

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

58e jaargang

1982/1983

no. 1

augustus/september

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Dr. F. Goffree - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto -
P. E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders -
Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) -
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester) -
B. Zwaneveld (hoofdredacteur)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie:

F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 45,- per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 30,-; contributie zonder Euclides f 25,-.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9", 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1\frac{1}{2}$.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-550834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 7,- (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.

Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Bij het begin van deze jaargang

Bij het begin van deze jaargang ondergaat de redactie twee wijzigingen. Na jarenlang op zijn eigen bescheiden wijze aan de redactie te hebben meegewerkt heeft Pierre van Hiele te kennen gegeven zijn lidmaatschap te willen beëindigen. Het is hier niet de juiste plaats en gelegenheid te schrijven over Pierres verdiensten voor het Nederlandse wiskundeonderwijs. Het is hier wel de juiste plaats Pierre te bedanken voor het vele werk dat hij voor Euclides gedaan heeft, maar meer nog voor de vriendschap die wij van hem mochten ondervinden. Node zien wij hem gaan.

Ook Bert Zwaneveld heeft te kennen gegeven wegens drukke schoolwerkzaamheden de redactie te willen verlaten. Zolang niet in zijn opvolging is voorzien blijft hij in functie. Wij maken de lezers attent op de oproep op bladzijde 2 in verband met zijn opvolging.

Na deze min of meer huishoudelijke mededelingen volgen de gebruikelijke terugblik op de vorige jaargang en de aankondiging van wat u als lezer aan bijzonderheden in de komende kunt verwachten.

Terugblik

Het afgelopen jaar waren er drie nummers min of meer aan één onderwerp gewijd, zonder dat er sprake was van een special, een speciaal nummer dat op initiatief van de redactie tot stand komt met behulp van deskundigen van buiten de redactie. Veeleer waren een aantal 'toevallige' artikelen over een onderwerp in één nummer samengebracht: over wiskunde en taal, over differentiaalvergelijkingen en over kansrekening en statistiek. De redactie wil graag door artikelen of brieven van u vernemen wat uw mening over deze onderwerpen is, maar ook wat u van dit soort nummers vindt. Verder was er het traditionele examennummer met alle opgaven van het eerste en tweede tijdvak. Gezien de omvang van dat nummer en de financiële consequenties ervan hebben we helaas moeten besluiten dit examennummer als dubbelnummer te moeten brengen. Dit betekende dat het aantal redactionele pagina's afgenomen is, want de totale omvang van de vorige jaargang is nauwelijks overschreden. Mede gezien de kopijvoorraad betreuren wij dit ten zeerste.

Vooruitblik

De redactie streeft ernaar de al eerder aangekondigde special over de relatie tussen toetsen en wiskunde-onderwijs nog deze jaargang uit te brengen. De groep die deze special voorbereidt is met het werk begonnen.

Verder komen er een aantal artikelen verzorgd door leden van de groep Vrouwen en Wiskunde.

Ondanks het hiervoor kort aangegeven probleem rond het examennummer

komt er ten gerieve van de lezers ook in de komende jaargang weer een examennummer, en wel op de volgende manier: in één enkel nummer komen alleen de opgaven van het eerste tijdvak.

De redactie blijft ernaar streven de inhoud van Euclides zo gevarieerd mogelijk te laten zijn. Maar daarnaast gaat de redactie door nummers aan één onderwerp te wijden, als dit toevallig zo uitkomt.

Tot slot

Wat opvalt is dat het aantal artikelen geschreven door 'zittende' leraressen en leraren afneemt ten gunste van artikelen van collega's die werken bij wetenschappelijke of dienstverlenende instituten of bij lerarenopleidingen. Dit vinden wij jammer. Onze oproepen telkenjare om bijdragen uit de praktijk lijken niet veel uit te halen.

Wij hopen op een kentering.

De redactie

Oproep

De redactie van Euclides roept wiskundedocenten op te solliciteren naar de vrijkomende functie van HOOFDREDAKTEUR m/v van EUCLIDES.

De taak van de hoofdredakteur is het algemene beleid van de redactie voor te bereiden en uit te voeren. Hij/zij beoordeelt als eerste de binnengekomen artikelen.

Van kandidaten wordt verwacht dat hij/zij

- op de hoogte is van de ontwikkelingen van het wiskundeonderwijs,
- kontakten heeft met kollega's van de verschillende schooltypen,
- in samenwerking met de overige redactieleden een visie op het wiskundeonderwijs ontwikkelt,
- deze visie in redactioneel beleid weet te vertalen,
- actief deelneemt aan het werk dat uit het maken van speciale nummers voortvloeit.

Het werk van de hoofdredakteur kost ten minste één avond in de week en ten minste twee redactievergaderingen per jaar.

De benoemingsprocedure gaat als volgt:

De redactie stelt na een gesprek met de sollicitanten een voordracht op. Bij het gesprek zijn aanwezig vertegenwoordigers van de redactie, het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Uitgever. Het bestuur benoemt de hoofdredakteur na overleg met de redactie en de uitgever.

Inlichtingen zijn te krijgen bij Bert Zwaneveld, telefoon 020-73 89 12.

Brieven voor 15 september 1982 te zenden aan de sekretaris van de redactie, P. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten.

Verslag werkgroep* 'LBO/MAVO-examen

F. J. MAHIEU

Inleiding

In 1980 werd bekend dat de Staatssecretaris van Onderwijs voornemens was om met ingang van het schooljaar 1984-85 het aantal zittingen van het eindexamen wiskunde voor het mavo van twee op één te brengen. Naar verluidt zou dat ook gaan gelden voor het lbo.

Het Bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren drong er op aan de twee zittingen te handhaven: wiskunde I (meerkeuzevragen, twee uren) en wiskunde II (open vragen, twee uren). Jammer genoeg werd dit niet mogelijk geacht.

Het belangrijkste gevolg van de wijziging is, dat zo de examineertijd op twee uren wordt gebracht.

Het Bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft in april 1980 een werkgroep samengesteld, die tot taak kreeg de problematiek rond deze verandering te bestuderen. De werkgroep onder voorzitterschap van F. J. Mahieu heeft achtmaal vergaderd en brengt hierbij verslag uit aan het Bestuur.

Probleemstelling

De werkgroep had tot taak de problematiek te bestuderen die samenhangt met het zo effectief mogelijk benutten van 120 minuten examineertijd.

Als belangrijk principe wordt gezien: flexibiliteit binnen bestaande wettelijke kaders.

Flexibiliteit ten aanzien van:

1 het benutten van allerlei vraagvormen

Het zich binden aan één bepaalde vraagvorm kan gemakkelijk leiden tot een specifiek op deze vraagvorm afgestemd gedrag van leerlingen of tot gestandaardiseerde opgaven, hetgeen ook op het dagelijks onderwijs een nadelige invloed kan hebben. De kwaliteit van het werk en de toegankelijkheid ervan voor de leerlingen kunnen verbeterd worden door diverse vraagvormen te hanteren.

* werkgroep ingesteld door het bestuur van de nederlandse vereniging van wiskundeleraren

2 het verwerken van de examenstof in de opgaven

In het voortgezet onderwijs komen veel variaties voor in schoolsoorten (vwo, havo, mavo en verschillende vormen van lbo) en binnen deze schoolsoorten nog verschillende niveaus (lbo-A, -B en -C; mavo-C en -D). Dit brengt ten aanzien van examineren één breed doelstellingsgebied met zich mee. Bovendien gaat het om 'onderwijs in ontwikkeling' en ontwikkeling in doelstellingen moet in het examen gestalte kunnen krijgen.

Bijvoorbeeld: als wiskunde-onderwijs zich ontwikkelt in de richting van wiskunde met een wat meer probleem- en context-gerichte inhoud, moet hierop bij het examineren kunnen worden ingehaakt.

3 het opstellen van het examenwerk

De examenpraktijk dient te worden gedragen door het onderwijs, maar omgekeerd oefent het examen invloed uit op de onderwijspraktijk. Bij het opstellen van examenwerk moet er tegen gewaakt worden dat dit op enigerlei wijze een ongunstige invloed is. In het algemeen genomen: de examenpraktijk mag niet leiden tot een vaste interpretatie van het examenprogramma.

Bij het samenstellen van de examenopgaven kunnen de opstellers putten uit een breed doelstellingsgebied. In grote lijnen onderscheiden we hier specifieke doelen en doelen van meer algemene aard (inventiviteit, logisch denken, mathematiseren). Nadat gekozen is uit het doelstellingsgebied moeten de opstellers een keuze kunnen maken uit een aantal vraagvormen om de betreffende doelstellingen zo goed mogelijk te kunnen toetsen.

4 het beoordelen van uitwerkingen van kandidaten

In een situatie waarbij 120 minuten examineertijd voorhanden is, lijkt het niet mogelijk bij elke vraag een motivering te vereisen die ook wat formulering betreft aan de hoogste eisen voldoet; men zou zich anders moeten beperken tot een relatief klein aantal vragen en dus ook doelstellingen.

In de beoordeling kunnen worden betrokken:

- het antwoord-zonder-meer (ook deelantwoorden);
- de gedachtengang (strategie die het eindantwoord oplevert);
- de formulering (toegankelijkheid van de gedachtengang).

Binnen een motivering is onderscheid te maken tussen de kwaliteiten van de gedachtengang (planning, oplossingsstrategie) en de correctheid van de formulering van dat proces (communicatie).

In onderstaand voorbeeld is de gedachtengang in grote trekken beschreven en te volgen.

Bereken de maximale functiewaarde van $x \rightarrow -x^2 + 3x + 10$.

$$\begin{array}{l} x^2 - 3x - 10 \\ (x+2)(x-5) \\ -2,5 \end{array} \quad 1\frac{1}{2} \rightarrow \cancel{+} 2\frac{1}{4} + 10 = \underline{\underline{12\frac{1}{4}}}$$

De volgende uitwerking noteert uitvoerig in grafiekentaal de berekening bij de inmiddels f genoemde functie.

Bereken de maximale functiewaarde van $x \rightarrow -x^2 + 3x + 10$.

De nulpunten van f vinden we uit $f(x) = 0$
 $-x^2 + 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+2) = 0$

De oplossingsverzameling is $\{-2, 5\}$

Vergelyking als: $x = \frac{-2 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 1\frac{1}{2}$

De top van de grafiek van f ligt op de symmetrie-as,
dus de extreemste waarde is $f(1\frac{1}{2})$

$$f(1\frac{1}{2}) = -2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2} + 10 = 12\frac{1}{4}$$

Het maximum van f is dus $12\frac{1}{4}$

Voorstel

Op grond van overwegingen zoals hierboven aangegeven, doet de werkgroep het volgende voorstel:

Het is mogelijk bij een schriftelijk examen met een tijdsduur van 120 minuten een driedeling te maken in kort-antwoordvragen, enkelvoudige vragen en meervoudige vragen, zoals hieronder te karakteriseren.

A kort-antwoordvragen

Bij deze vragen moet het mogelijk zijn snel en eenduidig te antwoorden. Stapeling van doelstellingen moet hier vermeden worden; per opgave staat zoveel mogelijk één doelstelling centraal. Er hoeft geen motivering van het antwoord te worden gegeven; bij de beoordeling telt alleen het antwoord-zonder-meer..

B enkelvoudige vragen

Een summiere motivering van het antwoord in de vorm van een aanduiding van de gedachtengang wordt gevraagd. Daarbij zijn zowel standaardprocedures als creatieve oplossingen mogelijk. Ook hier geen stapeling van doelstellingen, hoewel eenvoudige combinaties van doelstellingen mogelijk zijn. Bij de beoordeling worden zowel het eindantwoord als de gedachtengang betrokken.

C meervoudige vragen

Binnen één opdracht gericht op één probleemveld worden vragen gesteld. Hierbij is het analyseren van een zekere complexiteit belangrijk. Er worden eisen gesteld aan probleemaanpak en het overzien van een nieuwe situatie. Bij de beoordeling ligt het accent op de gedachtengang én de formulering hiervan.

De driedeling biedt voldoende mogelijkheden om ontwikkelingen die zich binnen het onderwijs voordoen, op te vangen. Begonnen kan worden met opgaven die aansluiten bij het karakter van de huidige examenopgaven. Ook zijn er mogelijkheden tot gefaseerde invoering.

De opgaven van de drie rubrieken moeten samen een zo groot mogelijk gedeelte van het examenprogramma bestrijken. Wat betreft het aantal opgaven van elke categorie en het aantal te behalen punten kan gedacht worden aan:

A 10 à 15 kort-antwoordvragen, ongeveer 20 punten

B 10 à 15 enkelvoudige vragen, ongeveer 50 punten

C één meervoudige vraag, ongeveer 20 punten

Voor de rubrieken worden richttijden aangehouden van respectievelijk ± 30 , ± 60 en ± 30 minuten. Hoewel de driedeling in het examenwerk door de opstellers moet worden aangegeven, zijn de kandidaten niet verplicht de onderverdeling in de tijd te volgen.

Het is mogelijk de wijze van normeren binnen de drie rubrieken aan te passen. Voorop staat dat het niet gaat om krenten wegen, maar om een redelijke verhouding te vinden in waardering van antwoord, gedachtengang en formulering.

A Ten aanzien van puntentoekenning geldt bij de kort-antwoordvragen alleen het eindantwoord. Het aantal te behalen punten kan per opgave verschillen vanwege een verschil in moeilijkheidsgraad of benodigde tijd. Het juiste antwoord wordt steeds met het maximaal aantal punten beloond en een niet-juist antwoord levert geen punt op.

B Bij de enkelvoudige vragen worden punten toegekend voor het eindantwoord én voor de motivering die tot dat antwoord leidt. Het maximaal aantal toe te kennen punten wordt uitgedrukt in een tweetal getallen; zo wil bijvoorbeeld 3;2 bij een opgave zeggen, dat het juiste eindantwoord drie punten oplevert en de gedachtengang maximaal twee. Het aangegeven tweetal getallen kan per opgave verschillen in verband met verschil in aard van de vereiste motivering (lengte, moeilijkheidsgraad).

– Als het eindantwoord juist is wordt het daarvoor vastgestelde aantal punten toegekend, onafhankelijk van de motivering. Vertoont de motivering een lacune van essentieel belang, dan kunnen de daarvoor bestemde punten niet geheel worden toegekend.

In het voorbeeld 3;2 krijgt een kandidaat bij een juist eindantwoord derhalve 3, 4 of 5 punten.

– Als het eindantwoord niet juist is als gevolg van een niet-essentiële fout (leesfout, slordig schrift, rekenfout), dan kan worden gehandeld als hierboven en wordt wegens de gemaakte fout 1 punt afgetrokken van het voor het eindantwoord vastgestelde aantal.

– Als het eindantwoord niet juist is en er is sprake van een essentiële fout, dan worden zowel voor het eindantwoord als de motivering punten afgetrokken. Afgewogen moet worden hoeveel punten nog kunnen worden toegekend, hetgeen ook geldt voor het geval dat het eindantwoord ontbreekt. Als hulp voor de corrector kunnen hier of daar in de normeringsvoorschriften beloningen

worden opgenomen voor juiste deel- of tussenfasen van de totale uitwerking.
C Bij het meervoudige vraagstuk kan de wijze van normering worden gebruikt zoals deze thans bij vraagstukken in open-vraagvorm wordt toegepast. Naast de antwoorden worden hierbij vooral gedachtengang en formulering gehonoreerd. Om concreter weer te geven in welke richting de gedachten van de werkgroep gaan, zijn in de bijlagen een aantal opgaven bijeengebracht in de rubrieken (A) kort-antwoordvragen, (B) enkelvoudige vragen en (C) meervoudige vragen.

Algemene opmerkingen

De werkgroep stuitte tijdens haar studie op enkele problemen die niet rechtstreeks betrekking hadden op haar taakstelling, maar die naar de mening van de werkgroep belangrijk kunnen zijn voor het onderwijs en dus voor de inhoud en vormgeving van het examen.

1 Vanuit het oogpunt van validiteit en betrouwbaarheid wordt gepleit voor een examentijd van $2\frac{1}{2}$ of 3 uur.

2 Het is bij meerkeuzevragen geen vanzelfsprekende zaak maar traditie, dat precies één alternatief het goede antwoord is. Nader onderzoek is gewenst naar gebruiksmogelijkheden waarbij een wisselend aantal alternatieven goed is.

3 Moet, zeker met een examen van één zitting in zicht, circulaire CVO-79/12 worden bijgesteld? Met name de passages over het tekenen van de grafiek van een tweedegraads functie en over opdrachten als 'Bereken ...'.

4 Er ontbreken voldoende gegevens over doelstellingen van wiskunde-onderwijs bij het middelbaar beroepsonderwijs. Is aansluiting vanuit lbo en mavo naar mbo bevredigend?

5 De mogelijkheid zou moeten worden onderzocht te komen tot een vraagstukkenbank met als voornaamste kenmerk dat de inbreng van het gehele onderwijs gewaarborgd is.

6 Een, niet zo gemakkelijk te wijzigen, examenprogramma dient ruimte te laten voor ontwikkelingen in de tijd en verschillen tussen scholen (bijvoorbeeld t.a.v. schoolonderzoek).

De werkgroep pleit voor een zodanig geformuleerd examenprogram dat daarbinnen ruimte blijft voor ontwikkeling én voor een expliciete verheldering van jaar tot jaar.

Bijlage A

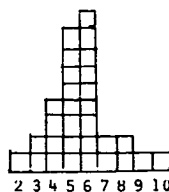
1. De grafiek van een functie f is een parabool die de x -as raakt.

Verder is gegeven $f(0) = f(7)$.

Voor welke x wordt de uiterste waarde van f bereikt?

2. In nebenstaand histogram is aangegeven hoe de verdeling is van de rapportcijfers van 30 leerlingen.

Wat is de mediaan van deze verdeling?

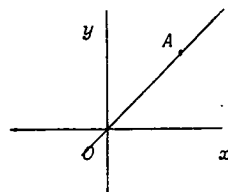


3. Voor α geldt: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ en $\sin \alpha = 0,4$.
Bereken $\sin 2\alpha$ in één decimaal nauwkeurig.
4. Iemand heeft drie proefwerken gemaakt; het gemiddelde cijfer van de drie proefwerken is 6,3.
Voor de twee volgende proefwerken haalt hij gemiddeld 7,7.
Wat is het gemiddelde cijfer van de vijf proefwerken?

5. In nebenstaand assenstelsel snijdt de lijn OA de x -as onder een hoek van 45° .

$OA = 4$.

Bereken de coördinaten van het punt A .

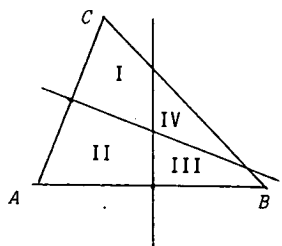


6. De functie f is gedefinieerd door $f(x) = -x^2 - x$.
Bereken $f(-1)$.

7. In de hiernaast getekende driehoek ABC verdelen de middelloodlijnen van de zijden AB en AC het binnengebied van driehoek ABC in de vlakdelen I, II, III en IV.

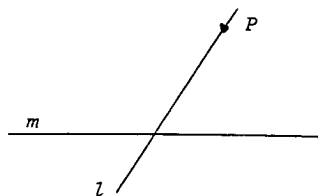
In welke vlakdelen geldt voor elk punt P :

$PA \geq PB$ en $PA \geq PC$?



8. Bij rotatie om $O(0, 0)$ over 90° is het punt A' het beeld van het punt $A(3, -4)$.
Geef de coördinaten van A' .
9. Gegeven is de functie $x \rightarrow x^2 - 2x - 3$.
Wat zijn de nulpunten van deze functie?

10. In nevenstaande figuur zijn de lijnen l en m elkaar snijdende lijnen.
 Voor het punt P geldt: P ligt op l en niet op m .
 Hoeveel cirkels zijn er die l in P raken en tevens m raken?

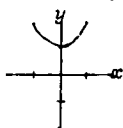


11. Los op: $x^2 + 5x = 0$.
12. De cirkel $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ heeft geen punt gemeen met de lijn
- $x = 1$
 - $x = -1$
 - $y = 1$
 - $y = -1$.

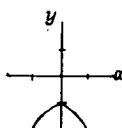
13. Los op: $\frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{3}x - 3$.

14. Los op: $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

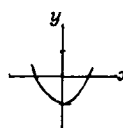
15. In welke van de hiernaast staande figuren is de grafiek getekend van de functie $x \rightarrow -x^2 + 1$?



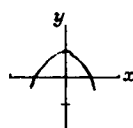
figuur 1



figuur 2



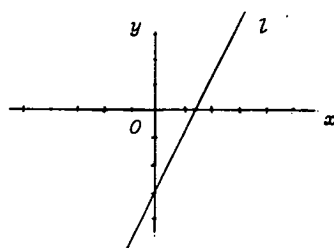
figuur 3



figuur 4

16. $3\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
 Bereken a en b .

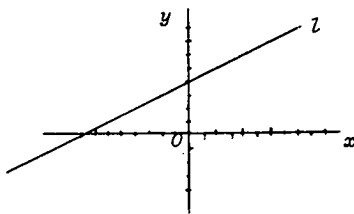
17. In nevenstaand assenstelsel is de lijn $l: y = 2x - 3$ getekend.
 Bij spiegeling in de y -as heeft het beeld van l de vergelijking...



18. Noteer de elementen van $\{(x, y) | y = -x^2 + 7\} \cap \{(x, y) | y = 3\}$.

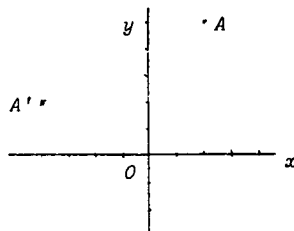
19. Los op: $\frac{3x - 1}{5} \leq 0$.

20. In nevenstaand assenstelsel is de lijn $l: x - 2y + 8 = 0$ getekend. Bij spiegeling in het punt $O(0, 0)$ heeft het beeld van l de vergelijking...

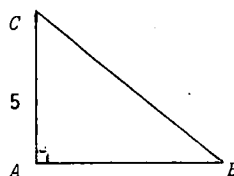


21. Los op: $2x - 5 < 4x + 15$.

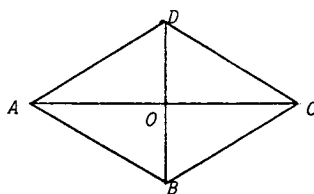
22. In het assenstelsel hiernaast zijn de punten $A(2, 5)$ en $A'(-4, 2)$ getekend. Bij een vermenigvuldiging is A' het beeld van A . Het centrum van vermenigvuldiging ligt op de y -as. Geef de vermenigvuldigingsfactor.



23. In de hiernaast getekende driehoek ABC is $\alpha = 90^\circ$. $\sin \beta = \frac{2}{3}$ en $b = 5$. Bereken a .



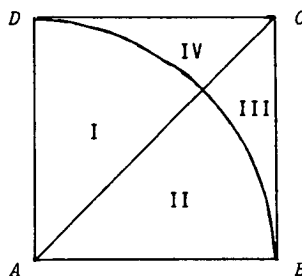
24. In nevenstaande ruit $ABCD$ is het punt O het snijpunt van de diagonalen.
a. Is $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{OD}$ waar?
b. Is $|\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OC} + \vec{OD}|$ waar?



25. Gegeven zijn de punten $A(4, 3)$ en $B(-4, -1)$. Bereken AB .

26. Wat is de richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten $(-2, -2)$ en $(2, 6)$?

27. In nevenstaand vierkant $ABCD$ met zijde 5 zijn de diagonaal AC en een deel van de cirkel $(A, 5)$ getekend. Hierdoor wordt het binnen gebied van het vierkant in de vlakdelen I, II, III en IV verdeeld. In welk vlakdeel geldt voor elk punt P : $PC \geq 5 \wedge d(P, AB) \leq d(P, AD)$?

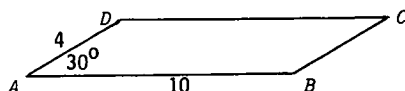


28. Hoeveel elementen bevat de verzameling

$$\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = -3x + 5\}?$$

29. In het hiernaast afgebeelde
parallellogram $ABCD$ is $AB = 10$,
 $AD = 4$ en $\angle BAD = 30^\circ$.

Bereken de oppervlakte van
vierhoek $ABCD$.



30. Van driehoek ABC is gegeven: $a = 3$ en $b = 9$.

Voor c kan gelden:

- a. $c = 6$
- b. $c = 8$
- c. $c = 11$
- d. $c = 13$.

Bijlage B

1. De lengte van de vector $\begin{pmatrix} k+3 \\ 2k+1 \end{pmatrix} = 5$. Bereken k .

2. Bij een translatie wordt de grafiek van $x \rightarrow x^2$ afgebeeld op de grafiek van $x \rightarrow x^2 + 4x + 1$.

Bereken de kentallen van de translatievector.

3. Gegeven is de functie $f: x \rightarrow x^2 - 4x + p$. De grafiek van f heeft geen punt met de x -as gemeen.

Bereken p .

4. Los op: $2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

5. Van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is gegeven $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ en $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.
Teken de vector $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$ en bereken $|\vec{p}|$.

6. De grafieken van $y = px - 1$ en $y = -3x + q$ hebben precies één punt gemeen. Dit punt ligt op de y -as.

Welke waarden kunnen p en q hebben?

7. In een parallellogram $ABCD$ is de grootte van een hoek gevormd door de diagonalen gelijk aan 40° . De lengten van de diagonalen zijn 6 en 8.

Bereken de oppervlakte van parallellogram $ABCD$.

8. De oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek is $6\frac{1}{4}\sqrt{3}$.

Bereken de lengte van een zijde.

9. Gegeven zijn de relaties $V = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ en

$$W = \{(x, y) \mid y < (x - 1)^2\}.$$

Teken de grafiek van $V \cap W$.

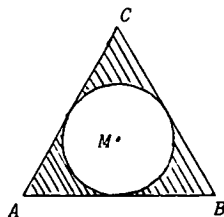
10. Iemand beweert: voor alle a, b, c en d geldt

$$a + c < b + d \Rightarrow a < b \wedge c < d.$$

Bewijs dat deze bewering niet waar is.

11. De zijden van nevenstaande gelijkzijdige driehoek ABC raken cirkel $(M, 1)$.

Bereken de oppervlakte van het gearceerde vlakdeel.



12. De grafiek van een functie f is een parabool.

Gegeven is verder:

(1) de y -coördinaat van de top is 10

(2) $f(3) = f(2)$

(3) $f(2) > f(4)$.

Uit welke twee van deze drie gegevens volgens volgt dat f een maximum heeft?

13. Van een kubus is de lengte van een ribbe 1. Acht van deze kubussen kunnen op verschillende manieren worden samengevoegd tot een balk.

Hoe groot kan de totale lengte van de ribben van zo'n balk zijn?

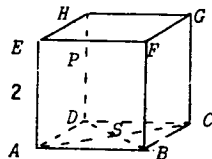
14. Iemand legt een weg van 80 km af in twee gedeelten. De snelheid op het eerste gedeelte is 16 km/uur. De snelheid op het tweede gedeelte is 32 km/uur. Het eerste gedeelte wordt afgelegd in t uur en de totale weg in 4 uur.

Leid hieruit een vergelijking in t af.

15. Van de kubus $ABCD.EFGH$ is de ribbe 2.

Het punt S is het snijpunt van de diagonalen AC en BD . Het punt P is het midden van de ribbe DH .

Bereken $\angle PSG$ in graden nauwkeurig.



16. Van driehoek ABC is gegeven: $\angle A = 90^\circ$. $AB = x$, $BC = 2x$ en $AC = 2$. Met de stelling van Pythagoras wordt x als volgt berekend:

(1) $BC^2 = AB^2 + AC^2$

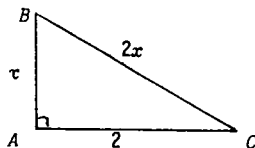
(2) $(2x)^2 = x^2 + 4$

(3) $2x^2 = x^2 + 4$

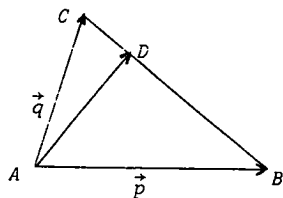
(4) $x^2 = 4$ dus $x = 2$

Waarom is dit antwoord fout?

Waar is de fout gemaakt?

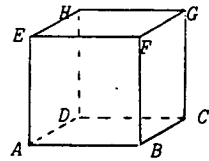


17. Het gemiddelde van de drie getallen 2, $2x$ en $\frac{1}{2}x^2$ is gelijk aan 6.
Bereken x .
18. Los op: $x^2 - 2x - 8 > 0$.
19. V is de verzameling van de positieve even getallen.
Waarom is de uitspraak $\frac{pq}{2} \in V$ voor elke $p \in V$ waar?
Waarom is de uitspraak $\frac{pq}{4} \in V$ voor elke $p \in V$ niet waar?
20. De punten $(-2, 1)$, $(1, 2)$ en $(5, p)$ liggen op één lijn.
Bereken p .
21. Teken een driehoek ABC . $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ en $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
Voor een punt P geldt: $\overrightarrow{AP} = \vec{u} + p\vec{v}$ met $0 \leq p \leq 1$.
Teken de verzameling van deze punten in de figuur.
22. Gegeven zijn de lijnen $y = 9x + 6$ en $y = -9x + 6$.
Bereken de scherpe hoek waaronder deze lijnen elkaar snijden in graden nauwkeurig.
23. Gegeven is de functie $f: x \rightarrow x^2 + 2$.
De lijn met vergelijking $y = mx$ raakt de grafiek van f .
Bereken m .
24. De grafiek van de functie $f: x \rightarrow x^2 + px + q$ snijdt de x -as in de punten $(-1, 0)$ en $(4, 0)$.
Bereken p en q .
25. Van een rechthoekige driehoek is gegeven dat de som van de rechthoeks-
zijden gelijk is aan 15 en dat de tangens van een hoek gelijk is aan 5.
Bereken de lengte van elke rechthoekszijde.
26. Voor $\angle A$ en $\angle B$ van driehoek ABC geldt:
 $\sin \alpha \cdot \cos \beta < 0$.
Beredeneer welke hoek van deze driehoek het grootst is.
27. Geef de vergelijking van de cirkel door de punten $O(0, 0)$, $A(2, 4)$ en $B(10, 0)$.
28. Gegeven is de driehoek ABC . Zie de
figuur hiernaast.
 $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ en $\overrightarrow{AC} = \vec{q}$. Het punt D ligt
op het lijnstuk BC zo, dat
 $BD = \frac{3}{4}BC$.
Druk $\overrightarrow{AD}$ uit in $\vec{p}$ en $\vec{q}$.



29. Van driehoek ABC is gegeven: $a = b$, $\gamma = 30^\circ$ en de oppervlakte is gelijk aan 9.
Bereken a .

30. Van de kubus $ABCD.EFGH$ is de ribbe gelijk aan 6.
 P is een punt van het lijnstuk AB en Q is een punt van het lijnstuk GH .
Bereken de maximale en minimale lengte van PQ .



Bijlage C

- Met domein $[-4, 6]$ zijn gegeven de functies $f: x \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ en $g: x \rightarrow \frac{1}{2}x + 2$.
 - Los op: $f(x) = g(x)$.
 - Teken de grafieken van f en g in één rechthoekig assenstelsel Oxy .
 - Bereken: $\frac{f(0)}{g(0)}$.
 - Lees uit de grafiek af voor welke x geldt: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$.
- Van een balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 6$ en $BC = CG = 2$.
Op de ribbe GH ligt een punt P met $HP = x$.
 - Neem als eenheid van lengte 1 cm en teken het diagonaalvlak $ABGH$ op ware grootte.
 - Bewijs dat voor elke x geldt: oppervlakte driehoek $ABP = 6\sqrt{2}$.
 - Neem $x = 1$ en bereken $\angle APB$ in graden nauwkeurig.
 - Voor welke x geldt: $\angle APB = 90^\circ$?
- Een groep van 60 leerlingen heeft een proefwerk gemaakt.
Bij een aantal leerlingen staat nog niet vast of het cijfer 5 of het cijfer 6 moet worden toegekend.
Onderstaande frequentietabel vermeldt de reeds vastgestelde resultaten.

cijfer	10	9	8	7	6	5	4	3
aantal leerlingen	8	9	13	7			6	5

- Kan uit deze nog onvolledige tabel de mediaan van alle 60 cijfers worden afgeleid?
Kan uit deze tabel de modus van alle 60 cijfers worden afgeleid?
Stel dat x leerlingen het cijfer 6 en dat y leerlingen het cijfer 5 voor het proefwerk krijgen en stel dat het gemiddelde van de 60 cijfers precies 7 bedraagt.
- Leid hieruit twee vergelijkingen in x en y af.
- Bereken x en y .

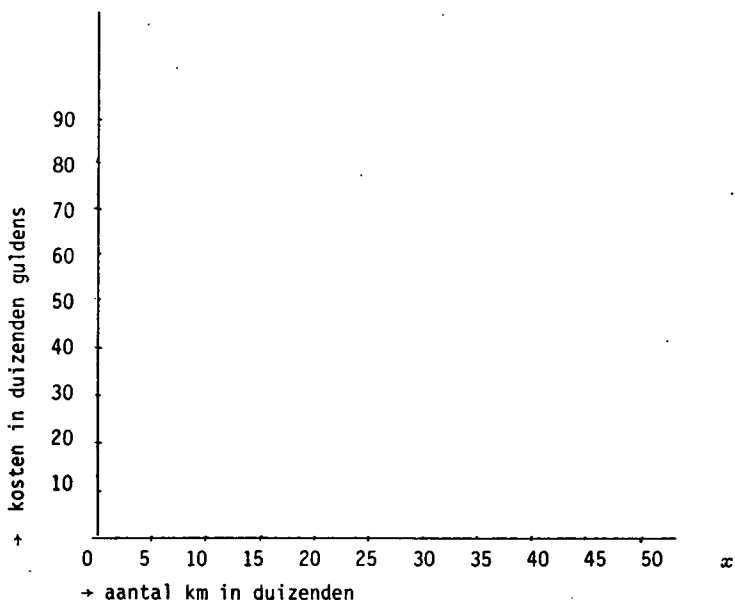
4. In een bedrijf heeft men voor minstens een jaar een vrachtauto nodig. Men staat voor de keuze: een vrachtwagen kopen of een vrachtwagen huren. Bij kopen zijn de vaste lasten (rente, onderhoud, belasting enz.) per jaar f15000, — en moet er f1,50 per gereden kilometer worden betaald. Bij huren zijn er géén vaste lasten (die zijn voor rekening van de verhuurder) en er moet f2, — per verreden kilometer worden betaald.

a. Stel dat de vrachtauto 20.000 km per jaar moet rijden.

Wat is dan voor het bedrijf het voordeligst? Kopen of huren?

Stel dat de vrachtauto x km per jaar moet rijden.

- b. Druk (in guldens) de kosten uit in x in het geval van kopen.
 c. Druk (in guldens) de kosten uit in x in het geval van huren.
 d. Neem onderstaande figuur over en teken in die figuur een grafiek van het gevondene bij b. en een grafiek van het gevondene bij c.
 e. Bij welk aantal kilometers per jaar is kopen voordeliger dan huren?



5. In een rechthoekig assenstelsel is voor elke p een verzameling plaatsvectoren gedefinieerd door

$$V = \left\{ x_p \mid x_p = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- a. Neem $p = 2$ en bereken de kentallen van x_2
 b. Toon aan: $\begin{pmatrix} 36 \\ 19 \end{pmatrix} \in V$.
 c. De eindpunten van de vectoren x_p vormen een lijn l met vergelijking $y = ax + b$.

Bereken a en b .

d. Voor welke p is $|x_p| = 5$?

e. Bereken voor welke p de vector x_p een hoek van 45° maakt met de positieve x -as.

Naschrift

De werkgroep is er zich van bewust dat haar voorstel ten aanzien van een examen in één zitting niet volmaakt is en wellicht vatbaar is voor verbetering.

Op- of aanmerkingen die tot verbetering kunnen leiden, met name van de zijde van docenten die bij het lbo of het mavo werkzaam zijn, worden op prijs gesteld.

Een en ander kan worden ingezonden aan J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.

Een bekend probleem opgelost door een onbekend wiskundige*)

A. W. GROOTENDORST

1 Dit artikel is gewijd aan een overbekend probleem en een nagenoeg onbekend wiskundige.

Het probleem is de trisectie van de hoek, de wiskundige is de Fransman Pierre-Laurent Wantzel, geboren op 5 juni 1814, overleden op 21 mei 1848.

Ik baseer mij daarbij op een artikel in het *Journal de Mathématiques pures et appliquées* uit 1837, getiteld: *Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec le règle et le compas*, van de hand van genoemde Wantzel, op dat ogenblik 23 jaar oud en élève-ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

Let wel: Galois is reeds 5 jaar tevoren overleden, maar het zal nog tot 1843 duren voordat Liouville het werk van Galois bekend maakt in een zitting van de Académie Française.

Dat men overtuigd was van de onmogelijkheid van de trisectie blijkt wel uit een resolutie van de Académie Française, aangenomen in 1775, 'de ne plus examiner aucune solution de la duplication du cube, de la trisection de l'angle ou de la quadrature, ni aucune machine annoncée comme un mouvement perpétuel'.

2 Wie was deze Wantzel? Wij hebben slechts een korte biografie van hem, geschreven door Barré de Saint-Venant (*Nouvelles Ann. de Math.* Vol 7 (1848) pag. 321-331) en een necrologie van A. de Lapparent (*Ecole Polytechnique, Livre du Centenaire*, 1794-1894, Vol. I. pag. 133-135).¹⁾

Pierre-Laurent Wantzel werd geboren op 5 juni 1814 te Parijs. Zijn vader, leraar wiskunde aan een handelsschool, was van Duitse afkomst en in 1798 gevlucht naar Frankrijk. Reeds op de lagere school vertoont Wantzel een grote intelligentie, een enorm geheugen en een grote aanleg voor wiskunde. In 1826 wordt hij op aanraden van Bobilier leerling aan de Ecole des Arts et Métiers te Châlons, blijft daar niet lang, bezoekt een particuliere school te Parijs (van Liévyns), leert daar latijn en grieks en wordt na 6 maanden toegelaten tot het tweede jaar van het Collège Charlemagne, waar hij niet alleen eerste prijzen behaalt voor latijn en grieks, maar vooral uitblinkt door zijn prestaties op het gebied van de wiskunde. In 1829, hij is dan 15 jaar oud, corrigeert hij drukproeven van het rekenkunde-

*) Gedeelte van een voordracht gehouden op de zesde gemeenschappelijke studiedag van NVvW en VVWL op 28 maart 1980 te Kapellen (B).

boek van Reynaud en bewijst daarin een lemma over het worteltrekken. In 1831 behaalt hij in een wedstrijd tussen Parijse Collèges onderling de tweede prijs voor het latijn en in 1832 de eerste prijs voor wiskunde en natuurkunde. In dat jaar wordt hij toegelaten als eerste zowel tot de Ecole Polytechnique als tot de Ecole Normale, een succes dat nooit eerder behaald was. Hij kiest de Ecole Polytechnique, die hij in 1834 verlaat als leerling ingenieur, belast met bruggen en wegen, een beroep dat hem echter niet bevalt; zijn belangstelling gaat uit naar *het onderwijs in de wiskunde*. In 1837 neemt hij ontslag en wordt in 1838 repetitor aan de Ecole Polytechnique en met ingang van 1843 belast met de toelatingsexamens. Deze functies zijn ook bekleed door onder andere Comte, Bertrand, Bonnet en Leverrier.

Zijn lessen zijn brilliant, zijn geduld is onuitputtelijk, zijn onpartijdigheid bij de examens spreekwoordelijk. Zijn werkkraacht is ongeëvenaard en dit wordt hem op tweeërlei wijze noodlottig. Allereerst hebben gebrek aan slaap, onregelmatige maaltijden, overmatig gebruik van koffie en zelfs opium, zijn gezondheid ondermijnd, anderzijds miste hij het vermogen zich lang op één zaak te concentreren. Op ieder hem gesteld probleem ging hij in en binnen de kortst mogelijke tijd kon men een antwoord van hem verwachten. Zijn eruditie bestreek een uitgebreid gebied: naast wiskunde ook muziek, filosofie en literatuur. Had hij langer (en anders?) geleefd, dan zou hij de vele zaken die hij geëntameerd heeft, hebben kunnen uitwerken en tot de voorste gelederen der mathematici hebben kunnen doordringen.

Teleurstellingen zijn hem niet bespaard gebleven: zoals gezegd werd zijn gezondheid ondermijnd en ook werd hij aan het einde van zijn leven ontzet uit zijn functie van examinerator, 'par une mesure profondément regrettable' schrijft De Lapparent.

Na een ziekte van 6 maanden sterft op 21 mei 1848, bijna 34 jaar oud, diep betreurd door zijn vrouw, zijn beide dochters en zijn vele vrienden, '... ce géomètre, qui a laissé... une trace lumineuse... semblable à celle que dessinent au ciel les météores aussitôt évanouis qu'entrevus', aldus De Lapparent.

Het oeuvre van Wantzel toont dat hij de grote problemen niet uit de weg gaat: hij vereenvoudigt de bewijzen van Abel en Ruffini over de onoplosbaarheid van de vijfde-graadsvergelijking. Hij mengt zich in het conflict tussen Liouville en Lamé inzake het probleem van Fermat en hij bewijst als eerste de onmogelijkheid om een willekeurige hoek met passer en liniaal in drie gelijke delen te verdelen. Andere mathematische bijdragen zijn: artikelen over onmeetbare getallen, differentiaalvergelijkingen, machtreeksen, minimumproblemen, diameters van krommen. Ook de mechanica en de natuurkunde hadden zijn belangstelling: daarvan getuigen zijn artikelen over de uitstroming van lucht, de rotatie van een vloeibaar lichaam, elastische staven en over de temperatuurverdeling binnen een cilinder.²⁾

3 Reeds in de oudheid kende men de volgende problemen:

- 1 Het *Delische* probleem: Is het mogelijk om met behulp van passer en liniaal de ribbe van een kubus te construeren waarvan de inhoud $2 \times$ zo groot is als die van een gegeven kubus?

- 2 *Trisectie probleem*: Kan men met behulp van passer en liniaal een gegeven hoek in drie gelijke delen verdelen?
- 3 *Quadratuur van de cirkel*: Kan men met behulp van passer en liniaal een vierkant construeren waarvan de oppervlakte even groot is als die van een gegeven cirkel?
- 4 Welke *regelmatige veelhoeken* kan men met passer en liniaal construeren?

Men kan deze problemen en het onderzoek naar hun eventuele oplossing formaliseren door precies af te spreken wat men bedoelt met de uitdrukking: 'met behulp van passer en liniaal'.

Wij gaan daarbij uit van een puntverzameling V_0 in het platte vlak die minstens twee punten bevat en laten nu de volgende *operaties toe* (*constructiepostulaten*):

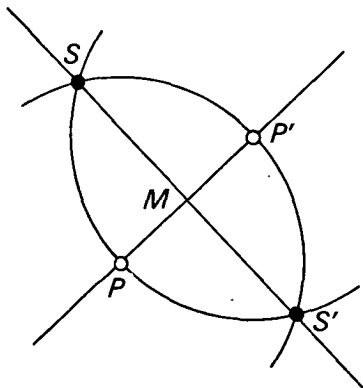
- 1 Trek door 2 punten van V_0 een rechte lijn.
- 2 Construeer een cirkel met als middelpunt een punt van V_0 en als straal de afstand van dat punt tot een ander punt van V_0 .

Wij geven nu de volgende

Definitie: Een punt S heet *in één stap construeerbaar* uit V_0 indien S het snijpunt is van twee lijnen of van twee cirkels of van een lijn en een cirkel, zoals bedoeld in 1 en 2.

Een punt S_n heet *construeerbaar* uit V_0 indien er een eindig aantal punten $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n-1}$ is, zodanig S_{i+1} *in één stap construeerbaar* is uit $V_0 \cup \{S_1, S_2, \dots, S_i\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

Voorbeeld: Als $V_0 = \{P, P'\}$ dan is het midden M van PP' construeerbaar uit V_0 (zie fig. 1).



Figuur 1

Op zeer natuurlijke wijze wordt nu de verbinding met de algebra gelegd. Wanneer men nl. in het platte vlak een coördinatenstelsel aanbrengt, dan kan men de coördinaten van de geconstrueerde punten uitdrukken in de coördinaten van de punten die tot V_0 behoren. We zullen daarbij de verzameling, bestaande uit de punten van V_0 en alle, in één stap, uit V_0 construeerbare punten V_1 noemen.

Evenzo zal V_2 bestaan uit alle punten van V_1 en de daaruit in één stap geconstrueerde punten etc..

Het is nu een eenvoudige zaak om de juistheid aan te tonen van de volgende *Stelling*

De coördinaten van een punt S , behorende tot V_{i+1} ($i = 0, 1, 2, \dots$), voldoen aan een vergelijking met als coëfficiënten rationale uitdrukkingen in de coördinaten van punten van V_i . Deze vergelijking is van de eerste of van de tweede graad.

Bewijs:

We onderscheiden drie gevallen:

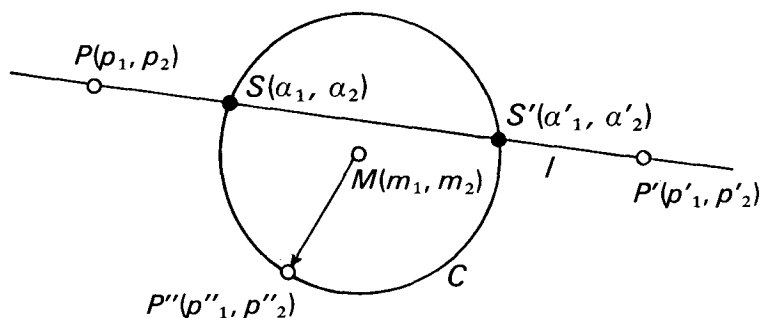
α S is het snijpunt van twee lijnen;

β S is een snijpunt van een lijn en een cirkel;

γ S is een snijpunt van twee cirkels.

We geven het bewijs voor het geval β (α en γ gaan analoog). Laat S een snijpunt zijn van de lijn l gaande door de punten $P(p_1, p_2)$ en $P'(p'_1, p'_2)$ met de cirkel C die tot middelpunt heeft $M(m_1, m_2)$ en gaat door $P''(p''_1, p''_2)$.

Hierbij behoren P, P', M en P'' tot V_i (zie fig. 2).



Figuur 2

Er geldt dan:

$$l \dots \frac{x - p_1}{p'_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{p'_2 - p_2}$$

$$C \dots (x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = (p''_1 - m_1)^2 + (p''_2 - m_2)^2$$

en dus voldoet de x -coördinaat van S aan de vierkantsvergelijking:

$$(x - m_1)^2 + \left\{ \frac{p'_2 - p_2}{p'_1 - p_1} (x - p_1) + p_2 - m_2 \right\}^2 = (p''_1 - m_1)^2 + (p''_2 - m_2)^2$$

die we schrijven als

$$x^2 + Ax + B = 0$$

waarbij A en B rationale uitdrukkingen zijn in $p_1, p_2, p'_1, p'_2, p''_1, p''_2, m_1, m_2$.

Een analoge redenering geldt voor de y -coördinaat van S .

We merken hierbij op dat Wantzel niet spreekt over coördinaten, maar over elementen van rechthoekige driehoeken en over 'lignes trigonométriques des angles'. Zijn conclusie (die hij overigens niet met berekening adstrueert) is echter gelijkwaardig: 'Ainsi l'inconnue principale du problème s'obtiendra par la résolution d'une série d'équations du second degré dont les coefficients seront fonctions rationnelles des données de la question et des racines des équations précédentes'.

Dat wil zeggen: indien een punt S_n geconstrueerd kan worden vanuit V_0 via de punten $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$, dan vinden we de x -coördinaat van S_n door achtereenvolgens op te lossen de vierkantsvergelijkingen:

- (1) $x^2 + A_0x + B_0 = 0$ (met wortels α_1 en α'_1)
- (2) $x^2 + A_1x + B_1 = 0$ (met wortels α_2 en α'_2)
- (3) $x^2 + A_2x + B_2 = 0$ (met wortels α_3 en α'_3)
-
- (n) $x^2 + A_{n-1}x + B_{n-1} = 0$ (met wortels α_n en α'_n)

Hierin hangen A_0 en B_0 rationaal af van de coördinaten van de punten van V_0 ; A_1 en B_1 hangen rationaal af van α_1 en α'_1 en de coördinaten van de punten van V_0 etc..

Anders gezegd: indien we het lichaam, voortgebracht door de coördinaten van V_0 , voorstellen door K dan geldt: $A_0, B_0 \in K$ (om de gedachten te bepalen: als $V_0 = \{(0, 0), (0, 1)\}$ dan $K =$ het lichaam $\mathbb{Q}$). Verder geldt $A_1, B_1 \in K(\alpha_1)$ of $A_1, B_1 \in K(\alpha'_1)$ dus $A_1, B_1 \in K(x_1)$ met $x_1 = \alpha_1$ of $x_1 = \alpha'_1$; $A_2, B_2 \in K(x_1, x_2)$ met $x_1 = \alpha_1$ of $x_1 = \alpha'_1$ en $x_2 = \alpha_2$ of $x_2 = \alpha'_2$, etc..

We kunnen ons daarbij beperken tot irreducibele vierkantsvergelijkingen. Immers, wanneer de vergelijking met rangnummer m reducibel is, d.w.z. wortels heeft die behoren tot $K_{m-1} = K(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ met zekere keuzen voor $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$, dan betekent dat dat de wortels α_m en α'_m van deze vergelijking rationaal afhangen van de elementen van K_{m-1} en men ziet eenvoudig in dat de bijbehorende punten dan met passer en liniaal te construeren zijn. In feite gaat het

dan om constructies van lijnstukken van de gedaante $a \pm b$, $a \cdot b$ en $\frac{a \cdot b}{c}$, uit

gegeven lijnstukken a , b en c .

In het vervolg van het betoog zullen we voordeel hebben van de volgende

Opmerking:

Uit $x^2 + ax + b = 0$, dus $x^2 = -ax - b$, waarbij a en b tot een lichaam K behoren, volgt:

$$x^3 = (a^2 - b)x + ab = a_3x + b_3 (a_3, b_3 \in K)$$

$$x^4 = a_4x + b_4 (a_4, b_4 \in K) \text{ etc.}$$

Dus een rationale uitdrukking van de gedaante:

$$R = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} \quad (a_i, b_j \in K)$$

is te herleiden tot

$$R = \frac{Ax + B}{Cx + D} \quad (A, B, C, D \in K).$$

Schrijven we nu, met nader te bepalen P en $Q \in K$:

$$R = \frac{(Ax + B)(Px + Q)}{(Cx + D)(Px + Q)}$$

dan vinden we:

$$R = \frac{A_1 x + B_1}{\{P(D - aC) + QC\}x + DQ - PCb}$$

Als we nu kiezen: $P = C$ en $Q = aC - D$, dan vinden we dat R te schrijven is in de gedaante:

$$R = A'x + B' \quad (A', B' \in K).$$

Voor de genoemde vierkantsvergelijkingen betekent dit:

$$x^2 + A_0 x + B_0 = 0, \tag{1}$$

met $A_0, B_0 \in K$.

$$x^2 + A_1 x + B_1 = 0, \tag{2}$$

met $A_1 = A_1(x_1) = a_{11}x_1 + a_{10}$
 $B_1 = B_1(x_1) = b_{11}x_1 + b_{10},$

waarbij $a_{ij}, b_{ij} \in K$ en x_1 een wortel van (1);

$$x^2 + A_2 x + B_2 = 0 \tag{3}$$

met $A_2 = A_2(x_1, x_2) = a_{21}(x_1)x_2 + a_{20}(x_1)$
 $B_2 = B_2(x_1, x_2) = b_{21}(x_1)x_2 + b_{20}(x_1)$

waarbij $a_{ij}(x_1)$ en $b_{ij}(x_1)$ behoren tot de ring $K[x_1]$ van de veeltermen in x_1 met coëfficiënten in K en x_2 een wortel is van (2). Bij gegeven (1) zijn er 2 mogelijkheden voor x_1 , dus 2 mogelijkheden voor (2) en dus 4 mogelijkheden voor x_2 , 8 mogelijkheden voor x_3 etc.

Algemeen: indien

$$x^2 + A_{n-1}x + B_{n-1} = 0 \quad (n)$$

dan zijn er 2^{n-1} mogelijkheden voor (n) en 2^n mogelijkheden voor de wortels x_n van (n) .

De 4 mogelijke wortels x_2 van (2) voldoen aan:

$$P_4(x) = \{x^2 + A_1(\alpha_1)x + B_1(\alpha_1)\} \{x^2 + A_1(\alpha'_1)x + B_1(\alpha'_1)\} = 0.$$

Indien we het linkerlid schrijven als een veelterm in x , dan zien we dat de coëfficiënten *symmetrisch* zijn in de wortels α_1 en α'_1 van de vergelijking

$$x^2 + A_0x + B_0 = 0 \quad (A_0, B_0 \in K)$$

en dus behoren de coëfficiënten van $P_4(x)$ ook tot K .

Stellen we de wortels van $P_4(x) = 0$ resp. α_{11}, α_{12} en $\alpha'_{11}, \alpha'_{12}$, dan voldoen de 8 mogelijke wortels x_3 van (3) aan:

$$P_8(x) = [\{x^2 + A_2(\alpha_1, \alpha_{11})x + B_2(\alpha_1, \alpha_{11})\} \{x^2 + A_2(\alpha_1, \alpha_{12})x + B_2(\alpha_1, \alpha_{12})\}] \\ \cdot [\{x^2 + A_2(\alpha'_1, \alpha'_{11})x + B_2(\alpha'_1, \alpha'_{11})\} \{x^2 + A_2(\alpha'_1, \alpha'_{12})x + B_2(\alpha'_1, \alpha'_{12})\}] = 0.$$

De coëfficiënten van de eerste factor tussen [] zijn symmetrisch in de wortels α_{11} en α_{12} van de vergelijking

$$x^2 + A_1(\alpha_1)x + B_1(\alpha_1) = 0$$

en dus is deze factor te schrijven als een vierde-gradspolynoom in x met coëfficiënten die zich rationaal laten uitdrukken in $A_1(\alpha_1)$ en $B_1(\alpha_1)$, d.w.z. behoren tot $K(\alpha_1)$.

Analoog laat de tweede factor tussen [] zich schrijven als een veelterm met coëfficiënten in $K(\alpha'_1)$.

Tenslotte merken we op dat de coëfficiënten van $P_8(x)$ symmetrisch zijn in de wortels α_1 en α'_1 van $x^2 + A_0x + B_0 = 0$ en dus behoren tot K , m.a.w. de 8 mogelijke wortels van (3) voldoen aan

$$P_8(x) = 0$$

waarin $P_8(x)$ een polynoom is van de graad 8 met coëfficiënten in K (= het lichaam voortgebracht door de coördinaten van de punten in V_0).

Dit kunnen we generaliseren voor het stelsel tweede-gradsvergelijkingen:

$$x^2 + A_0x + B_0 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + A_1x + B_1 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + A_2x + B_2 = 0 \quad (3)$$

$$\dots\dots\dots x^2 + A_{n-2}x + B_{n-2} = 0 \quad (n-1)$$

$$x^2 + A_{n-1}x + B_{n-1} = 0 \quad (n)$$

waarbij A_i en B_i rationale uitdrukkingen voorstellen in de coördinaten van de punten van V_0 en de grootheden $x_1, x_2, \dots, x_i$ (x_i staat daarbij voor één van de wortels van de vergelijking (t)), hetgeen we noteren als:

$$\begin{aligned} A_i &= A_i(x_1, x_2, \dots, x_i) \\ B_i &= B_i(x_1, x_2, \dots, x_i). \end{aligned}$$

Op grond van het eerder opgemerkte kunnen we zelfs schrijven:

$$\begin{aligned} A_i &= A_{i1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})x_i + A_{i0}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) \\ B_i &= B_{i1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})x_i + B_{i0}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) \end{aligned}$$

waarbij A_{ij} en B_{ij} analoge betekenis hebben.

Op analoge wijze kunnen we dan afleiden dat de 2^n mogelijke wortels van de vergelijking (n) nulpunten zijn van een polynoom $f(x)$ van de graad 2^n met coëfficiënten in K , dus $f(x) \in K[x]$.

4 Vervolgens bewijst Wantzel dat dit polynoom irreducibel³) is in $K[x]$ en wel aldus:

Onderstel – zegt hij – dat een polynoom $F(x) \in K[x]$ een nulpunt β_n gemeen heeft met $f(x)$, dan voldoet β_n aan

$$x^2 + A_{n-1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})x + B_{n-1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}) = 0$$

nadat een zekere keuze β_i voor de wortels van (1), (2), ..., $(n-1)$ gemaakt is. De betrekking $F(\beta_n) = 0$ kan dan op grond van de 'opmerking' op blz. 21 geschreven worden in de gedaante:

$$A_{n-1}^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})\beta_n + B_{n-1}^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}) = 0.$$

Maar dan moet gelden:

$$A_{n-1}^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}) = 0 \quad \text{en} \quad B_{n-1}^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}) = 0$$

daar anders $\beta_n \in K_{n-1}$ en dus de vergelijking met rangnummer n , reducibel zou zijn in $K_{n-1}[x]$.

Op analoge wijze kunnen we dan schrijven:

$$A_{n-2}^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-2})\beta_{n-1} + B_{n-2}^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-2}) = 0$$

en daaruit concluderen:

$$A_{n-2}^*(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = 0 \quad \text{en} \quad B_{n-2}^*(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = 0.$$

Zo teruggaande komen we op:

$$A_0^*B_1 + B_0^* = 0 \quad \text{met} \quad A_0^* = 0 \quad \text{en} \quad B_0^* = 0.$$

Nemen we nu een andere wortel, zeg β'_n van (n) , die tot stand gekomen is via de keuzen $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_{n-1}$ voor de wortels van de vergelijkingen (1), (2), $\dots$, (n) en vullen we die in plaats van β_1 etc. in $A_0^* \beta_1 + B_0^* = 0$ etc., dan vinden, weer 'opstijgende', uiteindelijk:

$F(\beta'_n) = 0$, d.w.z. ook β'_n is een wortel van $F(x) = 0$. Op deze wijze kunnen we aantonen dat alle wortels van $f(x) = 0$ ook voldoen aan $F(x) = 0$, maar dat betekent dat $f(x)$ irreducibel is in $K[x]$.

Dit leidt tot de volgende

Conclusie:

Indien een punt met behulp van passer en liniaal te construeren is uit een puntverzameling V_0 , dan voldoet de x - (resp. y -)coördinaat van dat punt aan een *irreducibele* vergelijking van de graad 2^n ($n \in \mathbb{N}$) met coëfficiënten die behoren tot het lichaam voortgebracht door de coördinaten van de punten van V_0 .

5 Het gevolg hiervan – aldus Wantzel – is 'dat ieder probleem dat leidt tot een irreducibele vergelijking waarvan de graad geen macht van twee is, niet opgelost kan worden met passer en liniaal'. Daarvan geeft hij dan de volgende voorbeelden.

De verdubbeling van de kubus met zijde a leidt tot de vergelijking $x^3 - 2a^3 = 0$. Zonder meer merkt Wantzel hierover op dat deze altijd irreducibel is en dus geen wortel heeft die rationaal van a afhangt.

Het probleem van de twee middenevenredigen. Hieronder wordt verstaan het bepalen van getallen x en y die bij gegeven a en b voldoen aan $a : x = x : y = y : b$. Hieruit leidt men dan af: $x^2 = ay$; $y^2 = bx$ en dus $x^4 = a^2 y^2 = a^2 bx$, waaruit volgt, indien $x \neq 0$, $x^3 - a^2 b = 0$. Van deze laatste vergelijking vermeldt Wantzel de irreducibiliteit voor het geval dat de verhouding $b : a$ 'geen derdemacht is'. Hij bedoelt daarmee geen derdemacht in het lichaam voortgebracht door a en b . Hierbij zij opgemerkt dat dit probleem nauw samenhangt met het voorgaande. Hippocrates van Chios (± 450 voor Chr.) herleidde nl. het probleem van de verdubbeling van de kubus hiertoe. Stelt men immers $b = 2a$, dan volgt uit de dubbele evenredigheid: $x^3 = 2a^3$. In 'moderne' bewoordingen gezegd, loste Hippocrates het probleem van de verdubbeling van de kubus op door het van O verschillende snijpunt te bepalen van de parabool met vergelijking $x^2 = 2ay$ en de parabool met vergelijking $y^2 = 2ax$ (zie fig. 3).

De trisectie van de hoek. Uitgaande van de eenvoudig af te leiden formule

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

vindt men door te stellen $\cos 3\alpha = a$ en $\cos \alpha = x$, dat

$$4x^3 - 3x - a = 0.$$

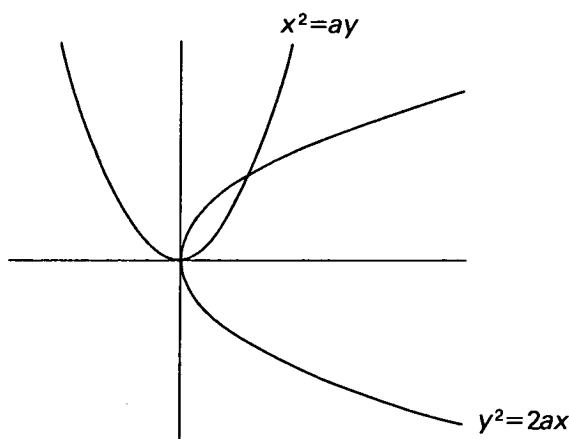
Hierover merkt Wantzel op dat deze vergelijking irreducibel is indien ze geen wortel heeft die rationaal afhangt van a en dat dit geval (nl. wel een in a rationale wortel) zich voordoet indien a algebraïsch is.⁴⁾

Men kan gemakkelijk een voorbeeld geven waarin de genoemde vergelijking irreducibel is. Stelt men nl. $3\alpha = 60^\circ$, dus $\cos 3\alpha = a = \frac{1}{2}$, dan gaat het om de vergelijking $8x^3 - 6x - 1 = 0$, die door de substitutie $y = 2x$ overgaat in

$$y^3 - 3y - 1 = 0$$

Welke vergelijking volgens de stelling van Gauss irreducibel is in $\mathbb{Q}[x]$ omdat het linkerlid in $\mathbb{Z}[x]$ geen lineaire factor bezit.

Hiermede is voor het eerst onomstotelijk de onmogelijkheid van de trisectie van een hoek 'in het algemeen' bewezen. Bescheiden, maar niet zonder gepaste trots, voegt Wantzel toe: *'Il nous semble qu'il n'avait pas encore été démontré rigoureusement que ces problèmes, si célèbres chez les anciens, ne fussent pas susceptibles d'une solution par les constructions géométriques auxquelles ils s'attachent particulièrement.'*



Figuur 3

De verdeling van de cirkel in gelijke delen is de laatste toepassing die Wantzel geeft. Gauss had reeds in zijn *Disquisitiones Arithmeticae*⁵) aangetoond dat voor een priemgetal m het linkerlid van de cirkelidelingsvergelijking

$x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x^2 + x + 1 = 0$ irreducibel is. Wantzel kan dan onmiddellijk constateren dat een regelmatige m -hoek (m -priem) slechts dan met passer en liniaal te construeren is indien m de gedaante

$2^n + 1$ heeft. Algemeener nu beschouwt Wantzel het geval dat m de gedaante a^α heeft (a priem) en merkt dan op dat de vergelijking van de primitieve wortels van $x^{a^\alpha} - 1 = 0$ nl.

$\frac{x^{a^\alpha} - 1}{x^{a^{\alpha-1}} - 1} = 0$ irreducibel is. Hij bewijst dat niet, maar zegt slechts dat het bewijs

te geven is door in het bewijs van Gauss van de irreducibiliteit van $x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x^2 + x + 1$ kleine wijzigingen aan te brengen. Zijn conclusie is dan dat een noodzakelijke voorwaarde voor de verdeling van de cirkel in a^α gelijke delen (a priem) is, dat de graad van de bijbehorende cirkelidelingsvergelijking, t.w. $a^\alpha - a^{\alpha-1}$ en dus $(a - 1)a^{\alpha-1}$, een macht is van 2. Wantzel merkt dan

op dat zowel $(a - 1)$ als $a^{\alpha-1}$ een macht van 2 moeten zijn en dat dus $a = 2$. De andere mogelijkheid noemt hij niet expliciet, maar hij gebruikt die wel in zijn slotconclusie. Dit is immers het geval als $a = 2^n + 1$ en tevens $\alpha = 1$. De genoemde slotconclusie luidt dan dat 'de verdeling van de omtrek van de cirkel in N delen (sic!) met behulp van passer en liniaal slechts dan uitgevoerd kan worden indien de van 2 verschillende priemfactoren van N de gedaante $2^n + 1$ hebben en slechts in de eerste macht voorkomen.'

Met nadruk vermeldt hij dan dat dit aangekondigd is door Gauss aan het einde van zijn verhandeling, maar dat deze laatste daarvan geen bewijs heeft gegeven. Ik laat de bewuste passage in de *Disquisitiones Arithmeticae* hier volgen. Ik vermoed namelijk dat de hierboven aangehaalde uitlating van Wantzel dat hij het eerste bewijs heeft gegeven van de onmogelijkheid van de trisectie van de hoek – blijkens zijn woordkeuze – nauw aansluit bij de opmerking van Gauss en wellicht bedoeld is als een reactie daarop. De bedoelde passus bij Gauss – inderdaad ook bij hem in hoofdletters afgedrukt – luidt als volgt:

OMNI RIGORE DEMONSTRARE POSSUMUS, HAS AEQUATIONES
ELEVATAS NULLO MODO NEC EVITARI NEC AD INFERIORES
REDUCI POSSE.....

In vertaling:

WIJ KUNNEN IN ALLE STRENGHEID AANTONEN DAT DEZE HOGERE MACHTSVERGELIJKINGEN OP GEEN ENKELE WIJZE VERMEDEN KUNNEN WORDEN EN OOK NIET HERLEID KUNNEN WORDEN TOT VERGELIJKINGEN VAN LAGERE GRAAD....

'Ware het niet – zo gaat het citaat verder – dat de grenzen van dit werk dit bewijs niet toelaten; toch menen wij ervoor te moeten waarschuwen dat niemand andere verdelingen dan die welke ons werk suggereert, nl. verdelingen in 7, 11, 13, 19 etc. delen; verwacht terug te kunnen brengen tot meetkundige constructies en zijn tijd op nutteloze wijze doorbrengt.'

Over de quadratuur van de cirkel rept Wantzel met geen enkel woord. Dit is echter niet zo verbazingwekkend: eerst in 1882 zal Carl Lindemann (1852-1939) voor het eerst de transcendentie van π aantonen.⁶⁾

6. Eén vraag resteert natuurlijk. Wantzel spreekt steeds over noodzakelijke voorwaarden. Doet hij nog een uitspraak over voldoende voorwaarden? Het laatste hoofdstuk van zijn verhandeling is daaraan gewijd, maar begrijpelijkerwijs komt hij daar niet geheel uit. Het probleem is of men bij een gegeven vergelijking van de graad 2^n kan constateren of deze irreducibel is en of men daarbij een stel tweede-graadsvergelijkingen kan vinden van het type dat wij hierboven beschouwden.

Om dit laatste na te gaan stelt hij een stel tweede-graadsvergelijkingen met onbekende coëfficiënten op, leidt daaruit de bedoelde vergelijking van de graad 2^n af en vergelijkt de coëfficiënten daarvan met die van de gegeven vergelijking van de graad 2^n . Voor het geval $n = 2$ geeft hij hiervan een voorbeeld. Met betrekking tot het onderzoek naar de irreducibiliteit onderscheidt hij een aantal gevallen zonder een algemene regel te kunnen geven en besluit dan met:

'Ces procédés sont d'une application pénible en général, mais on peut les

simplifier et obtenir des résultats plus précis dans certains cas très étendus, que nous étudierons spécialement.⁷⁾

Noten

- 1 Zie ook het artikel van F. Cajori in *Bull. Am. Math. Soc.* XXIV (1917).
- 2 Voor een complete bibliografie zie het genoemde artikel van Barré de Saint Venant.
- 3 Bij Wantzel is een irreducibele vergelijking gedefinieerd als één vergelijking... qui n'a pas de racines communes avec une équation de degré plus simple et à coefficients rationnels. (*Nouv. Ann. de Math.* Tome II p. 118 (1843)). Men ziet eenvoudig in dat deze definitie gelijkwaardig is met de gebruikelijke definitie van een vergelijking waarvan het linkerlid in $\mathbb{Q}[x]$ niet in factoren van lagere graad te ontbinden is.
- 4 Deze passage behoeft enige toelichting. Wantzel schrijft: 'cette équation est irréductible si elle n'a pas de racine qui soit une fonction rationnelle de a et c'est ce qui arrive tant que a reste algébrique ainsi le problème ne peut être résolu en général avec le règle et le compas'. Hiermee is dus gezegd: indien de vergelijking géén wortel heeft die rationaal afhangt van a , dan is de vergelijking irreducibel. Noodzakelijk voor reducibiliteit is dus het bestaan van een wortel die rationaal afhangt van a . In dit geval is echter a algebraïsch. Dus voor niet-algebraïsche a is de vergelijking zeker irreducibel (en voor algebraïsche a kan men op grond van het bovenstaande nog geen uitspraak doen). Wantzel merkt op grond hiervan op dat het probleem dus 'in het algemeen' niet met passer en liniaal oplosbaar is.
- 5 Zie Gauss *Disquisitiones Arithmeticae* Sectio VII i.h.b.Cap. 365. Van deze *Disquisitiones* is een Engelse vertaling voorhanden van de hand van Arthur A. Clarke S.J. uitgegeven door Yale University Press, New Haven 1966.
- 6 Zie bijv. I. Stewart *Galois Theory*, Chapman and Hall, London 1973.
- 7 Zie bijv. *Nouv. Ann. de Math.* Tome III p. 325-329 (1843) en Tome IV p. 57-65 (1845).

De tiende wiskunde olympiade in de Verenigde Staten

Aan de olympiade namen 150 leerlingen deel, geselecteerd op grond van de behaalde resultaten op het High School Mathematics Examination. De opgaven waren:

THE TENTH U.S.A. MATHEMATICAL OLYMPIAD 5 May 1981

1. The measure of a given angle is $180^\circ/n$ where n is a positive integer not divisible by 3. Prove that the angle can be trisected by Euclidean means (straightedge and compasses).
2. Every pair of communities in a county are linked directly by exactly one mode of transportation: bus, train or airplane. All three modes of transportation are used in the county with no community being serviced by all three modes and no three communities being linked pairwise by the same mode. Determine the maximum number of communities in this county.

3. If A , B and C are the measures of the angles of a triangle, prove that

$$-2 \leq \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C \leq 3\sqrt{3}/2$$

and determine when equality holds.

4. The sum of the measures of all the face angles of a given convex polyhedral angle is equal to the sum of the measures of all its dihedral angles. Prove that the polyhedral angle is a trihedral angle.

Note: A convex polyhedral angle may be formed by drawing rays from an exterior point to all points of a convex polygon.

5. If x is a positive real number and n is a positive integer, prove that

$$[nx] \geq \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \frac{[3x]}{3} + \dots + \frac{[nx]}{n},$$

where $[t]$ denotes the greatest integer less than or equal to t . For example, $[\pi] = 3$ and $[\sqrt{2}] = 1$.

De scores waren:

score	aantal leerlingen
0	24
1-20	75
21-40	30
41-60	14
61-80	7

De opgaven 3 en 4 werden het moeilijkst gevonden.

Overgenomen uit The Mathematics Teacher Vol. 74, nr. 9 (dec. 1981).

P. G. J. Vredenduin

Uit de tijdschriften

BERT ZWANEVELD

Willem Bartjens, tijdschrift voor reken- en wiskundeonderwijs op de basisschool, jaargang 1 ('81/'82) nr 1, oktober 1981, uitgegeven door S.L.O. (Stichting voor de Leerplanontwikkeling)

Met de opheffing van het I.O.W.O. verdween ook het Wiskobasbulletin. Niet als opvolger, wel in diens plaats, is er een nieuw blad: Willem Bartjens, genoemd naar de schoolmeester Willem Bartjens (1569-1638), die een rekenboek met een lang leven heeft geschreven: *De cijfferinge van Willem Bartjens Amstelredammer, inhoudende alle Grondregelen der Cijpherkonst. Seer nut en dienstelijk den leerlingen ende alle liefhebbers der Konst.*

Uit het redactioneel van het eerste nummer blijkt het volgende. Uitgaande van de kinderen die rekenen-wiskunde in de basisschool leren richt het tijdschrift zich op de activiteiten van de onderwijsgeevenden (in opleiding) en de teams waarin zij werken. Hierbij wordt 'onderwijs' kort samengevat als het bezigzijn met kinderen, suggesties en ideeën voor lesactiviteiten, het nadenken over wat kinderen gedaan hebben, het helpen van kinderen die uitvallen, het maken van keuzen in het onderwijs, het bespreken van rekenwiskundeonderwijs in het team. Willem Bartjens wil het contactblad zijn tussen de wiskunde-onderwijsontwikkelaars en de onderwijsgeevenden.

Het eerste nummer bevat artikelen over: beschrijvingen van onderwijs (observaties en beschouwingen naar aanleiding ervan), hoe het rekenen door kinderen in feite gebeurt, cijferen en het toepassen van het geleerde in (kon-)tekstrijke problemen, een kritische beschouwing over leerdoelgerichte toetsen van het CITO bij het onderwerp kommagetallen, en hoe in een regio het hoofdrekenen aan het eind van de lagere school getoetst is.

De doelgroep is: kleuterleid(st)ers, onderwijzers, studenten aan P.A. en K.L.O.S., opleiders, schoolbegeleiders, onderzoekers, en iedereen die bij het reken-wiskundeonderwijs betrokken is. Graag wil ik hier aan toevoegen dat zeker dit eerste nummer ook voor docenten wiskunde in het voortgezet onderwijs zeer veel lezenswaardigs bevat. Ik hoop dat het beknopte overzichtje hiervoor daar iets van heeft duidelijk gemaakt. Wat mij verder opviel was dat de problemen met het rekenen in het basisonderwijs veel parallellen met het wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs vertoont: rekenen-wiskunde-sec versus toepassen, oefenen en beoefenen, flexibel (leren) denken, om maar een

paar punten te noemen. Een objectievere aanbeveling om kennis van de inhoud van dit blad te nemen is de volgende. Weten hoe er op dit moment over het rekenonderwijs in de lagere school gedacht wordt, en hoe er nu feitelijk gewerkt wordt kan alleen tot verbetering van het wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs leiden.

Van harte aanbevolen dus.

Het blad is een initiatief van de vakgroep OW & OC (onderzoek wiskunde-onderwijs en onderwijs-computercentrum, Utrecht) en de groep 'reken-wiskundeonderwijs 4-12' van de sectie wiskunde van de SLO, die gezamenlijk de redactie voeren. Een jaargang omvat 4 nummers van ong. 50 bladzijden.

Voor nadere inlichtingen kan men zich wenden tot

SLO, sectie III,

postbus 2041,

7500 CA Enschede

tel.: 053-84 08 40, toest. 337

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en
correspondentie over deze rubriek aan
Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg
148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

464. Aan het boek *Struktuur* van Pierre van Hiele is de volgende opgave ontleend. Gegeven is een rechthoekig gelijkbenige driehoek. Voor welke n geldt: er is een vierkant dat verdeeld kan worden in n van deze driehoeken?

465. Het was 3 uur. Jantje keek op de klok en verwisselde de wijzers. Het is kwart over 12, zei Jantje. Hij had ongelijk, want als je de wijzers verwisselt, krijg je een stand die niet voor kan komen. Maar hoe vaak per dag hebben de wijzers van de klok een zodanige stand, dat bij verwisseling weer een mogelijke wijzerstand ontstaat?

466. We gebruiken kort-lang signalen om 2^n mensen op te roepen. Ieder heeft zijn eigen signaal. We gebruiken daartoe suites van n signalen. Na gemiddeld hoeveel signalen heeft iemand in de gaten of hij wel of niet opgeroepen wordt? We nemen aan, dat ieder even vaak opgeroepen wordt. Wat is de limiet hiervan voor $n \rightarrow \infty$?

Onderstel nu, dat we 45 personen willen oproepen. We richten de signalen zo in, dat het aantal signalen waarna iemand weet of hij wel of niet opgeroepen wordt, zo gering mogelijk is. Hoe groot is dit aantal?

Oplossingen

461. Dit probleem ging over tweekoppige getallen.

Een getal heet tweekoppig als het met hetzelfde cijfer of rijtje cijfers eindigt als waarmee het begint. Het tweekoppige getal 101 heeft een bijzonderheid: zet men er een 0 of een 1 achter, dan ontstaat opnieuw een tweekoppig getal.

Om dergelijke getallen met meer cijfers te construeren gaan we uit van 101.

We 'omringen' de cijfers van 101 met cijfers 2: 2120212 (getal van 7 cijfers). Schrijft men achter dit getal een 0, 1 of 2, dan ontstaat opnieuw een tweekoppig getal: 21202120, 21202121, 21202122.

Toevoeging van het cijfer 3 geeft 323132303231323 (15 cijfers), dat opnieuw tweekoppig wordt als men er 0, 1, 2 of 3 achter schrijft.

Zo voortgaande krijgt men een getal van 1023 cijfers dat opnieuw tweekoppig wordt als men er één van de tien cijfers achter schrijft.

462. Voor welke waarden van m is 10..... 10..... deelbaar door 37?

m nullen m nullen

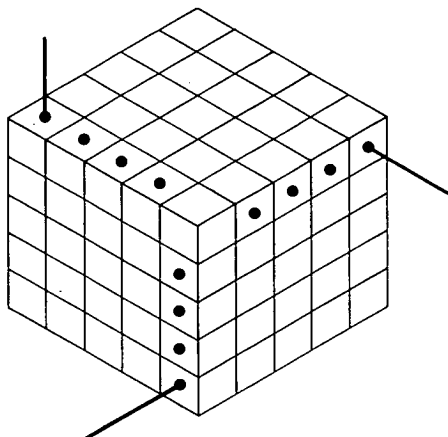
Omdat 37 een deler van 999 is, geldt voor elk natuurlijk getal n , dat $10^{3n} \equiv 1 \pmod{37}$. Hieruit leidt men gemakkelijk af:

als m een 3-voud of een 3-voud plus 1 is, dan is het gegeven getal deelbaar door 37.

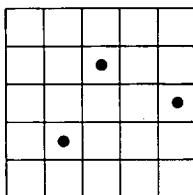
(Als m een 3-vd + 2 is, dan blijft er bij deling door 37 een rest 3 over.)

463. Een kubus met ribbe n is opgebouwd uit n^3 eenheidskubussen. Een stopnaald is een lijn die gaat door de middens van n eenheidskubussen. Wat is het maximale aantal elkaar kruisende stopnaalden waarmee men de kubus kan 'verstoppen'?

In onderstaande figuur ziet men, hoe men de kubus met $3(n - 1)$ naalden kan verstoppen.



Onderstel dat het ook mogelijk is met minder naalden. Dan is er minstens één van de drie richtingen waarin men minder dan $n - 1$ naalden heeft aangebracht. Bekijk een vlak loodrecht op een richting waarin men hoogstens $n - 2$ naalden aangebracht heeft. In zo'n vlak zijn minstens 2 rijen en 2 kolommen vrij. Om het te verstoppen zijn dus nog zeker 2 naalden nodig. Zie de figuur.



Er zijn n dergelijke vlakken. In totaal zijn dus nog minstens $2n$ naalden nodig. Samen dus minstens $n - 2 + 2n = 3n - 2$. En dat is meer dan $3(n - 1)$. Dus is $3(n - 1)$ naalden het minimum.

Boekbesprekingen

Prof. Dr. A. van der Sluis en Drs. C. A. C. Görts, *Cursus PASCAL*, Academic Service, Den Haag 1981, 298 blz., f39,50.

PASCAL is een programmeertaal die in de laatste jaren erg sterk in de belangstelling gekomen is, zowel voor de programmering van kleine als grote computers. De taal is geschikt voor het onderwijs in het programmeren als onderdeel van de informatica en wel op allerlei niveaus, van inleidend tot geavanceerd. Dit is een gevolg van de aanwezigheid van goede mogelijkheden voor data- en programmastructurering en goede faciliteiten voor de beheersing van de gang van uitvoering ('flow of control'), zoals bijv. de vorm van de herhalingsopdrachten. De *Cursus PASCAL* heeft ten doel de lezer in PASCAL te leren programmeren. Er wordt geen eerdere programmeerervaring verondersteld en er wordt vooral aan de hand van voorbeelden uitgelegd hoe de taal gebruikt moet worden. Er wordt naar volledigheid gestreefd en na de meer elementaire hoofdstukken 1 en 2, wordt vanaf hoofdstuk 3 aandacht besteed aan meer geavanceerde datastructuren zoals het record-type en het file-type en het gebruik daarvan. Het is een degelijk boek dat Uw recensent ter bestudering aan kan bevelen voor allen die deze moderne programmeertaal willen leren kennen en de mogelijkheden daarvan voor een breed gebied van toepassingen. De lezer wordt daarbij geholpen door vele opgaven en hun oplossingen (blz. 207-283), een index en een appendix waarin op 4 blz. een overzicht van de taal gegeven wordt.

A. Ollongren

Prof. Dr. A. van der Sluis en Drs. C. A. C. Görts, *Cursus eenvoudig PASCAL*, Academic Service, Den Haag 1981, 127 blz., f17,50.

Met *Eenvoudig PASCAL* bedoelen de auteurs hier de meer elementaire delen van compleet PASCAL. Het boek bestaat uit de eerste twee hoofdstukken van de 'Cursus PASCAL', elders in Euclides gerecenseerd. De vraagstukken van de genoemde hoofdstukken en hun oplossingen zijn eveneens opgenomen, een overzicht van de taal niet, maar er is wel een index bij. Als eerste kennismaking aanbevolen, als naslagwerk echter minder, daarvoor moet men naar de *Cursus PASCAL* zelf.

A. Ollongren

Arnaud Beauville, *Géometrie algébrique Algebraic geometry*, Ed. Sijthoff & Noordhoff International Publishers, Angers 1979.

In de zomer van 1979 werd in Angers een conferentie over algebraïsche meetkunde gehouden. Het boek dat naar aanleiding hiervan verscheen, bevat een 17-tal artikelen, in meerderheid de (uitgewerkte) tekst van daar gehouden lezingen. Deze hadden betrekking op vier onderwerpen: *vectorbundels*, *perioden van algebraïsche variëteiten*, *oppervlakken en variëteiten van dimensie 3*.

Onder deze artikelen zijn zowel historische overzichten als ook uiteenzettingen die hun definitieve vorm pas tijdens discussies in het kader van het congres kregen. Een enkel artikel is later naar aanleiding van tijdens het congres opgedane ideeën geschreven.

Een greep uit de inhoud: bij het onderwerp '*vectorbundels*' twee artikelen die een overzicht geven van de kennis die er op dat moment bestond over algebraïsche vectorbundels en een artikel dat een verband legt tussen de meetkunde van Kummer-oppervlakken en een bepaald type vectorbundel; bij de '*vectorbundel van algebraïsche variëteiten*' treffen we o.a. een aantal artikelen aan over Hodge-structuren en zowel het locale als het globale Torelli-probleem; onder '*oppervlakken*' vinden we bijv. een artikel over automorphismen van Kähler-oppervlakken en één over dubbelpunten van oppervlakken in $\mathbb{P}^3$; classificatie van algebraïsche 3-vouden komen we tenslotte bij het laatste onderwerp tegen.

Het boek is zeker de moeite waard voor een ieder die zich met onderzoek op het gebied van de algebraïsche meetkunde bezighoudt.

R. Brand

Excursies in de Wiskunde I, Mathematisch Instituut Katholieke Universiteit Nijmegen, 131 bl., f10,—.

Dit boekje van capita selecta uit de wiskunde voor aanstaande leraren is uitgegeven naar aanleiding van het vierde lustrum van het Mathematisch Instituut van de K.U.N. Het is een bundeling van een aantal voordrachten die gehouden zijn in het kader van het college 'Schoolwiskunde van hoger standpunt'.

Achtereenvolgens zijn opgenomen:

De klassificatie van oppervlakken (F. J. Keune): aangetoond wordt de homeomorfie van oppervlakken met één van genoemde standaardoppervlakken welke onderling niet homeomorf zijn.

De dimensie van een kromme (F. M. Dekking): uitgaande van de definitie van een kromme, de lineaire uitwendige maat van Carathéodory komt men tot het dimensiebegrip.

Differentialen op de middelbare school? (A. C. M. van Rooij): er wordt nagegaan hoe in diverse schoolboeken differentiaal worden behandeld en hoe ze verder in het boek functioneren.

Schommelingen om het biologisch evenwicht (J. C. Smit): uit groeiprocessen komt men tot differentie vergelijkingen welke ook in andere systemen uitermate belangrijk zijn.

Kettingbreuken (R. A. Kortram): een inleiding tot dit begrip.

Winstfluctuaties bij gokspelen (W. Vervaat): een toepassing van een stuk kanstheorie.

Een boekje dat hier en daar een behoorlijke globale voorkennis van een bepaald gebied vereist. Ik denk hierbij bijv. aan de topologie. Wanneer men echter de moeite neemt al studierend met dit boekje bezig te gaan, dan heeft men hierin een alleraardigst werkje waarmee men op uiterst plezierige wijze met een aantal facetten van ons vak in aanraking komt. Al met al een uitermate boeiend boekje. Het is te hopen dat het Mathematisch Instituut kans ziet zijn voornemen, vervolg deeltjes het licht te doen zien, waar te maken.

W. Kleijne

Sesam, *Atlas van de Wiskunde, deel 1 en 2*, Bosch & Keuning, Baarn, totaal 501 bl., resp. f24,— en f28,50.

De Sesam Atlas van de wiskunde is de Nederlandse uitgave van de door Deutscher Taschenbuch Verlag uitgegeven *dtv-Atlas zur Mathematik*, samengesteld door Frits Reinhardt en Heinrich Soeder. De illustraties werden verzorgd door Gerd Falk.

De vertalingen zijn resp. van drs. J. Bourgonjon en drs. T. Heunks.

Het doel van de *Atlas* is het toegankelijk maken van het moeilijk begaanbare gebied van de wiskunde. Hiertoe wordt de stof in kleine stukken verdeeld over illustratie- en tekstpagina's tegenover elkaar. Zo komen achtereenvolgens aan de orde:

in deel 1: wiskundige logika, verzamelingenleer, relaties en structuren, opbouw van het getallenstelsel, algebra, getallentheorie, meetkunde, analytische meetkunde, topologie, algebraïsche topologie, grafentheorie.

in deel 2: grondslagen van de reële analyse, differentiaalrekening, integraalrekening, functionaal-analyse, differentiaalvergelijkingen, differentiaalmeetkunde, funktietheorie, kombinatoriek, kansrekening en statistiek, lineair programmeren.

Dat alles, illustratie- en tekstpagina's in 501 blz. D.w.z. zo'n 250 blz. tekst voor alle onderwerpen tesamen.

In aanmerking genomen het geringe aantal bladzijden tekst, het kleine formaat van de boekjes (hetgeen men poogt te compenseren door de uiterst kleine letter), de diepte waarin men in de stof doordringt (zoals Galoistheorie, homologietheorie, tensorrekening, Riemannse oppervlakken) is het begrijpelijk dat slechts weinig bewijzen konden worden opgenomen. Het moet gezegd worden dat ook in, door en bij de figuren de betrokken stof wordt behandeld en geïllustreerd. Bij deze figuren speelt kleur een zeer belangrijke rol.

In zeer klein formaat is op deze wijze een buitengewoon grote hoeveelheid wiskunde bijeengebracht. Van de genoemde doelstelling de gebieden toegankelijk te maken komt m.i. weinig terecht. Immers de niet terzake kundige kan het vak in deze gecomprimeerde vorm niet leren. Voor degene die een wiskunde-studie achter de rug heeft zijn de beide boekjes wel aardig: veel feiten heeft men in handzaam formaat bijeen. De samenstellers en de uitgever hebben erg veel zorg aan de uitvoering van de boekjes besteed.

W. Kleijne

Drs. J. de Koning, J. Smit, drs. T. V. J. Galama, *Wiskunde voor het economisch onderwijs*, Educaboek, Culemborg.

Dit werk, bestaande uit 4 delen, is, zoals de titel zegt, bestemd voor het economisch onderwijs. En wel voor vele sectoren van dit onderwijs:

deel 1 en de helft van deel 2 voor havo, meao, mds en andere scholen voor mbo;

deel 1 en 2 voor vwo en leerlingen uit het mbo, die zich voorbereiden op een vervolgstudie;

deel 1, 2, 3 en 4 voor het havo en voor lerarenopleidingen, waaronder m.o.-economie.

Het is een goede gedachte geweest van de auteurs dit werk zó breed op te zetten. Indertijd heb ik in Euclides, 54^e jaargang, no 8, de tweede druk van deel 1 besproken. Vanuit wiskundig-didactisch gezichtspunt plaatste ik toen een aantal kanttekeningen. De auteurs hebben naar aanleiding daarvan een zeer groot aantal wijzigingen in de inmiddels verschenen nieuwe druk aangebracht. Naar mijn smaak is het boek hierdoor, wat betreft de wiskundig-didactische kant, aanmerkelijk verbeterd. Daar ook de teksten van andere delen in deze geest bekeken zullen worden, zal ik ervan afzien deze delen in extenso de revue te laten passeren. Daarom alleen nog enige algemene opmerkingen.

De boeken behandelen de wiskunde vanaf de meest eenvoudige beginselen, zoals van belang voor de economie. Zo wordt begonnen met verzamelingen, algebraïsche bewerkingen, vergelijkingen, ongelijkheden, relaties, grafieken. In deel 2: merkwaardige producten, ontbindingen in factoren, parabool, hyperbool, differentiëren, integreren, logaritmen, rijen.

Deel 3: differentiaalrekening, limieten, functies van twee variabelen.

Deel 4: integraalrekening, differentiaalvergelijkingen, differentievergelijkingen, matrices en economische toepassingen.

Toch zijn het geen wiskundeboeken in engere zin geworden. De wiskunde en de economie komen samen aan de orde. Vanaf het begin is het voor de leerling/student duidelijk, waarvoor het geleerde dient en waarom het geleerd moet worden. Zoals bekend gaat van een dergelijke behandelingswijze een sterk, motiverende werking uit. Velen, die denken dat zij 'niks van wiskunde snappen', zullen aldus met genoegen en succes met de studie bezig zijn. Ik geloof, dat de auteurs het onderwijs een grote dienst hebben bewezen met het schrijven van dit werk. Voor de genoemde sectoren van het onderwijs, beveel ik deze boeken dan ook van harte aan.

W. Kleijne

Dr. P. M. van Hiele, *Struktuur*, Muusses Purmerend 1981, 152 blz., f 45,-.

Afgaande op auteur en titel verwacht men misschien een boek over wiskundige structuren. Hoewel deze wel ter sprake komen, is de opzet veel ruimer. Structuren komen in en vooral buiten de wiskunde voor in een veelheid van betekenissen. Deze veelheid wordt door de schrijver onder de loep genomen, echter veeleer beschouwend dan klassificerend. Een wiskundige heeft de neiging in een veelheid orde te scheppen, als regel door enig geweld te gebruiken, en door middel van een scherpe omschrijving of een definitie de grenzen van een begrip vast te leggen. Dit is het tegendeel van wat Van Hiele beoogt. Scherpe omlijning van het begrip structuur, zoals bijv. door Piaget gedaan is, wijst hij van de hand, omdat daardoor te veel afgesneden wordt. Anders gezegd: hij beschouwt structuur op het nulde niveau.

Voorbeelden van structuren vindt hij in de wiskunde.¹⁾ Soms worden deze in taal vastgelegd, zoals de structuur van een getalrij. Als regel echter worden de structuren visueel geconcipieerd. Buiten de

¹⁾ Zie een opgave in de recreatierubriek van dit nummer.

wiskunde spelen structuren vrijwel overal een rol. Expliciet komen ter sprake o.a. structuren in de taal, de muziek, de chemie (atoommodel), de biologie (structuur van het skelet), de schilderkunst (het herkennen van de maker aan de structuur van het schilderij). Van Hiele neemt daarbij het begrip structuur zo ruim, dat ik soms de neiging heb eerder van analogie dan van structuur te spreken.

Uiteraard blijft de auteur niet steken bij een demonstratie van wat structuur kan zijn. Hij gaat in op eigenschappen die structuren kunnen (niet moeten) hebben. Structuren kunnen voortzetbaar (herhaalbaar) zijn. Deze voortzetbaarheid wordt intersubjectief op dezelfde wijze beleefd in de meeste gevallen en heeft dus een mate van objectiviteit. Al naarmate de voortzetbaarheid meer of minder eenduidig door de voorliggende structuur bepaald wordt, noemt Van Hiele de structuur sterker of zwakker. Een voorbeeld van een sterke structuur is een tegelpad, van een zwakke de structuur van een schilderij van een bepaald schilder.

Ten slotte noemt de auteur naast de taalgebonden en de visuele structuren ook nog de handelingsstructuren, zoals tikken en pianospelen.

Beter nog dan met woorden kan men wezenlijke eigenschappen van structuren demonstreren met behulp van illustraties. Het boek bestaat daarom voor de helft uit zeer fraaie reproducties van structuren. Deze getuigen van de fijne smaak van Pierre van Hiele en van de bijzondere kijk die hij op de realiteit heeft. De herhaling is een duidelijk kenmerk van vele illustraties, echter niet van alle.

Naarmate we verder in het boek vorderen is de band tussen de tekst en het structuurbegrip losser en vinden we lezenswaardige beschouwingen over onderwijsproblemen, middenschool, problemen rond wetenschapsbeoefening. Zodra ik in plaats van 'onderwijsproblemen' zeg 'onderwijsstructuur', is de link met het centrale thema weer tot stand gekomen. En tegelijk schrikken we dan haast van de oeverloosheid van dit begrip.

P. G. J. Vredenduin

Mededelingen

STUDIEDAG/JAARVERGADERING van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Op *zaterdag 30 oktober* houdt de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een studiedag in combinatie met de jaarvergadering in het gebouw van de SOL, Archimedeslaan 16, Universiteitscentrum De Uithof te Utrecht, van 10.00 tot 17.00 uur.

Agenda:

1. Huishoudelijk gedeelte (10.00 - 10.30 uur).
 - a. Opening door de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen.
 - b. Notulen van de jaarvergadering 1981 (zie het aprilnummer van Euclides).
 - c. Jaarverslagen (zie het oktobernummer van Euclides).
 - d. Décharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie.
 - e. Bestuursverkiezing in verband met het periodiek aftreden van L. Bozuwa, J. van Dormolen, F. F. J. Gaillard en M. Kindt. Het bestuur stelt de aftredenden kandidaat.
Tegenkandidaten kunnen worden ingediend bij schriftelijke kennisgeving aan het bestuur door tenminste vijf leden tot veertien dagen vóór de vergadering.
 - f. Vaststelling van de contributie 1983-1984. Het bestuur stelt voor de contributie vast te stellen op f50,-.
2. Inleiding en werkgroepen over het thema 'Examens' (10.30 - 16.00 uur, onderbroken voor een lunch).
Nadere gegevens betreffende het thema treft u in het juni-, september- en oktobernummer van Euclides aan).
3. Huishoudelijk gedeelte reglement.
 - g. Wijziging huishoudelijk reglement.

h. Rondvraag.

Degenen, die van de rondvraag gebruik wensen te maken, wordt verzocht hun vragen vóór de lunch aan een van de bestuursleden bekend te maken.

i. Sluiting.

Maaltijd.

Voor deelname aan de lunch wordt men verzocht vóór 15 oktober f12,50 over te maken op giro 143917 t.n.v. Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam, onder vermelding van 'lunch studiedag'.

Niet-leden.

Docenten die geen lid van de vereniging zijn kunnen de studiedag bijwonen tegen betaling van f10,- en f12,50 voor de lunch. Hun wordt verzocht f22,50 over te maken naar giro 143917 t.n.v. Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam, onder vermelding van 'studiedag niet-lid'.

De beheerder van de SOL verzoekt de automobilisten het grote parkeerterrein achter het gebouw te gebruiken en de auto's niet op de inrit te plaatsen.

Zij die met de trein komen, kunnen gebruik maken van bus 42 naar Zeist. Deze vertrekt twee minuten over het hele en het halve uur vanaf het Centraal Station Utrecht naar de Uithof.

Eindexamen anders?

Onder deze titel organiseert de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een themadag, bestemd voor alle wiskundeleraren. Zoals gebruikelijk is deze dag gekoppeld aan de jaarvergadering van de Vereniging.

Evenals voorgaande jaren zal er op de themadag gelegenheid zijn om deel te nemen aan werkgroepen: één's ochtends en één's middags. Ook zal er weer een deskundige uitgenodigd worden voor het geven van een plenaire lezing.

Op het moment dat dit geschreven wordt (een half jaar van te voren) ziet het er naar uit dat er werkgroepen over de hierna volgende onderwerpen georganiseerd zullen worden.

1. Schoolonderzoek

Aan de hand van enkele praktijkvoorbeelden wordt in deze groep gekeken naar de mogelijkheden van het schoolonderzoek (als onderdeel van het examen wiskunde). Welke problemen kom je tegen als je wat afwijkende vormen gebruikt? Welke oplossingen zijn er zoal uit de praktijk bekend? Wat is er nog meer mogelijk?

2. Mavo-examen in één zitting

Met ingang van het schooljaar '84/'85 zal waarschijnlijk de centrale examineertijd voor het mavo-examen wiskunde teruggebracht worden tot 2 uren (in één zitting). Mogelijk geldt dit ook voor het lbo. Een door het Bestuur van de Vereniging ingestelde commissie (o.l.v. F. J. Mahieu) heeft zich met deze verandering en de daaruit voortvloeiende problematiek beziggehouden. Het rapport van de commissie kunt u vinden in dit nummer van Euclides. Op de themadag zal men zich via deze werkgroep kunnen verdiepen in de problemen die de aangekondigde verandering met zich mee brengt, en in de aanbevelingen van de commissie Mahieu.

3. HEWET en het schoolonderzoek

Een andere aangekondigde verandering betreft de herverkaveling wiskunde één en twee (HEWET), een herverkaveling die de betreffende examenprogramma's niet onveranderd laat. In deze werkgroep zullen de deelnemers zich met medewerkers van het HEWET-team kunnen verdiepen in de mogelijkheden en onmogelijkheden van het schoolonderzoek in HEWET-stijl.

4. Examens op langere termijn

Wiskundeonderwijs is – zoals alle onderwijs – onderhevig aan veranderende opvattingen over inhoud

en doelstellingen. De examenpraktijk zou – als alles goed is – mee moeten evolueren. De indruk bestaat soms dat de situatie juist omgekeerd is: het examen lijkt een verstarrende invloed op het onderwijs te hebben. Deze werkgroep gaat onderzoeken welke veranderingen in vraagstelling en vorm van het examen mogelijk en wenselijk zijn: veranderingen die enerzijds tegemoetkomen aan nieuwere inzichten aangaande wiskundeonderwijs (bijvoorbeeld in de richting van een meer probleem- en contextgerichte inhoud), maar anderzijds de zo noodzakelijke rust en geleidelijkheid waarborgen.

5. Waarom anders?

Niet iedereen is gelukkig met al die veranderingen. Velen vinden dat de huidige situatie misschien niet optimaal is, maar toch best werkbaar: zij krijgen via deze werkgroep de gelegenheid om ervaringen uit te wisselen en hun stem te laten horen.

6. Correctie en normering

De correctievoorschriften bij de examens zijn soms zeer strikt en gedetailleerd. Niettemin zijn meningsverschillen tussen eerste en tweede corrector berucht. In deze werkgroep zal geprobeerd worden aan de hand van uitwerkingen van leerlingen wat meer vat te krijgen op die correctie, en de mogelijke hantering van de correctievoorschriften.

7. Hoe de examens tot stand komen

In deze werkgroep zal worden nagegaan wat de 'gang' is van een examenopgave, bij wijze van spreken van eerste idee tot aan de staatsdrukkerij. Naast veel feitelijke informatie over betrokken instanties (ACD, CEVO, CITO, ...) zal ook worden ingegaan op de overwegingen die in de verschillende stadia van het opstellen van een examen een rol spelen.

In de werkgroep zullen vele ideeën, meningen, suggesties naar voren worden gebracht. We willen daarom ook proberen wat verder te kijken dan deze themadag, en een aanzet geven tot activiteiten die een vervolg zijn op wat deze dag wordt gedaan. We denken aan een informatiemarkt, aan praten over hoe nu verder te gaan, en aan het bij elkaar brengen van mensen met gelijkgestemde ideeën, die samen verder willen. Er kunnen o.a. werkstukken worden tentoongesteld als voorbeelden van schoolonderzoeken wiskunde. Daarom de oproep aan docenten zoveel mogelijk materiaal daarvoor mee te nemen.

Verzoek om medewerking

In het kader van zijn onderzoeksproject 'heuristisch wiskunde-onderwijs' vraagt Anne van Streun, de leider van dit project, collega's die ervaringen hebben met al of niet geslaagde pogingen tot samenwerking tussen secties wiskunde, natuurkunde, scheikunde, biologie en economie van scholen voor a.v.o.-v.w.o. met hem hierover contact op te nemen.

Het project dat mede een ontwikkelproject is gaat uit van de werkgroep voor didactiek van de wiskunde van de R.U.G. Het project gaat drie jaar duren en is gesitueerd in v.w.o.-4, wiskunde-1. Aanmelden: A. v. Streun, R.U. Groningen, Math. Inst., postbus 800, 9700 AV Groningen.

Werkgroepen van de Didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

In het cursusjaar 1981-1982 is een werkgroep gestart over toepassingen in de onderbouw bij de natuurkunde en rekenvaardigheden daarbij. Reeds op de eerste bijeenkomst van deze werkgroep werd deze mondvul veranderd in de naam EVENREDIGHEDEN. De naamswijziging geeft aan welke keuze er gemaakt is binnen het toepassingsgebied. We hebben ons op elkaar en op het onderwerp georiënteerd door bestudering van een aantal artikelen over evenredigheden. Daarna hebben we gewerkt aan een draaiboek voor een aantal wiskundelessen. In deze lessen wordt het begrip evenredigheid en bijbehorende rekenvaardigheden behandeld. Deze lessen worden zo gepland, dat ze een ondersteuning vormen voor de natuurkundelessen waarin het begrip evenredigheid aan de orde komt. Het effect van de ondersteuning willen we meten.

De didactiekcommissie roept geïnteresseerden op om mee te werken aan een nadere uitwerking en uitvoering van bovenomschreven plan. Uitwisseling van ervaringen, verdere studie en doordenking van de didactiek vormen het menu.

De werkgroep zal in de periode oktober 1982 tot april 1983 vier à vijf keer in Utrecht bijeenkomen. De besprekingen zijn van ongeveer 16.30 uur tot 20.00 uur. De vereniging subsidieert een maaltijd van f5 en reiskosten boven f10.

De didactiekcommissie vraagt belangstellenden zich voor 20 september 1982 aan te melden door middel van een briefkaart geadresseerd aan:

Didactiekcommissie van de N.V.v.W., t.a.v. G. Schoemaker, p/a Ped.-Did. Instituut, Heidelberglaan 2, 3508 TC Utrecht.

Vermeld uw telefoonnummer en schrijf een regeltje over de aard van uw werkzaamheden in het onderwijs.

Namens de didactiekcommissie,
Gerard Doevendans en George Schoemaker

Werkgroep Wiskunde in 3-HAVO van de Didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Sinds 15 december 1981 bestaat er een werkgroep die onder auspiciën van de Didactiekcommissie zich heel speciaal bezighoudt met de problematiek 'wiskunde in 3-havo'. Deze werkgroep heeft in de periode december 1981-mei 1982 zes maal vergaderd. Het probleem waarvoor de commissie zich gesteld ziet, is het volgende:

Een aantal leerlingen in 3-havo besluit op een gegeven moment geen wiskunde in het pakket op te nemen. Vanaf dat moment zijn zij weinig gemotiveerd het hun aangeboden programma te verwerken. Dit laatste is niet zo verbazingwekkend, want het programma in 3-havo is voornamelijk gericht op het leggen van een basis voor het onderwijs in de klassen 4 en 5. De werkgroep stelt zich voor vanaf een bepaald moment in 3-havo die leerlingen, die al besloten hebben geen wiskunde in hun pakket op te nemen, een ander programma aan te bieden. Bij het samenstellen van dit programma hoeft geen rekening gehouden te worden met het wiskunde-onderwijs in de klassen 4 en 5. Naar de mening van de werkgroep is een oplossing het geheel van maatregelen in het wiskunde-onderwijs in 3-havo, dus zowel het model van differentiatie als de bijbehorende leerlingenmaterialen. De bedoeling is dat de werkgroep een aantal 'oplossingen' biedt zodat iedere sectie kan kiezen wat haar het beste lijkt, gegeven haar schoolsituatie.

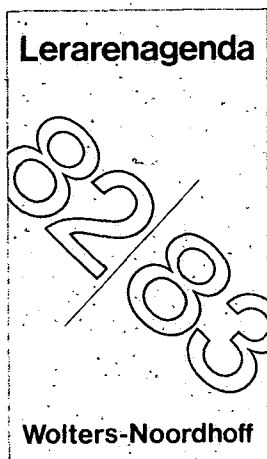
De werkgroep telt op het ogenblik negen leden; ze zou graag zichzelf uitbreiden tot maximaal twintig leden. Dit niet alleen onder het motto 'hoe meer zielen, hoe meer vreugd', maar vooral omdat dit de mogelijkheid opent aan meerdere 'oplossingen' tegelijk te werken.

We verwachten dat de werkgroep in de periode september 1982-april 1983 zes keer in Utrecht bijeen zal komen. De eerste bijeenkomst is op *dinsdag 28 september* van 17.00 tot 20.30 uur in het gebouw van de O.W. & O.C., Tiberdreef 4, Utrecht (tel. 030-61 16 11). Een eenvoudige maaltijd wordt verzorgd. Reiskosten boven de f10,- worden vergoed.

Belangstellenden worden verzocht te overwegen lid te worden van onze werkgroep. Op aanvraag wordt u nadere informatie omtrent hetgeen de werkgroep het afgelopen jaar tot stand gebracht heeft toegezonden. U kunt hiervoor terecht bij het secretariaat van de werkgroep wiskunde in 3-havo t.a.v. G. Schoemaker p/a O.W. & O.C. Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.

Weer leverbaar:

de WN-Lerarenagenda 82/83



- aangepast aan de vakantieregeling voor het onderwijs van het Ministerie van O. en W.
- geschikt voor verschillende schooltypen en variabele werktijden

De nieuwe *WN-Lerarenagenda* is uitgebreid tot 200 pagina's en bevat onder meer:

- tabellen voor notatie van rapport-, proefwerk- en tentamencijfers
- tabellen voor berekening van deze cijfers
- jaarkalenders voor 1982, 1983 en 1984
- memorandum over de periode augustus 1982 tot maart 1984

Prijs: f 5,25

In verband met de leverbaarheid bij voorkeur vóór 1 juni 1982 bestellen bij uw schooladministratie of bij de boekhandel.



Wolters-Noordhoff

INHOUD

Bij het begin van deze jaargang 1

Oproep 2

F. J. Mahieu: Verslag werkgroep 'LBO/MAVO-examen 3

A. W. Grootendorst: Een bekend probleem opgelost door een onbekend wiskundige 17

P. G. J. Vredenduin: De tiende wiskunde olympiade in de Verenigde Staten 29

B. Zwaneveld: Uit de tijdschriften 30

Recreatie 32

Boekbesprekingen 34

Mededelingen 37

ADRESSEN VAN AUTEURS

Prof. Dr. A. W. Grootendorst, Aardbeistraat 11, 2564 TM 's-Gravenhage

F. J. Mahieu, Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth

B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, 1078 JX Amsterdam