

**Maandblad voor  
de didactiek  
van de wiskunde**

**Orgaan van  
de Nederlandse  
Vereniging van  
Wiskundeleraren**

**58e jaargang**

**1982/1983**

**no. 2**

**oktober**

**Wolters-Noordhoff**

# EUCLIDES

**Redactie:** Dr. F. Goffree - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto -  
P. E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders -  
Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) -  
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester) -  
B. Zwaneveld (hoofdreducteur)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

## Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie:  
F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.  
De contributie bedraagt f 45,- per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 30,-; contributie zonder Euclides f 25,-.  
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9', 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van  $1\frac{1}{2}$ .

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 7,- (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.  
Tel. 01720-620 78/620 79. Telex 33014.

# Goethe en de wiskunde

O. BOTTEMA

Dit jaar is het anderhalve eeuw geleden dat Goethe heenging – het feit wordt allereerges herdacht. Het is aanleiding hier aandacht te vragen voor de merkwaaide – men mag wel zeggen onverzoenlijke – houding van de grote man tegenover de wiskunde.

Goethe, de Olympiër, het universele genie, treft ons niet slechts door zijn veelzijdigheid als kunstenaar: hij heeft ook een intense belangstelling gehad voor de wetenschap der natuur, voor geologie, osteologie, botanie (zijn concept van de *Ur-Pflanze* is een vage voorloper van de evolutiegedachte) en vooral voor de natuurkunde, in het bijzonder die van licht en kleur. Zijn *Farbenlehre* beschouwt hij als een van zijn belangrijkste prestaties.

Soms in zijn letterkundig werk, maar vooral in brieven en gesprekken heeft Goethe zich herhaaldelijk – en meestal schamper – uitelaten over de wiskunde en de wiskundigen. De verspreide opmerkingen zijn verzameld in een grondig opstel van Paul Epstein<sup>1</sup>). Ook de vrij recente biografie van Friedenthal<sup>2</sup>) citeert meermalen meningen van Goethe over de mathesis. De hieronder volgende uitlatingen zijn voornamelijk aan deze twee bronnen ontleend.

In 1826 schrijft Goethe in een brief: 'Ich bin auf Wort, Sprache und Bild im eigentlichsten Sinne angewiesen und völlig unfähig durch Zahlen und Zeichen auf irgend eine Weise zu operieren'. Het is duidelijk dat voor iemand met deze karakterstructuur de wiskunde een ontoegankelijk gebied is. De klassieke uitspraken dat zij de taal is waarin de natuur tot ons spreekt en dat de natuurwetenschap zoveel echte wetenschap inhoudt als zij wiskunde bevat zijn aan hem niet besteed. Het schijnt dat Goethe ook niet heeft beseft dat hij leefde in een tijdperk van grote bloei der mathesis en dat op een paar uur afstand van Weimar de *princeps mathematicorum* woonde en werkte.

Men zou verwachten dat voor Goethe de wiskunde buiten het domein van zijn belangstelling bleef en dat hij er onverschillig en neutraal tegenover stond. En nu is het psychologisch interessant dat hij er in zijn lange leven voortdurend op terug komt door het maken van vaak denigrerende opmerkingen. Een herhaald element is daarbij, kort gezegd, dat een wiskundig betoog nooit meer dan een tautologie is. In één van zijn Maximen stelt hij de pregnante vraag 'Was ist an der Mathematik exakt als die Exaktheit?' en in 1811 citeert hij met instemming een uiting van Voltaire: 'J'ai toujours remarqué que la géométrie laisse l'esprit où elle le trouve'. Ook mist hij in onze wetenschap elk ethisch element: 'Was hat denn der Mathematiker für ein Verhältnis zum Gewissen?'. 'Die Mathematik vermag

kein Vorurteil wegzuheben (...), nichts von allem Sittlichen vermag sie'. Accoord, zouden wij kunnen zeggen, maar waarom moet de taal der wiskunde als 'Hexengeschwirre seiner Formeln' beschreven worden? Onvriendelijk (in tweeërlei opzicht) is het Aperçu: 'Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anders'. Of elders: 'Mit Philologen und Mathematikern ist kein heiteres Verhältnis zu gewinnen', en ook 'Die Mathematiker sind närrische Kerls und sind so weit entfernt, auch nur zu ahnden, worauf es ankommt'.

Een zekere verklaring van Goethe's irritatie ten aanzien van de wiskunde wordt algemeen gezocht in zijn teleurstelling over de afwijzende houding van de physici tegenover zijn *Farbenlehre* en de daar aan ten grondslag liggende afkeer van een analytische of mathematische gedachtengang in de wetenschap der natuur. Zijn *bête noire* – door hem bij voorkeur met 'Bal Isaak' aangeduid – is de grote figuur die ons een eeuw tevoren de nieuwe principes der natuurphilosophie had geschonken en die in de volgende geestige boutade (uit een gesprek met Eckermann) met name wordt genoemd. 'Um Epoche in der Welt zu machen, dazu gehören bekanntlich zwei Dinge: erstens dasz man ein guter Kopf sei und zweitens dasz man eine grosze Erbschaft tue. Napolen erbt die französische Revolution, Friedrich der Grosze den Schlesischen Krieg, Luther die Finsternis der Pfaffen und mir ist der Irrtum der Newtonischen Lehre zuteil geworden'. En in een brief betreurt hij dat een bepaalde natuurkundige uit zijn tijd 'sich noch nicht von den schmähhlichsten aller Taschenspielereien, dem Newtonischen Spektrum, habe retten können'.

Goethe's houding tegenover de toepassing der wiskunde in de natuurwetenschap is weinig consequent. Als men hem zegt dat hij bij zijn experimenten met spiegels en lenzen er niet zonder zal kunnen, is het antwoord: 'die Mathematik hat in der Physik nicht zu suchen'. Maar elders geeft hij toe dat het gebruik geoorloofd is als het om zuiver meetkundige zaken gaat, zoals naar zijn mening in de geometrische optica en in de mechanica.

De grote figuur van Goethe kan ons nader komen als wij nog eens ervaren dat ook hem menselijke zwakheden, ijdelheid, onredelijkheid, stijfhoofdigheid niet vreemd waren. Hoe hij dacht, waarde lezer, over u en mij kan blijken uit een passage in *Wilhelm Meisters Wanderjahre* waar van iemand gezegd wordt (ik zal het maar vertalen): hij is wiskundige en dus halsstarrig.

## Noten

<sup>1)</sup> Paul Epstein, *Goethe und die Mathematik*, Jahrbuch der Goethe-Gesellschaft, 10 (1924), 76-102. (Met dank aan het Goethe-Institut en het Duits Seminarium der Gemeentelijke Universiteit, te Amsterdam). Over de wiskundige Epstein (1871-1939) zie Carl Ludwig Siegel, *Gesammelte Abhandlungen*, Band 3, 1966, 464-470.

<sup>2)</sup> Richard Friedentahl, *Goethe, Sein Leben und seine Zeit* (1963).

# Repeterende decimale breuken

FRANK LAFORCE, PIET VREDENDUIN

## 1 Inleiding

In dit artikel willen we eigenschappen opsporen van zuiver repeterende decimale breuken.

Een voorbeeld van een zuiver repeterende decimale breuk is  $\frac{1}{7} = 0,142857 \dots$

De kortste repeterende cijferrij (hier 142857) noemen we de *periode*.

Het aantal cijfers van de periode (hier 6) noemen we de *lengte van de periode*.

## 2 Welke breuken hebben een zuiver repeterende decimale schrijfwijze?

Onderstel  $\frac{a}{b}$  is een onvereenvoudigbare breuk met  $a < b$ . Er zijn drie mogelijkheden.

a De decimale schrijfwijze van  $\frac{a}{b}$  breekt af,  $b$  bevat geen andere priemfactoren dan 2 en 5.

b De decimale schrijfwijze van  $\frac{a}{b}$  repeteert zuiver. Dan geldt

$$\frac{a}{b} = 0, p_1 p_2 \dots p_n \dots \Rightarrow (10^n - 1) \frac{a}{b} = p_1 p_2 \dots p_n \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{10^n - 1}$$

Nu is  $b$  een deler van  $10^n - 1$  en bevat  $b$  dus geen enkele factor 2 of 5.

c De decimale schrijfwijze van  $\frac{a}{b}$  is gemengd repeterend. Aan de hand van een voorbeeld laten we zien, dat  $b$  dan ten minste één factor 2 of 5 bevat.

Onderstel  $\frac{a}{b} = 0,27385385 \dots$

Dan is

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{10^2} \left( 27 + \frac{385}{10^3 - 1} \right) = \frac{1}{10^2} \frac{27000 - 27 + 385}{10^3 - 1}$$

Omdat  $27000 - 27 + 385$  niet deelbaar is door  $10^2$ , bevat  $b$  ten minste één factor 2 of 5.

Het is denkbaar dat door keuze van een ander voorbeeld de teller wel deelbaar is door  $10^2$ . Dit is het geval als we 385 vervangen door een getal dat op 27 eindigt, bijv. door 327. Dan is echter

$$\frac{a}{b} = 0,27327327 \dots$$

en heeft  $\frac{a}{b}$  dus een zuiver repeterende decimale schrijfwijze, in strijd met de gemaakte onderstelling.

Het algemene bewijs is analoog.

Uit hetgeen onder a, b en c gevonden is volgt:

als  $b$  geen enkele factor 2 of 5 bevat, dan is de decimale schrijfwijze van  $\frac{a}{b}$  ( $a < b$ ) zuiver repeterend.

De zuiver repeterende breuken zijn dus de breuken die, onvereenvoudigbaar geschreven, een noemer hebben die geen enkele factor 2 of 5 bevat.

### 3 Enkele stellingen

Onderstel  $\frac{a}{b}$  is onvereenvoudigbaar en zuiver repeterend.

In 2b is een implicatie afgeleid. Men ziet gemakkelijk dat deze implicatie door een ekwivalentie vervangen mag worden. Dus dat

$$\frac{a}{b} = 0, p_1 p_2 \dots p_n \Leftrightarrow (10^n - 1) \frac{a}{b} = p_1 p_2 \dots p_n \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{10^n - 1}$$

Hieruit volgt:

er repeteren  $n$  cijfers  $\Leftrightarrow b$  is deler van  $10^n - 1$ .

De periodelengte van  $\frac{a}{b}$  is het minimaal aantal repeterende cijfers.

Waarmee is bewezen:

**Stelling 1.** De periodelengte van  $\frac{a}{b}$  (onvereenvoudigbaar) is de kleinste  $n$  waarvoor geldt:  $b$  is deler van  $10^n - 1$ .

Tevens zien we:

**Stelling 2.** De periodelengte van  $\frac{a}{b}$  (onvereenvoudigbaar) is onafhankelijk van  $a$ .

**Stelling 3.** Als  $c$  deler is van  $b$ , dan is de periodelengte van  $\frac{1}{c}$  deler van de periodelengte van  $\frac{1}{b}$ .

**Bewijs.** Onderstel de periodelengte van  $\frac{1}{b}$  is  $n$ . Dan is  $b$  deler van  $10^n - 1$ . Omdat  $c$  deler van  $b$  is, is  $c$  dan ook deler van  $10^n - 1$ . Dan kan  $\frac{1}{c}$  geschreven worden als

decimale breuk met  $n$  repeterende cijfers. En dus is de periodelengte van  $\frac{1}{c}$  deler van  $n$ .

4 Het geval  $\frac{a}{p}$  met  $p$  priem,  $p \neq 2$ ,  $p \neq 5$

Bij wijze van voorbeeld kiezen we  $p = 7$  en  $p = 13$ .

$p = 7$ . Staartdeling geeft

$$\begin{array}{r} 7/1 \quad \backslash 0,142857 \dots \\ \rightarrow \frac{7}{3} \\ \underline{28} \\ 14 \\ \underline{6} \\ 56 \\ \underline{4} \\ 35 \\ \underline{5} \\ 49 \\ \underline{1} \end{array}$$

Dus:  $\frac{1}{7} = 0,142857 \dots$

Als we  $\frac{3}{7}$  decimaal willen schrijven, beginnen we in de staart twee regels lager, bij het pijltje. We krijgen dan

$$\frac{3}{7} = 0,428571 \dots$$

Om  $\frac{2}{7}$  decimaal te schrijven beginnen we weer twee regels lager. We krijgen

$$\frac{2}{7} = 0,285714 \dots$$

En verder

$$\frac{6}{7} = 0,857142 \dots$$

$$\frac{4}{7} = 0,571428 \dots$$

$$\frac{5}{7} = 0,714285 \dots$$

*De cijfers van de periode worden hierbij cyclisch gepermuteerd.*

$p = 13$ . De staartdeling wordt

$$\begin{array}{r} 13/1 \quad \backslash 0,076923 \dots \\ \underline{0} \\ 10 \\ \underline{91} \\ 78 \\ \underline{12} \\ 117 \\ \underline{3} \\ 26 \\ \underline{4} \\ 39 \\ \underline{1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 13/2 \quad \backslash 0,153846 \dots \\ \underline{13} \\ 65 \\ \underline{5} \\ 39 \\ \underline{11} \\ 104 \\ \underline{6} \\ 52 \\ \underline{8} \\ 78 \\ \underline{2} \end{array}$$

Links vinden we

$$\frac{10}{13} = 0,769230 \dots, \frac{9}{13} = 0,692307 \dots, \text{ enz.}$$

Links hebben we nog niet gekregen de decimale schrijfwijze van  $\frac{2}{13}$ .

Die staat rechts. Daar vinden we

$$\frac{2}{13} = 0,153846 \dots, \frac{7}{13} = 0,538461 \dots, \text{ enz.}$$

Dus, conform stelling 2, weer 6 breuken met noemer 13. In totaal zijn er 12 breuken met noemer 13. Die hebben we nu alle 12 gehad.

We krijgen telkens 6 breuken met noemer 13, totdat we ze alle 12 gehad hebben. De lengte van de periode (6) is dus een deler van het aantal breuken (13 - 1).

Algemeen vinden we zo:

*als  $p$  priem is en niet gelijk aan 2 of 5, dan is de lengte van de periode van  $\frac{a}{p}$  een deler van  $p - 1$ .*

5 Het geval  $\frac{1}{pq}$  met  $p$  en  $q$  priem en niet deelbaar door 2 of 5 en  $p \neq q$

*Als de periodelengten van  $\frac{1}{p}$  en  $\frac{1}{q}$  resp.  $n_1$  en  $n_2$  zijn, dan is de periodelengte van  $\frac{1}{pq}$  gelijk aan het kgv van  $n_1$  en  $n_2$ .*

We bewijzen dit aan de hand van een voorbeeld.

Kies  $p = 19$  en  $q = 31$ . Dan is  $n_1 = 18$  en  $n_2 = 15$ .  $p$  en  $q$  zijn delers van  $pq$ .

Dus zijn de periodelengten van  $\frac{1}{p}$  en van  $\frac{1}{q}$  delers van de periodelengte van  $\frac{1}{pq}$  (stelling 3).

De periodelengte van  $\frac{1}{19 \cdot 31}$  is dus een veelvoud van 18 en van 15, dus van hun kgv 90.

Zowel van  $\frac{1}{19}$  als van  $\frac{1}{31}$  repeteren er 90 cijfers. Dus repeteren er ook 90 cijfers van

$$\frac{1}{19} - \frac{1}{31} = \frac{31 - 19}{19 \cdot 31}.$$

Deze breuk is onvereenvoudigbaar. Volgens stelling 2

repeteren er dan ook 90 cijfers van  $\frac{1}{19 \cdot 31}$ . De periodelengte van  $\frac{1}{19 \cdot 31}$  is dus een deler van 90.

Uit deze twee resultaten volgt: de periodelengte van  $\frac{1}{19 \cdot 31}$  is gelijk aan 90.

Dit resultaat kan gegeneraliseerd worden voor breuken met als noemer het produkt van een willekeurig aantal verschillende priemfactoren die niet gelijk aan 2 of 5 zijn. Het bewijs geschiedt met volledige inductie.

6 Het geval  $\frac{1}{p^2}$  met  $p$  priem en niet gelijk aan 2 of 5

Als voorbeeld nemen we  $p^2 = 13^2$ .

We weten dat  $\frac{1}{13} = 0,076923 \dots$



We brengen in herinnering dat 13 deler is van  $10^6 - 1$ , dus dat  $10^6 \equiv 1 \pmod{13}$ .  
 We delen 076923 ... door 13.  
 We krijgen 005917 rest 2.  
 We delen verder. Nu 13 op 2076923.  
 Dit geeft 159763 rest 4.  
 We delen verder. Nu 13 op 4076923.  
 Dit geeft 313609 rest 6.  
 Daarna delen we 13 op 6076923. We krijgen als rest 8.  
 Zo doorgaande krijgen we als rest resp. 10, 12, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 0.  
 Vanwaar deze regelmaat?  
 Deling van 13 op 076923 geeft als rest 2.  
 Daarna delen we 13 op 2076923, dus op  $076923 + 2 \cdot 10^6$ .  
 We weten dat  $10^6 \equiv 1 \pmod{13}$ .  
 Dus is  $2 \cdot 10^6 \equiv 2 \pmod{13}$ .  
 De rest wordt dus 2 groter. Dit proces herhaalt zich. We krijgen als resten de veelvouden van 2. Omdat 13 priem is, is het 13e veelvoud het eerste dat gelijk is aan 0 mod 13.

De lengte van de periode van  $\frac{1}{13}$  is 6. De lengte van de periode van  $\frac{1}{13^2}$  is dus  $13 \cdot 6$ .

Nu algemeen. Onderstel dat de periodelengte van  $\frac{1}{p}$  ( $p$  priem) gelijk is aan  $n$ . Dan is  $\frac{1}{p} = 0, P \dots$  waarin  $P$  uit  $n$  cijfers bestaat.

We delen  $P$  door  $p$ . De rest van  $P$  bij deling door  $p$  noemen we  $r$ . Als  $r \neq 0$ , zoals in het bovenstaande voorbeeld, dan is de periodelengte van  $\frac{1}{p^2}$  gelijk aan  $pn$ .

Het kan echter zijn dat  $r = 0$ . Dan is de periodelengte van  $\frac{1}{p^2}$  dezelfde als die van  $\frac{1}{p}$ , dus weer  $n$ .

Wanneer is  $r = 0$ ?

$$P = \frac{10^n - 1}{p}$$

Dus is

$$r = 0 \Leftrightarrow P \text{ is deelbaar door } p \Leftrightarrow 10^n - 1 \text{ is deelbaar door } p^2.$$

We hebben zo gevonden:

*Als de periodelengte van  $\frac{1}{p}$  gelijk is aan  $n$ , dan is de periodelengte van  $\frac{1}{p^2}$  gelijk aan  $pn$  of aan  $n$ . Dit laatste is het geval als  $10^n - 1$  deelbaar is door  $p^2$ .*

7 Het geval  $\frac{1}{p^i}$  met  $p$  priem en niet gelijk aan 2 of 5

We nemen eerst  $i = 3$ .

Bij wijze van voorbeeld kiezen we weer  $p = 13$ .

We weten al dat de periodelengte van  $\frac{1}{13^2}$  gelijk is aan  $13 \cdot 6$ .

Dus is

$\frac{1}{13^2} = 0, P \dots$  waarin  $P$  uit 78 cijfers bestaat.

We delen  $P$  door 13. Ons interesseert weer de rest  $r$ . Als  $r \neq 0$ , dan is de periodelengte van  $\frac{1}{13^3}$  gelijk aan  $13 \cdot 78$ . Als  $r = 0$ , dan is de periodelengte van  $\frac{1}{13^3}$  gelijk aan die van  $\frac{1}{13^2}$ , dus aan 78.

Wanneer is  $r = 0$ ?

$$P = \frac{10^{78} - 1}{13^2}$$

Dus is

$r = 0 \Leftrightarrow P$  is deelbaar door 13  $\Leftrightarrow 10^{78} - 1$  is deelbaar door  $13^3$ .<sup>1)</sup>)

Algemeen

Als de periodelengte van  $\frac{1}{p^2}$  gelijk is aan  $n$ , dan is de periodelengte van  $\frac{1}{p^3}$  gelijk aan  $pn$  of aan  $n$ . Dit laatste is het geval als  $10^n - 1$  deelbaar is door  $p^2$ .

Hieruit volgt:

Als de periodelengte van  $\frac{1}{p}$  gelijk is aan  $n$ , dan is de periodelengte van  $\frac{1}{p^3}$  gelijk aan  $p^2n$ ,  $pn$  of  $n$ .

Meer algemeen is de periodelengte van  $\frac{1}{p^i}$  dan gelijk aan  $p^{i'}n$  waarin  $i' \leq i - 1$ .

We bewijzen dit met volledige inductie.

Opmerking.  $\frac{1}{3}$  en  $\frac{1}{3^2}$  hebben beide de periodelengte 1.

$\frac{1}{487}$  en  $\frac{1}{487^2}$  hebben beide de periodelengte 486.

Dit zijn de enige priemgetallen kleiner dan 13000 waarvoor  $\frac{1}{p}$  en  $\frac{1}{p^2}$  dezelfde periodelengte hebben. Priemgetallen groter dan 13000 met deze eigenschap zijn ons niet bekend.

Evenmin kent men priemgetallen waarvoor  $\frac{1}{p}$  en  $\frac{1}{p^3}$  dezelfde periodelengte hebben.

<sup>1)</sup> In feite is hier  $r \neq 0$  en is de periodelengte van  $\frac{1}{13^3}$  dus  $6 \cdot 13^2$ .

## 8 Het algemene geval

Wat is de periodelengte van  $\frac{1}{p^i q^j}$  met  $p$  en  $q$  priem en niet gelijk aan 2 of 5 en  $p \neq q$ ?

Onderstel de periodelengte van  $\frac{1}{p^i}$  is gelijk aan  $n_1$  en die van  $\frac{1}{q^j}$  gelijk aan  $n_2$ .

Dan is de periodelengte van  $\frac{1}{p^i q^j}$  gelijk aan het kgv van  $n_1$  en  $n_2$ .

Het bewijs geschiedt op dezelfde manier als in 5.

Noem verder de periodelengten van  $\frac{1}{p}$  en  $\frac{1}{q}$  resp.  $n_p$  en  $n_q$ . Dan is

de periodelengte van  $\frac{1}{p^i} = p^{i'} n_p$  met  $i' \leq i - 1$

de periodelengte van  $\frac{1}{q^j} = q^{j'} n_q$  met  $j' \leq j - 1$

en dus

de periodelengte van  $\frac{1}{p^i q^j} = p^{i'} q^{j'} \cdot \text{kgv}(n_p, n_q)$ .

Met meer factoren krijgt men een analoge formule.

*Toepassing.* Bereken de periodelengte van  $\frac{1}{30429}$ .

$$30429 = 3^3 \cdot 7^2 \cdot 23$$

De periodelengte van

$$\frac{1}{3} \text{ is } 1$$

$$\frac{1}{3^2} \text{ is } 1 \quad (3^2 \text{ is deler van } 10^1 - 1)$$

$$\frac{1}{3^3} \text{ is } 3 \cdot 1 \quad (3^3 \text{ is geen deler van } 10^1 - 1)$$

$$\frac{1}{7} \text{ is } 6$$

$$\frac{1}{7^2} \text{ is } 7 \cdot 6 \quad (7^2 \text{ is geen deler van } 10^6 - 1)$$

$$\frac{1}{23} \text{ is } 22.$$

De periodelengte van  $\frac{1}{30429}$  is dan het kgv van 3, 42 en 22, dus 462.

## 9 Tabellen

Hieronder een tabel met de periodelengte van  $\frac{1}{p}$  ( $p$  priem).

| $p$ | $n$ | $p$ | $n$ | $p$ | $n$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 3   | 1   | 97  | 96  | 211 | 30  |
| 7   | 6   | 101 | 4   | 223 | 222 |
| 11  | 2   | 103 | 34  | 227 | 113 |
| 13  | 6   | 107 | 53  | 229 | 228 |
| 17  | 16  | 109 | 108 | 233 | 232 |
| 19  | 18  | 113 | 112 | 239 | 7   |
| 23  | 22  | 127 | 42  | 241 | 30  |
| 29  | 28  | 131 | 130 | 251 | 50  |
| 31  | 15  | 137 | 8   | 257 | 256 |
| 37  | 3   | 139 | 46  | 263 | 262 |
| 41  | 5   | 149 | 148 | 269 | 268 |
| 43  | 21  | 151 | 75  | 271 | 5   |
| 47  | 46  | 157 | 78  | 277 | 69  |
| 53  | 13  | 163 | 81  | 281 | 28  |
| 59  | 58  | 167 | 166 | 283 | 141 |
| 61  | 60  | 173 | 86  | 293 | 146 |
| 67  | 33  | 179 | 178 | 307 | 153 |
| 71  | 35  | 181 | 180 | 311 | 155 |
| 73  | 8   | 191 | 95  | 313 | 312 |
| 79  | 13  | 193 | 192 | 317 | 79  |
| 83  | 41  | 197 | 98  | 331 | 110 |
| 89  | 44  | 199 | 99  | 337 | 336 |

Omgekeerd kan men vragen: van welke  $p$  ( $p$  priem) is de periodelengte van  $\frac{1}{p}$  gelijk aan  $n$ ?

Dat zijn de priemdelers van  $10^n - 1$  die deler zijn van geen enkele  $10^m - 1$  met  $m < n$ .

Men vindt ze in onderstaande tabel.

| $n$ | $p$     | $n$ | $p$       | $n$ | $p$               |
|-----|---------|-----|-----------|-----|-------------------|
| 1   | 3       | 6   | 7, 13     | 11  | 21649, 513239     |
| 2   | 11      | 7   | 239, 4649 | 12  | 9901              |
| 3   | 37      | 8   | 73, 137   | 13  | 53, 79, 265371653 |
| 4   | 101     | 9   | 333667    | 14  | 909091            |
| 5   | 41, 271 | 10  | 9091      | 15  | 2906161           |

10  $p$  is priem en  $n = 2k$

$$\frac{1}{7} = 0,142857 \dots$$

Hierin is  $1 + 8 = 4 + 5 = 2 + 7 = 9$ .

$$\frac{1}{13} = 0,076923 \dots$$

Hierin is  $0 + 9 = 7 + 2 = 6 + 3 = 9$ .

Wat steekt hierachter?

$$\frac{1}{7}(10^6 - 1) = 142857$$

$$\frac{1}{7}(10^3 - 1)(10^3 + 1) = 142857$$

De periodelengte van  $\frac{1}{7}$  is 6 en dus is 7 geen deler van  $10^3 - 1$  (stelling 1). Omdat

7 priem is, is 7 dan een deler van  $10^3 + 1$ .

Nu is

$$10^3 \cdot \frac{1}{7} = 142,857142 \dots$$

$$1 \cdot \frac{1}{7} = 0,142857 \dots$$

---

$$(10^3 + 1) \frac{1}{7} = \text{een natuurlijk getal}$$

en dus is

$0,857142 \dots + 0,142857 \dots$  een natuurlijk getal,

waaruit volgt dat

$$142857 + 857142 = 999999$$

en dus

$$1 + 8 = 4 + 5 = 2 + 7 = 9.$$

Algemeen bewijzen we op deze manier:

als  $p$  priem is en  $\frac{1}{p} = 0, p_1 p_2 \dots p_k p_{k+1} p_{k+2} \dots p_{2k}$ , dan is

$$p_1 + p_{k+1} = p_2 + p_{k+2} = \dots = p_k + p_{2k} = 9$$

11  $p$  is priem en  $n = 3k$

We gaan weer uit van

$$\frac{1}{7} = 0,142857 \dots$$

$$\frac{1}{7}(10^6 - 1) = 142857$$

Nu maken we er gebruik van dat 6 een 3-voud is.

$$\frac{1}{7}(10^2 - 1)(10^4 + 10^2 + 1) = 142857$$

Omdat 7 priem is en geen deler van  $10^2 - 1$ , is 7 deler van  $10^4 + 10^2 + 1$ .

$$10^4 \cdot \frac{1}{7} = 1428,571428 \dots$$

$$10^2 \cdot \frac{1}{7} = 14,285714 \dots$$

$$1 \cdot \frac{1}{7} = 0,142857 \dots$$


---

$$(10^4 + 10^2 + 1) \frac{1}{7} = \text{een natuurlijk getal}$$

en dus is

$$0,571428 \dots + 0,285714 \dots + 0,142857 \dots \text{ een natuurlijk getal.}$$

Hieruit volgt dat

$$571428 + 285714 + 142857 = 999999 \text{ of } 1999998 (2 \cdot 999999)$$

Hier blijkbaar 999999.

Dus is

$$57 + 14 + 28 = 99$$

We doen het nog eens, maar nu met  $\frac{2}{7}$ .

$$\frac{2}{7} = 0,428571 \dots$$

Nu vinden we

$$714285 + 857142 + 428571 = 1999998$$

en dus

$$71 + 85 + 42 = 198 (= 2 \cdot 99)$$

Algemeen:

als  $p$  priem is en

$$\frac{a}{p} = 0, p_1 p_2 \dots p_k p_{k+1} p_{k+2} \dots p_{2k} p_{2k+1} p_{2k+2} \dots p_{3k},$$

dan is

$$\begin{aligned} p_1 p_2 \dots p_k + p_{k+1} p_{k+2} \dots p_{2k} + p_{2k+1} p_{2k+2} \dots p_{3k} = \\ = i \cdot 99 \dots 9 \quad (i = 1 \vee i = 2) \\ (k \text{ 9's}) \end{aligned}$$

De resultaten die in 10 en 11 verkregen zijn, kunnen makkelijk gegeneraliseerd worden tot  $p$  priem en  $n = jk$ .

# Differentiëren zonder de Middelwaardestelling

JAN VAN DE CRAATS

Het is verrassend en onthutsend te ontdekken dat platgetreden paden die men al jaren pleegt te bewandelen eigenlijk omwegen zijn omdat een andere, directe weg rechtstreeks naar het doel leidt. Een artikeltje van Ralph P. Boas [3] onder de titel *Who Needs Those Mean-Value Theorems, Anyway?* zorgde voor zo'n ontdekking.

Het gaat over de grondslagen van de differentiaalrekening. Uit de definitie van afgeleide volgen onmiddellijk enige eigenschappen van afgeleide functies:

*Stelling 1*: als een functie op een interval differentieerbaar en monotoon stijgend (resp. dalend) is, dan is de afgeleide functie  $\geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ) in elk punt van dat interval.

*Stelling 2*: als een differentieerbare functie in een bepaald punt een lokaal maximum of minimum aanneemt, is de afgeleide in dat punt nul.

Hoe men het begrip afgeleide ook introduceert en illustreert, via koorden en raaklijnen, via gemiddelde en momentane snelheid van een rechtlijnig bewegend punt, of op welke andere wijze ook, altijd zijn deze eigenschappen ook intuïtief onmiddellijk duidelijk en vanzelfsprekend. En, zoals gezegd, bewijzen volgen direct uit de definitie.

Bij de toepassingen van de differentiaalrekening gaat het er echter meestal om, omgekeerd, uit het gedrag van de afgeleide functie informatie te halen omtrent de oorspronkelijke functie. Zo geeft een tekenoverzicht van de afgeleide functie de plaats en de aard van de extremen van de oorspronkelijke functie. De cruciale stelling hierbij is:

*Stelling 3*: als van een differentieerbare functie de afgeleide functie op een interval positief (resp. negatief) is, dan is de oorspronkelijke functie op dat interval monotoon stijgend (resp. dalend).

Deze stelling is intuïtief gezien nauwelijks minder vanzelfsprekend dan de vorige twee stellingen. Als bijvoorbeeld een rechtlijnig bewegend punt gedurende een bepaald tijdsinterval steeds een positieve snelheid heeft in een bepaalde richting, dan zal het zich natuurlijk ook in die richting moeten bewegen.

Maar hoe verloopt een bewijs? Traditioneel beroept men zich op de *Middelwaardestelling*: is  $f$  differentieerbaar op een interval, en zijn  $a$  en  $b$  punten van dat interval, dan is er een punt  $c$  tussen  $a$  en  $b$  waarvoor geldt dat

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \quad (1)$$

Als dan op het gehele interval bijvoorbeeld geldt dat  $f'$  positief is, volgt uit  $b > a$  ook steeds dat  $f(b) > f(a)$ , dus dan is  $f$  monotoon stijgend op dat interval. Een volledig bewijs van de Middelwaardstelling is echter geen sinecure. Eerst brengt men de stelling meestal terug tot de *Stelling van Rolle*; die stelling wordt bewezen met behulp van het feit dat een continue functie op een gesloten en begrensde interval een maximum en een minimum aanneemt; dat laatste bewijst men met behulp van de *Stelling van Heine, Borel en Lebesgue* of met de *Stelling van Bolzano en Weierstrass*, en deze stellingen berusten uiteindelijk op de volledigheid van het stelsel van de reële getallen.

Kortom, er wordt heel wat zwaar geschut in stelling gebracht. Voor wiskunde-studenten is dat misschien niet zo'n bezwaar, want die moeten toch leren die stukken te bedienen. In elk eerstejaarscollege Analyse worden ze ten tonele gevoerd. Toch is het de vraag of een kanon wel het juiste wapen is om een vlieg te verdrijven. Kan het allemaal niet wat eenvoudiger? Is de Middelwaardstelling echt wel nodig om zulke vanzelfsprekendheden als stelling 3 te bewijzen? Of lijkt de zaak alleen maar vanzelfsprekend, en zijn er wezenlijke problemen die we op het eerste gezicht over het hoofd zien.

Boas stelt, daarin gesteund door o.a. Dieudonné ([5], pp. 142, 154), dat de Middelwaardstelling een veel te hoog aanzien geniet. De moeilijkheden bij het bewijs van de Middelwaardstelling komen vooral voort uit het feit dat men de existentie wil aantonen van een tussenpunt  $c$  waarvoor (1) geldt. Maar dat is iets dat men in vrijwel geen enkele toepassing echt nodig heeft. In haast alle gevallen gebruikt men de Middelwaardstelling voor afschattingen, en dan is het voldoende als men weet dat

$$(b - a) \inf f'(x) \leq f(b) - f(a) \leq (b - a) \sup f'(x). \quad (2)$$

Net als stelling 3 is de ongelijkheid (2) intuïtief volkomen vanzelfsprekend (in feite is (2) equivalent met stelling 3). In termen van snelheden, bijvoorbeeld, zegt

(2) dat de gemiddelde snelheid  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  (afgelegde weg gedeeld door het tijdsverschil) in ligt tussen de minimale en de maximale snelheid.

De Middelwaardstelling echter is intuïtief minder duidelijk. Waarom zou er onderweg een tijdstip zijn waarop de (momentane) snelheid precies gelijk is aan de gemiddelde snelheid?

Het verrassende is dat (2) (of stelling 3) in tegenstelling tot de Middelwaardstelling helemaal geen ingewikkeld bewijs vergt. De benodigde voorkennis is:

- 1 Als  $f$  differentieerbaar is in  $x$ , dan is  $f$  ook continu in  $x$ .
- 2 Als  $f$  continu is in  $x$  en  $f(x) > 0$ , dan is er een omgeving van  $x$  waarop  $f$  positief is.
- 3 Elke niet-lege naar boven begrensde verzameling reële getallen heeft een kleinste bovengrens.

De punten 1 en 2 volgen direct uit de definities van differentieerbaarheid en continuïteit. Punt 3 is een fundamentele eigenschap van  $\mathbb{R}$ ; het gebruik ervan lijkt me onvermijdelijk, maar ik kan me vergissen.

Hieronder geven we een bewijs van stelling 3, een aantal onmiddellijke gevolg-



trekkingen, en als toepassing een bewijs van de *Regel van De Lhospital*. Samen met de bekende stellingen over de techniek van het differentiëren (*regels van Leibniz*, differentiëren van inverse functies, dwz.  $\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$ , en de *kettingregel*, dwz.  $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ ) vormt dat alles wat een vwo-leerling over de theorie van het differentiëren moet weten.

Natuurlijk zullen de meeste leerlingen met intuïtieve motiveringen van de resultaten genoegen nemen, maar de precieze bewijzen zijn zo kort, duidelijk en doorzichtig, dat een leraar (of leerboek) een kritische en intelligente leerling die het naadje van de kous wil weten, niet met een kluitje in het riet hoeft te sturen.

## Stellingen en Bewijzen

In het vervolg noteren we een open interval als  $\langle a, b \rangle$  (eventueel is  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ ), en een gesloten interval als  $[a, b]$ .

*Stelling 3:* Stel  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  is differentieerbaar en  $f'(x) > 0$  voor alle  $x \in \langle a, b \rangle$ . Dan is  $f$  monotoon stijgend op  $\langle a, b \rangle$  (dwz. als  $a < p < q < b$  dan  $f(p) < f(q)$ ).  
Bewijs: zij  $a < p < b$ . We zullen aantonen dat  $f(q) > f(p)$  voor alle  $q \in \langle p, b \rangle$ .

1  $f'(p) > 0$  dus er is een rechteromgeving  $\langle p, p + \varepsilon \rangle$  (voor zekere  $\varepsilon > 0$ ) waarop geldt dat  $f(x) > f(p)$ .

Immers, anders zou er in elke rechteromgeving een  $x$  zijn met  $f(x) \leq f(p)$ , dus  $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$ , dus dan zou ook gelden  $f'(p) = \lim_{y \rightarrow p} \frac{f(y) - f(p)}{y - p} \leq 0$ , en dat is onjuist.

2 Kies nu  $\varepsilon = \varepsilon_0$  zo groot mogelijk (hier gebruiken we de hierboven genoemde fundamentele eigenschap van  $\mathbb{R}$ ); precies gezegd:

$$\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon \mid f(x) > f(p) \text{ voor alle } x \in (p, p + \varepsilon)\}.$$

Noem  $c = p + \varepsilon_0$ . Voor alle  $x \in \langle p, c \rangle$  geldt dan ook  $f(x) > f(p)$ . (3)

Als  $c = b$  is de stelling bewezen.

3 De veronderstelling  $c < b$  leidt tot een tegenspraak. Dan geldt namelijk

– of  $f(c) > f(p)$ . Op grond van de continuïteit van  $f$  in  $c$  is er dan een gehele omgeving van  $c$  waarop  $f(x) > f(p)$ , dus dan is  $\varepsilon_0$  niet zo groot mogelijk.

– of  $f(c) \leq f(p)$ . Wegens  $f'(c) > 0$  zijn er dan punten  $x < c$  zo dat  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$ , dus  $f(x) < f(c) \leq f(p)$ , in tegenspraak met (3) in punt 2.

De stelling is hiermee bewezen.

Het idee voor dit bewijs is van Bers [1]. In een algemener kader geeft H. Cartan ([4], pp. 41-43) bewijzen die op soortgelijke ideeën berusten. De stellingen 4 t.e.m. 7 volgen direct uit stelling 3.

*Stelling 4:* als  $f'(x) \geq 0$  voor alle  $x \in \langle a, b \rangle$  dan is  $f$  monotoon niet-dalend op  $\langle a, b \rangle$  (dwz. uit  $a < p < q < b$  volgt  $f(p) \leq f(q)$ ).

Bewijs: voor elke  $\varepsilon > 0$  kan men stelling 3 toepassen op de functie  $f(x) + \varepsilon \cdot x$ . Uit  $a < p < q < b$  volgt dan  $f(p) < f(q) + \varepsilon(q - p)$  voor elke  $\varepsilon > 0$ , dus  $f(p) \leq f(q)$ .

*Stelling 5:* als  $f$  continu op  $[a, b]$  en differentieerbaar op  $\langle a, b \rangle$  is, als  $f'(x) \geq 0$  voor alle  $x \in \langle a, b \rangle$  en  $f(a) = f(b)$ , dan is  $f$  constant op  $[a, b]$ .

Bewijs: uit stelling 4 volgt  $f(p) \leq f(q)$  voor alle  $a < p < q < b$ , dus wegens de continuïteit geldt ook  $f(a) \leq f(q) \leq f(b)$  voor alle  $q \in \langle a, b \rangle$ , en  $f(p) \leq f(b)$  voor alle  $p \in \langle a, b \rangle$ , zodat  $f(a) \leq f(p) \leq f(b) = f(a)$ , dus  $f(a) = f(p) = f(b)$  voor alle  $p \in \langle a, b \rangle$ .

*Stelling 6:* als  $f$  differentieerbaar is op  $\langle a, b \rangle$  en  $f'(x) = 0$  op  $\langle a, b \rangle$  dan is  $f$  constant op  $\langle a, b \rangle$ .

Bewijs: pas stelling 4 toe op  $f$  en  $(-f)$ .

*Stelling 7:* als  $f$  continu op  $[a, b]$  en differentieerbaar op  $\langle a, b \rangle$  is en  $m = \inf f'(x)$ ,  $M = \sup f'(x)$ , dan geldt

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a). \quad (4)$$

In (4) zijn de ongelijkheden strikt tenzij  $f(x) = k \cdot x + l$  voor zekere  $k, l \in \mathbb{R}$  (en dan is  $m = M = k$ ).

Bewijs: als  $m = -\infty$  of  $M = +\infty$  is het bewijs triviaal. Als  $m$  en  $M$  beide eindig zijn, passe men stelling 4 toe op  $f(x) - m \cdot x$  en  $M \cdot x - f(x)$  om (4) te bewijzen. We onderzoeken nog wanneer er gelijkheden kunnen optreden. Als  $m(b - a) = f(b) - f(a)$  dan is  $f(b) - m \cdot b = f(a) - m \cdot a$ , dus op grond van stelling 5 (toegepast op  $f(x) - m \cdot x$ ) is  $f(x) - m \cdot x$  constant. Evenzo als  $f(b) - f(a) = M(b - a)$ .

Als toepassing geven we een bewijs van de veel gebruikte *Regel van De Lhospital* (1661-1704), de schrijver van het eerste leerboek over differentiaalrekening (*Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes*, 1696). De Marquis De Lhospital was een leerling van Johann Bernoulli (1667-1748), de eigenlijke ontdekker van de Regel. We formuleren en bewijzen de Regel hier voor rechterlimieten. Op analoge wijze bewijst men de Regel voor linkerlimieten, en een combinatie van beide geeft de gebruikelijke formulering voor gewone (tweezijdige) limieten. Het idee voor dit bewijs is van Boas [2].

*Stelling 8: (Regel van De Lhospital):* stel  $f$  en  $g$  zijn differentieerbaar op  $\langle a, b \rangle$ ,

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0, \quad g'(x) > 0 \text{ op } \langle a, b \rangle \text{ en } \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \text{ Dan geldt}$$

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Opmerking 1: toegelaten zijn de gevallen  $a = -\infty$ , en  $L = +\infty$  of  $L = -\infty$ .

Opmerking 2: omdat  $g'(x)$  in de noemer voorkomt, is  $g'(x) \neq 0$  op  $\langle a, b \rangle$  een natuurlijke voorwaarde. Als bovendien  $g'$  continu is op  $\langle a, b \rangle$  kan  $g'$  niet van teken wisselen, en dan kan men  $g'(x) > 0$  altijd bereiken door eventueel teller en noemer met  $-1$  te vermenigvuldigen. Voor 'nette' functies  $g$  geeft de voorwaarde  $g'(x) > 0$  dus geen wezenlijke beperking.

Bewijs van stelling 8: stel eerst dat  $L$  eindig is. Zij  $\varepsilon > 0$ . Er is dan een  $c \in \langle a, b \rangle$  zo, dat op  $\langle a, c \rangle$  geldt

$$L - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \varepsilon, \text{ dus wegens } g'(x) > 0 \text{ geldt}$$

$$(L - \varepsilon)g'(x) < f'(x) < (L + \varepsilon) \cdot g'(x).$$

Voor alle  $a < p < q < c$  geldt dan

$$(L - \varepsilon)(g(q) - g(p)) < f(q) - f(p) < (L + \varepsilon)(g(q) - g(p)).$$

Laat nu  $p \downarrow a$ , dan geldt wegens  $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$

$$(L - \varepsilon)g(q) < f(q) < (L + \varepsilon)g(q).$$

Omdat  $g'(x) > 0$  geldt, is  $g$  stijgend, dus wegens  $\lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$  moet gelden  $g(x) > 0$  op  $\langle a, b \rangle$ , dus

$$L - \varepsilon < \frac{f(q)}{g(q)} < L + \varepsilon \text{ voor alle } q \in \langle a, c \rangle, \text{ dus}$$

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Als  $L = +\infty$  is er bij elke  $M$  een  $c_M$  zo, dat  $\frac{f'(x)}{g'(x)} > M$  op  $\langle a, c_M \rangle$ .

Net als boven volgt hieruit dat  $\frac{f(q)}{g(q)} > M$  op  $\langle a, c_M \rangle$ , dus  $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ .

Analoog voor  $L = -\infty$ .

Hiermee is de *Regel van De L'Hospital* bewezen.

## Slotopmerkingen

Wil men toch iets van de 'klassieke' Middelwaardestelling behouden (met de hier gebruikte elementaire middelen), dan kan men uit stelling 7 en de bekende *tussenwaarde-eigenschap* van continue functies op eenvoudige wijze de volgende stelling afleiden.

*Stelling 9: ('zwakke' Middelwaardestelling):* stel  $f$  is continu op  $[a, b]$  en continu differentieerbaar op  $\langle a, b \rangle$  (dwz.  $f'$  bestaat en is continu). Dan is er een  $c \in \langle a, b \rangle$  zo, dat

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Bewijs: Als  $f$  lineair is, kan men  $c$  naar willekeur uit  $\langle a, b \rangle$  kiezen. In alle andere gevallen geldt volgens stelling 7 in ongelijkheid (4) beide malen het ongelijktteken. Er zijn dan dus punten  $p, q \in \langle a, b \rangle$  zo, dat

$$f'(p) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(q).$$

$f'$  is continu, dus elke waarde tussen  $f'(p)$  en  $f'(q)$  wordt aangenomen (tussenwaarde-eigenschap). Er is daarom een  $c$  tussen  $p$  en  $q$  waarvoor

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Nogmaals gezegd, voor vrijwel alle toepassingen zijn de stellingen 3 t.e.m. 8 voldoende. De 'klassieke' Middelwaardestelling (stelling 9 zonder de voorwaarde dat  $f'$  continu is) kan, in de woorden van Bers [1], worden bijgezet in het rijtje curiositeiten waarin bijvoorbeeld ook de *Stelling van Darboux* staat die zegt dat elke afgeleide functie de tussenwaarde-eigenschap heeft.

Verwijzingen:

- [1] Lipman Bers, *On Avoiding The Mean Value Theorem*, Am. Math. Monthly, 74 (1967), 583.
- [2] Ralph P. Boas, *L'Hospital's Rule Without Mean-Value Theorems*, Am. Math. Monthly, 76 (1969), 1051-1053.
- [3] Ralph P. Boas, *Who Needs Those Mean-Value Theorems, Anyway?* Two-Year College Math. J., 12 (1981), 178-181.
- [4] Henri Cartan, *Calcul Différentiel*, Hermann, Paris, 1967.
- [5] Jean Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Ac. Press, New York and London, 1960.

# Een oude leservaring met differentialen

J. K. TIMMER

Het eerste artikel in Euclides 57, no 3, van Prof. Van Rooy, geeft mij aanleiding een prettige lesherinnering van zo'n tien jaar geleden op te halen. Het toneel van handeling is een vierde klas Havo, die na mijn pensioeningang nog mocht 'genieten' van mijn enthousiasme voor het lesgeven. In genoemde klas zat ook een meisje, dat op een andere school Havo 4 met juist te weinig succes had doorlopen.

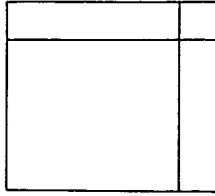
Degenen van de lezers, die mij kennen, weten, dat ik nog al eens graag de gebaande paden verliet en zo geviel het, dat ik besloof de differentiaalrekening bij die gelegenheid eens geheel anders aan te pakken. In het volgende zal ik trachten, hoewel lastig na lange tijd, bovengenoemde les te laten herleven. Daarbij komen ook flinke stukken van de vervolglussen ter sprake en waar mijn geheugen tekort schiet, zal ik fantaseren. Maar stel u gerust, het meeste, wat hier volgt is echt gebeurd.

Ik teken iets en vraag de klas, hoe die figuur heet. Een vierkant, zeggen ze. Maar ik twijfel. Ter sprake komen de gelijkheid van de zijden, het al dan niet recht zijn van de hoeken, de dikte van de krijtstreep en meer bezwaren. Dan uit ik de wens, de oppervlakte van het vierkant (???) te bepalen. Ter sprake komt, dat  $x \cdot x^2$  oplevert.

Het meten van de zijden zou zoveel problemen geven, dat we zelfs geen meetpoging gewaagd hebben. Mijn vierkant wordt dan ook verder genegeerd. Als ik weet, dat ergens een vierkant is, dan is de oppervlakte te vinden door de zijde te meten. Maar, al doe ik nog zo mijn best, ik maak een meetfout. Als de precieze zijde gelijk is aan  $x$ , dan noteer ik mijn meetresultaat als  $x + \Delta x$ . Niet  $\Delta$  maal  $x$ , maar  $\Delta x$  is de gebruikelijke notatie voor de meetfout in  $x$ . Anders gezegd:  $\Delta x$  is de verkeerde  $x$  min de goede  $x$  (die zin hielden we vast).

De rest van de les verloopt met als motto: Ik kan nu eenmaal niet nalaten, fouten te maken, maar ik wil toch wel weten *hoe ernstig de gevolgen van de fouten zijn*. De oppervlaktefout blijkt gelijk te zijn aan  $2x \cdot (\Delta x) + (\Delta x)^2$ . Dat we de tweede term weglaten wordt toegelicht met een figuurtje en graag als vereenvoudiging aanvaard. De klas geeft mij zelfs verlof, het gelijkteken te gebruiken in plaats van het ongeveer-gelijk-teken als ik kom tot  $\Delta(x^2) = 2x \cdot \Delta x$ , dito met de derde macht. (figuurtje op de volgende bladzijde):

Na wat voorbeelden verschijnt  $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$  en dit wordt later



toegepast op de sinus, en wel met een figuur. De leerlingen waren met radialen bekend.

Intussen ben ik, dunkt me, nu bezig over vervolglussen te berichten. Daarin komt ook de productregel ter sprake, waarbij ik me niets aantrek van beperking tot functies van één veranderlijke. De leerlingen slikken dit, naar mijn verwachting, als hun dagelijks brood. Bij het afleiden van de breukregel komt, volgens de gebruikelijke manier, enig gecijfer te pas, maar nu ging het zo:

Als  $y = u/v$ , waarbij  $u$  en  $v$  van  $x$  afhangen, dan is  $v \cdot y = u$  en dus  $\Delta(v \cdot y) = \Delta u$ . Zet dan  $\Delta(v \cdot y) = (v + \Delta v)(y + \Delta y) - v \cdot y$  en we vinden  $\Delta u = v \cdot \Delta y + y \cdot \Delta v$  na weglating van de fout van de tweede orde. Zo is  $\Delta y = \frac{\Delta u - y \cdot \Delta v}{v}$  en de lezer

begrijpt, hoe verder.

De inmiddels geleerde regel: 'Exponent wordt coëfficiënt en graad komt één lager' wordt nu op overeenkomstige wijze, als boven geschetst, verklaard voor machten met gebroken en negatieve exponenten.

Alles, wat we tot dusverre gedaan hebben, hangt in de lucht. Als we  $x$  goed meten, zo spreek ik ze toe, dan is het vervolgrekenwerk ook goed, slordig meten geeft slordige rekenresultaten.

De leerlingen komen zelf op de gedachte, dat het hier om verhoudingen gaat. Het bovengeschetste deel van de les zou men zelfs kunnen geven, als het limietbegrip niet aanwezig is. Zo wordt  $\Delta x/x$  een *foutpercentage*. Leerzaam is, dat in de buurt van de rechte hoek het foutpercentage van de sinus zo gering is, van de cosinus zo groot. Ik laat dat op twee manieren zien, met de formules en rechtstreeks met de figuur, waarbij ik hoop, dat de figuur een hulpmiddel zal zijn om de formule te onthouden.

Volgt een klasgesprek over acceptabele fouten. Ik bied aan, zo nauwkeurig te rekenen, dat alle leerlingen voldaan zijn, maar dan moet ik wel weten, welke eisen elk hunner stelt. Ze zijn allemaal tevreden, als ik de strengste zijn zin geef. (Hoe vaak komen dergelijke beschouwingen niet voor bij limietkwesties?) Dan spreken we af, dat we in het geval van *verwaarloosbare fouten* niet zullen schrijven  $\Delta y/\Delta x$ , maar  $dy/dx$ . Ten overvloede vestig ik er nog de aandacht op, dat de allergrootste blunder zou zijn, de uitdrukking  $dy/dx$  (in de klas met horizontale streep) te zien als een door  $d$  vereenvoudigbare breuk. En dan komt DE grote stap: Gemakshalve schrijven we toch maar  $dy = a \cdot dx$  in plaats van  $dy/dx = a$ . Ook de terminologie sluit zich daarbij aan. We noemen  $dy/dx$  een differentiaal-quotiënt (ter onderscheiding van het differentiequotiënt  $\Delta y/\Delta x$ ), hoewel het geen quotiënt is, maar een limiet. De verklaring? Vroeger vatte men het ten onrechte als quotiënt op, maar de naam bleef, handhaafde zich.

Bij dit verhaal heb ik nog verzuimd, te berichten, hoe glad de kettingregel er in ging.

$$\Delta \sin 2x = \cos 2x \cdot \Delta(2x) = \cos 2x \cdot 2 \Delta x = 2 \cos x \cdot \Delta x.$$

Bekend is, dat beginners vaak de factor 2 vergeten. Maar ik heb de grap gepleegd  $2x$  niet twee-iks te noemen, maar twiks, om het accent te verleggen. In de didactiek is immers veel geoorloofd, wat de wiskunde-puur niet zou toestaan. Vandaar: de fout in sinus twiks is gelijk aan cosinus twiks maal de fout in twiks.

Aan deze les(sen) heb ik nog een bijzonder plezierige herinnering. Het meisje, dat ik in de aanvang van dit artikel genoemd heb, verklaarde: Ik heb het verleden jaar anders gehad, maar *dit is glashelder*. Toen ik vroeg, hoe ze het dan wel gehad had, bleef een duidelijk antwoord uit!

Het laatste gecursiveerde woord gaf mij de moed, dit artikeltje te schrijven.

# Een vergelijking van de vierde graad

O. BOTTEMA

1 In *Euclides* 57 (1981-'82), no. 3, 93-98 behandelt W. Gronloh het volgende planimetrische vraagstuk (fig. 1).  $OABC$  is de vierkante doorsnede (met zijde  $a$ ) van een kist,  $PQ$  is een ladder, die in  $P$  op de vloer, in  $Q$  tegen de muur en verder op de kist rust. Gegeven is  $PQ = l = 3a$ . Gevraagd wordt de stand van de ladder. De schrijver neemt  $AP = x$  als onbekende en stelt een betrekking op die na kwadratering de vergelijking

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0 \quad (1.1)$$

oplevert, die hij met enige ingewikkelde methodes oplost.

Daar (1.1) een wederkerige vergelijking is kunnen de wortels eenvoudig worden bepaald. Men heeft

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 2(x + \frac{1}{x}) - 7 = 0$$

en dus als  $u = x + \frac{1}{x}$  de vergelijking

$$u^2 + 2u - 9 = 0, \quad (1.2)$$

met de twee reële wortels

$$u = -1 \pm \sqrt{10}. \quad (1.3)$$

Uit

$$x^2 + (1 \pm \sqrt{10})x + 1 = 0$$

volgt

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= [\sqrt{10} - 1 \pm (\sqrt{5} - \sqrt{2})]/2, \\ x_{3,4} &= [-\sqrt{10} - 1 \pm (\sqrt{5} + \sqrt{2})]/2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

welke antwoorden ook door de auteur worden gevonden. Zij zijn alle vier reëel maar  $x_{3,4}$  zijn negatief en dus onbruikbaar.



2 In het vraagstuk was verhouding  $l/a = 3$ . Is  $l = ka$  dan ontstaat in plaats van (1.1) de eveneens wederkerige vergelijking

$$x^4 + 2x^3 - (k^2 - 2)x^2 + 2x + 1 = 0, \quad (2.1)$$

die leidt tot

$$u^2 + 2u - k^2 = 0,$$

met de twee reële wortels  $u = -1 \pm \sqrt{1 + k^2}$ . (2.2)

De negatieve wortel geeft geen bruikbare uitkomsten, zodat voor  $x$  moet gelden

$$x^2 + (1 - \sqrt{1 + k^2})x + 1 = 0, \quad (2.3)$$

met de discriminant

$$k^2 - 2 \pm 2\sqrt{1 + k^2}, \quad (2.4)$$

die alleen dan niet negatief is als  $k^2 \geq 8$ . Daarmee is de ondergrens bepaald voor de lengte van de ladder. In het grensgeval  $k^2 = 8$  is  $\angle OPQ = 45^\circ$ .

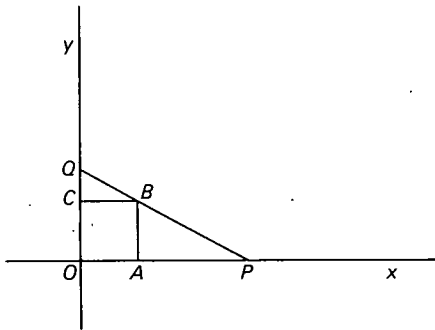


fig. 1

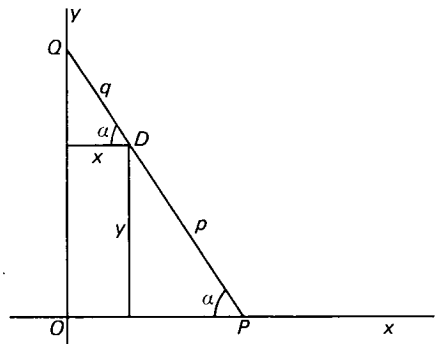


fig. 2

3 Wij denken ons de kist even weg en beschouwen de mogelijke standen van de ladder (fig. 2) aangegeven door de variabele hoek  $\alpha$ . Zij  $D$  het punt op de ladder waarvoor  $PD = p > 0$ ,  $DQ = q > 0$ ,  $p + q = l$ . Zijn  $x, y$  de coördinaten van  $D$ , dan is  $x = q \cos \alpha$ ,  $y = p \sin \alpha$ , waaruit volgt

$$p^2 x^2 + q^2 y^2 = p^2 q^2. \quad (3.1)$$

De baan van  $D$  bij verandering van  $\alpha$  is dus een ellips. (De beweging van de staaf is de zogenaamde elliptische beweging der kinematica). De gevraagde stand is die waarbij deze ellips door het punt  $B = (a, a)$  gaat, zodat wij krijgen

$$a^2(p^2 + q^2) = p^2q^2, \quad (3.2)$$

ofwel, wegens

$$p^2 + q^2 = l^2 - 2pq,$$

de vergelijking

$$p^2q^2 + 2a^2pq - l^2a^2 = 0, \quad (3.2)$$

zodat

$$pq = -a^2 \pm a\sqrt{(a^2 + l^2)}, \quad (3.3)$$

waarvan wegens  $pq > 0$  alleen de positieve wortel zin heeft. Wegens

$$(p - q)^2 = l^2 - 4pq$$

volgt

$$p - q = \pm \sqrt{(l^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{(a^2 + l^2)})}, \quad (3.4)$$

waaruit met  $p + q = l$  de twee standen van de staaf volgen (de een volgt uit de andere door  $p$  en  $q$  te verwisselen). Het vraagstuk, en wel met een willekeurige waarde van  $k = l/a$ , is daarmee opgelost zonder dat een vergelijking van de vierde graad is verschenen.

Voor  $a = 1$ ,  $l = k$  luidt de uitdrukking in (3.4)

$$\sqrt{(4 + k^2 - 4\sqrt{(1 + k^2)})}. \quad (3.5)$$

Gelijk bekend kan  $\sqrt{(a - \sqrt{b})}$  worden herleid tot  $\sqrt{p} - \sqrt{q}$  als  $d = a^2 - b$  een kwadraat is. Men heeft dan  $p + q = a$ ,  $p - q = \sqrt{d}$  waaruit  $p$  en  $q$  volgen.

Voor (3.5) krijgt men

$$d = (4 + k^2)^2 - 16(1 + k^2) = k^2(k^2 - 8). \quad (3.6)$$

Daaruit blijkt dat  $k^2 \geq 8$  moet gelden (wat wij al wisten) en voorts dat (3.5) vereenvoudigd kan worden als  $k^2 - 8$  een kwadraat is; in het oorspronkelijke vraagstuk ( $k = 3$ ) is dat het geval.

4 Vervangt men het gegeven vierkant door een rechthoek dan leiden beide oplossingsmethodes tot een (niet-wederkerige) vergelijking van de vierde graad.

# Inderdaad een oud probleem

HANS FREUDENTHAL

In *Euclides* 57 (1981/2), november, 93-98, houdt W. Gronloh zich onder de titel 'Een oud probleem' met een meetkunde-vraagstuk bezig, dat algebraïsch neerkomt op het oplossen van de vergelijking:

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Toen ik op school zat, heette zo iets een *reciproke vergelijking*. Aangezien een reciproke vergelijking van de graad  $2n$  tot een van de graad  $n$  (plus een vierkantsvergelijking) kan worden herleid en we ook nog in het oplossen van cubische vergelijkingen geoefend werden, was dit een gelegenheid om ons bij proefwerken en examens zesdegraads vergelijkingen op te dissen, waarvan dan ook gebruik werd gemaakt.

Een reciproke vergelijking van het bovenstaande soort heeft algemeen de vorm

$$a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0,$$

waarbij symmetrisch geplaatste coëfficiënten aan elkaar gelijk zijn:

$$a_{2n} = a_0, a_{2n-1} = a_1, \dots$$

algemeen:

$$a_{2n-j} = a_j.$$

Met  $x$  is ook  $x^{-1}$  wortel van zo'n vergelijking, hetgeen overduidelijk blijkt als men door  $x^n$  deelt:

$$a_{2n}x^n + a_{2n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^{-(n-1)} + a_0x^{-n} = 0.$$

Men lost zo'n vergelijking op door als nieuwe onbekende

$$y = x + x^{-1}$$

in te voeren. Men moet dan achtereenvolgens

$$y^2 = x^2 + 2 + x^{-2} = (x^2 + x^{-2}) + 2$$

$$y^3 = x^3 + 3x + 3x^{-1} + x^{-3} = (x^3 + x^{-3}) + 3(x + x^{-1})$$

...

uitrekenen, om tenslotte tot een vergelijking

$$c_n y^n + c_{n-1} y^{n-1} + \dots c_0 = 0$$

van de  $n$ -de graad voor  $y$  te geraken. Als men  $y$  kent, vereist de berekening van  $x$  nog de oplossing van een vierkantsvergelijking. In het geval van bovenstaande vergelijking komt men via

$$(x^2 + x^{-2}) + 2(x + x^{-1}) - 7 = 0$$

tot  $(y^2 - 2) + 2y - 7 = 0,$

dus  $y = -1 \pm \sqrt{10},$

$$x + \frac{1}{x} = -1 \pm \sqrt{10},$$

$$x^2 + (1 \pm \sqrt{10})x + 1 = 0.$$

enzovoort.

Er was toendertijd nóg een soort 'reciproke' vergelijkingen, te weten met een in de even machten symmetrische en in de oneven machten antisymmetrische rij coëfficiënten, dus

$$a_{2n} = a_0, a_{2n-1} = -a_1, \dots$$

Bij zo'n vergelijking is met  $x$  tevens  $-x^{-1}$  oplossing. In dit geval verdient het aanbeveling

$$y = x - x^{-1}$$

als nieuwe onbekende te introduceren en voor de rest als boven uiteengezet te handelen.

Eigenlijk is er nog een derde geval van dit soort, maar dat is flauw:

als met  $x$  tevens  $-x$  oplossing is, dus als feitelijk alleen even machten van  $x$  optreden. Dan is natuurlijk

$$y = x^2$$

de aangewezen nieuwe onbekende.

Het principe is duidelijk. Het gaat om vergelijkingen die zekere symmetriën vertonen. Je profiteert ervan door als nieuwe onbekenden functies van de wortels in te voeren die onder deze symmetriën invariant zijn, om tot 'resolventen' van lagere graad te geraken. Dit is het principe, maar zijn vruchtbaarheid is met bovenstaande voorbeelden zeer onvolmaakt aangetoond. Ruim een eeuw geleden heeft Abel er indrukwekkend werk van gemaakt. Hij beschouwde algemeen het geval dat van de algebraïsche vergelijking

$$f(x) = 0$$

met  $x$  tevens  $\Theta x$  wortel is, waar  $\Theta$  dan een rationale functie van zijn argument is. Vanzelfsprekend is dan ook  $\Theta^2 x$ ,  $\Theta^3 x$ , ... wortel en aangezien er maar eindig veel wortels zijn, is een zekere macht van  $\Theta$ , zeg  $\Theta^m$ , de identiteit. Door als nieuwe variabele een symmetrische functie van deze wortels, bijvoorbeeld

$$x + \Theta x + \Theta^2 x + \dots + \Theta^{m-1} x,$$

in te voeren kan men mogelijk de graad van de vergelijking verlagen. Denk bijvoorbeeld aan de  $n$ -de graads cirkelverdelingsvergelijking

$$x^n - 1 = 0$$

waar je allereerst nog allerlei factoren kunt afsplitsen – in ieder geval  $x - 1$ . Hiervan is met  $\varepsilon$  elke macht van  $\varepsilon$  ook wortel. Dit geeft aanleiding tot het vormen van de zogenaamde ‘perioden’ – in het befaamde geval  $n = 17$  bijvoorbeeld

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8}$$

en (met  $\varepsilon^3$  i.p.v.  $\varepsilon$ )

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7},$$

of met verdere uitsplitsing

$$\begin{aligned} &\varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4}, \\ &\varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-8}, \\ &\varepsilon^3 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^5, \\ &\varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^{-7}, \end{aligned}$$

enzovoort, waarbij het oplossen van de 17e graads cirkelverdelingsvergelijking stapsgewijs tot dat van vier vierkantsvergelijkingen wordt teruggebracht.

Dit idee kon Abel bij Gauss opdoen en het algemene principe gaat zelfs op Lagrange terug (als het niet nog ouder is), maar dan altijd in speciale gevallen geconcretiseerd. Abels nieuwe denkbeeld was de algemene rationale functie  $\Theta$  die wortels in wortels afbeeldt. Hij ging nog een stap verder: hij beschouwde een stel van zulke afbeeldingen

$$\Theta_1, \dots, \Theta_k$$

die met elkaar commuteren en die uit één wortel van de vergelijking alle produceren, en toonde aan hoe je zo'n vergelijking oplost. (U begrijpt nu wel waar de term abelse voor commutatieve groepen vandaan komt.) Al het voorgaande wordt nog helderder als je het in termen van Galois-theorie formuleert. De 4e graads vergelijking uit het begin van dit artikel laat een symmetriegroep van de orde 4 toe (niet cyclisch). De overgang van de onbekende  $x$  naar  $y$  betekent dat je als het ware een ondergroep van de orde 2 stillet. Bij de 17e graads cirkelverdeling is de symmetriegroep 16-cyclisch en daar wordt eerst

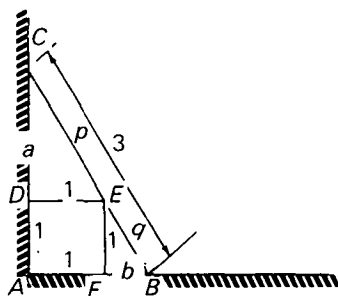
een ondergroep van de orde 8 stilgelegd, hiervan een van de orde 4 enzovoort. Nog een stap verder op de weg naar helderheid en men spreekt niet meer van vergelijkingen maar van (de door hun wortels voortgebrachte) algebraïsche lichamen (hoewel ook dat nog niet het summum is). Bij algebraïci die boeken voor het universitair onderwijs schrijven, bestaat de neiging het verhaal aan deze kant te beginnen of het er zelfs toe te beperken. Ik vraag me af hoevelen onder de duizenden in de wereld die jaar aan jaar Galois theorie moeten leren, in staat zijn deze theorie vanuit haar historisch en onderwijskundig uiterst simpele uitgangspunten te begrijpen. Ik meen dat er in dit opzicht nog het een en ander te doen valt.

# Korrel

## Oud probleem II

Men zie Euclides 57, no 3, blz. 93 e.v. Het daar uitvoerig behandelde probleem ontlokt mij een paar opmerkingen.

De bewoordingen van de vraagstelling bevatten een *suggestie*. Een ladder staat doorgaans tamelijk *steil*, waarvoor Koenen zelfs de uitleg 'min of meer loodrecht' (!) gebruikt. Ook in mijn figuur komt die suggestie tot uitdrukking. Onttrekt men zich aan die suggestie, wat ook in meer algemene zin aanbevelenswaardig is, dan komt de *symmetrie* van de opgave te voorschijn. De as is een diagonaal van het vierkant, de 'ladder' kan ook vrij plat liggen.



Een figuur als deze, met drie gelijkvormige driehoeken, noodt tot het noteren van een *evenredigheidsmatrix* en wel

$$\begin{pmatrix} b & q & 1 \\ b+1 & 3 & a+1 \\ 1 & p & a \end{pmatrix}$$

Hieruit zijn negen productrelaties af te lezen. Sluit men middenrij en middenkolom uit, dan is  $ab = 1$  wel de aanlokkelijkste. Combinatie met  $(a+1)^2 + (b+1)^2 = 9$  voert ons tot symmetrie in de algebra. Stel  $a+b = s$  en men vindt  $(s+1)^2 = 10$ , enz. Dan zijn  $a$  en  $b$  te vinden als wortels van  $x^2 - (\sqrt{10}-1)x + 1 = 0$ . Ze zijn in de theorie verwisselbaar, maar wie het praktisch doet, glijdt uit.

Ik heb uit het artikel van collega Gronloh moeten opmerken, dat het begrip *evenredigheidsmatrix* (de naam is er door Van Hiele aan gegeven) ondanks ruim dertig jaar propaganda nog niet *volledig* ter vervanging van de oude schrijfwijze van een evenredigheid in onze schoolwiskunde is doorgedrongen.

De vergelijking op blz. 94 is wederkerig en op te lossen door  $x + 1/x$  als nieuwe onbekende te nemen. Met die opmerking zijn we dan toch weer (terecht?) op een *oud probleem* teruggekomen.

J. K. Timmer

# PYTHAGORAS . . . . de grote teleurstelling na 21 jaar

BRUNO ERNST (J. A. F. DE RIJK)

Ongeveer 23 jaar geleden vroeg Prof. Freudenthal mij om de redactie op me te nemen van een wiskundetijdschrift voor leerlingen van het voortgezet onderwijs. Het programma dat op school moest worden doorgewerkt was qua omvang te groot om de veelzijdigheid van het wiskunde-bedrijven te illustreren. Een echt jeugdtijdschrift zou dit wel kunnen. Ik vond echter een 'eenmantijdschrift' te riskant. Vrij spoedig vond men G. Krooshof bereid om samen met mij het tijdschrift redactioneel te runnen.

Wat waren in die tijd onze verwachtingen?

In het eerste jaar mikten we op ca 300 abonnees, en de uitgeverij Wolters (toen nog niet geassocieerd met Noordhoff) was bereid dit verliesgevende experiment te financieren. Als echter de derde jaargang niet meer dan 2000 abonnees zou halen, dan zou de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde financieel moeten bijspringen. Het pakte anders uit. De derde jaargang startte al met meer dan 10 000 abonnees en dit aantal groeide in de loop der jaren gestadig tot boven de 25 000.

Enige jaren later nam ik zelf het initiatief voor een dergelijk jeugdtijdschrift voor natuurkunde, scheikunde en sterrenkunde: ARCHIMEDES. Zowel de uitgeverij als mijn mederedactieleden vonden dit zeer riskant: zouden niet vele lezers van Pythagoras afvallen, nu er een keuze bestond om zich op een van beide tijdschriften te abonneren en zou ook niet een interessant artikelengebied: toegepaste wiskunde, nu verhuizen van Pythagoras naar Archimedes? Maar het onverwachte gebeurde: ook Archimedes kwam al spoedig boven de 15000 abonnees zonder dat daardoor het abonnementenaantal van Pythagoras daalde. Zowel Archimedes als Pythagoras bleken zichzelf financieel te kunnen bedruipen en zo was er in Nederland iets unieks op onderwijsgebied tot stand gekomen. Naar de oorzaken van deze bloei konden we slechts gissen. Zeker is dat de medewerking van de wiskunde-, natuurkunde- en scheikundeleraren bij de presentatie van het tijdschrift een belangrijke factor vormde.

In verschillende landen bestonden ook jeugdtijdschriften voor wiskunde: in Frankrijk LE FACTEUR X, in Engeland MATHEMATICAL PIE, in de USA MATHEMATICAL STUDENTS JOURNAL en in België WISKUNDE-POST. Behalve Mathematical Pie, dat nog steeds af en toe met een bescheiden vouwblaadje verschijnt zijn ze met de uitgave gestopt.

Later opgerichte tijdschriften: MATH-JEUNES (Wallonië), PETIT ARCHI-



MEDE (Frankrijk), MATHEMATICAL DIGEST (Nieuw-Zeeland en een tijdschrift met dezelfde naam in Zuid-Afrika), een Fins blad in de vorm van een krant, komen nog steeds uit evenals 3 Australische bladen: FUNCTION, TRIGON en PARABOLA. De meeste daarvan moeten een betrekkelijk kleine oplage hebben te oordelen naar de vormgeving: getypt en in offset vermenigvuldigd.

In de oostbloklanden floreren de jeugdtijdschriften voor wiskunde en staan ze op een hoog peil. Aan de top staat zeker het Russische blad KWANT, dat een soort combinatie is van Archimedes en Pythagoras. We weten niet in hoeveel exemplaren dit verspreid wordt. Maar ook al zouden we dat weten, dan zou dit niet maatgevend zijn voor onze eigen situatie: Pythagoras krijgt geen enkele subsidie; wordt op geen enkele wijze van overheidswege verplicht gesteld en een lezer moet zich elk jaar weer opnieuw als abonnee opgeven. In de oostbloklanden kan men van staatswege dat opleggen wat men nuttig acht voor de vorming van de jeugd en men hecht er grote waarde aan de natuurwetenschappelijke vorming.

Qua inhoud en uitvoering heeft Pythagoras altijd op een vrij hoog niveau gestaan. De uitvoering was professioneel. Over de inhoud zou ik bescheiden moeten zijn, omdat ik vele jaren het redactiesecretariaat heb vervuld en mijn bijdragen schreef. Toch wil ik niet nalaten te wijzen op de originaliteit bij de bijdragen van mijn mederedacteuren in de loop van de jaren. De artikelen van Pythagoras waren voor het grootste deel beslist geen bewerkingen van reeds bestaande boeken of artikelen maar oorspronkelijk werk, gemaakt uit de optiek van leraren die van hun vak houden en hun enthousiasme ook op hun leerlingen kunnen overbrengen. Op deze wijze is in de afgelopen 21 jaar heel wat energie van de redactie besteed aan bedenken, schrijven, herschrijven, informatie inwinnen, vergaderen, etc., die aan het Nederlandse wiskundeonderwijs ten goede is gekomen. Tenminste, daarvan waren de redactieleden altijd overtuigd, anders zouden zij er niet met zoveel plezier zoveel vrije tijd in gestoken hebben.

Tijdens de voorbereiding van de afgelopen jaargang berichtte de uitgever, dat zij de verliezen op Pythagoras niet langer kon dragen. Het aantal abonnees was gedaald tot even boven de 10 000 en daarbij was geen sluitende exploitatie meer mogelijk. De opbrengst van de abonnementen dekte zo'n 60 % van de kosten. Het is duidelijk, dat in de crisistijd die wij op economisch gebied doornaken vele bedrijven, ook uitgeverijen, uiterst economisch met hun middelen moeten omspringen om te zorgen dat zij die tijd goed doorkomen en het afstoten van verliesgevend objecten is een eerste middel waarnaar men grijpt. Met dit abonnementenaantal was Pythagoras een te kostbare luxe voor Wolters-Noordhoff geworden. De redactie heeft al het mogelijke gedaan om jaargang 21 toch nog te laten verschijnen. Een meevaller bleek te zijn: een stijging van het abonnementenaantal tot rond de 15 000, maar dit gaf toch geen sluitende exploitatie; daarvoor is een abonnementenaantal van boven de 20 000 noodzakelijk. De 21-ste jaargang zou de laatste *moeten* zijn.

In een aantal vergaderingen van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, Wolters-Noordhoff en de redactie is getracht dit onvermijdelijke te keren. Daaruit is voortgekomen, dat Wolters-Noordhoff zich toch nog garant

stelt voor een 22-ste jaargang, zij het dat deze niet 5 maar 4 nummers zal tellen en dat het aantal pagina's van 24 naar 16 wordt teruggebracht, maar wel op een groter formaat. In de loop van 1982/83 zal Wolters-Noordhoff zoeken naar mogelijkheden om Pythagoras, wellicht in nieuwe vorm en opzet, te continueren. Natuurlijk zal daarbij de ontwikkeling van het abonentenaantal een belangrijke rol spelen.

Als hierbij van een Zwarte Piet gesproken kan worden, dan wordt deze daarmee de leraren toegespeeld. Eigenlijk is deze uitdrukking alleronvriendelijkst tegenover onze collega's, want door hun medewerking aan de verspreiding van Pythagoras is het juist altijd mogelijk geweest om het blad zolang voor een betrekkelijk lage prijs op de markt te brengen.

En ik schrijf dit alles alleen om de wiskundeleraren uit te nodigen te zorgen voor meer abonnees.

Het is moeilijk te zeggen en zeker uitermate kostbaar om enigszins objectief aan te tonen, dat Pythagoras een rol heeft gespeeld in het wiskundeonderwijs. Heeft het leerlingen met meer plezier wiskunde laten studeren? Heeft het bijgedragen tot verfrissing van het wiskundeonderwijs? Heeft het leerlingen bewogen in de richting van de exacte vakken verder te studeren? Heeft het aan degenen die niet verder studeerden een ruimer inzicht gegeven in de belangrijkheid van de wiskunde voor onze cultuur? We durven hierop geen enkel antwoord te geven. We zijn er zelf wel altijd van overtuigd geweest.

Wellicht zijn er vele leraren, die aanmerkingen hebben op de kwaliteit of de moeilijkheidsgraad van Pythagoras in de afgelopen jaren. Misschien is er een totaal nieuwe redactie nodig en een totaal nieuw beleid. Dat is allemaal te verwezenlijken, maar het nuchtere feit van het onrendabel zijn van de uitgave bij een te gering aantal lezers blijft bestaan. Misschien wilt u er wat aan doen als u het van belang vindt dat een blad als Pythagoras, in welke vorm dan ook, ter beschikking blijft van het Nederlandse wiskundeonderwijs.

# Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

## Opgaven

**467.** Op een zeer groot schaakbord staat een koningscentaur KC. Hij mag op het bord een koningszet doen, een paardesprong uitvoeren of een koningscentaurzet, die bestaat uit een koningszet gevolgd door een paardesprong. Gezien zijn aard, grondig socialist, doet hij alleen zetten naar links, naar beneden of naar links beneden. Uitgaande van het veld KC kan hij dus in één zet een van de velden a, p of c bereiken.

De velden zijn van coördinaten voorzien; het veld linksonder is het veld (0, 0).

A en B doen om beurten een zet met de centaur. Wie de centaur op (0, 0) plaatst, heeft gewonnen. A begint. De centaur staat op het veld (62, 31). Gevraagd een optimale strategie te vinden. (P. Bronkhorst)

|  |   |   |   |    |  |
|--|---|---|---|----|--|
|  |   |   |   |    |  |
|  |   |   | K | KC |  |
|  | C | P | K | K  |  |
|  | C | C | P |    |  |
|  |   | C | C |    |  |
|  |   |   |   |    |  |

**468.**

1221 geeft bij deling door 7 als rest 3

12421 eveneens

124421 eveneens

1244421 eveneens

enz.

Verklaar dit.

Nu algemeen.

$\overline{abba}$ ,  $\overline{abpb\bar{a}}$ ,  $\overline{abppb\bar{a}}$  enz. geven bij deling door  $i$  dezelfde rest. Vindt men bij elk paar cijfers  $a$  en  $b$  en getal  $i$  een oplossing voor het cijfer  $p$ ? (F. Laforce)

## Oplossingen

**464.** Voor welke  $n$  geldt: een vierkant kan verdeeld worden in  $n$  congruente rechthoekig gelijkbenige driehoeken?

Noem de lengte van de rechthoekszijde van de driehoeken 1. De lengte van de hypotenusa is dan  $\sqrt{2}$ .

De zijde van het vierkant is  $a + b\sqrt{2}$  ( $a, b \in \mathbb{N}$ ).

De oppervlakte van het vierkant is  $(a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$ .

Als het vierkant opgebouwd is uit  $n$  driehoeken, dan is de oppervlakte van het vierkant  $\frac{1}{2}n$ . Dus is  $a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = \frac{1}{2}n$

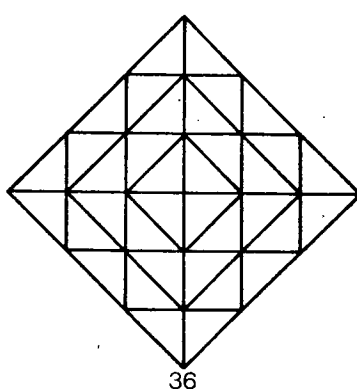
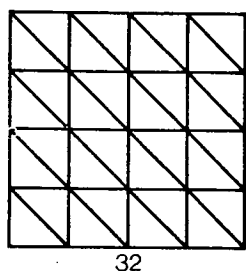
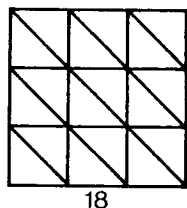
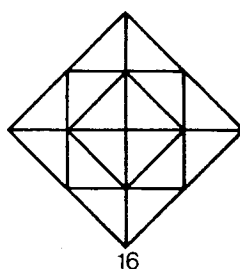
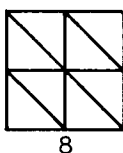
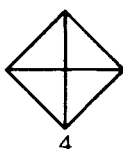
waaruit volgt

$$a^2 + 2b^2 = \frac{1}{2}n \quad \wedge \quad ab = 0$$

dus

$$(a = 0 \quad \wedge \quad n = 4b^2) \quad \vee \quad (b = 0 \quad \wedge \quad n = 2a^2)$$

Blijft nog over aan te tonen dat deze waarden voor  $n$  realiseerbaar zijn. Hieronder een weergave van de figuren uit het boek van Van Hiele, die voor zichzelf spreken.



Degene die de recensie van het boek in het vorige nummer gelezen heeft, is waarschijnlijk nieuwsgierig met welk doel deze figuren in Van Hieles boek voorkomen.

Hij stelt de vraag: hoe zet je de getalrij 2, 4, 8, 16 voort?

Elk normaal mens zegt dan: 32, 64, 128, 256, ...

Het antwoord op de vraag: voor welke  $n$  kan een vierkant verdeeld worden in  $n$  congruente rechthoekig gelijkbenige driehoeken?, luidt volgens het bovenstaande: 2, 4, 8, 16, 18, 32, 36, 50, ...

Waaruit blijkt dat de structuur 2, 4, 8, 16 op verschillende wijze voortgezet kan worden, en zelfs op een voor ons onverwachte manier.

**465.** Hoe vaak per dag hebben de wijzers van de klok een zodanige stand, dat bij verwisseling weer een mogelijke wijzerstand ontstaat?

Onderstel de wijzers staan op

$$p + a \quad \text{en} \quad q + b$$

waarin

$$p, q \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq p, q \leq 11 \quad \text{en} \quad 0 \leq a, b < 1$$

Verwisseling geeft weer een mogelijke stand, is gelijkwaardig met

$$a = \frac{1}{12}(q + b) \quad \text{en}$$

$$b = \frac{1}{12}(p + a)$$

dus met

$$a = \frac{12q + p}{143} \quad \text{en} \quad b = \frac{12p + q}{143}$$

Bij elke  $p$  en  $q$  vindt men dus precies één  $a$  en  $b$ . Als  $p \neq q$  vinden we twee verwisselbare wijzerstanden en als  $p = q$  één. We vinden dus per 12 uur  $2 \cdot 11 \cdot 12 + 12 = 276$  verwisselbare wijzerstanden. Dat is per dag 552.

466.  $2^n$  personen worden opgeroepen door middel van suites van  $n$  kort-lang signalen. Na hoeveel signalen weten ze gemiddeld of ze al of niet opgeroepen worden?

$\frac{1}{2}$  van het aantal personen weet na 1 signaal of hij opgeroepen wordt

$\frac{1}{4}$  van het aantal personen weet dit na 2 signalen

$\frac{1}{8}$  van het aantal personen weet dit na 3 signalen

...

$\frac{1}{2^{n-1}}$  van het aantal personen weet dit na  $n - 1$  signalen

$\frac{1}{2^n}$  van het aantal personen weet dit na  $n$  signalen.

Wie lust heeft kan nu gaan rekenen. Interessanter is de limiet voor  $n \rightarrow \infty$ . Deze is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \dots \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \right.$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots +$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots +$$

$$\dots \left. \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = 2$$

Nu 45 personen. Noem ze  $P_1, \dots, P_{45}$ . Als eerste teken kiezen we voor 23 lang en voor 22 kort. Er zijn t.a.v. het eerste teken  $45^2$  mogelijkheden, namelijk alle mogelijkheden  $P_i$  luistert en  $P_j$  wordt opgeroepen. Zijn van  $P_i$  en  $P_j$  de eerste tekens verschillend, dan weet  $P_i$  dat hij niet opgeroepen wordt. Dit is  $23 \cdot 22 + 22 \cdot 23$  van de  $45^2$  gevallen.

We hadden ook bijv. 24 lang en 21 kort kunnen kiezen. Dan zou in  $2 \cdot 24 \cdot 21$  van de  $45^2$  gevallen een persoon  $P_i$  weten dat hij niet opgeroepen wordt. Omdat  $24 \cdot 21 < 23 \cdot 22$  en de minimalisering vereist, dat zoveel mogelijk personen reeds na 1 teken weten, dat ze niet opgeroepen worden, moeten we 23 en 22 kiezen.

De verdeling over lang en kort en de onderverdelingen de volgende keren wordt dus

|           |   |    |    |    |   |        |   |   |  |
|-----------|---|----|----|----|---|--------|---|---|--|
| 23    22  |   |    |    |    |   |        |   |   |  |
| 11        |   | 12 |    | 11 |   | 11     |   |   |  |
| 6         | 5 | 6  | 6  | 6  | 5 | 6      | 5 |   |  |
| 5 keer 3  |   | 3  | en |    | 3 | keer 3 |   | 2 |  |
| 13 keer 1 |   | 2  | en |    | 3 | keer 1 |   | 1 |  |
| 13 keer 1 |   | 1  |    |    |   |        |   |   |  |

Van de  $45^2$  gevallen zijn er dus

$2 \cdot 23 \cdot 22$  waarin een persoon  $P_i$  de eerste keer weet dat hij niet opgeroepen wordt

$2 \cdot 11 \cdot 12 + 2 \cdot 11 \cdot 11$  de tweede keer

$3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 6$  de derde keer

$5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$  de vierde keer

$13 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$  de vijfde keer

$13 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$  de zesde keer

en dan zijn er nog 45 gevallen waarin een persoon  $P_i$  weet dat hij wel opgeroepen wordt, 32 de vijfde en 13 de zesde keer.

Men weet dus of men opgeroepen wordt na gemiddeld

$$(1012 \cdot 1 + 506 \cdot 2 + 252 \cdot 3 + 126 \cdot 4 + 58 \cdot 5 + 26 \cdot 6 + 32 \cdot 5 + 13 \cdot 6) / 45^2 = 1,96$$

tekens

# Boekbesprekingen

Eduard Glas, *Wiskunde en samenleving in historisch perspectief*, Coutinho, Muiderberg 1981, 180 blz., f25,-.

In dit boek wordt behandeld de relatie tussen wijsgerige opvattingen, natuurwetenschap, wiskunde en maatschappijvorm. De auteur behandelt de west-europese cultuur vanaf de Pythagoreeërs tot heden. Het is een zware opgave in een zo kort bestek een zo omvangrijk onderwerp op leesbare wijze te behandelen. De schrijver is hier in geslaagd. Ik heb vooral respect voor de bondige en duidelijke wijze waarop hij de opvattingen van verscheidene denkers weet weer te geven.

Tot het begin van het industriële tijdperk nemen wijsbegeerte en wereldbeschouwing een centrale plaats in. Hieraan heeft de auteur dan ook ruime aandacht besteed. De rol van de natuurwetenschap begint zich in de 16e eeuw af te tekenen en vanaf dat tijdperk wordt deze daarom meer en meer op de voorgrond geschoven. In de 19e eeuw verdringt het belang van de natuurwetenschap dat van de wiskunde, terwijl in onze eeuw de relatie tussen wiskunde en maatschappij scherp naar voren komt. Gezien het feit dat zowel in de titel van het boek als in die van dit tijdschrift het woord 'wiskunde' voorkomt, meen ik nader te moeten ingaan op de stellingname van de auteur t.a.v. deze wetenschap. Zijn speciaal doel is de wederzijdse beïnvloeding na te gaan tussen wiskunde en samenleving. Uit de samenhang van de vier gebieden wijsbegeerte, natuurwetenschap, wiskunde, maatschappijvorm die tussen wiskunde en maatschappijvorm te isoleren, is moeilijk. Ik heb de indruk dat de schrijver hier soms een samenhang heeft willen aantonen door op geforceerde wijze te werk te gaan, althans in de periode voorafgaand aan de industrialisering. Zijn onderzoek resulteert in de volgende conclusie (blz. 137): 'Dit ... lijkt mij voldoende basis voor de stelling dat wiskunde *essentieel* niet als fenomeen van het zuivere denken kan worden beschouwd, doch slechts kan worden begrepen in haar connecties met de werkelijke materiële wereld.'

Gezien het belang van deze conclusie heb ik me met de auteur in verbinding gesteld om zijn bedoeling nader te begrijpen. Hij bedoelt hiermee: wiskunde is niet vanuit het zuivere denken geschapen. De wiskundige begrippen vinden hun oorsprong in de realiteit. Gaat men axiomatisch te werk, dan heeft men deze realiteit toch in zijn achterhoofd. En zelfs als men de banden met de realiteit tracht te verbreken door bijv. generalisatie van het ruimtebegrip of van het getalbegrip, dan blijven ze indirect aanwezig. Wel, als dit de bedoeling is, dan kan ik me, en ik denk velen van ons, met deze stelling goed verenigen.

P.G.J. Vredenduin

Anne-Ruth van Kammen, Jan Willem Lackamp, Jaap Tempelman, *Studielessen en leerlingenbegeleiding voor de tweede brugklas*, Muusses Purmerend, 99 bl. f 15,—.

Het is een goede gedachte geweest van de schrijvers over hun werkwijze in de tweede brugklas te vertellen. Zoals zij zelf schrijven bieden zij hier een pakket mogelijkheden voor een begeleidingsuur. Talrijke nuttige tips over klasseboeken, cijferlijstjes, huiswerkmaken, rapporten vullen het eerste deel. Daarna volgt een beschrijving van een programmatische opzet. Een aantal aanwijzingen voor de diverse periodes om de leerlingen een open oog te laten krijgen voor zichzelf en de ander in zijn situatie. Het werkje wordt besloten met een overzicht van een aantal werkvormen.

Een buitengewoon aardig werkje dat van nut kan zijn voor vele/alle docenten in welk vak dan ook.

W. Kleijne

# Mededelingen

## STUDIEDAG/JAARVERGADERING van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Op zaterdag 30 oktober houdt de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een studiedag in combinatie met de jaarvergadering in het gebouw van de SOL, Archimedeslaan 16, Universiteitscentrum De Uithof te Utrecht, van 10.00 tot 17.00 uur.

(zie voor agenda en nadere informatie het septembernummer van Euclides)

### Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1981 - 31 juli 1982.

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. Th. J. Korthagen, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester F. F. J. Gaillard, overige leden L. Bozuwa, drs. J. van Dormolen, C. Th. J. Hoogsteder, M. Kindt, F. Mahieu, mw. drs. N. C. Verhoef.

Op zaterdag 31 oktober is de jaarvergadering gehouden in het gebouw van de SOL te Utrecht. Deze jaarvergadering was gecombineerd met een studiedag, die verzorgd was door een werkgroep onder leiding van de heer G. Vonk. Het thema voor deze dag was 'De microcomputer en het wiskundeonderwijs'.

De aanwezigen op deze studiedag konden deelnemen aan één of meer van de volgende studiegroepen:

- voorbeelden CAI,
- de computer als medium,
- probleemaanpak met kleinere machines,
- oefenen per computer,
- leer (de essenties van) programmeren in vijf kwartier,
- micro-computers bij economie onderwijs,
- computertoepassingen in HEWET,
- forum 'computer in de school'.

Ook hield de heer Vonk een lezing met als titel: 'Wat is een micro-computer?'. Vele leden waren deze dag aanwezig (er werden 234 lunches genuttigd) en werkten enthousiast in de werkgroepen.

Op zaterdag 13 februari hield de didactiekcommissie een studiedag in het gebouw van de SOL te Utrecht met als thema 'Rekening houden met individuele verschillen'. Uitgangspunt was de vorig verenigingsjaar uitgegeven brochure 'Rekening houden met individuele verschillen'. Vijf onderwerpen: leerstijlen, motivatie, proefwerk teruggeven, sectieoverleg en werkvormen werden aan de orde gesteld.

Op zaterdag 20 maart was in 's-Hertogenbosch de zevende gemeenschappelijke studiedag van de NVvW en de VVWL. Hier was als thema gekozen 'Tendensen in het wiskundeonderwijs in Vlaanderen en Nederland'. Inleiders uit België waren de heren R. Laumen en dr. C. de Munter, inleider uit Nederland was de heer J. de Lange.

Op 11, 12, 13 en 14 mei vonden examenbesprekingen plaats voor wiskunde lbo-c in 5 plaatsen, voor wiskunde lto-c/mavo-drie in 6 plaatsen, voor wiskunde mavo-4 in 20 plaatsen, voor wiskunde havo in 6 plaatsen, voor wiskunde I vwo in 6 plaatsen en voor wiskunde II vwo in Utrecht.

De didactiekcommissie heeft dit jaar gewerkt met drie werkgroepen, namelijk: Variabelen; Wiskunde in 3 havo en Toepassingen in de onderbouw bij de natuurkunde en rekenvaardigheden daarbij.

In oktober verscheen het 'Verslag Werkgroep LBO/MAVO-examen' van de werkgroep onder leiding van de heer F. Mahieu. Dit verslag zal in Euclides worden geplaatst.

Op de jaarvergadering is een statutenwijziging aangenomen zodat de statuten nu zijn aangepast aan de huidige wettelijke regelingen voor verenigingen.

Met ingang van 1 augustus is de C.V.O. omgezet in de C.E.V.O. (Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven); de vereniging is vertegenwoordigd in de subsecties mavo en havo-vwo.

De werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde' en een deel van ons bestuur hebben dit verenigingsjaar diverse gesprekken gevoerd en de werkgroep heeft besloten binnen de vereniging te gaan werken.

Ook dit jaar was er een nauwe samenwerking met de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars die

zich onder andere uitte in de gemeenschappelijke bestuursvergadering in september, de gemeenschappelijke studiedag in maart en bezoeken van elkaars bijeenkomsten.

Het bestuur was verder vertegenwoordigd op de redactievergaderingen van Euclides, op het congres, tevens jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Onderwijsgeevenden in de Natuurwetenschappen, op de prijsuitreiking van de Nederlandse Wiskunde-olympiade en voerde gesprekken met de Innovatiecommissie Participerend Leren.

Het bestuur vergaderde dit jaar tien maal, waaronder een maal met de inspecteurs J. Boersma, drs. W. E. de Jong, P. Lafeber en drs. B. J. Westerhof.

## **De rondvraag van de algemene vergadering op 31 oktober 1981**

Tijdens de rondvraag op de algemene vergadering van de N.V.v.W. op 31 oktober 1981 kwamen enkele kwesties ter sprake waarover het bestuur heeft toegezegd met de inspectie te zullen spreken. Dit gesprek heeft inmiddels plaats gevonden.

In de eerste plaats betrof het problemen rond de versnelde correctie. Volgens het examenbesluit vwo-havo-mavo (artikel 28.1) stellen de examinerator en de gecommiteerde het cijfer voor het schriftelijk examen vast. In de praktijk wordt van dit artikel afgeweken, de examinerator en gecommiteerde stellen niet het cijfer, maar de score vast.

De redenen om af te wijken van artikel 28.1 worden genoemd in artikel 27.7. Eén van deze redenen is dat de examenprocedure wordt versneld. Vanuit de vergadering werd opgemerkt dat ook als het examen wiskunde vroeg in de examenperiode valt en de omzetting score-cijfer tijdig kan plaats vinden, deze niet zo snel mogelijk aan de betrokkenen wordt medegedeeld, zodat artikel 27.7 niet van toepassing is. De wens werd geuit dat de omzettingstabel score-cijfer bekend is als het overleg tussen examinerator en gecommiteerde plaats vindt.

Tijdens het overleg tussen inspectie en bestuur is deze moeilijkheid besproken. De inspecteurs ontkenen met nadruk dat de omzetting score-cijfer c.s.e. expres zo laat wordt bekend gemaakt dat geen overleg tussen de examinerator en gecommiteerde over het eindcijfer mogelijk is. Een medewerker van het CITO deelde mee dat het een praktisch probleem is. Nadat de computergegevens bekend zijn op het CITO moet de CEVO aan de hand van frequentietabellen nagaan of een cesuurverschuiving noodzakelijk is. Daarna kunnen de pakketten met antwoordkaarten en omzettingstabellen score-cijfer pas klaar gemaakt worden. De planning bij het CITO is uiterst krap gesteld en telt ten hoogste 1 reservdag. Het CITO is genoodzaakt alle gegevens voor – en alle resultaten van de scholen in één keer te verzenden, en dit kan alleen aan het eind van de examenperiode gebeuren. De conclusie van het gesprek met de inspectie hierover was dat artikel 28.1 ter wille van de duidelijkheid zo spoedig mogelijk dient te worden gewijzigd, zodat daarin wordt vastgesteld dat voor de vakken, waarvoor een versnelde correctieprocedure in het 1e tijdvak plaats vindt de examinerator en gecommiteerde de score vaststellen.

Ook werd tijdens de rondvraag op 31 oktober gevraagd om de puntenaantallen per vraagstuk en per onderdeel vooraf bekend te maken. Reeds op de jaarvergadering is meegedeeld dat bij Nederlands, oude talen, natuurkunde en scheikunde het correctievoorschrift pas na het examen wordt vastgesteld. De CEVO wil geen verschil tussen de vakken en heeft dus 'neen' gezegd tegen het bekendmaken van de puntenaantallen bij de wiskunde. Het bestuur is van mening dat nu, waarbij aan elk vraagstuk praktisch eenzelfde aantal punten wordt toegekend, nl. 22 of 23 punten bij wiskunde één vwo en 18 punten bij havo, wat de kandidaten bekend is, er naast mogelijke voordelen ook nadelen zijn aan het bekend maken van het maximaal te behalen aantal punten per onderdeel. De kandidaat kan psychologisch worden beïnvloed (b.v. als hij een hoog gewaardeerd onderdeel niet kan vinden).

Als door de CEVO zou worden overgegaan op een normering waarbij het totaal aantal toe te kennen punten per vraagstuk sterk verschilt zal het bestuur het voorstel de puntenverdeling vooraf bekend te maken, opnieuw bezien.

Th. J. Korthagen, voorzitter



## Oriënterend colloquium voor leraren

Onder bovengenoemde titel wordt door de afdeling Zuivere Wiskunde van het Mathematisch Centrum jaarlijks een cursus georganiseerd voor wiskundeleraren VWO/HAVO/HBO en andere belangstellenden. Deze cursussen zijn bedoeld om de deelnemers de gelegenheid te geven hun kennis van de wiskunde uit te breiden dan wel op te frissen. Het onderwerp voor het cursusjaar 1982/1983 is

### SPELTHEORIE

Een gedeelte van de cursustijd zal besteed worden aan de wiskundige analyse van spelen als 'Nim' en 'Hackenbusch'; dit gedeelte der cursus zal gebaseerd zijn op ideeën uit het boek 'On numbers and games' van J. H. Conway.

De overige tijd zal besteed worden aan een aantal optimaliseringsproblemen die onder de naam 'speltheorie' bekend zijn; hierbij zullen ook toepassingen ter sprake komen.

*Aanvangsdatum:* woensdag 6 oktober 1982

*Tijd:* 19.30-21.15 uur

*Frequentie:* wekelijks (tot half maart, met een onderbreking gedurende de Kerstvakantie)

*Plaats:* Hervormd Lyceum, Brahmsstraat 7, Amsterdam

*Inlichtingen en opgave:* J. de Vries, Mathematisch Centrum, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, tel.: 020-592 41 70

*Kosten:* geen

## Wintersymposium

Op zaterdag 8 januari wordt weer het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap gehouden.

*Plaats:* K.S.G. 'De Breul', Arnhemsebovenweg 98, Zeist

*Onderwerp:* *Elementen in de Wiskunde.*

*Spreekers:* Bos, Lenstra jr. en Scheffer.

*Kosten:* Het symposium is gratis, de lunch kost f10, —.

*Aanmelden:* Door overmaking van f10, — op giro 4015571 t.n.v. H. Weenink, Ambonstraat 4, Delft.

## Vrouwen en wiskunde

Zaterdag 9 oktober a.s. houdt de groep vrouwen en wiskunde haar derde landelijke bijeenkomst. 's Morgens zullen de diverse werkgroepen verslag doen van de belangrijkste activiteiten in de afgelopen periode. 's Middags zal er gesproken worden over de doelstellingen en de toekomstplannen van zowel de afzonderlijke werkgroepen als van de groep in haar geheel. Uitnodigingen met tijd, plaats en agenda zullen nog verzonden worden.

Nieuwe belangstellenden kunnen zich voor informatie wenden tot

Jophien van Vaalen tel. 020-25 08 71 of

Mieke Osse tel. 02159-1 56 45.

## VVWL-studiedag GENT, 23 oktober 1982

De VVWL houdt op zaterdag 23 oktober 1982 een studiedag in een gebouw van de Rijksuniversiteit Gent (adres: Hoveniersberg 4, Gent).

*Thema:* DIFFERENTIATIE in de WISKUNDELESSEN.

*Agenda*

v.a 9.30: ontvangst

10.00: opening door voorzitter Frank Laforce

- 10.10: spreekbeurt door Roger Dierendonck (K.T.A. Diksmuide): *Hoe zie ik als wiskundeleerbaar een VBSO-leerling?*
- 11.20: spreekbeurt door Etienne Daneel (Pedagogisch Centrum Stad Gent): *Een project gedifferentieerd wiskundeonderricht in de Gentse stedelijke middenscholen.*
- 12.45: lunch
- 14.30: spreekbeurt door Hugo Van Rompaey (K.A. Gent-Voskensl.) *Differentiatie in het wiskunde-onderwijs in de observatie- en oriënteringsjaren.*
- 16.00: rondvraag en sluiting

## Symposium 'Computers in het onderwijs'

Op zaterdag 13 november 1982 wordt er te Antwerpen een symposium over school en computer georganiseerd. Daar zal aandacht besteed worden aan de eisen die aan didaktische software gesteld worden, aan de computer als hulp in de schooladministratie en aan het gebruik van de microcomputer als didaktisch hulpmiddel. Al deze aspecten zullen met demonstraties geïllustreerd worden.

Het symposium zal plaatsvinden in het Stedelijk Instituut voor Technische Studies nr. 5, VIIe Olympiadelaan 2 te Antwerpen. Het vangt aan om 9.30 uur (deuren open 9.00 uur) en eindigt omstreeks 16.45 uur. Tijdens de middagpauze zal er gezorgd worden voor belegde broodjes, koffie en thee. Het inschrijvingsgeld bedraagt 250 fr (middagmaal niet inbegrepen), inschrijvingsformulieren aan te vragen bij CONO/VBSG (kern bijscholing), Albertinaplein 2 te 1000 Brussel.

Het symposium wordt georganiseerd door: de Stad Antwerpen, de Permanente Commissie van het Officieel Neutraal Gesubsidieerd Onderwijs (CONO) en de Vereniging van Belgische Steden en Gemeenten (VBSG). De werkgroep HAALO zal in opdracht van deze drie instanties mede instaan voor de praktische realisatie ervan.

### Informatie over de werkgroep HAALO, Mercatorstraat 66, 2000 Antwerpen

De werkgroep HAALO werd opgericht door de Permanente Commissie van het Officieel Neutraal Gesubsidieerd Onderwijs (CONO), de Vereniging van Belgische Steden en Gemeenten (VBSG) en het Stedelijk Pedagogisch Centrum te Antwerpen.

De belangrijkste opdrachten van de werkgroep zijn:

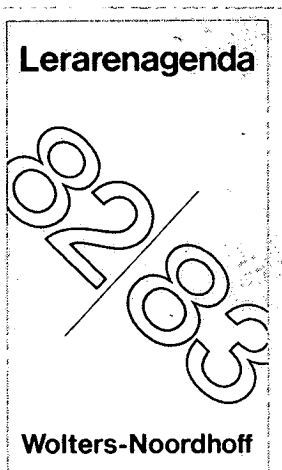
- het organiseren van bijscholingscycli ten behoeve van de leerkrachten uit het voortgezet onderwijs (leren programmeren, didaktische toepassingen microcomputer en leren maken van didaktische programma's),
- het maken van educatieve software voor de vakken economie, fysica, chemie, biologie, technologie en wiskunde,
- het geven van demonstraties en het stimuleren van een verantwoord gebruik van de microcomputer in het onderwijs.

Daarnaast wordt bestaande software en literatuur verzameld om alzo te komen tot een documentatiecentrum dat open staat voor belangstellenden.

De door de leden van de werkgroep geschreven syllabus 'de microcomputer in het secundair onderwijs' verschijnt in september (prijs ca. 200 fr, 150 pp.).

Weer leverbaar:

## de WN-Lerarenagenda 82/83



- aangepast aan de vakantieregeling voor het onderwijs van het Ministerie van O. en W.
- geschikt voor verschillende schooltypen en variabele werktijden

De nieuwe *WN-Lerarenagenda* is uitgebreid tot 200 pagina's en bevat onder meer:

- tabellen voor notatie van rapport-, proefwerk- en tentamencijfers
- tabellen voor berekening van deze cijfers
- jaarkalenders voor 1982, 1983 en 1984
- memorandum over de periode augustus 1982 tot maart 1984

Prijs: f 5,25

In verband met de leverbaarheid bij voorkeur vóór 1 juni 1982 bestellen bij uw schooladministratie of bij de boekhandel.



**Wolters-Noordhoff**

## INHOUD

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| O. Bottema: Goethe en de wiskunde                                       | 41 |
| F. Laforce, P. Vredenduin: Repeterende decimale breuken                 | 43 |
| J. van de Craats: Differentiëren zonder de Middelwaardestelling         | 53 |
| J. K. Timmer: Een oude leservaring met differentiaal                    | 59 |
| O. Bottema: een vergelijking van de vierde graad                        | 62 |
| H. Freudenthal: Inderdaad een oud probleem                              | 65 |
| J. K. Timmer: Korrel, oud probleem II                                   | 69 |
| J. A. F. de Rijk: Pythagoras . . . . de grote teleurstelling na 21 jaar | 70 |
| Recreatie                                                               | 73 |
| Boekbesprekingen                                                        | 76 |
| Mededelingen                                                            | 77 |
| Jaarverslag                                                             | 77 |

## ADRESSEN VAN AUTEURS

O. Bottema, Ch. de Bourbonstraat 2, 2628 BN Delft

J. van de Craats, Math. Inst. der R.U. te Leiden, Wassenaarseweg 80,  
postbus 9512, 2300 RA Leiden

H. Freudenthal, F. Schubertstraat 44, 3533 GW Utrecht

F. Laforce, Elzenhoutstraat 2, 2610 Wilrijk, België

J. A. F. de Rijk, Stationsstraat 114, 3511 EJ Utrecht

J. K. Timmer, Karel Gerardstraat 7, 7552 GT Hengelo

P. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth