.

Hoofdstuk V handelt over S^n . Het 'omloopsgetal' $D(f)$ van een continue $f: S^n \rightarrow S^n$ wordt gedefinieerd d.m.v. de afbeeldingsgraad. Van de stelling van Hopf ($f_0, f_1: S^n \rightarrow S^n$ homotoop als en alleen als $D(f_0) = D(f_1)$) wordt alleen de gemakkelijke helft bewezen. De antipodenstelling van Borsuk en die van Ljusternik/Schnirelmann worden afgeleid. Aan de orde komen voorts nog enkele stellingen m.b.t. de voortzetbaarheid van continue functies met waarden in S^n .

Tot hier is in het boek het woord 'homologie' nog niet gevallen. Het laatste derde gedeelte brengt een inleiding in de homologietheorie.

Hoofdstuk VI behelst een korte beschrijving van de simplicialehomologietheorie. Het dient voornamelijk om enige meetkundige intuïtie voor homologietheorie bij te brengen. De 'invariantie van de homologiegroepen' (voor verschillende triangulaties van éénzelfde polyeder) wordt genoemd, maar uiteraard in dit kader niet aangetoond.

Hoofdstuk VII bevat een behandeling van (algebraïsche) ketencomplexen.

In hoofdstuk VIII tenslotte wordt de singuliere homologietheorie ontwikkeld. Aangetoond wordt dat aan de axioma's van Eilenberg-Steenrod is voldaan.

Tot de onderwerpen die in het boek niet aan de orde komen behoren o.m.: homotopiegroepen, cohomologietheorie.

Het boek is helder geschreven en de behandeling der diverse onderwerpen is zeer uitvoerig. Het is daarom zeer geschikt voor zelfstudie. Een bezwaar is daarbij overigens wel, dat geen opgaven zijn opgenomen.

M.A. Maurice

P. J. Brown, *Writing Interactive Compilers and Interpreters*, 265 blz., £ 9.75, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, Engeland.

'If you wish to implement an interactive language this book is aimed at you. It does not matter whether you are a hobbyist, a student, a professional systemsprogrammer, or even a combination of all three of these. Nor does it matter if your motive is commercial gain, satisfying academic criteria or the sheer enjoyment of making something. The principles and techniques for doing a good job are the same for everyone', aldus de eerste regels van het voorwoord tot het bovengenoemde boek. Aangezien uw recensent zich gedurende het afgelopen jaar intensief bezig gehouden heeft met de oplossing van problemen die zich voordoen bij het ontwerp en de realisatie (implementatie in de vaktaal van computer specialisten), van compilers en interpreters had hij wel enige verwachtingen over de inhoud van het boek. Om de lezer van deze recensie niet lang in het ongewisse te houden: het boek heeft niet aan mijn verwachtingen voldaan. Als steun bij een cursus compiler constructie is het nauwelijks aan te bevelen; misschien dat het als een eerste oriëntatie nog wel goede diensten zou kunnen bewijzen, maar veel verder dan een fragmentarisch inzicht in problemen en mogelijke oplossingen die zich bij interactieve compilers voordoen komt de lezer toch niet. In 43 korte hoofdstukken worden de meest uiteenlopende onderwerpen behandeld. Sommige zijn algemeen voor

compilers bijv. de omgekeerde Poolse notatie voor rekenkundige expressies en de voordelen daarvan bij evaluatie, andere zijn typisch voor interactieve compilers bijv. redactionele faciliteiten, 'editors'. Maar geen van de onderwerpen wordt uitgediept, hetgeen ook een gevolg is van het feit dat de auteur geen programmeertaal of ander formalisme introduceert in termen waarvan de definities gegeven worden. Wel geeft het boek een goede indruk van de grote variëteit aan technieken die bij compiler constructie een rol spelen: na bestudering weet men in ieder geval meer over stapels, wijzers, buffers, dictionnaires, opslag routines etc., en waar ze voor gebruikt worden. Maar voor het onderwijs in compiler constructie zou ik deze manier van behandeling niet kiezen.

A. Ollongren

K. Strebel, *Vorlesungen über Riemannsche Flächen*.

Een *Riemann-oppervlak* is een Hausdorff-ruimte, waarin ieder punt een omgeving heeft, homeomorf met een open stuk in het complexe vlak (zo'n homeomorfisme heet *kaart*) zó dat de overgang tussen de kaarten op conforme wijze geschiedt. Als men de laatste eis weglaat heeft men de definitie van een (topologisch) oppervlak.

In het eerste hoofdstuk komt de topologie van oppervlakken aan de orde. Er wordt bewezen dat men bij elk oppervlak X een enkelvoudig samenhangend oppervlak $\tilde{X}$ kan vinden dat een overdekking-ruimte is van X . Men noemt $\tilde{X}$ de universele overdekking. Men kan X dus bestuderen via zijn universele overdekking $\tilde{X}$ en de dektransformaties van $\tilde{X} \rightarrow X$. Als nu X in het bijzonder een Riemann-oppervlak is dan is zijn universele overdekking $\tilde{X}$ dat ook, de natuurlijke afbeelding $\tilde{X} \rightarrow X$ is holomorf evenals de dektransformaties. Deze feiten zijn in het tweede hoofdstuk te vinden.

Conclusie: men kan alle Riemann-oppervlakken classificeren door de volgende twee vragen op te lossen:

- 1 Wat zijn de enkelvoudig samenhangende Riemann-oppervlakken?
- 2 Welke groepen van holomorfe transformaties zijn mogelijk op een enkelvoudig samenhangend Riemann-oppervlak?

In dit boek komt alleen de eerste vraag aan bod. Het antwoord wordt in het vierde en laatste hoofdstuk gegeven:

Ieder enkelvoudige samenhangende Riemann-oppervlak is conform equivalent met één van de volgende drie Riemann-oppervlakken:

- a De Riemann-sfeer (het elliptische geval)
- b Het complexe vlak (parabolische geval)
- c De eenheidsschijf in het complexe vlak (hyperbolische geval).

Deze stelling die bekend staat als de *afbeeldingsstelling van Riemann* vormt het centrale resultaat in dit boek. Zij wordt bewezen door middel van explicite constructies door middel van harmonische functies. Vandaar dat deze in een eerder hoofdstuk behandeld worden.

Het boek is zonder veel voorkennis te lezen en uitstekend geschikt als een elementaire inleiding in de theorie van Riemann-oppervlakken. Het is helder geschreven, op enkele kleine uitzonderingen na: de voorbeelden van Riemann-oppervlakken zijn onvoldoende uitgewerkt (hoofdstuk 2) en de oplossing van het Dirichlet-probleem wordt nergens expliciet vermeld (hoofdstuk 3). Een groot voordeel is dat nergens abstracte middelen, zoals schoventheorie of cohomologietheorie gebruikt worden. Voor degenen die kennis willen maken met deze technieken en hun toepassingen voor Riemann-oppervlakken zou ik willen verwijzen naar het uitstekende boekje van O. Forster: 'Riemannsche Flächen', Heidelberg Taschenbücher, # 184, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1977).

Het zal duidelijk zijn dat ik het hier besproken boek van harte aan zou willen bevelen voor een eerste kennismaking met Riemann-oppervlakken.

dr. C. A. M. Peters

A. T. F. Hutt, *A relational data base management system*, Wiley, 1979, £ 8.50.

Een gegevensbank, ook wel databank of database geheten, bevat gegevens over een model van een stukje werkelijkheid zoals gegevens over te produceren goederen of belasting betalende personen. Zijn deze gegevens in de vorm van eenvoudige tabellen gegoten dan spreekt men van een relationele databank.

Een 'database management system' is een tamelijk omvangrijke verzameling van programma's die het de gebruikers en de beheerder van het systeem mogelijk maken de gegevens te gebruiken die in de databank staan opgeslagen.

Het onderhavige boek beschrijft één zo'n systeem, nl. RDMS dat op ICL computers beschikbaar is. De schrijver beoogt meer dan alleen een gebruiksaanwijzing; hij tracht in zijn boek ook het gehele proces van ontwerpen van een informatiesysteem te beschrijven en gebruikt zijn methode om ook zijn eigen systeem te beschrijven.

En passant geeft hij ook nog een inleiding in de theorie van databanksystemen. Voor een leek op dit gebied is het boek echter als introductie niet zo erg geschikt. Hij gebruikt diverse keren belangrijke termen (zoals integrity check, Third Normal Form, index, key) die pas veel later verklaard worden. Ook gebruikt hij het woord 'entity set' in plaats van het gebruikelijke woord 'relation'. Zijn uitleg van het belangrijke begrip 'dependency diagram' is uiterst warrig.

Kortom, als introductie in de databank wereld ongeschikt. Als beschrijving van een bestaand databanksysteem echter interessant.

R. P. van de Riet

H. Lüneburg, *Galoisfelder, Kreisteilungskörper und Schieberegisterfolgen*, Bibliographisches Institut, Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich, 1979, 143 p.

Dit boek geeft een inleiding in de algebra en meer in het bijzonder in de theorie van de lichamen. Er zijn natuurlijk vele leerboeken die deze – nu klassieke – theorie behandelen op een uitstekende wijze. De bedoeling van deze schrijver is echter niet om een systematische behandeling van deze materie te geven doch veelmeer om aan de hand van speciale, interessante, gevallen de lezer inzicht en smaak bij te brengen in dit deel van de algebra. Hij doet dit door eindige lichamen (galoisfelder) en lichamen die ontstaan door n -de machtséénheidswortels aan de rationale getallen te adjungeren (kreisteilungskörper) op de voorgrond te stellen. De schrijver geeft een nauwgezette behandeling van de theorie van deze lichamen en komt dan vaak op natuurlijke wijze tot algemenere problemen en resultaten; bijvoorbeeld, de vraag naar de existentie van een lichaam met p^n -elementen (p priemgetal, n natuurlijk getal) voert gemakkelijk tot de vraag naar de existentie van een splittingslichaam van een polynoom met coëfficiënten in een willekeurig lichaam.

Binnen het kader van dit kleine boekje komen vele interessante onderwerpen aan de orde. Bijvoorbeeld: de Eulerfunctie, cirkeldelingspolynomen, de stelling van Wedderburn (eindige lichamen zijn commutatief), eindige abelse groepen, een speciaal geval van een beroemde stelling van Dirichlet over priemgetallen in rekenkundige reeksen, de algebraïsche afsluiting van eindige lichamen, abelse getallenlichamen.

Teneinde de theorie dichter bij de toepassingen te brengen behandelt de schrijver in het laatste gedeelte van zijn boek zg. schrijfregisterrijen. Dit zijn zekere typen van rijen die recursief gedefinieerd worden en die van belang zijn o.a. in de coderingstheorie. Een voorbeeld van zo'n rij is de bekende rij van de Fibonacci-getallen $a_1 = a_0 = 1, a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$.

In een slotwoord geeft de schrijver literatuuraanwijzingen voor verdere studie, deze aanwijzingen zijn echter erg beknopt.

Al met al een zeer aardig boekje. De vereiste voorkennis is gering: middelbareschool wiskunde en enige lineaire algebra. Het boek is aan te bevelen voor studenten en leraren in de wiskunde en informatica.

J. P. Murte

Een 'circulant matrix' of 'circulant' is een matrix van de gedaante

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & c_n \\ c_n & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_2 & c_3 & \cdot & \cdot & \cdot & c_1 \end{pmatrix}, \text{ waarin de elementen } c_i (i = 1, 2, \cdot, \cdot, \cdot, n)$$

complexe getallen zijn. De schrijver van dit boek ontwikkelt de theorie over deze matrices met het doel een basis te verschaffen voor het gebruik ervan in o.a. fysica, waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, numerieke analyse, getaltheorie en meetkunde. Naar deze toepassingen wordt in hoofdzaak in de uitgebreide bibliografie (artikelen en boeken van meer dan 100 auteurs bevattend) verwezen. Het boek bevat zes hoofdstukken, waarvan de eerste twee een meetkundige inleiding en een verkenning in de leer der matrices bevatten. In hoofdstuk 3 wordt de theorie van de 'circulant matrices' ontwikkeld. De laatste drie hoofdstukken bevatten meetkundige toepassingen en een toespitsing op enkele bijzondere problemen (o.a. approximatieproblemen).

Het onderwerp wordt duidelijk behandeld; het boek biedt een goede basis om zich verder in deze materie te verdiepen. De typografische verzorging is in het algemeen goed (al zijn er enkele bladzijden waar de op elkaar volgende regels iets verder uit elkaar hadden kunnen worden gekozen). De figuren die de tekst begeleiden zijn duidelijk getekend. Aanbevolen voor hen die zich in de theorie der matrices willen verdiepen.

W. J. Claas Sr

H. Tietz, *Einführung in die Mathematik für Ingenieure*, 2. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1980. 228 + xp. Prijs DM 23,80 (Uni-Taschenbücher 970).

Onder 'Mathematik für Ingenieure' dient men te verstaan wat hier te lande vroeger op hogere technische scholen wel 'Hogere wiskunde' werd genoemd. Zij omvat de vectoralgebra, het differentiëren en integreren en toepassingen hiervan. Dit tweede deeltje bevat dan de toepassingen van hetgeen in het eerste deeltje staat en dat, behalve de inhoudsopgave, aan deze recensent onbekend is. Er zijn vier hoofdstukken, gevuld met de volgende onderwerpen: uiterste waarden, bepalingen van nulpunten (Newton), kromming en kromtemiddelpunt, numerieke en grafische integratie, meervoudige integratie; fourierreksen en machtreksen; eenvoudige en lineaire differentiaalvergelijkingen, substitutie van machtreksen; totale differentiaal, uiterste waarden van functies van meer variabelen, lijnintegralen, oppervlakteintegralen, integraalstellingen der vectoranalyse.

De stof is dus ook te onzent gebruikelijk en de presentatie ervan bestaat uit het aan het veronderstelde niveau van de lezer aangepaste aggregaat van bewijzen, plausibiliteitsverklaringen en verwijzingen naar andere boeken. De charme van dit deeltje ligt in de compositie, daar de schrijver in een uitgekiend patroon op weinig bladzijden veel weet te vertellen en als het ware tussen de regels door allerlei details aan de lezer meegeeft. Voor studenten met een beperkt wiskundeprogramma is het boekje een bruikbaar compendium, dat als leerboek gekozen zou kunnen worden door docenten die bereid zijn aan de summieri opgavenverzameling nog een en ander toe te voegen.

W. van der Meiden

Mededelingen

Examen Wiskunde L.O. 1983

Wie in 1983 wil deelnemen aan het examen voor de akte wiskunde l.o. dient zich vóór 15 februari 1983 aan te melden door storting of overschrijving van f65, — examengeld op postrekening 437399 ten name van de voorzitter van de examencommissie wiskunde l.o. te Almelo.

Op de girokaart moeten de naam van de kandidaat, zijn of haar geslacht, adres, postcode en woonplaats worden vermeld.

Het schriftelijk gedeelte van het examen zal plaatsvinden op 26 en 27 april en het mondeling gedeelte in de maand juli.

Aanmeldingen die na 15 februari binnenkomen, worden niet meer in behandeling genomen.

Mededeling van de groep Vrouwen & Wiskunde

Werkgroep 'Wiskunde op de middenschool'

Bij voldoende belangstelling willen we een werkgroep 'Wiskunde op de middenschool' starten, want:

- 1) De wiskunde op de middenschool staat ter discussie. Welke vernieuwingen zijn er nodig om het vak voor meisjes aantrekkelijker te maken?
- 2) Er wordt wel beweerd, dat meisjes beter tot hun recht komen, als ze niet met jongens samenwerken, maar met elkaar. Op de middenschool wordt bewust aan samenwerking, ook tussen jongens en meisjes, gewerkt. Hoe zijn daar nu de ervaringen?

Welke vrouwen willen hierover ervaringen uitwisselen en ideeën ontwikkelen? Bel of schrijf naar onderstaand adres.

Noor Blom, Rijkje Dekker, adres: Weteringschans 185^{IV}, 1017 XE Amsterdam, tel. thuis: 020-22 43 63, werk: 030-53 47 95

Rectificatie

Op de omslag van het examennummer (december) is abusievelijk vermeld 57e jaargang, 1981/1982.

Dit moet (uiteraard) zijn 58e jaargang, 1982/1983.

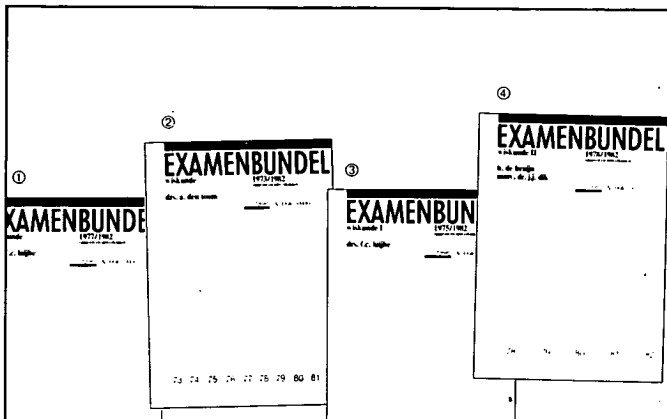
Onze welgemeende excuses voor deze fout.

de redactie

Leerlingen willen oefening. In de loop van het examenjaar als ze zich voorbereiden op schoolonderzoeken en na het laatste schoolonderzoek als ze zich voorbereiden op het examen. De ene leerling wil plotseling een serie oude examens doorwerken, de andere maakt het liefst systematisch iedere week een aantal opgaven. De een loopt makkelijk vast en heeft per opgave een duwtje nodig, de ander oefent moeiteloos maar wil wel steeds even weten of zijn werk in orde is.

Dankzij de uitwerkingen in onze EXAMENBUNDELS kunt u de *klassikale behandeling* van examens beperkt houden en hebt u meer tijd om in te gaan op de leerstof. Iedere leerling kan in zijn eigen tempo oefenen op de momenten dat hij zich het best concentreert.

De uitwerkingen maken ook een doeltreffender *individuele begeleiding* mogelijk. Zwakkere leerlingen die u extra laat oefenen kunnen hun werk zelf nakijken. Dat stelt ze in staat nauwkeurig aan te geven op welke punten ze nadere uitleg nodig hebben.



Bovendien scheppen de uitwerkingen de mogelijkheid tot *zelfstandige voorbereiding* op het examen in de periodes dat er geen lessen zijn: de vakanties en de laatste weken die voorafgaan aan het examen.

Onze uitgaven zijn verkrijgbaar bij de boekhandel. Wilt u inlichtingen, aarzelt u dan niet ons te bellen.

uitgeverij **ONDERWIJSPERS**

Hobbemakade 73
1071 XN Amsterdam
☎ 020-768026

- ① MAVO EXAMENBUNDEL WISKUNDE
1977 t/m 1982
f10,-
- ② HAVO EXAMENBUNDEL WISKUNDE
1973 t/m 1982
f12,50
- ③ VWO EXAMENBUNDEL WISKUNDE I
1975 t/m 1982
f12,50
- ④ VWO EXAMENBUNDEL WISKUNDE II
1978 t/m 1982
f12,50

INHOUD

A. J. Th. Maassen: Grafieken op het eindexamen, of: Grafieken in het onderwijs	161
H. Aalmoes: Het MAVO Projekt en wiskunde didactiek	178
H. J. Smid, A. Verweij: Huiswerk voor wiskunde (I)	180
E. de Moor: BOVO	185
H. Broekman: Fibonacci met brugklassers? ... Waarom eigenlijk niet?	187
A. Hakkert: Gedachtenspinsel van een brugklasleerling	191
Recreatie	192
Boekbesprekingen	195
Mededelingen	200

ADRESSEN VAN AUTEURS

- H. Aalmoes, Spreeuwenlaan 27, 1742 GA Schagen
- H. Broekman, P.D.I. R.U. Utrecht, Heidelberglaan 2, postbus 80-120, 3508 TC Utrecht
- A. Hakkert, Sprengenweg 1, 7451 PC Holten
- A. J. Th. Maassen, Bosboomstraat 20, 6813 KC Arnhem
- E. W. A. de Moor, Prinsengracht 701, 1017 JV Amsterdam
- H. J. Smid, Zeemanlaan 9, 2313 SV Leiden
- Mw. A. Verweij, Noord Rundersteeg 10, 2312 VN Leiden