

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

57e jaargang

1981/1982

no. 10

juni/juli

Kansrekening &
Statistiek

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Dr.F.Goffree - Dr.P.M. van Hiele - W. Kleijne - L.A.G.M. Muskens -
W.P. de Porto - P.E. de Roest (secretaris) - P.Th. Sanders -
Mw.H.S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - Dr.P.G.J. Vredenduin
(penningmeester) - B. Zwaneveld (hoofredacteur)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie:

F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 45,- per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 30,-; contributie zonder Euclides f 25,-.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9'', 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1\frac{1}{2}$.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-550834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 40,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 23,55. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 6,65 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Problemen bij het onderwijzen en leren van kansrekening en statistiek

PIETER TERLOUW

0 Inleiding

Uit de onderwijspraktijk is bekend dat zowel leerlingen als docenten een taal (nederlands, wiskundig nederlands, wiskunde) soms niet inhoudelijk juist interpreteren. Een fraai voorbeeld daarvan uit mijn lespraktijk in een tweede klas gymnasium is (Ll. is leerling; Lr. is leraar):

Ll.: Ik begrijp dat niet.

Lr.: Wat niet?

Ll.: Nou dat: Toon met een berekening aan dat

Lr.: *doet pogingen om wat op de stippeltjes staat uit te leggen.*

Ll.: *(na herhaalde pogingen van Lr.)* Ik begrijp het nog steeds niet.

Lr.: Ik begrijp jouw probleem dus niet. Zo komen we niet verder. Probeer maar een volgend vraagstuk. Als me nog iets invalt dan kom ik wel weer bij je.

Een tijdje verschaft de leraar andere leerlingen in de klas adequate hulp. Plotseling realiseert hij zich dat het onderwerp waar ze mee bezig zijn vele malen jongens als Ad en Ed en meisjes als Inez ten tonele voert. Terwijl hij naar de Ll. toeloopt om een nieuwe vraag te beantwoorden, denkt hij: 'Zo'n gedachtenronkel, nee, dat zal het wel niet zijn, maar toch ...'.

Lr.: Ik kom eerst nog even terug op jouw vorige probleem, je weet wel: Toon etc.; denk jij bij 'Toon' soms aan een jongen, die iets aan heeft, zoals een jongen een broek aan heeft?

Ll.: *(onmiddellijk)* Ja! Maar dat wordt dus niet bedoeld.

Het woord 'Toon' bleek poly-interpreteerbaar op een zelfde wijze als 'the bad man made his breakfast' in vertaling 'de badman maakte zijn broek vast'. Dergelijke interpretaties zijn uitermate onverwacht en we zijn maar al te geneigd ze tot incidenten te verklaren. Helaas passen we dat incidenten-principe ook toe in gevallen waarin we wel degelijk op onze hoede moeten zijn. Ik noem dan met name de interpretaties van de woorden 'kans' en 'waarschijnlijkheid'.

1 Taal

Ik schat de kans groot dat de gemiddelde Euclides-lezer na de inleiding dit artikel ook verder leest.

Wilt u voordat u verder leest eerst uw getalsrepresentatie van 'de kans groot'

geven (bijvoorbeeld: meer dan 20% òf zeker .30). Mijn interpretatie is dat hoogstens drie van de tien lezers afhaken. Deze uitspraak is misschien wel pedant en daardoor verlies ik enige lezers.

In het weerbericht wordt gemeld: Morgen mogelijk regen.

Het blijkt dat de meteorologen bedoelen dat zij de kans op regen in het volgende etmaal minstens .20 en hoogstens .80 schatten. En ik maar 'mogelijk morgen regen' interpreteren als de kans op regen in het volgende etmaal is kleiner dan .50. Geen wonder dat het weerbericht in mijn ogen zo vaak niet klopt.

Iemand meldt: DAT zal zeker gebeuren.

Uit onderzoek is gebleken dat bedoeld kan worden dat DAT in minstens 70 van de 100 gevallen optreedt. En daar hangt dan de interpretatie van het woord 'zeker' als zekere gebeurtenis (kans 1 dus).

De chirurg zegt: Er is zeker kans dat de operatie zal slagen.

Hij zegt niets, alleen dat de kans groter dan nul is. Maar hoopgevend is het wel.

De kabinetsinformatuur zegt: Ik schat de kans 50% dat het kabinet er komt.

Hij zegt niets. Zijn kansverdeling passend bij dit probleem kan bijvoorbeeld één van de kansverdelingen gegeven in de figuren 1 t/m 3 zijn (zie ook P. F. Lourens (1981)).

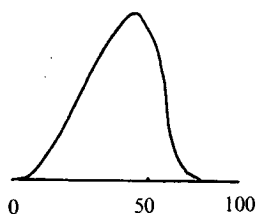


Fig. 1

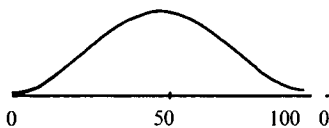


Fig. 2

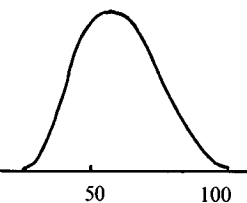


Fig. 3

Het blijkt nuttig onderscheid te maken tussen kansen (voldoend aan de axioma's van Kolmogorov; in het vervolg wiskundige kansen te noemen) en kansen (passend bij persoonlijke subjectieve uitspraken; in het vervolg subjectieve kansen te noemen). Ook subjectieve kansen 'behoren' aan de axioma's van Kolmogorov te voldoen; deze eis is essentieel in de theorie over subjectieve kansen. De praktijk (mensen die kansuitspraken doen) echter blijkt hier vaak mee in strijd. Een voorbeeld daarvan is:

Voor een voetbalwedstrijd is gegeven dat de thuisclub met één doelpunt verschil wint, zodat alleen de volgende uitslagen: 1-0, 2-1, 3-2, 4-3, etc. kunnen optreden. Aan verscheidene mensen is gevraagd van elk van deze uitslagen de kans te schatten. Het blijkt dat voor sommige personen de som van hun subjectieve kansen op 1-0, 2-1 en 3-2 al een resultaat groter dan 1 oplevert.

Subjectieve kansschattingen worden gebruikt en misbruikt (zie de voorafgaande voorbeelden). Hun rol moet niet onderschat worden:

- ‘Ik kan nog wel even inhalen’, denkt een automobilist. Zou hij/zij dat nog steeds denken als hij/zij wist dat de experimenteel vastgestelde wiskundige kans op een ongeluk in dergelijke situaties 1 % is? En dat is dan weer afhankelijk van zijn/haar eigen subjectieve kansrekening.
- De kans is groter dat ik door een verkeersongeluk sterf dan door een atoomramp. Dus kerncentrales zijn minder gevaarlijk dan het verkeer! O ja?
- De kans op een succesvolle operatie is p meldt een chirurg (een subjectieve kansschatting van hem/haar). Indien de patiënt zich niet zal laten opereren zal hij/zij gemiddeld genomen nog een jaar leven. Bij een mislukte operatie is de verwachte levensduur hoogstens twee maanden en bij een geslaagde aanzienlijk langer dan een jaar. Hoe te wegen?

Naast taal tot uiting gebracht in de woorden ‘wiskundige kans’ en ‘subjectieve kans’ speelt een ander facet nog een belangrijke rol bij de perceptie van kansrekening:

2 Tegenintuïtief

Het winnen van de Lotto (d.w.z. alle 6 uit de 41 getrokken nummers goed) gebeurt gemiddeld één keer in de ruim 70 000 jaar bij een speler (aangenomen dat er 52 Lotto’s per jaar gespeeld worden). Elke speler weet dat die kans klein is, maar zo klein is toch onvoorstelbaar. Desondanks strijdt dit nog niet met de intuïtie van vele personen; het volgende bekende voorbeeld doet dat wel:

De kans dat van een groep van 23 personen er minstens twee op dezelfde dag jarig zijn is net iets groter dan $\frac{1}{2}$.

De eerste reactie van velen is: Dat geloof ik niet, zo groot. Hoe reken je dat ook al weer uit. Een fictief gesprek brengt hierin mogelijk enige verduidelijking (P1 is persoon 1; P2 is persoon 2):

P1: Mijn eerste reactie is: Die kans is gelijk aan $\frac{23}{365}$, maar bij nader inzien wijzig ik dat getal in $\frac{22}{365}$. Ik kies een bepaalde verjaardag voor één lid van de groep en voor de overige 22 personen heb ik bij ieder $\frac{1}{365}$ kans om die dag te treffen; dus in totaal $\frac{22}{365}$. Ik heb in een jaar 365 dagen nomen.

P2: Ook ik neem in een jaar 365 dagen. Maar bereken eerst de kans dat alle groepsleden op verschillende dagen jarig zijn en trek daarna die berekende kans van 1 af:

$$1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \dots \cdot \frac{343}{365}$$

en het antwoord wordt net iets groter dan $\frac{1}{2}$ (gebruik de rekenmachine).

P1: Jij hebt dus een methode om het goede antwoord te vinden, maar ik begrijp niet waarom mijn methode fout is. Daarnaast heb ik toch mooi de definitie van kans toegepast: ‘het aantal goede gedeeld door het totaal aantal’.

P2: *(denkt eerst: P1 heeft ook ‘minstens’ niet in zijn oplossing verwerkt, maar als ik hem dat zeg schept dat verwarring of lukt het me toch niet het hem duidelijk te maken, maar daarnaast, ...)* Ik ben het met je eens als we te maken hebben met een groep van twee personen. De kans dat ze op dezelfde dag jarig zijn is dan $\frac{1}{365}$. Maar laten we nu eens een groep van 367 personen bekijken. Je ziet zo in dat de kans dat minstens twee personen op dezelfde dag jarig zijn 1 is, maar pas ik jouw methode toe dan kom ik tot het antwoord $\frac{366}{365}$ en dat is

groter dan 1; vreemd, een kans groter dan 1?!

P1: Natuurlijk is die kans 1, maar dan moet je mijn methode ook niet toepassen; je kunt het immers zo zien. Je hebt me overigens nog steeds niet duidelijk gemaakt waarom ik het niet mag doen bij een groep van 23 personen.

P2: Je gebruikt een regel, die niet voldoet aan de axioma's van de kansrekening en die mag je dus niet toepassen.

P1: Ik heb toch keurig de definitie van kans toegepast.

Het vervolg van dit gesprek is wat minder instructief; P1 en P2 zijn bij de axioma's van de kansrekening terechtgekomen, overigens wel het goede spoor. Doch zeker niet eenvoudig, want hoe maakt P2 aan P1 duidelijk dat zijn frequentistische aanpak onjuist is, hoe maakt hij/zij duidelijk dat 22 niet het aantal 'goede' is? En hoe maakt een leraar in zijn lespraktijk duidelijk dat de aanpak van P1 onjuist is (na mijn uitleg hield ik zelf altijd een onbevredigend gevoel over)?

Na zijn/haar eerste intuïtieve reactie ('dat geloof ik niet, groter dan $\frac{1}{2}$!') gaat P1 zoeken naar een methode om het probleem aan te pakken. 'Het aantal goede gedeeld door het totaal aantal' is een methode die meestal werkt en die hij/zij direct beschikbaar heeft, hetgeen docenten overigens mogelijk in de hand werken. Doch belangrijker is: De gebruikte methode strookt met P1's intuïtie ($\frac{22}{365}$ is een veel waarschijnlijker antwoord dan net iets meer dan $\frac{1}{2}$).

Tot besluit van deze paragraaf nog een voorbeeld dat tamelijk tegenintuïtief genoemd kan worden naar een artikel van Bar-Hillel (1980):

In een stad rijden twee taxi-maatschappijen: een Gele en een Groene. Er rijden 85 % gele taxi's en 15 % groene taxi's. Op een zekere avond veroorzaakt een taxi bij matig licht een aanrijding en rijdt door. Een getuige verklaart dat een groene taxi die aanrijding veroorzaakte. Er wordt een proces tegen de Groene taxi-maatschappij aangespannen. In het vooronderzoek gelast de rechter na te gaan hoe goed de getuige bij matig licht een groene van een gele taxi kan onderscheiden. In het experiment blijkt de getuige in 80 % van de gevallen de juiste kleur te noemen.

Hoe groot is de kans dat een groene taxi inderdaad die aanrijding heeft veroorzaakt?

Het antwoord op deze vraag is dat die kans kleiner dan $\frac{1}{2}$ is. Geloofst u dat? Het exacte antwoord is: $\frac{12}{29}$.

3 Conclusies

Zeer veel personen gebruiken het woord 'kans' op een poly-interpretabele wijze. De axioma's van de wiskundige kansrekening zijn niet altijd van toepassing. Vaak treden dan vreemde, onverwachte, 'onjuiste' antwoorden op, waarop nu juist niet het incidenten-principe zoals genoemd in de inleiding toegepast moet worden. Veel mensen gebruiken bij het aanpakken van wat ingewikkelde problemen het eerste dat ze te binnen schiet ('je eerste reactie is vaak een goede'). Kansrekening en statistiek bestaan voor een belangrijk deel uit taal (met die

ingebouwde adder van meerdere betekenissen voor één woord), maar het zijn dan ook toegepaste vakken en de bedoeling van dit artikel is daarom ook zeker niet te bewerkstelligen dat een sterke axiomatische aanpak van kansrekening en statistiek voor de middelbare school gepropageerd wordt. Wel, een wat grotere bewustheid van de soms verwarrende contexten van vragen en begrip voor gedachten'kronkels' van leerlingen, maar ook van leraren: 'Statistiek is een glibberig vak', zei één van mijn collega's hartgrondig. En hoe vaak vlieg je er zelf toch weer in.

Men kan zijn kansen echter beïnvloeden o.a. door zich bewust te zijn van de in dit artikel genoemde adders.

Literatuur

M. Bar-Hillel, *The base-rate fallacy in probability judgments*, Acta Psychologica 44 (1980), pag. 211-233.

P. F. Lourens, *Hoe groot schat u de kans, meneer De Koning?*, NRC Handelsblad, 1 juli 1981, pag. 9.

Over de auteur:

Pieter Terlouw studeerde wiskunde aan de T.H. Delft, afstudeerrichting mathematische statistiek. Van 1974 tot en met 1980 was hij als leraar wiskunde aan het Wageningen Lyceum verbonden. Vanaf 1981 werkt hij aan de Rijksuniversiteit Groningen (vakgroep statistiek en meettheorie, FSW) bij het ZWO-project (projectnummer 56-145): De psychometrie van de vaststelling van a priori kansverdelingen.

Statistics: een bijzonder boek

S. H. CHENG, Ph. D.

Deel I Problemen en mogelijkheden van wiskundeboeken

Toen ik nog op de middelbare school zat zei ik wel eens tegen klasgenoten: 'Ik wou maar dat alle leerboeken net zo geschreven werden als romans.' Natuurlijk werd ik hartelijk uitgelachen. Leren is een ernstige zaak, daarom horen leerboeken droog en saai te zijn.

Wat zijn eigenlijk de verschillen tussen romans en de meeste wiskundeboeken? Ik weet het niet, maar ik denk onder andere dat de meeste romans over emoties gaan. De lezer kan die makkelijk meevoelen, zich in zo'n boek helemaal inleven misschien. Tegenover een leerboek sta je veel objectiever.

Verder, in leerboeken (over wiskunde) komen veel notaties voor en ook heel veel vaktaal, zeg maar jargon. Vaak zijn die notaties niet eens zo moeilijk, maar ze zijn nogal afschrikwekkend voor ongeoeffenden. Ik heb vaak ouders op ouderavonden horen zeggen: 'Ik kan mijn kind niet helpen met moderne wiskunde, want ik heb ouderwetse wiskunde gehad, maar tegenwoordig wordt alles uitgelegd met verzamelingen.' Die verzamelingsleer van het voortgezet onderwijs heeft eigenlijk weinig om het lijf. De nieuwe notaties maken die ouders zo bang dat ze niet proberen te begrijpen waar het om gaat.

Trouwens, zelfs voor wiskundigen kunnen onvertrouwde notaties storend werken bij het lezen van een wiskundeboek. Aan de andere kant, in romans staat meestal geen jargon, laat staan notaties. Namen van personen en plaatsen zijn vaak de enige niet-gangbare woorden in romans.

Ik heb eens een chinees receptenboek gekocht, omdat er zulke mooie plaatjes in stonden, en de beschrijvingen zo overzichtelijk leken. Maar ik lees graag zo'n receptenboek om er iets van te leren. Ik wil een indruk krijgen hoe je iets klaar maakt en daar bleek dit boek achteraf niet zo geschikt voor. Hoe kwam dat? Wel, aan het begin van elk recept stond een lijst van ingrediënten, als volgt ingedeeld:

1. Sojasaus 1,5 eetl., wijn 1,5 eetl., water 5 eetl., maizena 1 tl.;
2. Varkensfilet 500 gr.; 3. ... etc.

Dan stond daaronder hoe je het klaar moest maken:

Snij 2. fijn, voeg 1. toe, etc.

Zo'n recept is wel kort, maar het leest niet prettig, want je moet telkens opzoeken wat die getallen ook alweer betekenen en in elk recept betekenen 1, 2 etc. weer wat anders. Het verhaal loopt niet door. Dit brengt me op het punt van de stijl.

Wiskundeboeken zijn vaak in de mootjes-stijl geschreven. Het verhaal is opgedeeld in hoofdstukken, secties, paragrafen, waarin vaak weer parades van definities, stellingen, bewijzen, voorbeelden, lemma's en formules voorbij marcheren in strakke volgorde. Deze stijl heeft voordelen. Je kunt de dingen makkelijker opzoeken. De afzonderlijke stukjes worden iets duidelijker, je kunt het stap voor stap lezen. Maar de samenhang van het geheel gaat verloren. Veel lezers van wiskundeboeken begrijpen wel alle losse stukjes, maar moeten moeite doen om het geheel te overzien. Bij de meeste romans daarentegen kunnen lezers na afloop het verhaal in grote lijnen navertellen, hoewel ze veel details niet onthouden. Het zal wel niet mogelijk zijn om terugbladeren en notaties te vermijden in wiskundeboeken, maar het is de vraag of het niet een beetje minder kan, speciaal in leerboeken voor beginners die geen beroepswiskundige willen en kunnen worden.

Statistiek: gemiste kansen

Bij wiskundeboeken zit het probleem niet alleen in de stijl maar ook in de inhoud. De meeste wiskunde is erg abstract en heeft geen directe toepassingen. Maar dat is anders bij kansrekening en statistiek, want bij die vakken liggen de voorbeelden voor het opscheppen.

Ik heb op mijn bureau een klein dozijn inleidende Engelse boeken liggen over kansrekening en statistiek, en ook nog een paar Nederlandse. Op een doodenkele uitzondering na zijn ze allemaal in de 'Dutch Uncle'-stijl geschreven: streng en met het vingertje omhoog. Eerst altijd een korte zogenaamd motiverende inleiding. De leerlingen vinden daarvan: 'Kan je wel overslaan, want dat komt toch niet in het proefwerk.' Dan begint de parade. Als het over statistiek gaat, dan komen er histogrammen, data, formules enzovoorts, maar als het boek met kansrekening begint, dan begint het op de eerste paar pagina's al direct met uitkomstenverzameling, gebeurtenis, binomiaalcoëfficiënten enzovoorts. Boeken voor studenten in de wiskunde staan van begin af aan volgepropt met bewijzen – die overigens vaak uit mechanische manipulaties met definities bestaan – maar in boeken voor studenten in andere vakken worden de bewijzen overgeslagen en wordt de rest oppervlakkig behandeld, zodat een soort rijstebrijberg van formules ontstaat. Dit soort boeken zijn meestal gortdroog en geven een beginner weinig gevoel van waar het allemaal over gaat.

Het boek *Statistiek en Kansrekening voor het v.w.o.*, door B. Nijdam e.a., een uitgave van het IOWO, is een redelijk boek, maar de eerste twee paragrafen geven een mooi voorbeeld van hoe wij wiskundigen verslaafd zijn aan notaties en definities, en geen zinnig woord durven uitbrengen voordat wij onze problemen van namen hebben voorzien. In die eerste twee paragrafen wordt een indruk gegeven van waar de rest van het boek over gaat, aan de hand van een paar voorbeelden. Zo worden alle namen zoals kans, staafdiagram, toetsen, nabootsen (simuleren), steekproef, toevalsgetallen, ten onrechte verwerpen, frequentieverdeling besproken. Dat de leerlingen door die stortvloed van vreemde woorden verward en bang worden, hebben de schrijvers zich niet gerealiseerd. Ik denk dat de meeste leraren ook niet weten wat ze er mee aan moeten en maar gewoon op pagina 9 beginnen.

Ik had al geaccepteerd dat alle boeken over statistiek en wiskunde zo waren, totdat ik *Statistics* van David Freedman, Robert Pisani en Roger Purves onder ogen kreeg. Het was niet in mij opgekomen dat het mogelijk was om een boek te schrijven dat in wiskundig opzicht onberispelijk is, didactisch goed in elkaar zit en ook nog boeiend en levendig geschreven is met gevoel voor humor en inzicht in de problemen van beginners. Maar dat had ik verkeerd, want *Statistics* is zo'n boek. Ik zal puntsgewijs (U ziet, ik kan die wiskundige betoogtrant niet loslaten) proberen te vertellen waarom ik dit boek zo bijzonder vind.

Elke paragraaf is een doorlopend verhaal. Bewijzen, definities, formules en voorbeelden komen juist op het punt waar de lezer er behoefte aan heeft. Je voelt bijna nergens dat de uiteenzetting onderbroken wordt door voorbeelden of formules.

Je hebt weinig wiskundige achtergrond nodig voor dit boek. Behalve van de rekenkunde van de basisschool moet je nog benul hebben van lijnen in een vlak, worteltrekken en machtsverheffen. Het woord 'set' (verzameling) komt nergens voor¹, laat staan zoiets als 'sample space' (uitkomsten-verzameling) of 'random variable' (stochast).

Er worden weinig symbolen gebruikt. Bijvoorbeeld, er staat vaak 'number of draws' in plaats van 'n' of zoiets.

Het boek staat vol realistische toepassingen, uit natuurkunde, biologie, sociologie, geneeskunde, politiek, economie, rechtspraak, noem maar op. Alles wordt zo eenvoudig en duidelijk uitgelegd, dat je de toepassingen kunt begrijpen zonder veel achtergrond in die vakken.

In een wiskundeboek komen nu eenmaal minder emoties voor dan in een roman. Maar toch sprankelt dit boek van leven. Dit komt door het gebruik van citaten als motto's voor hoofdstukken, historische anecdotes en gefingeerde conversaties tussen een statisticus en iemand anders, en het gebruik van grappige cartoons.

Het taalgebruik. Het boek is in eenvoudig en levendig Engels geschreven. Het Engels is mijn moedertaal niet (trouwens het Nederlands evenmin), maar ik kan het verschil met andere statistiek-boeken duidelijk merken.

Ik moet opeens denken aan Pai Chiü-Yi, een dichter (772-846) in de T'ang-dynastie in China. Deze dichter stond bekend om zijn mooie, menselijke en toch makkelijke gedichten. Als hij een gedicht af had, las hij het eerst zijn oude, ongeletterde buurvrouw voor. Hij verbeterde zijn werk totdat zelfs die oude vrouw het gemakkelijk kon begrijpen. Natuurlijk, moeilijke gedichten kunnen ook mooi zijn, maar toch zijn we blij als er voor elk wat wils is. Zo moeten er ook voor wiskundeboeken verschillende stijlen zijn.

Het vwo: stochastje spelen

Ik wil de gelegenheid gebruiken om het vwo-onderwijs in de statistiek te bespreken.

Kansrekening en statistiek in het vwo beslaan de volgende onderwerpen:

- eenvoudige combinatoriek,

- binomiale kansverdeling, en
- aan de hand van tabellen voor die verdeling, hypothesen toetsen.

Eigenlijk is dat niet zo veel, en je zou er niet veel tijd voor nodig hebben om dit te vertellen als je het efficiënt deed. Maar de leerlingen vinden deze onderwerpen niet zo gemakkelijk. Waarom? Om te beginnen, ik denk dat combinatoriek moeilijker is dan het lijkt. Combinatorische problemen kun je vaak op veel manieren aanpakken en oplossen en ze bieden ook meer mogelijkheden om een verkeerde weg in te slaan met volkomen fout resultaat.

Verder, de band met de praktijk is zwak. Veel vraagstukken gaan over knikkers in vazen, speelkaarten en dobbelstenen. Leerlingen klagen: ‘Juffrouw, waarom moeten we zo iets leren?’ Als bij wat realistischere problemen – waarvan er toch al te weinig zijn – met wat meer nadruk teruggegrepen werd op het vazen-model, zou het verband met de praktijk beter uit de verf komen.

Vervolgens, het vak zit vol met moeilijke woorden en notaties. Wat weten de leerlingen nu nadat ze met het woord ‘stochast’ hebben kennism gemaakt? De leerling wordt verwacht te begrijpen dat

‘de kans om meer dan twee ogen te krijgen’

vervangen dient te worden door

$$‘P(X > 2)’$$

tenminste, wanneer X staat voor ‘de stochast: het aantal ogen bij één keer gooien’. Bijvoorbeeld, in opgave 3 van het CS (eerste zitting) 1981² komen maar liefst dertien variabelen voor, ik noem ze even op: $D_1, D_2, D_3, D_k, k, X_k, X_1, X_2, Y_n, n, Y_1, Y_2$ en $P!!!$ Op het punt van notaties is dit flink veel moeilijker dan de rest van de vwo-wiskunde, waar je een heel eind komt met f, x, y, t , en wat namen van punten, lijnen en vlakken. Vraagstuk 3 is gemakkelijk voor wie de vraag begrijpt. Voor veel leerlingen zit de moeilijkheid in het interpreteren van een stortvloed van notaties. Ik vind dat begrip voor notaties een onderdeel is van wiskundige vaardigheid en ik keur dit vraagstuk dan ook niet af, maar toch rijst bij mij de vraag: wat wil je met statistiek-onderwijs bereiken? Wil je de leerlingen een gevoel voor kansrekening en statistiek bijbrengen of wil je hun vaardigheden met variabelen op een hoger plan brengen? Kan kansrekening en statistiek wel worden onderwezen zonder er een heleboel notaties bij te halen? Stellingen over verwachtingswaarde en variantie worden meestal uitgelegd in de taal van de stochasten, zie bijvoorbeeld het IOWO-boek. Ze staan trouwens ook in de meeste andere leerboeken. Het probleem met zulke stellingen is dat ze een beginner niet voldoende inzicht geven. Ze zijn abstract geformuleerd en het bewijs bestaat uit mechanische manipulaties met de definities. Bijvoorbeeld,

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] \text{ voor onafhankelijke } X \text{ en } Y,$$

of

$$\text{Var}[X] = np(1 - p) \text{ voor een binomiale stochast met parameters } n \text{ en } p.$$

Overigens, verwachtingswaarde en variantie behoren niet tot de vwo-stof en daarom slaan de meeste leraren deze onderwerpen over. Daarmee vervalt een groot deel van het nut dat je hebt van het begrip stochast, tenminste op het vwo. Tenslotte, onafhankelijkheid is een heel belangrijk begrip, maar in de huidige onderwijs-praktijk wordt niet duidelijk uitgelegd wat de intuïtieve betekenis van het begrip is, en waarom het zo belangrijk is. In vraagstukken en oefeningen blijft het begrip helemaal steken in formalistische controle van de formule voor onafhankelijkheid van gebeurtenissen:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

waar A en B gebeurtenissen zijn. In geval dat nagegaan moet worden of stochasten X en Y onafhankelijk zijn, moet voor alle a en b de onafhankelijkheid van de gebeurtenissen $X = a$ en $Y = b$ gecontroleerd worden. De voorbeelden en opgaven zijn vaak bijzonder gekunsteld. Bijvoorbeeld, X en Y zijn aantallen ogen bij één keer gooien met een dobbelsteen, en dan moet worden nagegaan of $2X + Y$ en X onafhankelijk zijn. Of een puzzeltje zoals: gegeven X en Y zijn onafhankelijk, gegeven voor een aantal paren (x, y) de kansen $P(X = x \text{ en } Y = y)$, te bepalen de kansverdeling van X en Y . Misschien weten de leerlingen nog wel dat in de situatie van knikkers uit vazen halen de eerste en de tweede knikker praktisch gesproken alleen bij terugleggen onafhankelijk zijn. Maar dat is nog mijlenver verwijderd van begrip voor afhankelijkheid en onafhankelijkheid in praktische situaties. Op die manier begrijpen de leerlingen niet goed waar je onafhankelijkheid voor nodig hebt in statistische theorie.

Een bekentenis

Ik heb verteld dat ik in mijn jeugd al problemen met saaie leerboeken had, en ik heb in het bovenstaande geanalyseerd waarin wiskundeboeken verschillen van romans. Statistiek-boeken zijn echter vaak abstract en theoretisch. Toch zou dat niet hoeven, omdat statistiek zo dicht bij het volle leven staat. Ik heb dit nog eens onderstreept met mijn ervaringen bij het vwo-statistiek-onderwijs.

Misschien heb ik de indruk gewekt alsof ik er altijd zo over gedacht heb. Maar dat is niet waar. Toen ik voor de eerste keer statistiek gaf, was ik wat abstractie betreft roomser dan de paus. Ik deelde stencils uit vol met axioma's en kansvelden (met voorspelbare resultaten). Maar toen ik *Statistics* las, vielen mij de schellen van de ogen. Toen pas zag ik wat voor mogelijkheden een leerboek op dat gebied heeft, toen pas begreep ik waar statistiek eigenlijk over ging. Daarom wil ik dit boek aanbevelen: het is nuttige achtergrond-informatie voor een leraar die zelf geen statisticus is, maar wel les in statistiek en kansrekening moet geven; het is nog nuttiger voor schrijvers van leerboeken over statistiek.

Deel II Bespreking van Statistics

Statistics, David Freedman, Robert Pisani, Roger Purves. W. W. Norton & Co, New York, 1978, gebonden, prijs Hfl 70,70 (US \$24,50)

Ik wil nu proberen een indruk te geven van de inhoud van het boek *Statistics*. Het

boek bevat ongeveer 500 pagina's tekst en is onderverdeeld in zeven delen.

Part I. Design of experiments

Dit deel vangt aan met een hoofdstuk over het opzetten van experimenten. Het begint met een uitvoerig verhaal over de proefnemingen met inenting tegen kinderverlamming met het Salk-vaccin. Voor deze proefnemingen werd een groep van een half miljoen kinderen door loting verdeeld in twee gelijke groepen: de ene werd ingeënt met het vaccin, en de andere met een zoutoplossing. Tot het einde van het experiment wist niemand wie wat had gekregen. Dit is de dubbel-blind-methode. Het boek legt de voordelen van deze methode omstandig uit. Het boek contrasteert ook de methode van loting met andere methodes, die ook gebruikt werden bij de proefnemingen. Het vertelt wat die methodes waren en legt uit waarom loting beter is. Bij de bespreking van de resultaten moet je beoordelen of de verschillen 'toevallig' of 'echt' zijn. De lezer maakt stap voor stap kennis met alle aspecten die er aan zo'n onderzoek zitten. Het volgende hoofdstuk (Observational studies) heeft als motto een citaat van R. A. Fisher: 'That's not an experiment you have there, that's an experience.' In één zin samengevat bevat dit citaat al de kern van het hoofdstuk. Niemand gaat tien jaar lang roken (of niet-roken) alleen om een statisticus te plezieren. Daarom kun je geen proeven doen over de effecten van het roken met een controle-groep die door loting is aangewezen, om van dubbel-blind maar te zwijgen. Aan de hand van drie voorbeelden bespreekt het boek de voetangels en klemmen op het gebied van statistische analyse van gegevens die niet door zorgvuldig opgezette experimenten zijn verkregen.

Part II. Descriptive statistics

Beschrijvende statistiek is de kunst van het samenvatten van grote hoeveelheden gegevens. Besproken worden: histogrammen tekenen en aflezen, gemiddelde en standaardafwijking, normale benadering van data, met als toepassing een hoofdstuk over meetfouten. Figuur 1 is een voorbeeld van een oefening uit dit hoofdstuk (pag. 28).

5. Below are three rough sketches of histograms for test scores in different classes. The scores range from 0 to 100; a passing score was 50. For each class, was the percent who passed about 50%, well over 50%, or well under 50%?

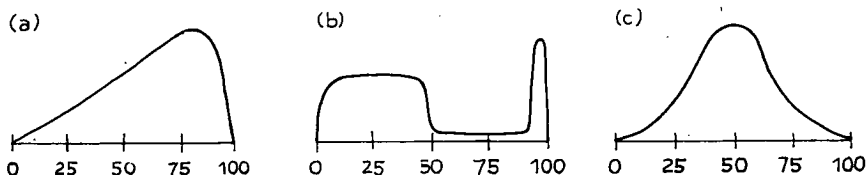


Fig. 1

Deze en vele andere oefeningen vragen inzicht en doen een beroep op het vermogen ruwe en kwalitatieve schattingen te maken. In totaal bevat het boek

ongeveer 450 oefeningen met antwoorden. Alle hoofdstukken op twee na worden besloten met een stel herhalingsopgaven, in totaal 282 stuks, zonder antwoorden. Veel opgaven en alle herhalingsopgaven vragen oordeelsvermogen en kunnen in het algemeen niet worden opgelost door domweg een formuleetje in te vullen. Ik geef twee voorbeelden van illustraties uit dit deel genomen (pag. 60/61), zie figuur 2 en 3.

Figure 9. The SD. This histogram is for the heights of the 3,581 women in the Health Examination Survey. The average of 63 inches is marked with a dashed vertical line. The region within 1 SD (= 2.5 inches) of the average is shaded; 68% of the women differed from the average with respect to height by less than 1 SD.

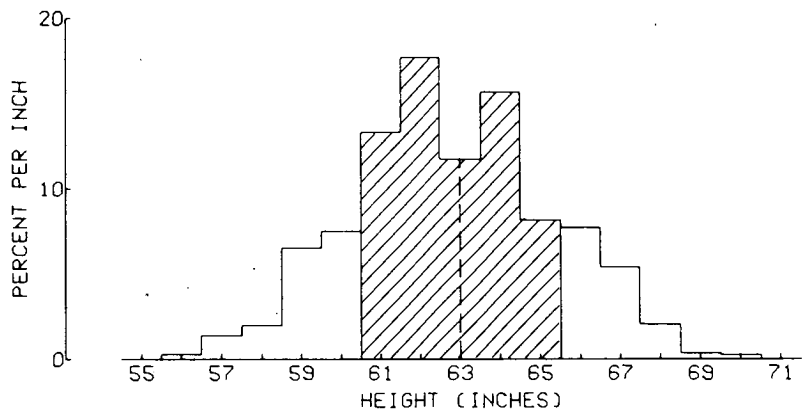


Fig. 2

About two in three of the Public Health Service women differ from the average by less than one SD, with respect to height.



Fig. 3

Merk op dat hier echte en geen verzonden cijfers gebruikt zijn. De auteurs gebruiken ook cartoons om hun verhaal toe te lichten. Hetzelfde histogram als in figuur 2 wordt een hoofdstuk verder nog eens gebruikt, bij de bespreking van de normale approximatie van data.

Figure 6. The correlation coefficient—six positive values. The diagrams are scaled so that the average equals 3 and the SD equals 1, horizontally and vertically. The clustering around a line is measured by the correlation coefficient.

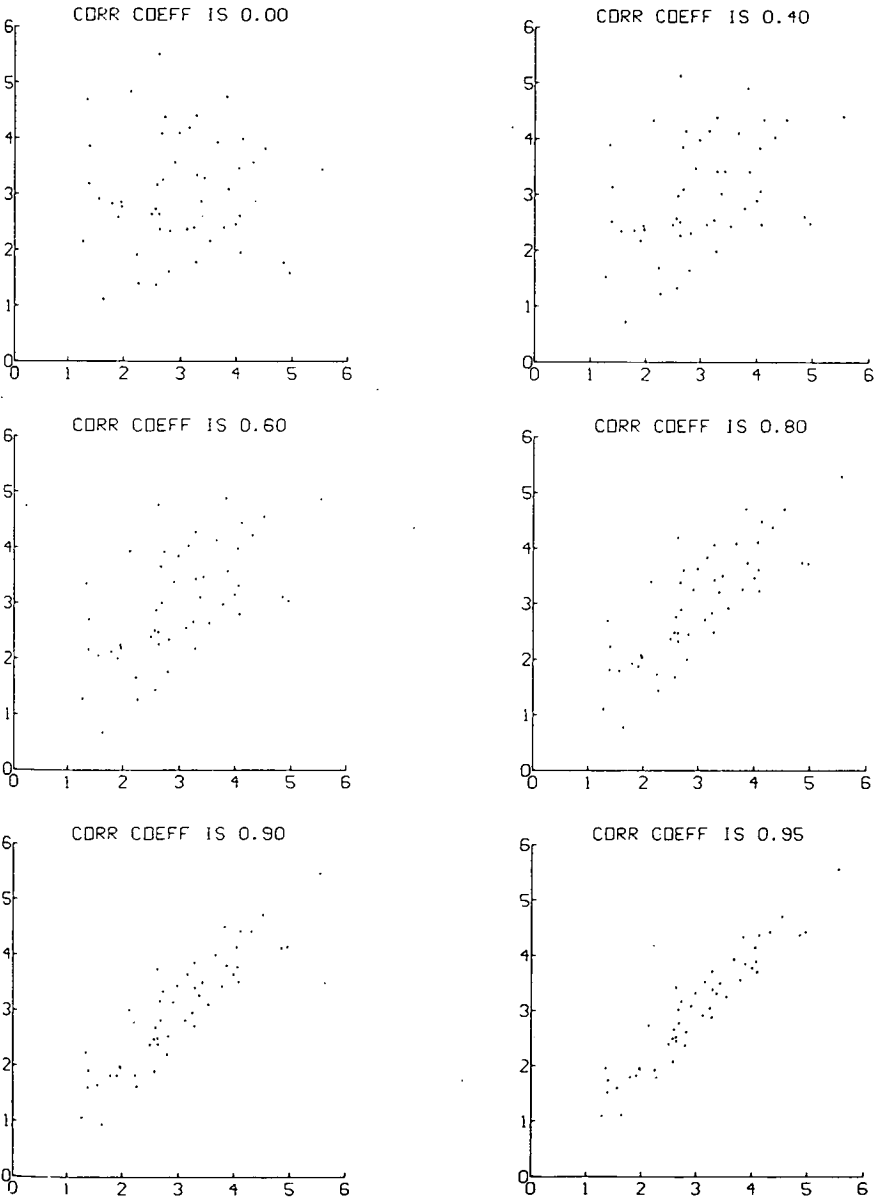


Fig. 4

Part III. Correlation and regression

Dit deel gaat door met het thema van deel II, maar nu wordt het toegespitst op verbanden tussen gegevens. Na een uitvoerige intuïtieve inleiding met veel plaatjes, komen aan de orde: correlatiecoëfficiënt, regressielijn en toepassingen van deze begrippen. Pas na de inleiding staan de methoden voor berekening uitgelegd.

De puntenwolken bij correlatiecoëfficiënt .60 en .80 worden aangeduid als 'football-shaped cloud', daarvoor moet je natuurlijk weten hoe in Amerika een 'football' eruit ziet (pag. 119), zie figuur 4.

Part IV. Probability

Het boek begint pas na 200 pagina's met kansrekening. Het begrip kans wordt volgens de frequentie-theorie uitgelegd: als je hetzelfde experiment telkens maar weer opnieuw doet, gaat het percentage successen naar een limiet. Die limiet experimenteel bepalen is vervelend en vaak onmogelijk. Het eerste hoofdstuk van dit deel begint dan ook met een citaat van J. M. Keynes: 'In the long run we are all dead.' Zo lang kunnen we niet wachten. Daarom is er een wiskundige theorie nodig om kansen te berekenen. Ook onafhankelijkheid wordt in dit deel uitgelegd, geïllustreerd met veel leuke verhalen. Er is een apart hoofdstuk over de binomiale kansverdeling.

Part V. Chance variability

Dit deel begint met een hoofdstuk over de wet van de grote aantallen (law of the averages). Het begint met een amusante conversatie van een Engelse wiskundige, John Kerrich, met een fictieve assistent. Kerrich heeft in Denemarken onder de Duitse bezetting in een interneringskamp gezeten, en doodde daar de tijd met experimenten op het gebied van waarschijnlijkheidstheorie (pag. 240).

Kerrich. OK. Tell me what the law of averages says.

Assistant. Well, suppose you're tossing a coin. If you get a lot of heads, then tails start coming up. Or if you get too many heads, the chance for tails goes up. In the long run, the number of heads and the number of tails even out.

Kerrich. It's not true.

Assistant. What do you mean, it's not true?

Kerrich. I mean, what you said is all wrong. First of all, with a fair coin the chance for heads stays at 50%, no matter what happens. Whether there are two heads in a row or twenty, the chance of getting a head next time is still 50%.

Assistant. I don't believe it.

Kerrich. All right. Take a run of four heads, for example. I went through the record of my first 2,000 tosses. In 130 cases, the coin landed heads four times in a row; 69 of these runs were followed by a head, and only 61 by a tail. A run of heads just doesn't make tails more likely next time.

Dit deel gaat over stochasten. Zoals ik boven al zei, zulke moeilijke woorden komen in dit boek niet voor. Hoe spelen de auteurs dat klaar? De auteurs gebruiken een standaard-model voor de analyse van gecompliceerde situaties. Dit model noemen ze het 'box model'. Dit bestaat uit een doos met biljetten waarop getallen staan geschreven. Voor het precieze model is nodig te weten:

- Welke getallen zitten er in de doos?
 - Hoe vaak komt elk getal voor?
 - Hoe trek je de biljetten uit de doos (hoe vaak, met of zonder terugleggen)?
- Elke keer weer opnieuw wordt dit dozen-model gebruikt, voor het begrip verwachtingswaarde, voor het begrip standaardafwijking ('standard deviation', een eigenschap van de doos); etc. Bijvoorbeeld, het dozen-model wordt gebruikt om 'standard error' uit te leggen. Dat gaat met een doos die vijf briefjes bevat, met de getallen 0, 2, 3, 4, 6 erop geschreven. Uit de doos wordt 25 keer getrokken, uiteraard met terugleggen (pag. 257/258).

So the sum should be

around

$$5 \times 0 + 5 \times 2 + 5 \times 3 + 5 \times 4 + 5 \times 6 = 75.$$

This is the expected value for the sum. Of course, each ticket won't appear on exactly one fifth of the draws, just as Kerrich didn't get heads on exactly half the tosses. The sum will be off the expected value by a chance error:

$$\text{sum} = \text{expected value} + \text{chance error}.$$

The chance error is the amount above (+) or below (–) the expected value. For example, if the sum came out as 70, the chance error would be –5.

The likely size of the chance error is given by the standard error (usually abbreviated to SE):

A sum is likely to be around its expected value, but to be off by a chance error similar in size to the standard error.

There is a formula to use in computing the SE for a sum of draws made at random with replacement from a box. It is called a *square root law*, because it involves the square root of the number of draws. All the statistical procedures presented in the rest of the book depend on this formula.

When drawing at random with replacement from a box of numbered tickets, the standard error for the sum of the draws is

$$\sqrt{\text{number of draws}} \times (\text{SD of the box}).$$

In het laatste hoofdstuk van dit deel wordt uitgelegd hoe de som van een voldoende groot aantal trekkingen uit een doos benaderd kan worden met de

normale verdeling. Daarom komt het boek niet meer terug op de binomiale verdeling, alleen maar op de normale benadering daarvoor. Immers, een binomiale stochast correspondeert met een doos met alleen nullen en enen.

Part VI. Sampling

Dit deel begint met het bekende voorbeeld van de Amerikaanse presidentsverkiezing van 1936. In dat jaar had The Literary Digest tien miljoen telefoonabonnees en leden van clubs aangeschreven, en aan de hand van de tweeëneenhalf miljoen antwoorden voorspeld dat Landon gemakkelijk zou winnen. Het werd echter toch Roosevelt, en wel met een verpletterende meerderheid, zoals Gallup had voorspeld op grond van een steekproef van slechts 50.000. Gallop kon zelfs de foute uitkomst van de Digest goed raden, voordat die in de Digest stond. Kort daarna ging The Literary Digest failliet.

Aan de hand van dit voorbeeld wordt uitgelegd wat een goede steekproef is, hoe je met een steekproef iets over een hele populatie kunt zeggen, en welke kansen je dan loopt om een fout te maken. In dit deel worden veel belangwekkende voorbeelden gegeven. In één zo'n voorbeeld wordt een steekproef van 100 individuen genomen uit een populatie van 6672 personen. Bediscussieerd wordt in hoeverre het percentage mannen in de steekproef overeen zal komen met het percentage in de hele populatie. Voor de redenering wordt weer het dozen-model erbij gehaald en bijgaande illustratie licht toe wat er gebeurt (pag. 325), zie figuur 5.

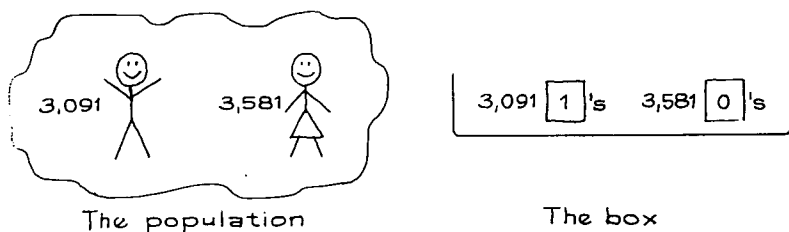


Fig. 5

Part VII. Chance models

Dit deel beslaat twee hoofdstukken, een over modellen voor meetfouten, met uitleg over Student's t-curve, en een over genetica. In het laatste worden de wetten van Mendel uitgelegd, en ook de experimenten van Mendel. Het volgende is een oefening, en ik geef ook het antwoord zoals het achterin staat.

4. Eye color in humans is determined by one gene-pair, with brown dominant and blue recessive. In a certain family, the husband had a blue-eyed father; he himself has brown eyes. The wife has blue eyes. They plan on having three children. What is the chance that all three have brown eyes? (It is better to work this out exactly rather than using the normal approximation.) (pag. 425).

Het antwoord achterin luidt:

4. B = brown; b = blue, Husband is B/b, wife is b/b. Each child has 1 chance in 2 of having brown eyes. The three children are independent, so the chance that all three will be brown-eyed is $(\frac{1}{2})^3 = 1/8$. (pag. A-60)

Part VIII. Tests of significance

In dit laatste deel komt het toetsen van hypothesen aan de orde. Hier wordt echter alleen met de normale verdeling gewerkt, dus niet met de binomiale, zoals in het vwo. In de praktijk wordt vaak met een experimentele groep en een controle-groep gewerkt en hoe je dan op verschillen test wordt uitvoerig besproken. Verder komen de chi-kwadraat-test en nogmaals de Student's *t* aan de orde. De auteurs binden de lezers op het hart dat een significantie-test alleen nagaat of een verschil 'toevallig' is of niet en dat de test niet vertelt of het verschil ook belangrijk is. Alle 28 hoofdstukken besluiten met een samenvatting. Ik citeer de samenvatting van hoofdstuk 26: (pag. 453).

1. A *test of significance* gets at the question of whether an observed difference is real—the *alternative hypothesis*—or just a chance variation—the *null hypothesis*.

2. A legitimate test of significance requires a box model for the data. The null hypothesis, and usually the alternative, have to be translated into statements about the box model.

3. A *test statistic* is used to measure the difference between the data and what is expected on the null hypothesis. The *z-test* uses the statistic

$$z = \frac{\text{observed} - \text{expected}}{\text{SE}}$$

The expected value is computed on the null hypothesis.

4. The *observed significance level* (also called "*P*," or the "*P*-value") is the chance of getting a test statistic as extreme as or more extreme than the observed one. The chance is computed on the basis that the null hypothesis is right. Therefore, *P* does not give the chance of the null hypothesis being right.

5. Small values of *P* are evidence against the null hypothesis; they indicate that something besides chance was operating to make the difference.

Appendices

Behalve de ruim 500 pagina's tekst zijn er ook nog ongeveer 80 pagina's met overzicht van terminologie en formules, voetnoten, antwoorden van oefeningen, voorts tabellen van wortels, normale verdeling, Student's *t* en chi-kwadraat en tot slot nog een index.

Slotopmerkingen

U merkt het, ik ben erg enthousiast over het boek. Het uiterlijk van het boek is ook erg prettig. Er is niet bezuinigd op ruimte voor de kantlijn, er is een aangename afwisseling tussen grote en kleine letters. Verder is het papier glad en tamelijk ondoorzichtig. Ik heb vrijwel geen drukfouten gevonden.³

Voetnoten

- 1 Behalve in 'EXERCISE SET A' en dergelijke.
- 2 Opgave 3 van het Centraal Schriftelijk Wiskunde I (eerste zitting) 1981 luidde:
Vijf balletjes worden verdeeld over drie genummerde dozen D_1 , D_2 en D_3 . Daarbij mogen ten hoogste twee dozen leeg blijven.
 - a. Eén van de mogelijke verdelingen is: 2 balletjes in D_1 , 0 balletjes in D_2 en 3 balletjes in D_3 . Toon aan dat er nog 20 andere verdelingen zijn.
Bovendien is gegeven dat elke mogelijke verdeling van de vijf balletjes over de drie dozen een even grote kans van optreden heeft.
 - b. Het aantal balletjes in D_k is een stochast X_k .
Geef een kansverdeling van X_1 .
Onderzoek of de gebeurtenis $X_1 = 2$ of $X_1 = 3$ en de gebeurtenis $X_2 = 0$ onafhankelijk zijn.
 - c. Het aantal dozen dat precies n balletjes bevat is een stochast Y_n . Geef de kansverdeling van Y_2 .
Bereken $P(Y_2 = 0 \mid Y_1 = 1)$.
- 3 Het mooie Nederlands van dit artikel is van mijn man, J. W. Nienhuys; hij heeft ook veel advies gegeven over de organisatie van de inhoud. Mocht u de stijl nog te droog vinden, dan is dat de 'Dutch Husband'-stijl.

Kanttekeningen bij Teugels

NIELS H. VELDHUIJZEN

Teugels' bijdrage over controversen in de ontwikkeling van de kanstheorie (Teugels, 1981) wekt de indruk dat tegenwoordig alles pais en vree is in de wereld van de kansrekenaars. Daar is echter geen sprake van. In deze reactie wil ik geen poging doen mensen te bekeren; ik beperk me tot enige reflectie op uitspraken en voorbeelden van Teugels.

In zijn slotbeschouwing zegt Teugels dat de 'geaxiomatiseerde vorm van kanstheorie (van Kolmogorov - NHV) nu volkomen is aanvaard in kringen van beoefenaars van de kanstheorie' (Teugels, a.w., p. 67). Er is echter al jaren een discussie gaande tussen representanten van de 'objectieve' en de 'subjectieve' school. Dat die discussie soms venijnig kan toegaan, toont Hamaker (1977). De objectieve opvatting van kans is die à la Kolmogorov; over subjectieve kansen kom ik nog te spreken.

Teugels schrijft ook 'dat het vastleggen van een juiste en exhaustieve uitkomstenverzameling hét uitgangspunt moet zijn voor een goede opbouw van een kansexperiment' (a.w., p. 67). Wat is een *juiste* uitkomstenruimte? Beschouwen we het probleem van de twee worpen met één munt. De kans dat twee keer munt boven komt, is klaarblijkelijk $1/4$. Om dat te zien, behoeft men slechts de mogelijke uitkomsten van het experiment uit te schrijven en dan te tellen hoeveel van die uitkomsten gunstig zijn. Zo eenvoudig is het echter niet! Het probleem is erin gelegen dat men pas de mogelijke uitkomsten van een experiment kan uitschrijven als men zich bewust is van de assumpties die men maakt. De assumpties die men doorgaans maakt als het over het werpen van munten gaat, zijn: de munt is zuiver, d.w.z. de kans op kruis is gelijk aan de kans op munt is gelijk aan $\frac{1}{2}$; en: de verschillende worpen zijn onderling onafhankelijk. Jammer genoeg ziet men zulke assumpties vrijwel nooit expliciet gemaakt.

Hoe belangrijk de assumpties zijn, moge blijken uit de volgende variant van het probleem, waarin ook sprake is van werpen. Hoe groot is de kans dat het een zoon wordt, wil het aanstaande ouderpaar graag weten. Hoogstwaarschijnlijk krijgen zij ' $\frac{1}{2}$ ' ten antwoord. De arts herinnert zich misschien nog het probleem met de munten uit zijn semester statistiek. Maar is die analogie gerechtvaardigd? Is de kans dat deze aanstaande moeder een zoon ter wereld brengt inderdaad 50%? (Dat men, als men aggregeert over vrouwen, ziet dat ongeveer de helft van de borelingen jongens zijn, is geen geruststelling voor de zwangere vrouw. Zij wil haar kansen weten, niet die van de gemiddelde vrouw.) En als er sprake is van een

tweede kind, is het geslacht daarvan als onafhankelijk van dat van het eerste kind te beschouwen? Dit zijn vragen die wellicht door medici te beantwoorden zijn; het zonder meer doen alsof een vrouw een zuivere munt is, is niet gerechtvaardigd. (In de familie Pitofsky zijn zeven generaties lang alleen maar zonen geboren. Wie durft de jonge mevrouw Pitofsky te voorspellen dat de kans op een dochter $\frac{1}{2}$ is? (Huff, 1965).)

De assumpties dat de munt waar men mee werpt zuiver is en dat opvolgende worpen onderling onafhankelijk zijn, lijken wel plausibel. Zij worden ondersteund door overwegingen omtrent de fysische eigenschappen van munten en hun gedrag. Hoe komt dan een man als d'Alembert tot zijn ogenschijnlijk foutieve uitkomst? Ik weet het niet, maar kan wel een poging tot reconstructie wagen van d'Alemberts gedachtengang. Ik veronderstel dat d'Alembert niet genegen was aan te nemen dat de kans, dat deze ene munt met munt boven zou komen, gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Hij heeft in het geheel niet geweten hoe groot die kans is: elke waarde is evenzeer mogelijk. Deze opvatting heeft d'Alembert geformaliseerd op de volgende manier: hij postuleert voor de kans θ dat munt boven komt een uniforme verdeling op het eenheidsinterval. Dat opvolgende worpen onafhankelijk zijn, wil hij wel geloven. Ook gelooft hij wel dat θ een eigenschap van de munt is; d.w.z. θ verandert niet. Het gaat er alleen om dat d'Alembert niet weet hoe groot θ is. Het was nu voor d'Alembert een kleine moeite om de (predictieve) verdeling te vinden voor de uitkomst: in n worpen komt de uitkomst 'munt' x keer voor. Deze verdeling ziet er, met inachtneming van de door d'Alembert gekoesterde assumpties, als volgt uit:

$$P(x \text{ keer munt in } n \text{ worpen}) = \int_0^1 \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} d\theta = \frac{1}{n+1}.$$

In deze reconstructie van d'Alemberts zieleroverselen komt tot uiting hoe belangrijk het is, dat men de assumpties expliciet maakt die men er op na houdt. Tenslotte is een kansverdeling een model, dat maar beperkte geldigheid heeft. Als bijproduct van de zojuist volbrachte exercitie hebben we een voorbeeld van een subjectieve waarschijnlijkheid: d'Alembert drukt zijn a priori vermoedens omtrent de waarde van θ uit in een kansverdeling. Het is deze handeling: het toekennen van kansen aan toestanden of parameters die men niet kan repliceren, die ook vandaag de dag de pennen van de kansrekenaars in beweging houdt. Ik wil op dit debat hier niet ingaan, maar er alleen op wijzen dat subjectieve kansen (of wat daar voor door moet gaan) in het dagelijkse taalgebruik gemeengoed zijn. Horen we niet steeds van het KNMI: morgen kans op regen?

Het bovenstaande had tot doel, Teugels' bewering te weerleggen dat Kolmogorovs axiomatische kanstheorie volkomen aanvaard is. Ik heb aan willen tonen dat het niet altijd eenvoudig is, de uitkomstenruimte te specificeren. Men zal zich steeds bewust moeten zijn van de assumpties die men er op na houdt. Vele uitkomstenverzamelingen zijn, helaas, in de loop der tijden tot 'standaard' geworden waardoor ze maar al te vaak worden gebruikt voor problemen die misschien heel anders aangepakt moeten worden.

Ik wil besluiten met een terzijde. Het vastleggen van een uitkomstenverzameling

Euclides

Maandblad voor de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse
Vereniging van Wiskundeleraren

57ste jaargang 1981/1982

Wolters-Noordhoff bv Groningen

Inhoud van de 57ste jaargang 1981/1982

ARTIKELEN

- H. Biezeveld: *Taal van wiskundigen en taal van leerlingen* - 294
- H. Boertien:
- *Leerdoelgericht werken in het onderwijs* - 253
- *Leerdoelgerichte toetsen bij lange-termijn-doelen* - 303
- H. Bosscher: *Werkvormen bij het behandelen van gemaakte vraagstukken* - 108
- H. Broekman: *Het klopt tocht!?* - 360
- S. H. Gheng: - *Parametervoorstellingen van krommen en differentialen* - 129
- *Statistics: een bijzonder boek* - 378
- J. van de Craats: *De XXIIe Internationale Wiskunde Olympiade* - 403
- W. Drost: *Een voetbalspel en negatieve getallen* - 105
- H. Freudenthal: *Taalfetisjisme* - 297
- W. Gronloh: *Oud probleem* - 93
- R. Houtman: *Sociale vaardigheden en het wiskundeonderwijs* - 99
- J. O. de kat: *Eenheidscirkel in het complexe vlak* - 272
- M. Kindt: *Niets nieuws onder de zon van Berkeley?* - 14
- W. Kremers: *De Wageningse Methode* - 398
- R. Leentfaar: *Computer en school* - 24
- A. W. van Lennep: *Hoezo, singulier?* - 20
- J. van Maanen: *Euler en Goldbach over de getallen van Fermat: $2^n + 1$* - 347
- H. J. K. Moet: *Wie is er bang voor differentiaalvergelijkingen?* - 122
- B. Muller en B. Zwaneveld: *Leerlingen kiezen (te) graag wiskunde!* - 269
- J. W. Nienhuys: *Differentiaalvergelijkingen* - 139
- A. van Oort: *Raaklijnen aan tweedegraadskrommen in het HAVO-onderwijs II* - 281
- H. Rabaey: *Groepswork in de wiskunde* - 263
- J. van de Riet: *Het nulde, het eerste, het hoogste? ...ja, welk niveau nou eigenlijk?* - 153
- N. van 't Riet en B. Zwaneveld: *Wiskundige houding* - 333
- A. C. M. van Rooij: *Differentialen op de middelbare school?* - 81
- A. van Streun: *Het leren oplossen van wiskundige problemen* - 3
- P. Terlouw: *Problemen bij het onderwijzen en leren van kansrekening en statistiek* - 373
- J. L. Teugels: - *Controversen in de ontwikkeling van de kanstheorie* - 61
- *Naschrift* - 394
- N. H. Veldhuijzen: *Kanttekeningen bij Teugels* - 391
- R. Verhulst: *Brengen we de hoeken soms niet om het hoekje?* - 311
- P. G. J. Vredenduin: - *Leerplanontwikkeling onderweg 2a en 2b* - 41
- *Naschrift* - 302
- H. Zonneberg: *De stelling van Georg Alexandrof Pick* - 277
- B. Zwaneveld: *Noties en notaties bij functies en relaties* - 300
- B. Zwaneveld en B. Muller: *Leerlingen kiezen (te) graag wiskunde* - 269

B. Zwaneveld en N. van 't Riet: *Wiskundige houding* - 333

KORRELS

R. Kooistra: *Het ladenprobleem van Bertrand en het knikkerprobleem van Carroll* - 154

L. A. Rang: *Raaklijn aan parabool in gegeven punt op de parabool (havo)* - 285

P. G. J. Vredenduin: - *De zegswijze 'uitdrukken in'* - 302
- *Een omstreden eindexamenopgave* - 357

THEMANUMMERS

Differentialen en differentiaalvergelijkingen, november 1981 pag. 81 t/m 92,
december 1981 pag. 121 t/m 152

Examennummer (examens van 1980, toelichtingen, samenvattingen van besprekingen, examens HEAO), januari 1982, pag. 161 t/m 250

Taalgebruik, april 1982, pag. 293 t/m 302

Kansrekening & Statistiek, juni 1982, pag. 373 t/m 397

BOEKBESPREKINGEN

Drs H. Alblas, *Systeemprogrammatuur, een indeling met de machinestructuur van de PDP II als voorbeeld* (A. Ollongren) - 74

Christoph Bandelov, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie* (P. J. Holewijn) - 411.

E. G. Begle, *Critical Variables in Mathematics Education* (J. J. Sloff) - 38

Beiträge zum Mathematikunterricht 1980 (Joh. H. Wansink) - 332

Beiträge zum Mathematikunterricht 1981 (Joh. H. Wansink) - 411

The Raymond W. Brink Selected Mathematical Papers, volume 3, *Selected Paperson Algebra* (A. C. Zaanen) - 158

R. Z. Has'minskii, *Stochastic Stability of Differential Equations* (J. Wessels) - 410

E. Hlawka, *Theorie der Gleichverteilung* (M. van der Vlugt) - 159

IOWO, *Achterkant van de Möbius-band* (W. Kleijne) - 411

M. K. Jain, *Numerical solution of differential equations* (Prof. dr M. N. Spijker) - 158

Dieter Klaua, *Mengenlehre* (P. G. J. Vredenduin) - 116

Kiyosi Itô, *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations* (A. Bagchi) - 72

S. L. Krushkal, *Quasi conformal mappings and Riemann surfaces* (dr C. A. M. Peters) - 38

M. S. Livshits and A. A. Yantsevich, *Operator Colligations in Hilbert Spaces* (A. C. Zaanen) - 289

G. Meinardus, *Approximation in Theorie und Praxis* (Prof. dr W. W. E. Wetterling) - 289

- Herbert Meschkowski, *Problemgeschichte der Mathematik I* (W. Kleijne) - 290
 S. G. Mikhlin, *Approximation on a rectangular grid* (F. Schurer) - 367
 D. Pascali and S. Sburlan, *Nonlinear mapping of monotone type* (M. A. Kaashoek) - 73
 Prime-80, *Proceedings of a Conference on Prospects in Mathematics Education in the 1980's* (J. J. Sloff) - 37
 S. L. Salas, C. G. Salas, *Precalculus* (G. M. Hogewey) - 159
 Ann K. Stehney, Tilla K. Milnor, Joseph E. D'Atri, Thomas F. Banchoff, *Selected Papers on Geometry* (W. Kleijne) - 365
 H. Stenger (Herausgeber), *Praktische Anwendungen von Stichproben verfahren* (J. L. Mijnheer) - 409
 Hans Steur, *Levende Wiskunde, Toepassingen geordend naar wiskundig onderwerp* (P. G. J. Vredenduin) - 116
 Heinz Klaus Strick, *Einführung in die beurteilende Statistik* (B. Zwaneveld) - 410
Studies in Statistics, M. A. A. Series in Mathematics, vol. 19 (W. R. van Zwet) - 409
Systemica, tijdschrift van de Systeemgroep Nederland (W. Kleijne) - 289
 Paul R. Thie, *An Introduction to linear Programming and Game Theory* (A. Ollongren) - 117
 Johannes Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik* (W. Kleijne) - 118

DIVERSEN

- Van de redactie - 1
 Ten geleide - 121 - 293
 Jaarrede 1981 van de voorzitter van de NVvW - 323
 Notulen van de algemene vergadering van de NVvW - 327
 Verslag van het verenigingsjaar 1980/1981 - 75
 Statuten - 77
 Nederlandse Wiskunde Olympiade, eerste ronde 1980 - 31
 Nederlandse Wiskunde Olympiade, tweede ronde 1981 - 400
 XXIIe Internationale Wiskunde Olympiade - 403
 Negende Wiskunde Olympiade in de V.S. - 68
 Uit de buitenlandse tijdschriften - 29

RECREATIE - 35 - 69 - 114 - 155 - 286 - 329 - 363 - 406

MEDEDELINGEN - 39 - 75 - 119 - 160 - 251 - 291 - 332 - 368 - 412

De 57ste jaargang stond onder redactie van Dr F. Goffree - Dr P. M. van Hiele - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto - P. E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders - Mw H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - Dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester) - B. Zwaneveld (hoofredacteur).

geschiedt veelal door het enumereren van alle mogelijke uitkomsten van het experiment. Dit tabelleren kan gauw ontaarden tot een automatisme. Een voorbeeld hiervan is Teugels' oplossing voor de paradox van Bertrand (Teugels, a.w., p. 65). Wanneer men het probleem van de doosjes fris van de lever benadert, is het onmiddellijk duidelijk dat met de keuze van een bepaald doosje de uitkomst van het experiment is bepaald. Het probleem kan dan ook zonder enig verlies worden teruggebracht tot: Kies lukraak een doosje; hoe groot is de kans dat beide schuifjes van de gekozen doos muntstukken bevatten van hetzelfde materiaal?

Hoe gauw men zich bij het vastleggen van de uitkomstenruimte kan vergissen, blijkt uit de parafrase die Teugels (a.w., p. 63) geeft van Fermats oplossing voor het verdelen van de inzet. Teugels bestempelt Fermats oplossing als 'naar huidig inzicht juist'. De door Teugels weergegeven uitkomstenruimte is echter niet die welke behoort bij het probleem. Dat stelt namelijk dat het spel beëindigd wordt zodra één der spelers *S* ronden gewonnen heeft. De uitkomstenverzameling die Teugels geeft, behoort bij het probleem waarin men besluit om na onderbreking van het spel, nog drie ronden te spelen. De uitkomstenruimte die behoort bij het oorspronkelijke probleem ziet er als volgt uit:

1e ronde	+	-	-	-
2e ronde	*	+	-	-
3e ronde	*	*	+	-
Winnaar	A	A	A	B

(Een * betekent dat die ronde niet nodig is: het spel is uit.)

Er valt dus veel voor te zeggen de inzet te verdelen in de verhouding 3 : 1. Aangenomen natuurlijk dat men het er van te voren over eens is geworden de inzet bij onderbreking van het spel te verdelen naar rato van de winstkansen. Andere afspraken zijn natuurlijk ook mogelijk. Er is dus geen sprake van één juiste oplossing.

Referenties

- H. C. Hamaker (1977), Subjective Probabilities and Exchangeability from an Objective Point of View. *International Statistical Review*, 45, 223-231.
D. Huff (1965), *Bereken Uw Kansen*. (Prisma 1096) Het Spectrum, Utrecht/Antwerpen.
J. L. Teugels (1981), Controversen in de ontwikkeling van de kanstheorie. *Euclides*, oktober 1981, 61-67.

Over de auteur:

Niels H. Veldhuijzen werd geboren in 1947. Hij studeerde *Methoden en Technieken van Sociaalwetenschappelijk Onderzoek te Leiden*. Hij is als methodoloog werkzaam bij het Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling te Arnhem. Deze notitie schreef hij op persoonlijke titel.

Naschrift:

Bij het schrijven van mijn verhaal was ik uitgegaan van volgende basisgedachten:

- 1 In de loop der jaren hebben enkele markante situaties wetenschapslui aan het denken gezet. Mede hierdoor is men tot een cohaerente theorie gekomen (deze van Kolmogorov) die ruimschoots haar toepasbaarheid heeft bewezen (Paragrafen a, b en c).
- 2 De huidige kanstheorie biedt nog steeds zulke intrigerende problemen (Paragraaf d).
- 3 De voorbeelden moeten toegankelijk zijn voor leraren secundair onderwijs (in België 12-18 jarigen).

De kanttekeningen van de heer N. H. Veldhuijzen steunen op een zogenaamde Bayesiaanse benadering. Deze is mij natuurlijk voldoende bekend. De tweestrijd tussen de axiomatische en Bayesiaanse benadering is vermoedelijk de grootste controversie die ooit in kanstheorie is opgetreden en nog steeds niet is opgelost. Ik had hierover een bijkomende paragraaf kunnen inlassen; de bijdrage van N. H. Veldhuijzen vult dit hiaat op.

Ik zie echter geen enkele reden om de vermelde problematiek te herhalen, zeker niet in een leraren tijdschrift.

Een voorbeeld mag illustreren waar het essentieel om te doen is. Ik ben sinds jaren secretaris van de examenjury voor derdejaarsstudenten wiskunde aan de Katholieke Universiteit te Leuven. Ik heb vastgesteld over de jaren dat het aantal geslaagden circa 90% is.

1e situatie: in een anoniem briefje vraagt een student me de kans op slagen voor een derdejaarsstudent. Mijn antwoord is 9/10.

2e situatie: student Euclides Fermat vraagt me zijn kans op slagen.

Vorige jaren behaalde hij 82%, respectievelijk 84%. Mijn antwoord is dat hij gerust mag zijn (Hopelijk interpreteert hij dit antwoord niet als een wenk om voor de rest van het jaar te gaan fuiven).

Kansuitspraken over een element van een populatie zijn maar relevant in zoverre dit element *lukraak* uit deze populatie is gekozen. Euclides is geen lukraak gekozen element uit de eerste situatie.

De heer Veldhuijzen gaat ook voorbij aan mijn bespreking van het d'Alembert voorbeeld. Elke theorie (ook de axiomatische) is maar houdbaar in zoverre ze door het experiment wordt bevestigd. Met een beperkt aantal herhalingen kan men nagaan dat de kans om 1 keer winst te gooien in 9 worpen niet 1/10 is zoals gesuggereerd door d'Alembert.

Ik kan helemaal niet akkoord gaan met de bespreking van Fermats oplossing. De vier mogelijkheden die door de heer Veldhuijzen worden verwerkt hebben *niet* dezelfde objectieve kans. De uitkomst $+$ $\times$ $\times$ heeft kans 1/2, $-$ $+$ $\times$ kans 1/4, $-$ $-$ $+$ en $-$ $-$ $-$ beide kans 1/8. De winstkans van A is dus 7/8 en daarmee uit. Het is de bijdrage geweest van het trio Fermat-Huygens-Pascal een aanvaardbare interpretatie gegeven te hebben van de zin 'Hoe moet de inzet *redelijkerwijze* worden verdeeld?' n.l. naar rato van de winstkansen. Als alternatieve afspraak zou ik de twee spelers een robbertje laten vechten. Wie wint krijgt alles.

J. L. Teugels

Stochasten

P. G. J. VREDENDUIN

Stochasten zijn moeilijke dingen. Ik heb eens in alle ernst een hospitant horen beweren:

Een stochast is een functie die aan de elementen van een verzameling reële getallen toevoegt. Neem als verzameling: deze stoel, deze tafel en deze lessenaar. Voeg aan de stoel het getal 1 toe, aan de tafel 3 en aan de lessenaar 8. Dan heb je een stochast.

De klas begreep het prima, zoals meer voorkomt als je iets onzinnigs vertelt. De hospitant had het echter wel heel simpel voorgesteld. Er is eerst sprake van een stochast, als aan deze getallen kansen toegevoegd worden.

Wat is dus een stochast? *Gegeven is een verzameling V . X is een functie die aan de elementen van V reële getallen toevoegt. Verder is er een kansfunctie P met als domein de deelverzamelingen van het bereik van X . In dat geval noemen we X een stochast.*¹⁾

Enerzijds is X een functie. Anderzijds spelen echter bij het bepalen van de kansen de functiewaarden van X een rol. Bij de modernisering in 1968 hebben we ons aangewend zorgvuldig onderscheid te maken tussen functie en functiewaarde, zowel in de niet-formele taal als in de notatie. Merkwaardigerwijs doen we dit bij stochasten niet. De nomenclatuurcommissie heeft dit wel gemerkt, maar heeft het probleem laten lopen, omdat ze meende dat het onderwijs didactisch niet gebaat was met een zorgvuldige onderscheiding.

Voorbeeld. Gooi met zeven dobbelstenen. X is de functie die aan elke worp een getal toevoegt, nl. het totaal aantal ogen dat geworpen wordt. De kansfunctie P voegt aan elk aantal ogen de kans toe dat dit aantal geworpen wordt.

X is een stochast. Want P voegt aan elke deelverzameling van B_X een kans toe. We vragen nu bijv.: wat is de kans dat het aantal geworpen ogen tussen 20 en 25 ligt? Deze kans noteren we $P(20 \leq X \leq 25)$. Voor ieder is de bedoeling van deze notatie duidelijk. Toch deugt het officieel niet. Er zijn twee dingen mis. Met X in $20 \leq X \leq 25$ is niet de functie X bedoeld, maar de functiewaarde van deze

¹⁾ Men kan zich afvragen, hoe deze kansfunctie P tot stand komt. De normale gang van zaken is de volgende. Op V is een kansfunctie P_0 gedefinieerd. V_x is de deelverzameling van de elementen van V waaraan de stochast de functiewaarde x toevoegt. Aan V_x wordt door P_0 de kans p_x toegevoegt. Dan voegt ook P aan x de kans p_x toe. Omdat de kansfunctie P_0 in het volgende geen rol speelt, is hij verder buiten beschouwing gelaten.

functie. En de argumenten van P zijn verzamelingen, terwijl $20 \leq X \leq 25$ niet een notatie voor een verzameling is.

Wat zou er dus eigenlijk moeten staan? Correct is $P(\{x | 20 \leq X(x) \leq 25\})$.

U bent blij dat we het zo niet doen? Ik ook. Hetgeen niet wegneemt, dat het verhelderend moet zijn voor de docent hierbij stil te staan.

In eindexamenopgaven komt de term stochast geregeld voor. Er heeft zich in de terminologie een zekere traditie ontwikkeld. Als voorbeeld kies ik het examen wiskunde I van 1977, tweede periode, opgave 4. Deze gaat over vijf draaibare schijven waarop getallen staan. Van deze getallen is er steeds precies één zichtbaar. Ik citeer zes regels uit de opgave.

- 1 De stochast X is het aantal cijfers 6 dat zichtbaar is.
- 2 De stochast Y is het aantal cijfers 7 dat zichtbaar is.
- 3 De stochast Z is gedefinieerd door $Z = X + Y$.
- 4 Stel de kansverdeling op van de stochast X .
- 5 Onderzoek of de stochasten X en Y onafhankelijk zijn.
- 6 Bereken $P(Z = 2)$.

In 1 gaat het over een stochast. X stelt niet deze stochast, maar de functiewaarde ervan voor.

De situatie in 2 en 3 is analoog.

Ook in 4 is X de functiewaarde. Immers door P worden aan de functiewaarden van de stochast kansen toegevoegd. 5 vind ik moeilijk. Hoe zijn onafhankelijke stochasten gedefinieerd? Ik dacht dat X en Y hier de echte stochasten zelf zijn. In 6 is Z weer duidelijk de functiewaarde. Laat regel 5 even buiten beschouwing. Bekijk ook de andere eindexamenopgaven eens waarin het woord stochast voorkomt. Overal ziet men dat weliswaar de term stochast gebruikt wordt, maar dat X , Y enz. de functiewaarde van de stochast voorstellen.

Ik geloof dat we in elk geval bereikt hebben, dat geen enkele leerling moeite heeft met de term stochast. Wel ben ik bang dat slechts een enkele leerling in staat is uit te leggen wat een stochast is. Hij weet wat er van hem gevraagd wordt, als hij het woord stochast tegenkomt. Maar het blijft een ietwat vage uitdrukking waarvan de precieze betekenis hem ontgaat. Ik moet toegeven dat het mij jarenlang ook zo gegaan is.

Of deze situatie didactisch verantwoord is, moet ieder voor zich maar beoordelen. Uitgaande van bepaalde gezichtspunten is ze wel pragmatisch verantwoord.

Ik werd onlangs opnieuw met dit probleem geconfronteerd, toen ik de examenopgaven 1981 tegenkwam van de heao te Arnhem, die inmiddels in het Examennummer afgedrukt zijn. De betreffende opgave herhaal ik hier.

- 1 Een toevalsvariabele $\underline{x}$ ¹⁾ heeft als dichtheidsfunctie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{64}x^2, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- a Toon aan dat $f(x)$ een (kans)dichtheidsfunctie is.

¹⁾ Op verzoek van de auteur is in het Examennummer x afgedrukt waar in de oorspronkelijke gestencilde opgaven $\underline{x}$ stond.

- b Bereken $E(\underline{x})$ en $\text{var}(\underline{x})$.
- c Bereken $P(\underline{x} \leq 2)$.
- d Bereken $P(\underline{x}^2 - 3\underline{x} = -2)$.
- e Bereken $P(\ln \underline{x} < 2)$.
- f Bereken $E(10\underline{x}^2 + 6\underline{x} + 3)$.
- g Bereken $\text{var}(5\underline{x} - 3\underline{y}^2)$ als bekend is dat $\underline{y}^2$ dezelfde dichtheidsfunctie bezit als $\underline{x}$ en dat $\underline{y}^2$ en $\underline{x}$ onderling onafhankelijk zijn.

Vertaald in de totnogtoe gebezigde terminologie is hier sprake van een stochast $\underline{x}$. De functiewaarden van deze stochast worden genoteerd: x .

Als conventie wordt aangenomen dat x een verkorte schrijfwijze is voor $\underline{x}(x)$. In c wordt gevraagd naar de kans dat de waarde x van de stochast $\underline{x}$ hoogstens 2 is. Er wordt dus gevraagd naar $P(\{x | x \leq 2\})$. Als conventie is aangenomen in plaats van $P(\{x | A(x)\})$ kortweg te schrijven $P(A(x))$. Waardoor er komt $P(x \leq 2)$. M.i. moet dus de onderstreping in c, d en e weg.

Twee conventies zijn hier gevolgd die de duidelijkheid alleen maar ten goede komen en het begrip zeker niet schaden. Anderzijds is één ding ingewikkelder geworden: het voorkomen van $\underline{x}$ en x naast elkaar.

Wie begrijpt wat een stochast is, zal met het onderscheid tussen $\underline{x}$ en x geen moeite hebben. Voor wie niet begrijpt wat een stochast is, blijft het een eeuwig struikelblok.

Anderzijds: wie er prijs op stelt dat zijn leerlingen begrijpen wat een stochast is, zal de voorkeur geven aan onderscheid maken tussen $\underline{x}$ en x . Dit zal het begrip ten goede komen.

Hier raken we een essentieel didactisch kenmerk van scherpe notaties.

Enerzijds: scherpe notaties bevorderen het inzicht en maken het de mens mogelijk zich correcter uit te drukken.

Maar anderzijds: hoeft u voor scherpe notaties, zodra deze pietepeuterig precies worden. Ze worden een belasting voor de leerling. Ze kunnen zelfs gemakkelijk ertoe leiden, dat hij zich met moeite aanleert hoe hij iets moet noteren, wil hij er geen streep door krijgen, terwijl het verband tussen notatie en inzicht volkomen zoek raakt.

Tussen deze twee polen moeten we trachten didactisch ons een weg te banen. In 1968 is sterk de nadruk gelegd op een modernisering van de notatie. Men is daarbij wel eens verder gegaan dan noodzakelijk was. Bovendien beheersten vele leraren en ook schrijvers van schoolboeken de notatie zelf niet voldoende. En als men iets niet voldoende begrijpt, kan men het niet op didactisch verantwoorde wijze doorgeven en toepassen. Tegenwoordig heeft men wel eens de neiging naar het andere uiterste door te slaan en het kind met het badwater weg te gooien, hetgeen ook jammer is.

Voor alles: *notaties zijn middel en geen doel.*

De Wageningse Methode

WIM KREMERS

De scholen

De sectie wiskunde van Het Wageningse Lyceum is in 1974, in samenwerking met het IOWO, begonnen met het ontwerpen van eigen materiaal. In die beginjaren is het vooral Martin Kindt geweest die zijn stempel op dit materiaal heeft gedrukt. Later namen leden van de wiskundesectie van het Wageningse Lyceum, in wisselende samenstelling, het uitbreiden en verbeteren voor hun rekening. Dit mondde uit in een methode voor de onderbouw van havo en vwo. In 1980 is deze methode ingevoerd door het Liemers College in Zevenaar en dit schooljaar is het Thomas a Kempiscollege in Arnhem het Wageningen-materiaal in haar eerste klassen gaan gebruiken.

Sinds augustus 1980 herschrijft een team het materiaal tot een definitieve vorm. Naar verwachting zal dit werk (voor de eerste drie klassen havo-vwo en voor de vierde klas vwo) in 1984 voltooid zijn. Het team bestaat uit Leon van den Broek, Simon Schoone en Anje Stolp (Wageningse Lyceum) en Wim Kremers (Liemers College).

De methode

Het Wageningen-materiaal bestaat uit zo'n 40 boekjes, waaronder twee IOWO-producties. In elk boekje wordt een hoofdstuk uit de wiskunde behandeld.

Om zoveel mogelijk in te spelen op individuele verschillen tussen leerlingen, is gekozen voor werkboekjes, die de leerlingen zelfstandig kunnen doorwerken. Bijgevolg is de leraar meer in de gelegenheid aandacht te besteden aan afzonderlijke leerlingen.

Het *verbruiksmateriaal* nodigt uit tot samenwerking. Het werken in groepjes ligt dan ook voor de hand, hoewel dat zeker niet de enig mogelijke werkvorm is.

De leerlingen corrigeren hun (elkaars) werk m.b.v. 'korrektieboekjes'. De klassikale benadering van de leerling kan daarmee tot een minimum worden teruggebracht.

In elk boekje zijn een paar bladzijden 'Extra werk' (routinesommen; herhaling) en 'Extra sterk' (moeilijkere sommen; uitbreiding en verrijking) opgenomen, ook om tempoverschillen op te vangen. Na elk boekje volgt een zelftoets, de leerling test zichzelf of hij de leerstof verwerkt heeft. Hierna wordt klassikaal een proefwerk afgenomen. Een boekje wordt in 6 à 12 lessen doorgewerkt.

De (huidige) indeling van de stof

Er zijn algebra- en meetkundeboekjes. De volgorde binnen de algebra- respektievelijk meetkunde-serie ligt grotendeels vast; de afwisseling algebra-meetkunde laat enige vrijheid toe.

In het overzicht hierna zijn de meetkundeboekjes (m) en de IOWO-materialen als zodanig aangegeven.

1e jaar (bij 4 uur per week)

- 1 Kennismaken met wiskunde
- 2 Telproblemen
- 3 Ruimtelijke vormen (m)
- 4a Formules
- 4b Rekenwetten
- 5 Roosterdam
- 6 Regelmatige figuren (iowo, m)
- 7 Breuken
- 8 Gehele getallen
- 9 Hoeken (m)
- 10 Rationale getallen
- 11 Afstanden (m)
- 12 Machten 1
- 13 Getallen en grafieken

2e jaar (bij 4 uur per week)

- 14 Symmetrie (m)
- 15 Machientjes en Grafieken
- 16 Vergelijkingen 1
- 17 Gelijkvormigheid (m)
- 18 Tussen twee haakjes
- 19 Pythagoras (m)
- 20 Merkwaardige produkten
- 21 Vergelijkingen 2
- 22 Oppervlakte (m)
- 23 Verzamelingen 1
- 24 Verzamelingen 2
- 25 Relaties
- 26 Goniometrie 1

3e jaar (bij 3 uur per week)

- 27 Lineaire Relaties
- 28 Vectoren 1
- 29 Wortels
- 30 Cirkels en Rechte Lijnen
- 31a Parabolen
- 31b Vierkantsvergelijkingen
- 32 Funkties 1

4e jaar (vwo, 3 uur per week)

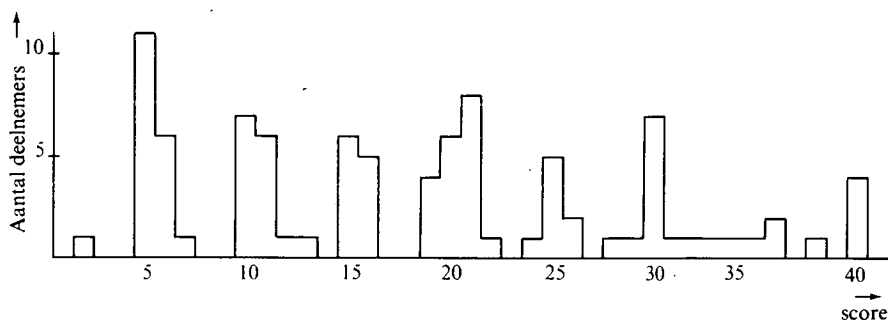
- 33 Goniometrie 2
- 34 Machten 2
- 35 Funkties 2
- 36 Logaritmen
- 37 Differentiëren 1 (iowo)
- 38 Vectoren 2
- 39 Stereometrie

Op blz. 412 leest u in een ingezonden mededeling iets over een abonnement op de Wageningse Methode.

Tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1981

De tweede ronde werd gehouden op 11 september 1981.

Er waren vier opgaven, per opgave werd maximaal 10 ptn. toegekend. Overzicht van de resultaten:



Prijswinnaars

1 t/m 4.	Matthijs Hebly, Santpoort-Zuid	40
	Hugo v.d. Hoven, Zevenaar	40
	Tonny Hurkens, Haps	40
	Richard Meijer, Maarssen	40
5.	Peter de Bruin, Overasselt	38
6/7.	Henk Norde, Warnsveld	36
	Eric Postma, Vorden	36
8.	Marc Bax, Wageningen	35
9.	Ralph Peeters, Boxmeer	34
10.	Daan Krammer, Hengelo (O)	33

Opgaven

1 Op $\mathbb{R}$ is de functie f gedefinieerd door

$$f: x \rightarrow [x] + [2x] + [3x] + [4x] + [5x] + [6x]$$

Hierin is $[x]$ het grootste gehele getal dat kleiner dan of gelijk aan x is.
Welke waarden kan $f(x)$ aannemen?

2 Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met centrum M .
Op de zijden CA en CB kiest men punten D , resp. E zo, dat $CD = CE$. Het punt F ligt zodanig dat $DMBF$ een parallellogram is.
Bewijs dat driehoek MEF gelijkzijdig is.

3 Men wil de verzameling van de natuurlijke getallen van 1 t.e.m. $3n$ splitsen in n onderling disjuncte verzamelingen $\{x, y, z\}$ van drie elementen zo, dat telkens geldt $x + y = 3z$.

Is dat mogelijk voor $n = 5$? En voor $n = 10$?

Geef in beide gevallen hetzij zo'n splitsing, hetzij een bewijs dat zo'n splitsing onmogelijk is.

4 Men houdt een draadfiguur op verschillende manieren in een bundel evenwijdige lichtstralen, waardoor er in een vlak loodrecht op de lichtstralen verschillende schaduwfiguren ontstaan. Op deze wijze kan men vormen:

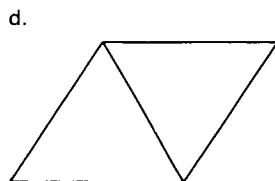
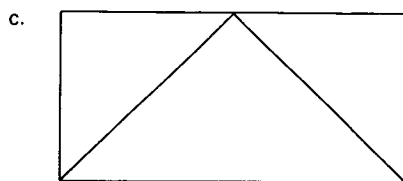
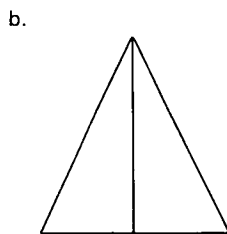
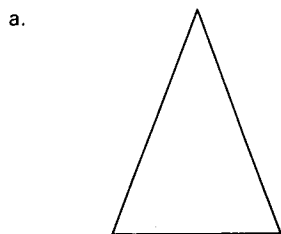
- een gelijkbenige driehoek,
- een gelijkbenige driehoek met de hoogtelijn uit de top,
- een rechthoek met daarin een gelijkbenige driehoek,
- een ruit met één diagonaal.

(De tekeningen hieronder illustreren de schaduwfiguren, maar ze zijn niet in hun juiste verhoudingen getekend!)

De draadfiguur bestaat uit acht rechte stukjes ijzerdraad, waarbij ieder stukje aan beide uiteinden aan tenminste één ander stukje vast zit.

Bepaal een figuur die aan bovenstaande beschrijving voldoet, en geef de richting van de lichtstralen aan waarbij de schaduwfiguren a t.e.m. d ontstaan.

N.B.: het is niet uitgesloten dat er ook punten worden toegekend indien men een figuur vindt die slechts drie van de vier schaduwfiguren geeft!



Oplossingen

1 Aangezien voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\begin{aligned} f(x+1) &= [x+1] + [2(x+1)] + \dots = [x+1] + [2x+2] + \dots = \\ &= [x] + [2x] + \dots + 1 + 2 + \dots = f(x) + 21 \end{aligned}$$

is het voldoende het gedrag te onderzoeken van f op een interval van lengte 1, bijv. het interval $[0, 1]$. De 'sprongpunten' van f bevinden zich dan op $0, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3 = 2/6, 2/5, 1/2 = 2/4 = 3/6, 3/5, 2/3 = 4/6, 3/4, 4/5, 5/6$ en 1 met functiewaarden:

$$f(0) = 0, f(1/6) = 1, f(1/5) = 2, f(1/4) = 3, f(1/3) = 5, f(2/5) = 6, f(1/2) = 9, f(3/5) = 10, f(2/3) = 12, f(3/4) = 13, f(4/5) = 14, f(5/6) = 15 \text{ en } f(1) = 21.$$

De waarden die $f(x)$ kan aannemen zijn dus alle getallen van de vorm $21k + r$ met k geheel, en $r \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 14, 15\}$.

2 Een translatie langs de vector $\vec{MB}$ voert M over in B , AC in een lijnstuk $A'C'$ en D in F op $A'C'$. Aangezien $CC' = MB = MC$ en $\angle CMB = 120^\circ$, dus $\angle C'CM = 60^\circ$, is driehoek $C'CM$ gelijkzijdig. Een rotatie met centrum M over 60° voert MC daarom over in MC' . De lijn CE wordt daarbij ook over 60° gewenteld, en gaat dus over in een lijn door C' evenwijdig aan AC , d.w.z. in $A'C'$. Omdat $\vec{C'F} = \vec{CD}$ en $CD = CE$ gaat E bij deze rotatie over in F . Dat betekent dat driehoek MEF gelijkzijdig is.

3 Noem de verzamelingen $\{x_i, y_i, z_i\}$, dan geldt dus $x_i + y_i = 3z_i$, dus $\sum x_i + \sum y_i = 3\sum z_i$, en $\sum x_i + \sum y_i + \sum z_i = 4\sum z_i$.

De som van alle getallen van 1 t.e.m. $3n$ moet dus een *viervoud* zijn. Maar voor $n = 10$ is die som gelijk aan 465, dus dan bestaat zo'n splitsing niet. Voor $n = 5$ is de som gelijk aan 120, en na enig proberen vindt men bijvoorbeeld voor de drietallen (x, y, z) :

$(1, 14, 5), (2, 10, 4), (3, 15, 6), (9, 12, 7)$ en $(11, 13, 8)$.

4 Een figuur die voldoet is bijvoorbeeld een regelmatige piramide met vierkant grondvlak. De richtingen van de lichtstralen zijn (a) langs een zijde van het grondvlak, (b) langs een diagonaal van het grondvlak, (c) langs een lijn van de top naar het midden van een zijde van het grondvlak, en (d) langs een opstaande ribbe.

De XXIIe Internationale Wiskunde Olympiade

J. VAN DE CRAATS

Bij de XXIIe Internationale Wiskunde Olympiade, gehouden van 8 t.e.m. 20 juli 1981 in de Verenigde Staten van Amerika, hebben vier Nederlandse scholieren een prijs behaald. Tonny Hurkens, (17 jr.) uit Haps, Daan Krammer (16) uit Hengelo en Paul van der Wagt (18) uit Warnsveld kregen elk een tweede prijs, en Bart van der Leemput (18) uit Vught behaalde een derde prijs. Er waren 185 deelnemers uit 27 landen. Elk land kon maximaal 8 leerlingen van het V.W.O. naar deze wedstrijd afvaardigen. Er waren 19 landen, waaronder Nederland, met zo'n maximaal team. De ploeg van de Verenigde Staten behaalde de meeste punten (314), gevolgd door West Duitsland (312) en Groot Brittannië (301). De Nederlandse ploeg kwam op de tiende plaats met 219 punten.

De Internationale Wiskunde Olympiade is een wedstrijd in het oplossen van wiskundige vraagstukken voor leerlingen van het V.W.O. In twee zittingen van elk $4\frac{1}{2}$ uur kregen de deelnemers telkens drie opgaven voorgelegd. Bij elke som konden zij maximaal 7 punten behalen. De deelnemers met een score van 41 of 42 punten kregen een eerste prijs, 34 t.e.m. 40 punten gaf een tweede, en 26 t.e.m. 33 punten een derde prijs. De resultaten van onze ploeg waren:

opgave nr:	1	2	3	4	5	6	totaal	
Erik Admiraal	0	7	0	5	7	6	25	
Bram Bouwens	6	6	1	5	7	0	25	
Tonny Hurkens	7	7	2	7	7	7	37	(2eprijs)
Daan Krammer	1	7	7	7	7	7	36	(2eprijs)
Bart van der Leemput	1	7	0	6	7	6	27	(3eprijs)
Sieds van der Schaaf	1	2	3	4	6	0	16	
Erick de Vries	0	2	1	0	7	7	17	
Paul van der Wagt	6	7	5	4	7	7	36	(2eprijs)
totaal:	22	45	19	38	55	40	219	

De zes opgaven waren afkomstig uit resp. Engeland, West-Duitsland, Nederland, België, de Sovjet Unie en Finland. Voor Nederland hadden zitting in de jury dr. J. van de Craats van de Rijksuniversiteit Leiden en drs. A. W. Boon van het Chr. Gymnasium 'Sorghvliet' te 's-Gravenhage.

Organisatie

Na aankomst in New York werden de teams overgebracht naar de campus van Rutgers University in New Brunswick (N.J.). Terwijl de jury de vraagstukken uitkoos en prepareerde voor de wedstrijd, hadden de deelnemers de gelegenheid te acclimatiseren en iets van de omgeving te zien. Er stond o.a. een uitgebreide excursie naar New York op het programma. Op 12 juli vertrok men naar Georgetown University in Washington D.C., waar op 13 en 14 juli de eigenlijke wedstrijd plaats vond. Het corrigeren van het werk nam daarna nog enige dagen in beslag. Op 19 juli volgde de prijsuitreiking in het gebouw van de National Academy of Sciences. Voor deelnemers en juryleden waren er in de tussenliggende dagen nog tal van ontvangsten en festiviteiten georganiseerd. We noemen een banket in Fort Myers(Va), en bezoeken aan de musical Camelot en aan een uitvoering in het openluchttheater Wolf Trap door het Nederlands Dans Theater, dat juist in Washington op tournee was.

Voorbereiding

Ook dit jaar is de Nederlandse ploeg weer op de Olympiade voorbereid met lesbrieven. We hadden een geheel nieuw team, en met name de prestaties van onze jongste deelnemer, de 4e klasser(!) Daan Krammer, mogen met ere vermeld worden. Vergelijken we onze manier van voorbereiden met die van vrijwel alle andere landen die boven ons eindigden, dan kunnen we constateren dat bijna al die landen een veel intensievere training organiseren, variërend van een aantal trainingsweekends tot een volledig trainingskamp van meer dan een maand. In ons land, waar het al de grootste moeite kost jaarlijks geld voor de reis naar de Olympiade bijeen te brengen, is een dergelijke arbeidsintensieve en kostbare wijze van voorbereiden moeilijk te realiseren. De prijzen die we in de afgelopen jaren en ook dit jaar weer hebben behaald tonen echter aan dat leerlingen met uitzonderlijk talent via de lesbrieven toch voldoende op de Olympiade worden voorbereid.

Toekomst

De toekomst van de Internationale Wiskunde Olympiade is nog steeds erg onzeker, hoewel steeds meer landen belangstelling tonen. Dit jaar waren er zes nieuwe landen: Australië, Canada, Columbia, Mexico, Tunesië en Venezuela. Maar met het stijgen van het aantal deelnemers nemen de organisatorische en financiële problemen ook toe. Het is bijvoorbeeld traditie dat het organiserend land de kosten van huisvesting en verzorging van alle ploegen draagt, en nu reeds zijn daar honderdduizenden guldens mee gemoeid. In Amerika waren er veel bijdragen van sponsors, en een grote gift van de National Science Foundation. Toch zijn er aanwijzingen dat o.a. Hongarije, Tsjecho-Slowakije, Zweden, Frankrijk, Finland en West-Duitsland in de toekomst misschien een Olympiade willen organiseren. Maar zelfs voor volgend jaar ligt er nog niets definitief vast.

Er is daarom een comitee gevormd uit de internationale jury dat probeert te bevorderen dat de Olympiade een jaarlijks terugkerend evenement blijft, eventueel in een iets gewijzigde vorm met indien nodig minder deelnemers per land. In dat comitee hebben op dit moment vertegenwoordigers zitting van de Verenigde Staten, Groot Brittannië, Polen, Hongarije, Finland en Nederland. Voor 1982 is alle hoop gevestigd op een Olympiade in Hongarije.

Landenlijst met totale scores:

Verenigde Staten	314	Tsjecho-Slowakije (5)	190
West-Duitsland	312	Israël (6)	175
Groot Brittannië	301	Brazilië	172
Bulgarije	288	Hongarije (4)	164
Oostenrijk	270	Cuba	141
Polen	259	België	139
Canada	249	Roemenië (4)	136
Joegoslavië	246	Australië	120
Sovjet Unie		Griekenland	104
(6 deelnemers)	230	Columbia	93
Nederland	219	Venezuela	64
Frankrijk	209	Luxemburg (1) (!)	42
Zweden	207	Tunesië (2)	32
Finland	206	Mexico (5)	12

Laatste nieuws: de Olympiade zal inderdaad in Hongarije worden georganiseerd van 7-14 juli 1982.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en
correspondentie over deze rubriek aan
Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg
148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

461. Men noemt een getal 'tweekoppig' als het met hetzelfde cijfer of hetzelfde rijtje cijfers begint en eindigt. Voorbeelden: 3783, 87525875.

Het tweekoppige getal 101 heeft een bijzonderheid: als men er een 0 of een 1 achter zet krijgt men opnieuw een tweekoppig getal. nl. 1010 of 1011.

Bedenk een tweekoppig getal dat opnieuw een tweekoppig getal oplevert als men er 0. 1. of 2 achter zet.

Bedenk een tweekoppig getal dat opnieuw een tweekoppig getal oplevert als men er 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 of 9 achter zet. (ingezonden door R. Troelstra: afkomstig uit Kvant)

462. Voor welke waarden van m is 10.....10.....1 deelbaar door 37?

..... m nullen m nullen

(ingezonden door R. Troelstra)

463. Een kubus met ribbe n is opgebouwd uit n^3 eenheidskubussen ($n > 1$).

Onder een stopnaald verstaan we een rechte lijn die evenwijdig is aan een ribbe van de kubus en die door de middelpunten van n eenheidskubussen gaat. We spreken af de stopnaalden zo aan te brengen dat geen twee ervan elkaar snijden.

Wat is het kleinste aantal stopnaalden waarmee men de gegeven kubus kan 'verstoppen' (dat wil zeggen dat het niet mogelijk is nog een stopnaald extra aan te brengen)? (ingezonden door R. Troelstra: afkomstig uit Kvant)

Oplossingen

459. n personen staan op een rij, sommige met het gezicht naar elkaar toe, andere met de rug. Op een fluitsignaal draaien degenen die met het gezicht naar elkaar toe staan, een halve slag. Dit wordt herhaald, totdat geen tweetal meer met het gezicht naar elkaar toe staat. Gevraagd:

a Hoeveel keren draait iemand maximaal een halve slag?

b Wat is het maximale aantal fluitsignalen?

a Onderstel de personen staan als volgt:

→ → ← → → → ← ← → → → ←

Pijl naar links betekent: gezicht naar links. Idem naar rechts. We vervangen deze stand door de codering

1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0

De eindstand zal dan zijn

0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1

De uitwerking van een fluitsignaal is, dat elk opvolgend paar 1 0 vervangen wordt door 0 1. De meest rechtse 0 zal daarbij alle 1' en moeten passeren. Hij zal zich dus 8 keer omdraaien. We zien hieruit:

bij n personen is het maximaal aantal keren dat iemand een halve slag draait, gelijk aan $n - 1$. Het maximum treedt op als de beginconstellatie is

1 1 1 1 ... 1 1 1 0

b We zeggen dat in bijv.

1 1 0 0 1 1 0 1 0

het rangnummer van de eerste 1 gelijk is aan 1
 het rangnummer van de tweede 1 gelijk is aan 2
 het rangnummer van de derde 1 gelijk is aan 5
 het rangnummer van de vierde 1 gelijk is aan 6
 het rangnummer van de vijfde 1 gelijk is aan 8.

We bewijzen eerst een hulpstelling.

Stelling. Onderstel we hebben twee rangschikkingen met n getallen. Voor elke p geldt: het rangnummer van de p^e 1 in de eerste rangschikking $\leq$ het rangnummer van de p^e 1 in de tweede.

Het aantal fluitsignalen nodig om de eerste rangschikking af te bouwen is n_1 , dat voor de tweede n_2 . Dan is $n_1 \geq n_2$.

Bewijs. Door inductie. Onderstel na k keer fluiten is nog aan de beginvoorwaarde voldaan. Onderstel het rangnummer van de q^e 1 in de eerste rangschikking is gelijk aan dat in de tweede. Dan kan het na het volgende fluitsignaal niet groter worden dan dat in de tweede.

Komt nl. in beide rangschikkingen na de q^e 1 een 0, dan blijven de twee rangnummers gelijk. Komt na beide een 1, dan eveneens.

Blijft over (de linker 1 is de q^e):

1 0	en dit gaat over in	0 1	
1 1		1 0	of 1

of

1 1	en dit gaat over in	1 0	of 1
1 0		0 1	

In het eerste geval had de $q + 1^e$ 1 in de tweede rangschikking een groter rangnummer dan in de eerste. In strijd met de onderstelling van de inductie.

In het tweede geval krijgt de p^e 1 in de eerste rangschikking een kleiner rangnummer dan in de tweede.

Nooit krijgt dus een 1 in de eerste rangorde een hoger rangnummer dan de corresponderende 1 in de tweede.

Hieruit ziet men direct dat $n_1 \geq n_2$.

Gevolg: het aantal fluitsignalen is maximaal, als alle 1'en voorop staan.

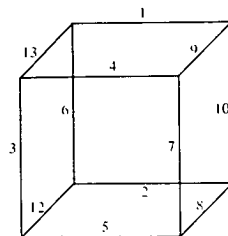
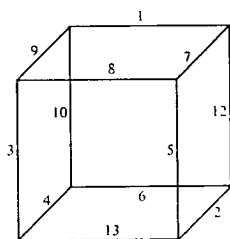
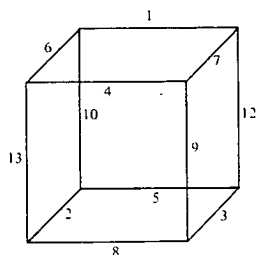
Hoe groot is het dan? We laten dit zien aan de hand van een voorbeeld. Kies het aantal 1'en 3 en het aantal cijfers 8. We krijgen dan achtereenvolgens:

1 1 1 0 0 0 0 0	}	2 fluitsignalen
1 1 0 1 0 0 0 0		
1 0 1 0 1 0 0 0		
0 1 0 1 0 1 0 0	}	3 fluitsignalen
0 0 1 0 1 0 1 0		
0 0 0 1 0 1 0 1		
0 0 0 0 1 0 1 1	}	2 fluitsignalen
0 0 0 0 0 1 1 1		

Eerst zijn 2 fluitsignalen nodig om in het begin alternerend 1 0 te krijgen. Daarna 3 om aan het eind alternerend 0 1 te krijgen. En daarna nog 2 om de eindstand te bereiken. Zijn er m 1'en en in totaal n cijfers, dan vinden we analoog $m - 1, n - 2m + 1$ en $m - 1$ fluitsignalen. Dus in totaal $n - 1$. Dat is het gevraagde maximum.

460. Men geeft de ribben van een kubus rangnummers, waarbij men ervoor wil zorgen dat de som van de rangnummers van drie in één hoekpunt samenkomende ribben constant, stel s , is. Het is duidelijk dat de som van alle rangnummers dan gelijk is aan $4s$.

- a. $1 + 2 + \dots + 12 = 78$; dat is niet deelbaar door 4,
 b. $1 + 2 + \dots + 13 = 91$. Om een getal te krijgen dat door 4 deelbaar is, laten we een van de rangnummers 3, 7 of 11 weg. Dan blijkt het inderdaad mogelijk. Zie bijgaande figuren voor $s = 20$ (11 weggelaten).



Voor $s = 21$ vindt men

6 2 9 11
 13 10 1 4
 5 3 8 12

Ten slotte vindt men $s = 22$ door in de figuren elk rangnummer k door $14 - k$ te vervangen.

Mededeling

In verband met het bereiken van de pensioengerechtigde leeftijd recipieert drs. A. M. KOLDIJK (oud redactie-secretaris EUCLIDES) op 2 juli 1982, van 16.00-18.00 uur in het gebouw van de lerarenopleiding Ubbo Emmius, Grouwelerie 6 (terrein 'Paddepoel' van de Rijksuniversiteit), Groningen.

Inlichtingen: 050-11 81 68 of 11 81 69

Boekbesprekingen

Stenger, H. (Herausgeber) *Praktische Anwendungen von Stichproben verfahren*, Van den Hoeck & Ruprecht, Göttingen, 1980. (Allgemeines statistisches Archiv: Sonderheft 17.) 84 blz., prijs onbekend.

Het nemen van steekproeven is een belangrijk en moeilijk onderdeel van de toegepaste statistiek. In dit boekje staan de volgende artikelen over dit onderwerp

- | | |
|-------------------|---|
| 1 H. Stenger | Die Berücksichtigung von Vorinformation bei der Planung einer Stichprobenerhebung. |
| 2 A. Ungerer | Stichproben bei der Inventur von Lagerbeständen. |
| 3 M. Nourney | Einige Aspekte der Stichproben auswahl mit grössenproportionalen Wahrscheinlichkeiten. |
| 4 K. Hüttebräuker | Konstruktion einer Auswahlgrundgesamtheit für die Erstellung eines Mienspiegels in Hamburg. |
| 5 H. P. Kirschner | Komplexe Bevölkerungsstichproben: Eine Fallstudie. |

J. L. Mijnheer

A. Tucker, *Applied Combinatorics*, Wiley and Sons, New York, 1980, 385 blz., prijs £ 10.50.

Kombinatoriek is een belangrijk onderdeel van de diskrete waarschijnlijkheidsrekening, verdelingsvrije methoden in de statistiek, diskrete besiskunde en de analyse van computer systemen. De meeste studieprogramma's bevatten dan ook een kollege diskrete wiskunde of kombinatoriek. Dit boek kan hiervoor een goede leiddraad zijn. Onderwerpen die zoal tersprake komen zijn: telmethoden, genererende funkties, recurrente betrekkingen, grafentheorie en kleuringsproblemen. Het boek bevat veel voorbeelden en vele opgaven. Een eventueel negatief punt is dat sommige bewijzen aan de hand van voorbeelden gegeven worden.

J. L. Mijnheer

Studies in Statistics, M.A.A. Series in Mathematics Vol. 19, R. V. Hogg editor, The Mathematical Association of Amerika, 1978, XIII + 213 blz., \$ 7.75.

Doel van dit aardige boekje is om onder wiskundigen belangstelling voor statistiek te wekken. De opzet is dat het zonder speciale kennis van kansrekening en statistiek kan worden gelezen, maar zoiets kan natuurlijk niet helemaal gelukken. Wie werkelijk nog nooit met deze vakken in aanraking is geweest doet er beter aan een elementair leerboek te raadplegen, maar enige kennis van de statistiek moet al voldoende zijn om althans een groot deel van dit boekje te kunnen lezen.

Afgezien van een algemene inleiding van Hogg worden de volgende onderwerpen besproken: Proefopzetten door John, verdelingsvrije methoden door Noether, chikwadraat toetsen door Moore, steekproef onderzoek door Graham en J. N. K. Rao en beslissingstheorie door Hill. De verschillende auteurs blijken sterk verschillende opvattingen over hun opdracht te hebben. Zo vertelt Noether de belangrijkste wetenswaardigheden op het door hem besproken zeer uitgebreide terrein vrijwel zonder bewijzen te geven. Moore pakt zijn veel beperkter onderwerp heel anders aan en probeert zeer bewust de wiskunde achter de statistiek te laten zien. De overige auteurs bewegen zich ergens tussen deze beide uitersten. Er zijn hierdoor natuurlijk ook verschillen in wiskundig niveau, waarbij Moore de zwaarste eisen stelt maar voor de wiskundige ook het meest te bieden heeft.

Zo is een bundel ontstaan die velen wat te bieden heeft en die het eigen karakter van de statistiek hier en daar heel aardig tot uitdrukking brengt. Voor wie daar belang in stelt zeker aan te bevelen.

W. R. van Zwet

R. Z. Has'minskii, *Stochastic stability of differential equations*, Sijthoff en Noordhoff, Alphen aan de Rijn etc., 1980 (Monographs and textbooks on mechanics of solids and fluids, serie Analysis, no. 7.).

Het origineel van het te bespreken boek is in 1969 in het Russisch verschenen. Ten behoeve van de vertaling heeft de auteur samen met M.B. Nevel'son een appendix geschreven en een aantal aanpassingen in de hoofdttekst aangebracht.

Het onderwerp van dit boek is de kwalitatieve theorie van stelsels gewone differentiaalvergelijkingen waarvan de rechterleden sterk beïnvloed worden door stochastische processen. Het belangrijkste type stelsels dat behandeld wordt is:

$$\dot{x} = F(x, t) + \sigma(x, t) \zeta(t),$$

waarin $\zeta(t)$ een stochastisch proces voorstelt. Aangezien de oplossingen van zo'n stelsel afhankelijk zijn van de realisatie van $\zeta(t)$, wordt ook de oplossing een stochastisch proces. De vraag is nu naar kwalitatieve eigenschappen van dat oplossingsproces, zoals:

onder wat voor voorwaarden blijft de oplossing eindig met kans 1?

wanneer is de oplossing begrensd in een of andere zin?

als $\zeta(t)$ een stationair of periodiek proces is, geldt dit dan ook voor de oplossing?

In eerste instantie worden deze vragen bekeken voor willekeurige stochastische processen. Meer gedetailleerde resultaten worden verkregen voor het geval van witte ruis als $\zeta(t)$. Evenals in de deterministische stabiliteitstheorie vormen Ljapunov-functies het belangrijkste hulpmiddel. Voor de specifieke kans-theoretische aspecten maakt de auteur dankbaar gebruik van het werk van Bernstein, Gihman en Itô.

Het boek is goed geschreven en ook goed vertaald. Dat neemt echter niet weg dat het primair een nogal technische behandeling geeft van een analytisch en kans-theoretisch vrij ingewikkeld onderwerp. Als eerste kennismaking is het daardoor zeker niet erg geschikt. Anderzijds geeft het een heel goed beeld van de relatief recente ontwikkelingen op dit gebied – dat met name achter het IJzeren Gordijn veel aandacht krijgt – door een auteur die uitstekend op de hoogte is. Mede doordat het hier een bijgewerkt wat ouder boek betreft ligt de nadruk op een relatief hard-analytische aanpak en dat heeft zeker ook voordelen.

J. Wessels

Heinz Klaus Strick, *Einführung in die Beurteilende Statistik* 112 blz. 1980 Schroedel Verlag Hannover ISBN 3-507-83202-x

Dit boekje geeft de stof die met het onderdeel kansrekening en mathematische statistiek van wiskunde I bij ons overeenkomt. In dit boekje ligt de nadruk op het schatten en toetsen (hoofdstuk 3). Hiertoe is de kansrekening beperkt. Hoofdstuk 1 geeft een inleiding en de voornaamste stellingen van de kansrekening. In hoofdstuk 2 komt de binomiale verdeling uitvoerig aan de orde. Ook de verwachting μ en de standaardafwijking σ . Voor het vervolg van het boekje is de volgende stelling van belang. Voor voldoende grote n liggen 95,5 % (99,7 %) van alle uitkomsten bij een binomiale verdeling in een $1 \cdot \sigma(2 \cdot \sigma)$ -omgeving van μ . Hoofdstuk 4 bevat allerlei toepassingen, en wel op de volgende gebieden: enquêtes, genetica, geboorte- en sterftestatistiek, naamfrekwenties, taalbijzonderheden en nog meer. In een aanhangsel, overigens het minst geslaagde deel, wordt even snel de normale benadering, de polynomiale verdeling en de chi-kwadratverdeling en -toets 'gedaan'. Het boek bestaat uitsluitend uit opgaven. De theorie is verpakt in opgaven met oplossingen. Over de manier waarop het schatten en toetsen behandeld wordt een enkele opmerking. Eerst wordt het bepalen van het betrouwbaarheidsinterval van p gedaan met behulp van de hiervoor genoemde stelling. Daarna, eveneens met deze stelling, de binomiale toets. Tenslotte wordt het verband tussen schatten en toetsen besproken.

Voor docenten die in de bovenbouw van het vwo hierin lesgeven is het zeker aan te bevelen van de aanpak van dit boekje kennis te nemen. Dit geldt overigens ook voor andere belangstellenden in dit gebied.

Bert Zwaneveld

Christoph Bandelow, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*, Hochschultaschenbücher Band 798, 198 blz.

In dit boekje worden de (maattheoretische) grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening (whr) behandeld. Aan de orde komen de onderwerpen: combinatorische whr, maat- en integratietheorie, voorwaardelijke kansen en onafhankelijkheid, kansverdelingen en tenslotte limietstellingen. Hiermee is tevens de opzet van het boekje aangegeven: in beginsel elementair met daarnaast de behandeling van een meer geavanceerd onderwerp, thuishorend bij het begin van de doctoraalfase van het wiskundecurriculum aan onze universiteiten. De behandeling van de stof is zorgvuldig en helder, met goede aandacht voor motivering, en ruim voorzien van voorbeelden en oefenmateriaal. Een heel geschikt studieboek lijkt me voor met name wiskundeleraren. Op de volgende twee punten wil ik wat nader op de inhoud ingaan.

Ten eerste: het hoofdstuk maat- en integratietheorie wordt besloten zo ongeveer op het moment waarop doorgaans de voor de whr zo belangrijke stelling van Radon-Nikodym aan de orde zou moeten komen. Een opmerking over de rol van deze stelling in de whr zou dit hoofdstuk een afgeronder aanzien hebben gegeven. Ten tweede: in het laatste hoofdstuk (limietstellingen) wordt het begrip zwakke convergentie ingevoerd op de gebruikelijke wijze (zoals door Billingsley), en er wordt juist voldoende behandeld om de centrale limietstelling voor onafhankelijke gelijkverdeelde grootheden met eindig tweede moment te kunnen bewijzen. De theorie der karakteristieke functies en de continuïteitsstelling is achterwege gebleven, begrijpelijk gezien de beknopte en elementaire opzet van het boekje. Daarmee is echter tevens de meer aangewezen bewijsmethode voor een dergelijk type stelling komen te vervallen. De auteur volgt een weg zoals die bijvoorbeeld ook te vinden is in het boek 'Probability' van L. Breiman en waarvoor slechts weinig middelen nodig zijn.

P. J. Holewijn

Beiträge zum Mathematikunterricht 1981, Vorträge auf der 15. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 4.3 bis 7.3 1981 in Darmstadt, 124 blz., ingen. 14,80 DM., Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover.

Ook dit jaar bieden de 'Beiträge' weer uitvoerige informatie over de problemen die op de jongste Bundestagung aan de orde werden gesteld. Het congresverslag maakt melding van een honderdtal inleidingen, waarover doorgaans in één enkele bladzijde druks wordt gerapporteerd. De auteurs weten hun zakelijk-wiskundige beschouwingen meestal in zinvolle didaktische problematiek te doen uitmonden.

Alleen voor een paar 'Hauptvorlesungen' is wat meer dan een enkele bladzijde druks ingeruimd. Hans-Georg Steiner uit Gießen sprak over 'Zur Situation des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II', Rudolf Wille uit Darmstadt over 'Versuche der Restrukturierung am Beispiel der Grundvorlesung "Lineare Algebra"'.

Een drietal 'posters', één anti-Papy, één over beroepsonderwijs, één over kartografie, worden vermeld aan het einde van dit congresverslag, waarin de bijdragen alfabetisch geordend zijn volgens de namen van de auteurs.

Het summiere didactisch commentaar waarin de meeste verslagen uitmonden, maakt dat deze 'Beiträge' toch ook weer dit jaar voor Nederlandse leraren waarde kunnen hebben.

Joh. H. Wansink.

IOWO, *De achterkant van de Möbius-band*.

Het onderhavige boek is de 'IOWO-afscheidsbundel met opstellen over onderwijsontwikkeling'. Een verzameling van 33 stukken en stukjes, geschreven door IOWO-medewerkers bij het einde van het instituut. Een bonte verscheidenheid van onderwerpen passeert in deze opstellen de revue. 'We willen niet te veel of liever niets in archiefkelders wegbergen'. Daarom in dit boek 'nog iets weggeven, nog enkele signalen geven opdat anderen afmaken wat het IOWO niet af mocht maken'. Een 'boodschappenlijstje', een laatste oproep om te kijken, te luisteren, te zoeken, te vragen 'waarom'. 'U moet maar gaan lezen in dit praatje op de stoep na een bezoek van tien jaar'. Met deze citaten uit het

stukje van prof. Van der Blij wil ik gaarne het boek in aller aandacht aanbevelen Zoals we gewend waren van het IOWO: de stukken nodigen uit jezelf vragen te stellen over het 'waarom zo' van de schijnbaar vanzelfsprekende alledaagse onderwijspraktijk en jezelf aan te sporen te zoeken naar het betere.

W. Kleijne

Mededelingen

Ingezonden mededeling

Abonnement op de Wageningse Methode

De boekjes werden tot nu toe gedrukt op de scholen die met deze methode werken. Vanaf volgend schooljaar neemt drukkerij en boekhandel Meijer en Siegers in Oosterbeek de produktie en verzending voor zijn rekening, te beginnen met de boekjes voor de eerste klas. Een jaar later worden de boekjes voor de tweede klas gedrukt, enz. De methode komt nu ook beschikbaar voor mensen die daar belangstelling voor hebben. Zij kunnen – zoals bij de aankoop van een encyclopedie – een abonnement nemen op De Wageningse Methode. Twee keer per jaar wordt de abonnees een aantal boekjes toegezonden. Kosten: 5 cent per blz. ($\pm$ f25,- per schooljaar), exclusief verzendkosten. Een brief of briefkaart met naam en adres naar

Meijer en Siegers bv,

Postbus 105, Utrechtseweg 208,

6860 AC Oosterbeek

onder vermelding van 'Abonnement De Wageningse Methode' is voldoende om abonnee te worden.

Oproep

In verband met een themadag rond examens zoeken we contact met docenten uit het voortgezet onderwijs, die een schoolonderzoek (onderdeel) gebruiken met een andere vorm en/of inhoud dan die van het centraal schriftelijk eindexamen.

Contactadres: J. Brem, Rozengaard 12-14, 8212 DD Lelystad, tel. 03200-4 43 64.

Jaarvergadering/Themadag

Op zaterdag 30 oktober houdt de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren haar jaarvergadering in het gebouw van de SOL te Utrecht.

Zoals gebruikelijk zal aan de jaarvergadering een themadag gekoppeld zijn. Deze keer zullen de *eindexamens* centraal staan. Juist dit jaar staat de examenproblematiek in de (hernieuwde) aandacht. Daarnaast staan er een aantal veranderingen voor de deur. Bijvoorbeeld:

Met ingang van het schooljaar '84-'85 zal het aantal zittingen van het eindexamen wiskunde voor het MAVO van twee op één worden gebracht. Mogelijk gaat dit ook gelden voor het LBO. Ook HEWET zal invloed hebben op de toekomstige examens.

Al met al redenen genoeg om ons eens te bezinnen op de plaats, de inhoud en de vorm van het wiskunde-examen en de invloed ervan op het wiskunde-onderwijs.

Naast informatie over de op handen zijnde veranderingen zullen op de themadag vragen aan de orde komen als: Moet er iets aan de examens veranderen? Kan er iets veranderen? Welke rol kan het schoolonderzoek vervullen? Welke rol vervult het nu? Welke mogelijkheden van examineren zijn er? Welke invloed kunnen we op de centraal schriftelijke eindexamens uitoefenen? Hoe komen de examens tot stand? Wie bepaalt de normen? Hoe gebruik je de normen?

Nadere mededelingen volgen.

Studeren in deeltijd voor een MO-Akte

DE STICHTING DE VRIJE LEERGANGEN

organiseert opleidingen voor de volgende vakken:

NEDERLANDS-A en B

ENGELS-A en B

FRANS-A

DUITS-A

GESCHIEDENIS

THEOLOGIE-A

ECONOMIE

WISKUNDE-A en B

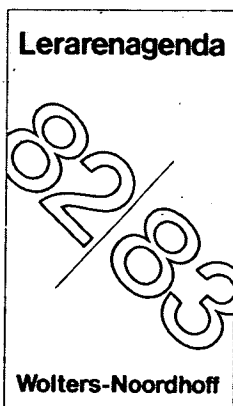
Hulpcursussen voor Latijn, Onderwijskundige Voorbereiding en Spreekonderwijs.

Alle opleidingen zijn deeltijdopleidingen, met 5 à 8 uur college per week, gewoonlijk in de avonden.

De studiegids is op **schriftelijke** aanvraag verkrijgbaar bij het MO-secretariaat, Postbus 90048, 1006 BA Amsterdam.

Weer leverbaar:

de WN-Lerarenagenda 82/83



- aangepast aan de vakantieregeling voor het onderwijs van het Ministerie van O. en W.
- geschikt voor verschillende schooltypen en variabele werktijden

De nieuwe *WN-Lerarenagenda* is uitgebreid tot 200 pagina's en bevat onder meer:

- tabellen voor notatie van rapport-, proefwerk- en tentamencijfers
- tabellen voor berekening van deze cijfers
- jaarkalenders voor 1982, 1983 en 1984
- memorandum over de periode augustus 1982 tot maart 1984

Prijs: f 5,25

In verband met de leverbaarheid bij voorkeur vóór 1 juni 1982 bestellen bij uw schooladministratie of bij de boekhandel.

INHOUD

P. Terlouw: Problemen bij het onderwijzen en leren van kansrekening en statistiek 373

S. H. Cheng: Statistics: een bijzonder boek 378

N. H. Veldhuijzen: Kanttekeningen bij Teugels 391

J. L. Teugels: Naschrift 394

P. G. J. Vredenduin: Stochasten 395

W. Kremers: De Wageningse Methode 398

Tweede Ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1981 400

J. van de Craats: De XXIIe Internationale Wiskunde Olympiade 403

Recreatie 406

Boekbesprekingen 409

Mededelingen 408-412

ADRESSEN VAN AUTEURS

S. H. Cheng, Akkerstraat 28, 5615 HR Eindhoven

J. van de Craats, Math. Inst. der R.U. te Leiden,
Wassenaarseweg 80, Postbus 9512, 2300 RA Leiden

W. Kremers, Prinsenhof 13, 6666 CA Heteren

P. Terlouw, Meeuwerderweg 82, 9724 EW Groningen

J. L. Teugels, Katholieke Universiteit Leuven, Departement Wiskunde,
Celestijnlaan 200 B, B -3030 Heverlee, België

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth