

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

57e jaargang

1981/1982

no. 9

mei

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Dr.F.Goffree - Dr.P.M. van Hiele - W. Kleijne - L.A.G.M. Muskens -
W.P. de Porto - P.E. de Roest (secretaris) - P.Th. Sanders -
Mw.H.S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - Dr.P.G.J. Vredenduin
(penningmeester) - B. Zwaneveld (hoofdreducteur)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie:

F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam. De contributie bedraagt f 45,- per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 30,-; contributie zonder Euclides f 25,-.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9'', 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1¹/₂.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 40,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 23,55. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand vóór het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 6,65 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.

Tel. 01720-620 78/620 79. Telex 33014.

Wiskundige houding

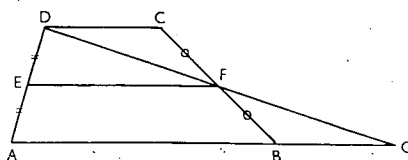
NOL VAN 'T RIET
BERT ZWANEVELD

Aan het eind van het jaar 1980 werkten wij in onze hoedanigheid van redakteur, resp. auteur van de methode Passen en meten aan de voorbereiding van een dag ten behoeve van docenten die deze methode gebruiken. Eén van de programma-punten van die dag zou een lezing zijn. Waarover zou die moeten gaan? Wij besloten een overzicht te maken van wat in de afgelopen jaren o.a. vanuit het IOWO en vanuit de auteursgroep bedacht en gepubliceerd is over de rol van wiskunde onderwijs in de ontwikkeling van kinderen van 12 tot 16 jaar. Dit artikel is gedeeltelijk de schriftelijke weerslag van de lezing die wij toen hebben gehouden. We hebben daarbij vooral van de volgende bronnen gebruik gemaakt: Uit het dagboek van twee loerders (1) en Stel je voor: wiskunde en emoties (2).

1 Wiskunde en emoties

Ieder weet dat het woord wiskunde het een en ander kan oproepen. Veel mensen die de middelbare school al enige tijd verlaten hebben, hebben zulke beelden:

Stelling 36: Het lijnstuk dat de middens van de benen van een trapezium verbindt, is evenwijdig aan de basis en gelijk aan de halve som van de evenwijdige zijden (fig. 122).



Gegeven: $\square ABCD$.
 $AB \parallel DC$.
 $AE = ED$ en $BF = FC$.

Te bewijzen: $EF \parallel AB$.
 $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$.

Fig. 122

We noemen dit lijnstuk *de middenparallel van het trapezium*.

Voor veel van onze leerlingen ziet 'wiskunde' er anders uit. Bijvoorbeeld zo:

In opgave 23 hebben we gezien, dat elk element van V ook element van W

is. We zeggen dan, dat V een *deelverzameling* van W is. In fig. 33, is dit duidelijk te zien.

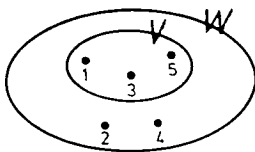


Fig. 33

De verzameling V is een deelverzameling van de verzameling W , als alle elementen van V ook elementen van W zijn.

Notatie: $V \subset W$ (Spreek uit: V is een deelverzameling van W .)

Wij denken dat er in de herinneringen die veel mensen aan wiskunde hebben een tamelijk star, statisch, stereotiep beeld van wiskunde zit. Vaak is dit verbonden met negatieve gevoelens. Maar er kunnen bij het woord wiskunde ook positief te duiden gevoelens opkomen. Zoiets als puzzelzin, uitdaging, voor barrières gestaan hebben en die overwonnen hebben, vallen en opstaan. Iedere wiskundeleraar kent uit eigen ervaring wel sterke emoties die bij het bedrijven van wiskunde kunnen optreden. Zoals:

- gelukservaringen. Bijvoorbeeld bij doorbrekend inzicht, het goed oplossen van een ingewikkeld probleem, het netjes opgeschreven hebben van een oplossing,
- afhaakemoties. Bijvoorbeeld bij leerlingen die niet snappen waarom er een apart symbool bedacht is voor iets dat niet bestaat: de lege verzameling. Leerlingen die niet begrijpen waarom ze deze vraag kennelijk niet mogen stellen, leerlingen die deze vraag – wel gesteld – niet bevredigend beantwoord krijgen, zulke leerlingen haken af.

2 Stel je voor dat ...

Er is nog een derde soort emotie, die we de stel-je-voor-emotie zullen noemen. Deze treedt op binnen en buiten de wiskunde. Hij treedt vooral op als er iets ontbreekt. Als het vermogen ontbreekt om te denken in de vorm 'stel je voor dat ...', als er sprake is van – wat we in dit artikel noemen – een gebrekkige wiskundige houding.

Naast allerlei andere zaken gaat het er in wiskunde-onderwijs ook om dat leerlingen dingen leren waar ze buiten de wiskunde ook nog iets aan hebben: een houding ten opzichte van problemen, een aanpak van alledaagse kwesties. Daarom beginnen we met een aantal voorbeelden die te maken hebben met stel-je-voor-emoties en een wiskundige houding, die optreden in praktische situaties binnen, maar meer nog buiten de wiskundeles.

2.1 Het verhaal van de garage

Stel u voor dat u besluit een garage te maken voor de derde verjaardag van uw zoon of dochter. Hier volgt een beschrijving van zo'n proces, zoals de ik-figuur van dit verhaal, dat zelf heeft ervaren.

Ik begon met me af te vragen welke garages/speelgoedgarages ik ken: die op de

crèche van mijn zoon. Eén met verschillende verdiepingen, een oprit, een lift. Hij speelt er graag mee. Zoiets moet het worden.

Wat wil ik er allemaal op en aan maken? Twee verdiepingen (begane grond en dak); één oprit van begane grond naar dak; zoiets als een tankstation en dan natuurlijk die lift. Die lift lijkt mij het moeilijkst. Die zal veel aandacht vergen. Maar eerst een schets van het geheel (zie figuur 1).

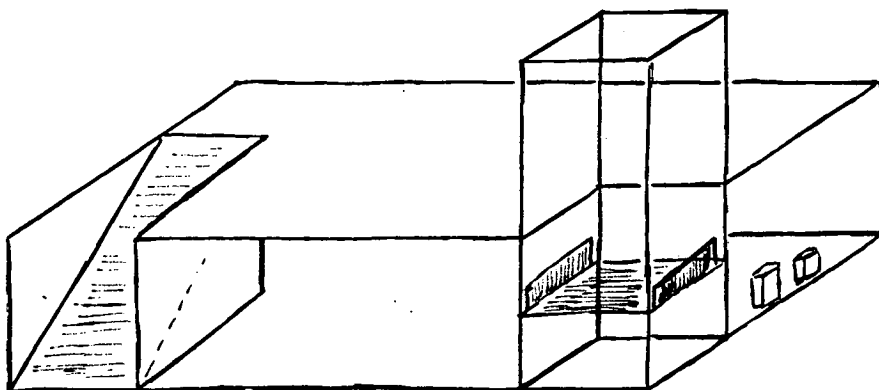


Fig. 1

Die lift is dus een soort toren, met daarin een bakje; aan de ene kant rij je erin, aan de andere kant eruit. Maar hoe zorg je ervoor dat dat bakje tijdens het hijsen niet kantelt?

Mijn oplossing is: een bakje dat aan de vier hoeken uitsparingen heeft, zodat het langs de staanders van de toren kan glijden. Die staanders hebben dan tevens de functie van geleiders (zie figuur 2).

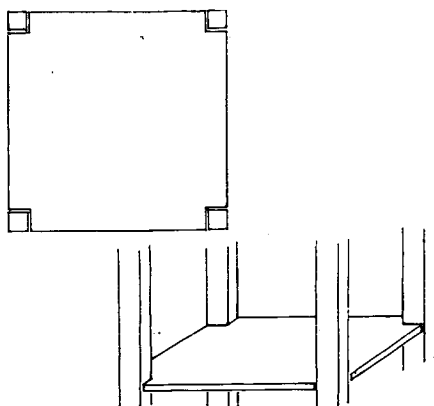


Fig. 2

Terug naar het geheel. Zijn er geen andere mij bekende garages? Natuurlijk, die waar ik mijn auto laat onderhouden. Daar hebben ze uiteraard een werkplaats. Ik besluit er, als suggestie van zo'n werkplaats, een brug in te maken. Na de probleempjes: wat moet er op en aan? hoe wordt de lift?, is er nog één groot

probleem: wat worden de afmetingen?, en één klein: hoe wordt het liftbakje omhoog en omlaag bewogen?

Eerst het punt van de afmetingen.

Mijn zoon en natuurlijk ook zijn tweejaar oudere zus moeten er mee spelen. Wat voor auto's hebben ze? Die moeten er in passen. Ze hoeven er niet allemaal in te kunnen. Wat rommelen in het arsenaal levert op: veel zogenaamde Tonka-auto's en wat vergelijkbaar spul. Verder hebben ze Play-Mobil-spullen, onder andere twee personenauto's, in verhouding een stuk groter dan de Tonka-auto's. Al rommelend realiseer ik me dat ik steeds half bewust de Tonka-auto's als *de* auto's voor de garage in gedachten heb gehad. Die Play-Mobil-auto's leveren een ander belangrijk gezichtspunt op. Twee jaar geleden heb ik een poppenhuis gemaakt op de maat van de Play-Mobil-spullen. Die garage zal wel naast het poppenhuis komen te staan, dat moet een beetje kloppen (zie figuur 3).

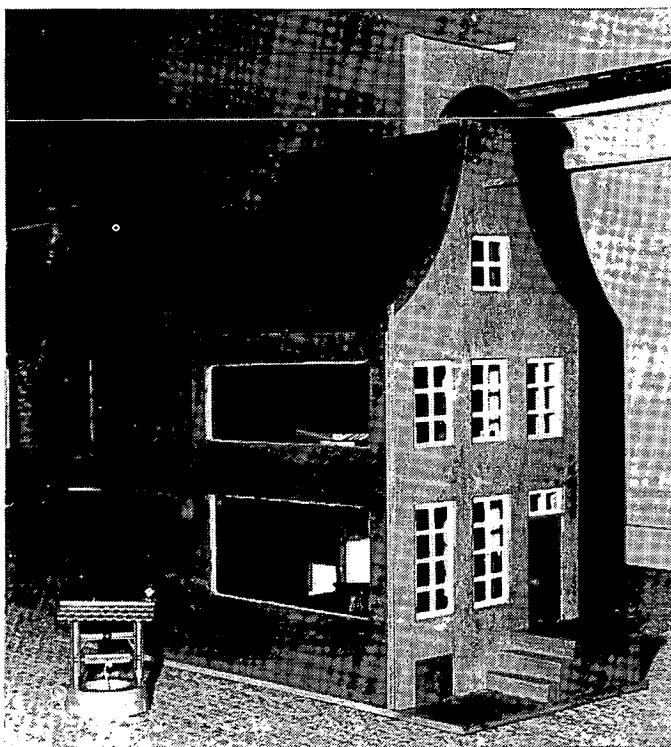
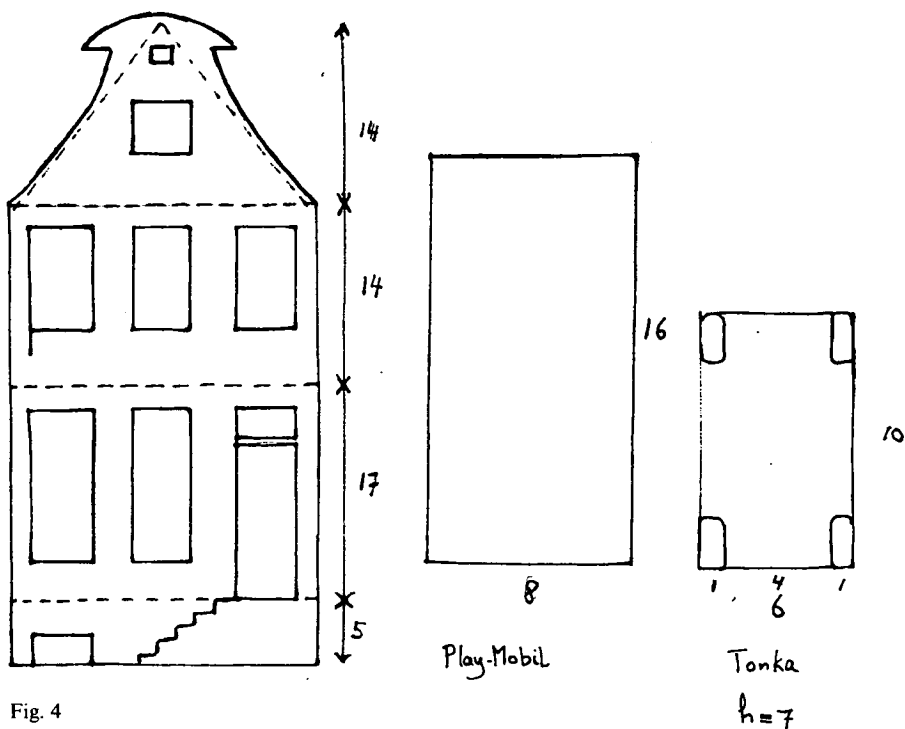


Fig. 3

Dat poppenhuis heeft een bezwaar: de bovenste verdieping is iets te laag, ze kunnen er niet goed met hun handen in. De afstand van vloer tot dak bij de garage moet dus ruim zijn (zie figuur 4). Even wat afmetingen opmeten.



Ik stel de beslissing over de afmetingen tot het laatst uit. Eerst wil ik een betere indruk van het geheel krijgen. Daartoe maak ik gedetailleerdere tekeningen. Die kunnen dan later als werktekeningen dienen. Dat ze niet op schaal zijn doet er niet toe. Zo gauw ik over de afmetingen heb beslist zet ik die erbij. Dat is voldoende (figuur 5a en b).

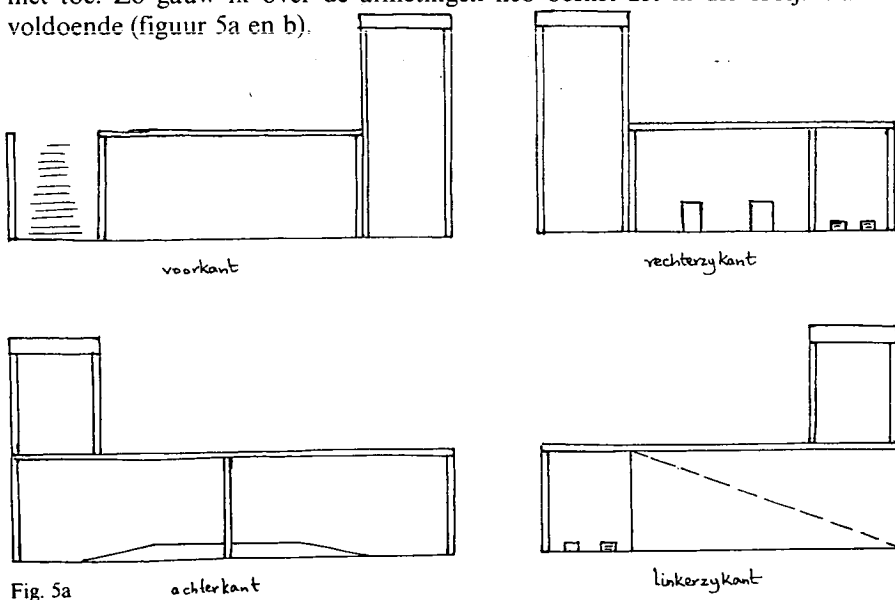
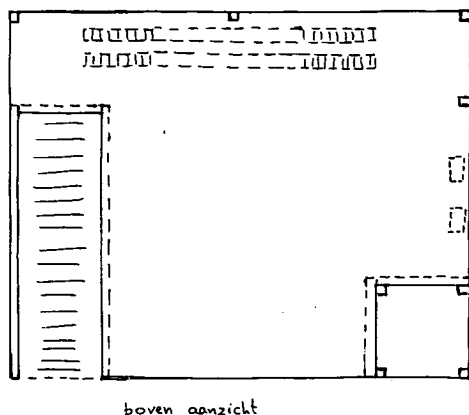


Fig. 5b



Al tekend bedenik ik het hijsmechanisme voor de lift. Boven in de toren komt een as met een slinger (figuur 6 en 7).

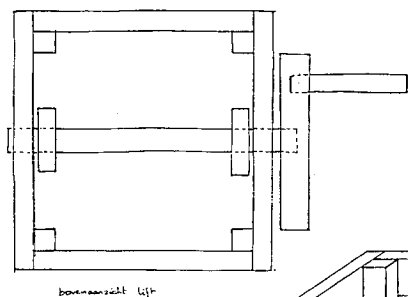


Fig. 6

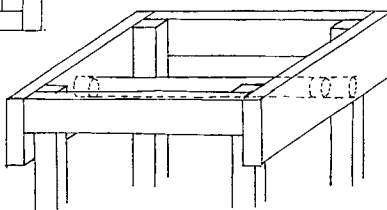


Fig. 7

En dan nu de afmetingen. De Tonka-auto's gaan met de lift; de Play-Mobil-auto's via de oprit. Uit de meetgegevens volgen nu een stel beslissingen: de oprit wordt 10 cm breed, de lift wordt 10×10 cm, de geleiders 1×1 cm. Nu zijn de hoofdafmetingen aan de beurt. De diepte van de garage wordt bepaald door de lengte en de steilheid van de oprit en de breedte van de werkplaats (brug).

Hoe steil mag de oprit zijn? Ik denk aan de hellingen die ik ken: het tunneltje onder het Mr. Visserplein in Amsterdam: $6\frac{1}{2}\%$ staat er bij; hoeveel graden is dat?, een helling van 11% tijdens onze fietsvakantie (wat hebben we moeten lopen).

Ik besluit er geen tabel of zakrekenmachine bij te halen. De garage mag niet te diep zijn, anders kunnen ze er niet met hun armen in. Ik hak de knoop door: de oprit 'overbrugt' een afstand van 30 cm, de werkplaats wordt 10 cm breed. De diepte wordt dus 40 cm. Hier zit als bezwaar aan dat de Play-Mobil-auto's de draai bovenaan de oprit moeilijk zullen kunnen nemen.

De lengte neem ik intuïtief 50 cm, dus 30 cm tussen oprit en lift. Nog eens naar de

tekeningen kijkend blijkt dat ook zo te zijn bij benadering.

Tot slot de hoogte. Ik overleg met mijn vrouw, ik kijk nog eens naar het poppenhuis. Dan kies ik voor 14 cm. Resultaat: een onmogelijk steile helling van ongeveer 50%.

Hiermee is het verhaal af. Ik zet de maten in de tekening, houd rekening met de dikte van het hout (1 cm triplex, net als bij het poppenhuis), maak een lijst van benodigd hout, laat het zagen (ik heb niet veel tijd meer tot zijn verjaardag), zet de zaak in elkaar, maak er nog iets bij: een afdak boven het tankstation, lak het geheel, hang de lift er in (hoera, hij werkt als bedoeld), maak stootblokjes voor de lift op de ochtend van de verjaardag, want hij hijst hem veel te hoog op (figuur 8).

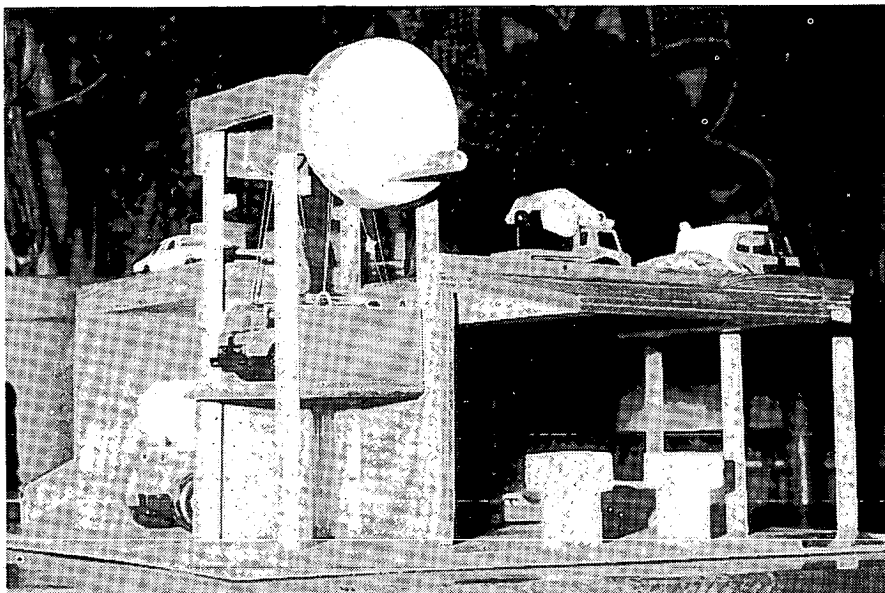


Fig. 8

Kenmerkend in dit verhaal is flexibel denken:

heen en weer gaan tussen het geheel en het detail, dicht bij de wiskunde zitten en dan weer verder er van af, je eventjes verplaatsen in een andere deelnemer, denken over en werken aan iets dat er nog niet is.

Waarom is dat flexibele denken, zo kenmerkend voor de wiskundige houding, nodig? Om dat aan te tonen een tweetal voorbeelden van het ontbreken van een wiskundige houding.

2.2 Roosters maken

Op een school is er 2 keer per jaar ouderspreekavond. Waarom zijn de wiskundeleraren vaker aan de beurt om het rooster te maken? Omdat zij doorgaans over de wiskundige houding beschikken: ze vluchten niet voor problemen die met getallen te maken hebben, zij raken daarvan niet in een paniek die het normale denken blokkeert; ze vluchten niet voor problemen die niet op te

lossen zijn met strakke, eenduidige regeltjes, maar die juist een zelfbedachte strategie vereisen; ze vluchten niet voor ingewikkelde problemen, waarin structuur moet worden aangebracht, waarbij fouten mogen worden gemaakt die weer gebruikt kunnen worden om tot betere oplossingen te komen.

2.3 *De verdwenen 14 dagen*

Het tweede voorbeeld over het ontbreken van een wiskundige houding wordt, om begrijpelijke redenen, door een onzer in de ik-vorm geschreven.

‘Bijna een jaar geleden was mijn vrouw in verwachting. Op zeker moment moest een echoscopie worden gemaakt. Met geluidsgolven wordt de buik afgetast, waardoor op een monitor een – in mijn ogen tamelijk vaag – beeld van de baby verschijnt. Door op dat beeld te meten aan de schedel van de baby, wordt vervolgens de leeftijd vastgesteld. In dit geval 16 weken. En dat, terwijl wij zeker wisten dat het 12 weken was. We hadden daar ook ijzersterke argumenten voor. Op zo’n moment verlaat je het ziekenhuis met grote twijfels. Dat wordt nog erger als de verloskundige, op grond van dit onderzoek, ook op 16 weken gaat zitten. In die situatie heb ik er 14 dagen over gedaan om het geval als volgt te analyseren. Op zeker moment ben ik het gaan benaderen vanuit “de wiskundige houding”. Eerst is er een vaag beeld op een monitor. Aan dat vage beeld wordt gemeten. Nu is iedere meting so-wie-so behept met een meetfout, en in dit geval komt daar dan ook nog de vaagheid van het beeld bij. De meting levert een getal op. In een dik boek wordt nu een grafiek opgezocht. Die grafiek zegt: zoveel gemeten, dan is de ouderdom zoveel weken. Zo’n grafiek is natuurlijk ook maar een gemiddelde. De meesten zullen daarvan afwijken.

Maar wat gebeurde er nu bij de verpleegkundigen? Het weggetje dat ze hadden afgelegd werd heilig verklaard. Het getal dat er uit kwam, kón niet fout zijn. Over getallen kan geen twijfel bestaan. De techniek heeft dit getal opgeleverd, en dus is dit getal goed.

Aldus redenerend, hadden wij na 14 dagen het probleem opgelost. En tenslotte gaf de natuur ons gelijk. Een gelijk dat op het moment zelf nauwelijks telt. Toch hebben wij 14 dagen vertwijfeld rondgelopen. Een betere wiskundige houding van de betrokkenen had ons die 14 dagen kunnen besparen.’

De emoties horend bij het gebrek aan wiskundige houding, zijn altijd wrevelig. Ze treden op als er sprake is van onvoldoende vermogen om te denken in de stel-je-voor-vorm. Een tweetal korte voorbeelden tot slot om dat te illustreren.

2.4 *Zwemmen ofzo*

Een klassegerek. Het thema is het verzamelen van gegevens. In dit geval over de leerlingen zelf. Wilma oppert de vraag: ‘Hou je van zwemmen?’.

De lerares gaat erop door: ‘De school organiseert iets, met zwemmen of iets dergelijks. Als nou eens de halve school zegt: “Ik hou niet van zwemmen”...’

Gerda, verontwaardigd: ‘Ik wel!’

2.5 *Verlies*

Een oud-collega beschreef wat hem eens overkwam toen hij thuis rustig zat te lezen.

‘Mijn dochter, ze is nu elf jaar, kwam bij me met een som uit haar rekenboekje.

Er stond:

Inkoop	f 4,80		
Verkoop	f 5,10		
Winst	. . .		
Verlies			

Ze vroeg: *‘Waarom staan er stippeltjes bij winst?’*

Ik: ‘Je koopt iets voor f 4,80 en je verkoopt ’t voor f 5,10. Heb je dan winst of verlies?’

Zij: *‘Dertig cent winst . . . , maar die ander heeft verlies.’*

Ze vond dat er verlies was, omdat zij nooit inkoop en dan weer verkoopt.

Ze koopt wat een ander goedkoper heeft ingekocht en dan heeft zij verlies.

Ze heeft nog even gedacht dat rekenen iets met **haar** ervaringen te maken had.’

3 Inleven

In al deze voorbeelden gaat het om inleven. De garageontwerper leefde zich in in zijn zoon en dochter. Gerda kan zich niet inleven in de situatie van de schoolleider die een sportdag wil organiseren. De verpleegkundige stuurt haar gezonde verstand op de vlucht als ze gekonfronteerd wordt met de wereld van techniek, getallen en grafieken. De dochter van de oud-collega kan zich niet inleven in de winkelier.

Ons gaat het om dit stel-je-voor-denken: je inleven in iets en tegelijk flexibel van het detail naar het geheel gaan, je in gedachten of op papier een schematische voorstelling maken van de nog niet aanwezige werkelijkheid, vooruit denken, loskomen van je eigen situatie. Iedere Nederlander wordt regelmatig gekonfronteerd met problemen, die ingewikkeld zijn, een globale blik vereisen, maar ook een gedetailleerde blik, die overzicht eisen, flexibiliteit van denken.

Denk maar aan: inpakken van een auto bij het op vakantie gaan, verzamelen van de spullen die mee moeten, uitstippelen van de reis (tijden, plaatsen, geld, enz), het reizen met de trein, inrichten van een kamer of huis, verhuizen, verbouwen, kopen of huren, hypotheek, organiseren van sport- en andere evenementen.

4 Emoties en context.

Blokkerende emoties komen voor bij het bedrijven van wiskunde in een context. Maar daar niet alleen, ze zijn geen privileges van wiskundeonderwijs. Ze treden op bij een onvoldoende vermogen tot of een verkeerd gericht ‘stel je voor’. Het inleven in het probleem vindt daardoor niet op de gewenste c.q. beoogde manier plaats. Het heeft per se niets te maken met onwil of iets dergelijks. Inleven is zelfs het tegenovergestelde van onwil!

Er zijn een paar opmerkingen te maken over de blokkerende emoties die berusten op het ontbreken van ‘stel je voor’. Opmerkingen van didactische aard: 1 Zodra wiskunde in een context bedreven wordt kunnen blokkerende emoties voorkomen. Als ze voorkomen kunnen ze zo heftig zijn dat het beoogde leerproces buiten bereik komt te liggen.

Wanneer de emotionele blokkades vroegtijdig manifest zijn en de docent het

beoogde leerproces toch een goede kans wil geven, kunnen blikwisselingen daartoe een hulpmiddel zijn. De mogelijke 'stel je eens voor dat...' in de voorbeelden zijn al genoemd. Een hele fraaie is ook de volgende.

Op de Olympische Spelen van Rome in 1960, werd de Nederlandse achtervolgingsploeg in de kwart-finale verslagen door de Russen met éénhonderdste van een seconde: 4.29,97 tegen 4.29,98 over de 4 km. Het ach en wee geroep in journalistieke- en wielerkringen was niet van de lucht.

In die tijd waren dit soort kleine verschillen juist 'meetbaar' geworden. Nico Scheepmaker bracht toen de volgende blikwisseling tot stand: stel je voor dat beide ploegen naast elkaar hadden gereden, hoeveel centimeter zou de ene ploeg dan voor hebben gelegen op de andere? Het bleek een verschil te zijn dat met het blote oog makkelijk waarneembaar is.

2 Soms weet je van tevoren dat er bij bepaalde leerstof blokkerende emoties op zullen treden.

In Belvia, één van de indertijd door het IOWO ontwikkelde leerstofpakketjes, wordt wiskunde bedreven in de context van het bouwen van een vakantiehuisje op een nader te bepalen kavel. Zie de tekening van het terrein (figuur 9).

Van elke kavel is de prijs gegeven. In het beoogde leerproces over oppervlakte wordt gevraagd naar de prijs per vierkante meter. Maar eerst wordt de vraag gesteld: 'Welke kavel zou jij het liefst willen hebben? En waarom?' De functie van deze vraag is het afleiden van emotionele blokkades. Zouden de leerlingen direct op het spoor van de prijs per vierkante meter worden gezet, dan kan de niet gestelde vraag blijven storen.

Wanneer de leerlingen in groepjes werken zal de gestelde vraag zeker de nodige tijd kosten, omdat de sociale context van de vraag van alles en nog wat op kan

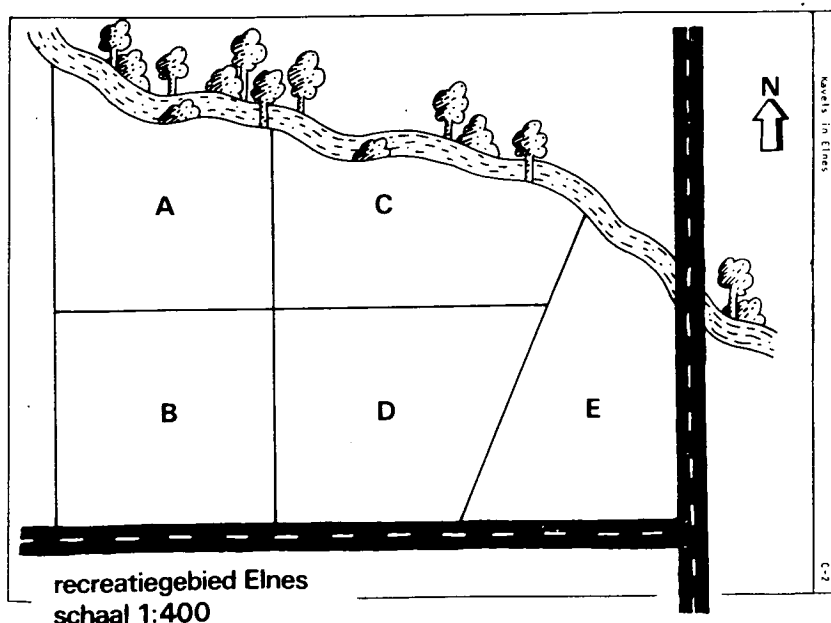


Fig. 9

roepen. Dit oproepen heeft tevens de functie van uitschakelen. De leerlingen kunnen van alles en nog wat te berde brengen. Daardoor maken ze als het ware hun geest vrij voor het beoogde 'stel je voor': stel je voor dat alle zojuist opgenoemde zaken even niet ter zake doen, en dat je slechts de prijs per vierkante meter wilt weten. Om mee te kunnen gaan in dit 'stel je voor' is het nodig dat je je geest vrij kunt houden van blokkerende emoties. De vraag naar de eigen voorkeur bereikt dat, in dit geval. In andere situaties waarin blokkades voorspelbaar zijn, kunnen soortgelijke vragen de rol van bliksemafleider spelen.

5 Wiskundige houding en wiskunde-onderwijs

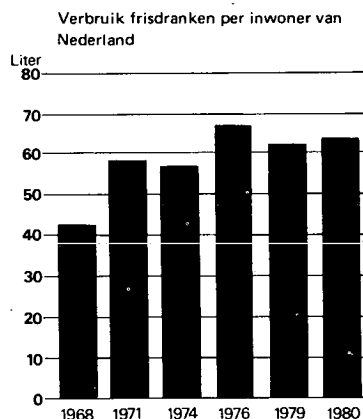
De grote vraag voor ons is: kun je hier in wiskunde-onderwijs aan werken? 'Voor ons', want het is geen privilege van wiskundeleraren. Wel is het zo dat problemen van wiskundige aard – vaak veel duidelijker dan in andere vakgebieden – de bedoelde aspecten veelal in zich hebben. 'Kun je er in wiskunde-onderwijs aan werken?' Want we beseffen dat er allerlei opvattingen bestaan over wat wiskunde is, en dat er daarbij opvattingen zijn die dit werken aan de wiskundige houding bijna uitsluiten'.

Eén voorbeeld dat aangeeft welke mogelijkheden wij zien, afkomstig uit deel 10 van Passen en meten (zie figuur 10).

20

In een staafdiagram zie je bijna direct of iets groter of kleiner is of meer of minder.

- 23 Kies het juiste antwoord.
Het diagram hiernaast laat zien:
A Het verbruik van het aantal flessen frisdrank per Nederlander.
B Het aantal Nederlanders dat frisdrank gebruikt.
C Het aantal liters frisdrank dat de Nederlander per jaar heeft verbruikt.
- 24 In welk jaar was het verbruik het grootst?
En in welk jaar het kleinst?
- 25 Hoeveel liter gebruikte men ongeveer in 1979?
In welk jaar gebruikte de Nederlander ≈ 42 liter frisdrank?
- 26 Wat kan een reden geweest zijn waarom er in 1976 zoveel frisdrank werd gebruikt?
- 27 Hoeveel ongeveer was het verbruik in 1980 groter/kleiner dan in 1968?



- 28 Neemt het verbruik van frisdrank toe of af in de jaren 1968–1980?
- 29 Ben jij een gemiddelde frisdrank-gebruiker?
Waarom?

Fig. 10

Opgave 23 dient om even goed te realiseren waar het hier om gaat. Het is dus een globale vraag, die je oplost door naar bepaalde details te kijken: de 3 mogelijkheden A, B en C, de gegevens langs de assen, de tekst van het bijschrift.

Opgave 24 vereist een blik die heen-en-weer gaat tussen het globale beeld van de staven en bepaalde – voor de vraag relevante – details: de hoogste eruit pikken

(dat is globaal kijken) en daarna het jaartal zoeken dat er bij hoort (dat is gedetailleerd kijken: met je ogen langs die ene staaf naar beneden gaan en dan 1976 aflezen, je niet bekommerend om al die andere jaartallen).

Opgave 25 vraagt soortgelijke activiteiten, maar dan uitsluitend op detail-nivo.

Opgave 26 is dan opeens een heel andere vraag. Hij wijkt af van het patroon in de vorige 3 vragen. Dat waren vragen die met een letter of met een getal moesten worden beantwoord. Nu komt er opeens een 'waarom'-vraag. En niet alleen een 'waarom'-vraag die berust op een of ander wiskundig inzicht, maar een 'waarom'-vraag die betrekking heeft op de maatschappelijke kontekst van de onderhavige leerstof. Zo'n verandering van type vraag, zo plotsklaps, heeft, wat ons betreft, alles te maken met gewenst flexibel denk-gedrag bij leerlingen.

De opgaven 27 en 28 zijn dan weer van meer wiskundige aard: 'hoeveel ...' en 'neemt het toe of af?' Typisch wiskundige vragen. Al zit er bij 28 een addertje onder 't gras, omdat er geen eenduidig antwoord is. En dus is globaal kijken nodig.

En dan komt opeens opgave 29 en daar gaat het nú eigenlijk om: ben jij een gemiddelde frisdrankverbruiker? Aan deze vraag zitten heel wat aspecten die van belang zijn in het kader van wat in dit betoog de centrale vraag was, n.l. kun je in wiskunde-onderwijs werken aan de wiskundige houding?

* het gaat over *voorstelbare dingen*:

- een jaar, opgebouwd uit 365 dagen, of uit 52 weken
- liters frisdrank, te vertalen in flessen en glazen.

* het heeft met *jezelf* te maken:

- je moet over bepaalde aspecten van je *eigen gedrag* nadenken (in dit geval je 'frisdrank-gedrag'). Dit nadenken over jezelf kan heel storend zijn. Het kan 'emoties' oproepen die de oplossing van het probleem welhaast buiten zicht brengen. Dit soort storingen moeten echter niet worden voorkomen. Ze zijn voorwaarden om tot stel-je-voor-denken te kunnen komen. Want essentieel was juist: los kunnen komen van die emoties
- je moet jezelf plaatsen in een *groter geheel*: alle nederlanders, de gemiddelde nederlander
- je kunt er *na schooltijd* nog eens over denken, omdat je er daar stellig mee wordt gekonfronteerd

* je moet *aannames* maken:

- zeg: een glas per dag: hoeveel is dat per jaar?
- of: zo'n 60 liter per jaar, dat is iets meer dan een liter per week, haal ik dat?

* je kunt *blikwisselen*, zoals uit het vorige blijkt

* er treden *echte getallen* op. Echte getallen hebben allerlei voordelen. Ze maken:

- *verificatie* mogelijk in de *eigen wereld*. Niet alleen van de gegevens hier, ook van antwoorden die met rekenfouten worden verkregen
- *verschraling* mogelijk, zoals: 60 liter, 50 weken. Met die mooie getallen kan – indien nodig – het vereiste rekenproces worden doorlopen, met de nadruk op het proces: wat moet je delen op wat? Bij sommige problemen (hier trouwens niet, lijkt mij) wil je het soms daarna nog eens precies uitrekenen

Andere voorbeelden, in een strikt wiskundige context, maar met alle aspecten van heen en weer gaan van detail naar geheel, zitten vaak in het maken van

sommen. Zoals de volgende:

Bereken de inhoud van de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ met de volgende gegevens:

$$\angle ATC \approx 90^\circ \text{ en } TA = 6$$

- eerst een tekening maken (het geheel globaal bekijken) (figuur 11).

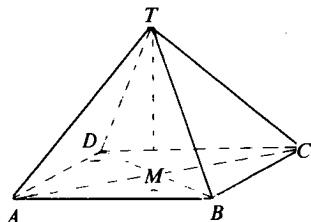


Fig. 11

- wat zijn de gegevens (detail), waar zitten die in de figuur (figuur 12)

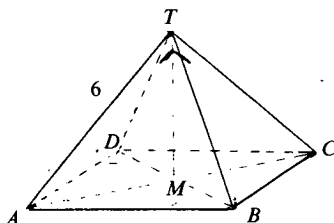


Fig. 12

- wat moet ik weten (van geheel naar het detail)
inhoud is $\frac{1}{3} \times \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}$,
dus: oppervlakte grondvlak en hoogte,
dus: lijnstuk TM en ribbe AB , want (half globaal, half detail) $ABCD$ is een vierkant
Beide weet ik niet
- hoe kom ik erachter? (welk onderdeel van het geheel bevat de details waar het om gaat? waar zitten en de gegevens en het gezochte?).
Bekijk $\triangle ACT$ (figuur 13), want daarvan weet ik alles en AC is ook diagonaal van het grondvlak
- hoe kom ik erachter? (detail-geheel)
Bekijk $\triangle ACT$, want daarvan weet ik alles en AC is ook diagonaal van het grondvlak

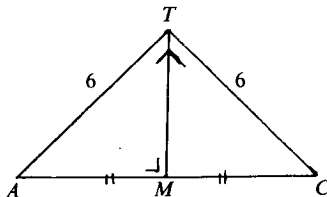


Fig. 13

- berekeningen uitvoeren (detail), zie figuur 14.
 $AC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ (stelling van Pythagoras)
 $TM = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (stelling van Pythagoras of via goniometrie)

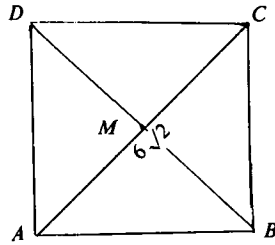


Fig. 14

$AB = 6$ (stelling van Pythagoras of (globale blik) $\triangle ABC$ is kongruent met $\triangle ACT$).

inhoud is: $\frac{1}{3} \times 36 \times 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$

6 Tenslotte

Wiskunde in een kontekst bedreven zal eerder emoties oproepen dan wiskunde-sec. Dat is niet erg. Leren, in en buiten school, gaat per definitie met hobbels en irritaties gepaard. Wel moet de docent met mogelijke emotionele blokkades leren omgaan, ze voorzien en gebruiken, ze in dienst stellen van het werken aan een wiskundige houding. Het organiseren van het ideale, vlekkeloos verlopende leerproces (zoals door stromingen als Mastery Learning, basisstof-extrastof, enz. wordt gesuggereerd dat mogelijk is) betekent kiezen voor niet bewust aan sommige leerlingen iets leren dat anderen onbewust, impliciet, intuïtief of thuis oppikken: een wiskundige houding.

En ... bewust werken aan een wiskundige houding kan nooit door af te wachten of er ooit een methode op de markt komt waarin dat allemaal wordt voorgedaan. Want een boek kan maar heel weinig, het kan hoogstens situaties aandragen (zie bijvoorbeeld het frisdrank gebruik), de docent kan ze samen met zijn of haar leerlingen oppakken en uitbuiten.

- (1) Nol van 't Riet en George Schoemaker, *Uit het dagboek van twee loerders*, Wiskrant 13 t/m 24, Utrecht 1980-1981.
- (2) Nol van 't Riet, *Stel je voor, wiskunde en emotie*, Resonans, 13e jaargang no. 8, blz. 12 t/m 15, Groningen 1981.

Euler en Goldbach over de getallen van Fermat: $F_n = 2^{2^n} + 1$.

JAN VAN MAANEN

Inleiding

Hoe los je een wiskundig probleem op? Hoe vind je een bewijs van een stelling of hoe construeer je een tegenvoorbeeld? Hoe 'groeit' de wiskunde?

Voor wiskundigen en hen die wiskundeonderwijs geven daarin zijn dit belangrijke vragen. Er is veel over geschreven, maar vaak ontbreken voorbeelden die je in staat stellen het creatieve proces van nabij te volgen.

In dit stuk wil ik zo'n voorbeeld geven. Het beschrijft de worsteling van Euler (1707-1783) en Goldbach (1690-1764) met het door Fermat (1601-1665) vanaf 1640 herhaaldelijk uitgesproken vermoeden dat de (tegenwoordig naar hem genoemde) getallen $F_n = 2^{2^n} + 1$ priem zouden zijn voor elk natuurlijk getal n .

Dat we behalve de oplossing van een probleem (in dit geval bestaande uit Eulers tegenvoorbeeld: $641 \mid F_5$) ook weten waarom dat probleem bestudeerd is, en hoe de oplossing tot stand gekomen is, is niet vanzelfsprekend. Veel wiskundigen (en ook op dit punt was Gauss wellicht de grootste) hebben resultaten gepubliceerd zonder iets te laten zien van het waarom en hoe van hun werk. Euler is een gelukkige uitzondering op deze regel. Zijn stijl is zeer open. Hij houdt zijn ideeën niet voor zichzelf maar correspondeert er uitgebreid over. Hij laat zien welke wegen doodlopen. Hij meldt ook deelresultaten in de hoop dat anderen daar iets aan hebben.

Naast de wat algemenere vraag hoe de wiskunde zich ontwikkelt, vormt Eulers inspirerende stijl van werken het thema van dit stuk.

Het vermoeden van Fermat

Fermat was geen wiskundige van beroep. Zijn wiskundig werk deed hij in de schaarse tijd die zijn baan als jurist in Toulouse hem overliet. Hij had daardoor niet de rust om zijn vaak geniale ideeën te publiceren, en zelfs niet om gevonden 'stellingen' te bewijzen. Dat laatste liet hij gewoonlijk aan zijn korrespondenten over.

Hier volgen enige voorbeelden van zulke, door Fermat zelf niet bewezen 'stellingen' op het gebied van de getaltheorie:

- zij p een priemgetal en $a \in \mathbb{N}$, dan geldt $p \mid a^p - a$ (de ‘kleine’ stelling van Fermat; voor het eerste gepubliceerde bewijs zie p. 353).
- $x^n + y^n = z^n$ heeft voor $n \geq 3$ geen oplossingen in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (de ‘grote’ of ‘laatste’ stelling van Fermat; nog steeds een open probleem).
- elk natuurlijk getal is de som van hoogstens drie driehoeksgetallen, van hoogstens vier kwadraten, van hoogstens vijf vijfhoeksggetallen enz. (algemeen bewezen door Cauchy in 1815).

In deze rij past ook

- $F_n = 2^{2^n} + 1$ is priem voor elke $n \in \mathbb{N}$.

In 1640 uit Fermat dit vermoeden voor het eerst. Hij doet dit (in een brief aan Frenicle de Bessy) als volgt:

‘Maar het volgende bewonder ik het meest: dat is dat ik er nagenoeg van overtuigd ben dat alle getallen uit die rij (het gaat over de rij 2^n , j.v.m.) waarvan de exponenten een macht van twee zijn, vermeerderd met één priemgetallen zijn, zoals

3 5 17 257 65537 4294967297

en het volgende van 20 cijfers

18 446 744 073 709 551 617; etc.

Ik heb er geen bewijs van, maar ik heb zo’n groot aantal delers door onfeilbare bewijzen uitgesloten, en zo’n groot licht verlicht mijn denken, dat ik slechts met moeite mijn woorden zou herroepen.’ [FO, 2: 206]

In 1654 zegt hij er geen bewijs voor te hebben, en legt het met het verzoek om een bewijs aan Pascal voor:

‘Het bewijs ervan is zeer moeilijk, en ik beken u dat ik het nog niet volledig heb kunnen vinden; ik zou het u niet voorleggen om ernaar te zoeken, als ik het eind ervan al had bereikt.’ [FO, 2: 309-310]

In 1658 vraagt hij ook Brouncker en Wallis om een bewijs, terwijl hij in 1659 in een brief aan Carcavy suggereert dat hij een bewijsmethode heeft. Rond 1658 schrijft Fermat bovendien een artikel, door zijn zoon Samuel opgenomen in de posthuum verschenen *Varia Opera Mathematica* (Toulouse, 1679), waarin het vermoeden als volgt voorkomt:

‘Voor mij staat echter vast, dat de getallen die je krijgt door uitgaande van 2 te kwadrateren en er één bij op te tellen, altijd priemgetallen zijn; en de waarheid van deze stelling is door mij enige tijd geleden aan de wiskundigen meegedeeld, namelijk dat 3, 5, 17, 257, 65537 (enzovoort tot in oneindig) priem zijn.’ [p.115; ook in FO, 1]

De korrespondentie tussen Euler en Goldbach

Ondanks de stelligheid waarmee het vermoeden in 1679 aan de wiskundige wereld gepresenteerd werd, wordt het 50 jaar later niet door iedereen meer als stelling beschouwd. Op een of andere manier krijgt Goldbach het dan weer als open probleem in handen.

Goldbach, geboren in 1690 te Königsberg, was na zijn studie (medicijnen en wiskunde) en een aantal grote reizen door Europa in 1725 benoemd tot hoogleraar in de wiskunde aan de in datzelfde jaar opgerichte akademie van St. Petersburg. In academische kringen cirkuleerden veel van dit soort problemen, en het is zeer wel mogelijk dat Goldbach het op deze manier heeft leren kennen.

In 1727 komt ook Euler, in 1707 te Basel geboren, na zijn benoeming tot assistent in de fysiologie aan de akademie (er was geen andere plaats vrij op dat moment) uit Basel in St. Petersburg aan. De reis duurde anderhalve maand! In de jaren 1727 en 1728 ontmoeten Goldbach en Euler elkaar regelmatig, en als Goldbach in 1728 naar Moskou vertrekt om gouverneur van de kroonprins te worden, zetten ze hun contact voort in een briefwisseling, die van 1729 tot vlak voor Goldbachs dood in 1764 zal duren.

Euler schrijft (13-10-1729) de eerste brief, en meteen in de tweede brief (01-12-1729) legt Goldbach in een PS het probleem aan Euler voor:

- (?1) 'Kent u soms de opmerking van Fermat, dat alle getallen voorgesteld door de volgende formule $2^{2^x-1} + 1$, namelijk 3, 5, 17, etc. priemgetallen zijn; hij zelf zei dat hij dit niet kon bewijzen, en na hem heeft – voor zover ik weet – niemand dit bewezen.' [EGB: 24]

Euler antwoordt (08-01-1730) dat hij niets heeft kunnen vinden dat op het vermoeden van Fermat betrekking heeft, en dat hij het idee heeft dat het alleen gebaseerd is op Fermats kennis van de eerste termen van de rij.

Maar Goldbach is vasthoudend. *Hij gaat rekenen aan een aantal speciale gevallen* en komt met resultaten in de volgende brief (22-05-1730):

- de resten bij deling van $2^{2^n} + 1$ door 7 komen cyclisch terug want
$$2^{2^2} + 1 = 17 \equiv 3 \pmod{7};$$
$$2^{2^3} + 1 = (2^{2^2})^2 + 1 \equiv 2^2 + 1 \equiv 5 \pmod{7};$$
$$2^{2^4} + 1 = (2^{2^3})^2 + 1 \equiv 4^2 + 1 \equiv 3 \pmod{7}, \text{ enzovoort;}$$
- (?2) hij zegt zo te kunnen bewijzen dat $2^{2^n} + 1$ door geen enkel getal $p \leq 100$ deelbaar is.
- (?3)– ook zonder bewijs vermeldt hij dat $2^p + 1$ te ontbinden is als $p \neq 2^n$; noodzakelijk voor het priem zijn van $2^p + 1$ dus volgens Goldbach dat $p = 2^n$, en Fermats vermoeden (?1) beweert dat dit ook voldoende is.

Nu krijgt Euler er zin in, want hij schrijft Goldbach terug (04-06-1730):

‘Nadat ik u mijn laatste brief gestuurd had, ben ik eens wat nauwgezetter gaan nadenken over de stelling van Fermat, en ik heb gezien dat deze niet op een zo wankel basis steunt als ik in eerste instantie had gedacht.’
[EGB:30]

Hij baseert zijn konklusie op de volgende overwegingen:

(!3)– $p \neq 2^n \Rightarrow 2^p + 1$ is te ontbinden.

Euler bewijst deze bewering (?3) van Goldbach *door een algemener geval te bewijzen*:

Stel $n = k \cdot i$ ($n, k, i \in \mathbb{N}$; i oneven), dan geldt

$$\frac{a^n + b^n}{a^k + b^k} = \frac{a^{ki} + b^{ki}}{a^k + b^k} = a^{k(i-1)} - a^{k(i-2)} + \dots - a^k b^{k(i-2)} + b^{k(i-1)}.$$

Als n een oneven deler heeft, is $a^n + b^n$ te ontbinden, ofwel:

(!4) $a^n + b^n$ is priem $\Rightarrow n = 2^x$ ($x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$).

Voor $a = 2$ en $b = 1$ volgt (!3) uit (!4).

– *Hij vraagt zich hierna af of in (!4) de noodzakelijke voorwaarde $n = 2^x$ voor het priem zijn van $a^n + b^n$ ook voldoende is:*

(?5) $n = 2^x \Rightarrow a^n + b^n$ is priem

(dit zou immers voor $a = 2$ en $b = 1$ ook een bewijs van (?1) opleveren).

(?5) Maar, zegt hij direkt, $5 \mid 3^2 + 4^2$ levert een tegenvoorbeeld.

– Algemeen is (?5) niet waar, maar er kunnen *speciale gevallen* zijn (waarvan $a = 2$, $b = 1$ het eenvoudigste en $a = 2$, $b = 3$ het volgende is) waarin (?5) wellicht wél te bewijzen is. Als *variatie* op het vermoeden van Fermat en als speciaal geval van (?5) vermoedt Euler (*in de hoop hieruit nieuwe ideeën op te doen*):

(?6) $n = 2^x \Rightarrow 2^n + 3^n$ is priem.

Het blijkt uit het vervolg van de brief dat het vermoeden van Fermat voor Euler reden was om Fermats werk te gaan bestuderen, want hij schrijft:

‘Ik stuitte onlangs bij het lezen van de *Opera* van Fermat op een andere, niet onelegante stelling: dat namelijk elk getal de som van vier kwadraten is, ofwel dat altijd vier kwadraten gevonden kunnen worden waarvan de som gelijk is aan een gegeven geheel getal; zo is $7 = 1 + 1 + 1 + 4$.’

[EGB: 31]

Dit is een totaal ander probleem (zie ook pag. 348), dat in Eulers getaltheoretisch werk een belangrijke plaats zal gaan innemen. Op deze wijze heeft het vermoeden van Fermat bij Euler een oriëntatie op de getaltheoretische ‘stellingen’ van Fermat veroorzaakt, die zeer vruchtbaar is gebleken. Het heeft resultaten opgeleverd op het gebied van de kleine en de grote stellingen van Fermat, van de vierkwadratenstelling, van de Pell-vergelijking en Diophantische vergelijkingen in het algemeen enzovoort.

Terug naar de briefwisseling. Goldbach stelt in zijn volgende brief (15-06-1730) voor het volgende lemma te beschouwen:

- Laat $d^* | n$ betekenen: d^* is de kleinste echte deler van n (dus: $d^* \neq 1$ en $d^* \neq n$).

(?7) **Lemma**

$$d^* | a^{2^x} + 1 \Rightarrow d^* = n^{2^x} + 1 \text{ voor zekere } n \in \mathbb{N}.$$

Hij denkt dat dit waar is maar voegt eraan toe:

‘...maar ik kan dit niet met zekerheid zeggen omdat ik het nog niet voldoende onderzocht heb, behalve in het ene geval waar $x = 1$, dat je gemakkelijk bewijst.’ [EGB: 33]

- Hierna toont Goldbach aan dat (?1) bewezen kan worden uit (?7).

Je zoekt de kleinste deler van $2^{2^x} + 1$, en volgens (?7) moet deze van de vorm $n^{2^x} + 1$ zijn voor zekere n .

Stel $n = 1$, dan is d^* even, terwijl $2^{2^x} + 1$ oneven is.

Stel $n = 2$, dan vind je $d^* = 2^{2^x} + 1$, en dus geen echte deler.

Stel $n \geq 3$, dan geldt: $n^{2^x} + 1 | 2^{2^x} + 1$. Er blijkt, dat $2^{2^x} + 1$ geen echte delers heeft, en dus priem is. Hiermee is het vermoeden *teruggebracht tot een nieuw vermoeden dat wellicht meer aanknopingspunten heeft*.

- Naar aanleiding van Eulers (?6) merkt Goldbach op dat hij daar niets over weet, maar dat hij er wel op wil *doorvariëren*:

(?8) $(2 \cdot 3)^{2^n} + 1$ is priem voor elke n

of algemener

(?9) p priem $\Rightarrow (2p)^{2^n} + 1$ is priem voor elke n .

In deze fase van hun onderzoek zijn Euler en Goldbach duidelijk op zoek naar een bewijs, en niet naar een tegenvoorbeeld. Euler versterkt die houding door in zijn antwoord (25-06-1730) aan Goldbach te schrijven:

‘De waarheid van de stelling van Fermat lijkt me heden steeds waarschijnlijker, maar toch heb ik er nog geen bewijs voor gevonden.’ [EGB: 34]

Hij voegt daar aan toe:

‘Alle termen uit deze rij zijn relatief priem, ofwel: er kunnen er geen twee gevonden worden die een gemeenschappelijke deler hebben.’ [EGB: 34]

(?10) Euler stelt dus zonder bewijs: $m \neq n \Rightarrow (F_m, F_n) = 1$. Dit vormt *extra evidentie* voor (?1), want als alle getallen F_n priem moeten zijn, dan moeten ze in elk geval relatief priem zijn. Met (?10) *probeert* Euler dus *eerst een zwakkere versie van (?1) aan te pakken*.

Goldbach had gehoopt via zijn Lemma (?7) het vermoeden (?1) te kunnen bewijzen, maar Euler geeft in zijn brief het volgende *tegenvoorbeeld* (en dat nog wel voor het geval dat je volgens Goldbach ‘gemakkelijk bewijst’):

(27)– $13 \mid 34^2 + 1 = 1157$, terwijl 13 niet te schrijven is als $n^2 + 1$ voor zekere n .

Evenzo levert $53 \mid 76^2 + 1$ een tegenvoorbeeld.

En direkt daarna ontkracht Euler nog twee vermoedens:

(29)– $73 \mid (2 \cdot 5)^{2^2} + 1 = 10001$

(26)– $17 \mid 2^{2^3} + 3^{2^3} = 6817$.

Goldbach bewijst in zijn antwoord (20-07-1730) dat de getallen F_n relatief priem zijn (ofwel (?)10) van Euler):

$$\begin{aligned} & - (2^{2^x} - 1)(2^{2^x} + 1)(2^{2^{x+1}} + 1)(2^{2^{x+2}} + 1) \dots (2^{2^{x+p-1}} + 1) = \\ & = 2^{2^{x+p}} - 1, \end{aligned}$$

waaruit volgt: $2^{2^{x+p}} + 1 \equiv 2 \pmod{2^{2^x} + 1}$ voor alle $p \geq 1$.

Hierna zegt Goldbach: ‘Hieruit volgt het zeker’ en in dit geval is dat terecht. Stel immers dat $m < n$ geldt, dan is bewezen: $F_n = kF_m + 2$. Laat d een gemeenschappelijke deler van F_m en F_n zijn, dan geldt ook $d \mid F_n - F_m = kF_m + 2 - F_m = (k - 1)F_m + 2$, en omdat $d \mid F_m$ moet dus ook gelden $d \mid 2$, dus $d = 1$ of $d = 2$. Omdat elke F_n oneven is, volgt $d = 1$, ofwel $(F_m, F_n) = 1$.

Toch heeft Eulers tegenvoorbeeld (27) tegen het Lemma waarmee Goldbach (?)1 had willen bewijzen, hem danig aan het twijfelen gebracht (ook al schrijft Euler zelf dat de waarheid van (?)1 hem steeds waarschijnlijker lijkt) getuige:

‘Vanwege dit door u aangedragen voorbeeld (nl. (27), j.v.m.) twijfel ik nu meer dan tevoren aan de waarheid van de stelling van Fermat; want het kan gebeuren dat de kleinste deler van een of andere $2^{2^x} + 1$ honderd of honderdduizend cijfers heeft, zodat tot het einde van de wereld niemand hem zal vinden.’ [EGB: 37]

Dat laatste was iets te pessimistisch, want reeds in 1732 deelt Euler in de Akademie mee:

‘Maar ik weet niet door welk lot het zo uitkomt, dat meteen al de volgende term, namelijk $2^{2^5} + 1$, ophoudt priem te zijn, want ik heb onlangs, terwijl ik met totaal andere zaken bezig was, gemerkt dat dit getal door 641 gedeeld kan worden, zoals aan ieder die het probeert, terstond zal blijken.

Want er geldt:

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297. \text{ [Euler 1732: 104-105]}$$

Voor wie dat te veel rekenwerk vindt: het kan ook als volgt:

$$641 = 5^4 + 2^4 = 5 \cdot 2^7 + 1, \text{ en dus}$$

$$2^{2^5} = 2^{32} = 2^4 \cdot 2^{28} = (641 - 5^4) \cdot 2^{28} = 641 \cdot 2^{28} - (5 \cdot 2^7)^4 =$$

$$= 641 \cdot 2^{28} - (641 - 1)^4 = k \cdot 641 - 1, \text{ ofwel}$$

$$641 \mid 2^{2^5} + 1. \text{ [Kraitchik in Hardy, Wright 1968: 14-15]}$$

In 1732 laat Euler nog niet zien hoe hij de deler 641 van F_5 gevonden heeft. In een later artikel (1747) en in brieven aan Goldbach (23-02-1742 en 05-02-1745) legt hij echter wel uit wat zijn methode is. Blijkbaar spelen 'totaal andere zaken' daarin een rol.

Die andere zaken zijn andere vermoedens uit Fermats *Opera*. Eén daarvan, door Fermat in 1640 aan Frenicle de Bessy voorgelegd met de mededeling dat hij er zelf geen bewijs voor had is de

Kleine stelling van Fermat:

- (?11) Voor elke $a \in \mathbb{N}$ en voor elk priemgetal p geldt: $p \mid a^p - a$. Als bovendien $p \nmid a$, dan geldt $p \mid a^{p-1} - 1$.

We volgen het bewijs dat Euler in zijn brief (23-02-1742) aan Goldbach geeft; [EGB: 94-96].

- (!12) 'Stelling 1: De vorm $(a + b)^p - a^p - b^p$ is altijd deelbaar door p als p een priemgetal is.'

Bewijs (parafrase):

$$(a + b)^p - a^p - b^p = \frac{p}{1} a^{p-1} b + \frac{p(p-1)}{1.2} a^{p-2} b^2 + \dots + \frac{p(p-1)}{1.2} a^2 b^{p-2} + \frac{p}{1} a b^{p-1}$$

Alle binomiaalcoëfficiënten zijn geheel. Omdat p priem is, heeft van geen enkele coëfficiënt de noemer een faktor met p gemeen en daarom deelt p elke coëfficiënt en dus ook $(a + b)^p - a^p - b^p$. Q.E.D.

- (!13) 'Stelling 2: Als $a^p - a$ deelbaar is door p , dan zal ook $(a + 1)^p - a - 1$ door p deelbaar zijn.'

Bewijs (parafrase):

Kies in (!12) $b = 1$, dan heb je $p \mid (a + 1)^p - a^p - 1^p$.

Volgens veronderstelling geldt $p \mid a^p - a$,

en door optellen volgt $p \mid (a + 1)^p - a - 1$. Q.E.D.

Met de opmerking $p \mid 1^p - 1$ en (!13) heeft Euler een bewijs met volledige inductie gegeven voor de kleine stelling van Fermat. Het is overigens niet het oudste bewijs (Leibniz had rond 1700 al een bewijs), maar Euler was wel de eerste die een bewijs publiceerde (1747).

Euler formuleert zelf de kleine stelling van Fermat als *corollarium* bij (!13):

- (!11) 'Coroll. 2: In het algemeen zal dus deze formule $a^p - a$ door p deelbaar zijn, welk geheel getal men ook voor a invult. En als p dus geen deler van diezelfde a is, dan zal ook $a^{p-1} - 1$ deelbaar zijn door p .'

Meteen gaat hij door met het zoeken van corollaria en vindt:

- (!14) 'Coroll. 3: Omdat op gelijke wijze ook $b^{p-1} - 1$ door het priemgetal p

deelbaar is, tenzij b een veelvoud van p is, volgt daaruit dat $a^{p-1} - b^{p-1}$ door p deelbaar is.'

Nu verbindt Euler een eerder idee van Goldbach met zijn eigen corollaria bij de kleine stelling van Fermat. Goldbach had met zijn **Lemma** (?) *geprobeerd terug te gaan naar de definitie* van priemgetal door mogelijke delers van $a^{2^x} + 1$ uit te sluiten:

(?) **Lemma:** $d^* \mid a^{2^x} + 1 \Rightarrow d^* = n^{2^x} + 1$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$.

Euler kwam (zoals we zagen) met tegenvoorbeelden voor $x = 1$:

(?) $13 \mid 34^2 + 1$ en $53 \mid 76^2 + 1$,

en merkte daarbij op dat een zwakkere versie van (?) wellicht wél te bewijzen is:

(?15) 'Telkens als echter deze kleinste delers (d^* dus, j.v.m.) niet precies 1 meer zijn dan een kwadraat, dan zijn ze toch waarschijnlijk allemaal som van twee kwadraten.' [EGB: 34]

In het vervolg van de brief aan Goldbach van 23-02-1742 *verzwakt* Euler (?15) *nog verder*. Als $d^* = \alpha^2 + \beta^2$, dan moet (omdat d^* oneven is) α even en β oneven zijn of omgekeerd, en in beide gevallen geldt: $d^* \equiv 1 \pmod{4}$. Zo komt hij tot:

(!16) **Theorema:** De som van twee kwadraten $aa + bb$ is niet deelbaar door een priemgetal van de vorm $4n - 1$, tenzij beide kwadraten afzonderlijk door datzelfde priemgetal deelbaar zijn.'

Bewijs (parafrase):

Stel p is priem van de vorm $4n - 1$ terwijl $p \mid a^2 + b^2$ en $p \nmid a$.

Dan volgt $p \nmid b$ (want anders $p \mid a^2 + b^2$). Pas nu (!14) toe:

Uit $p \nmid a$ en $p \nmid b$ volgt $p \mid a^{p-1} - b^{p-1} = a^{4n-2} - b^{4n-2}$.

Verder geldt $p \nmid 2b^{4n-2}$ want $p \nmid b$, dus $p \mid a^{4n-2} - b^{4n-2} + 2b^{4n-2} = a^{2(2n-1)} + b^{2(2n-1)} = (a^2 + b^2) \cdot (a^{2(2n-2)} - a^{2(2n-3)}b^2 + \dots + b^{2(2n-2)})$, dus $p \mid a^2 + b^2$. Q.E.D.

Omdat alle getallen van de vorm $4n - 1$ een priemdelers van diezelfde vorm hebben, konkludeert Euler:

(!17) 'Als dus de som van twee kwadraten (van getallen die relatief priem zijn, j.v.m.) een deler heeft, dan zal deze noodzakelijk van de vorm $4n + 1$ zijn.'

In een latere brief (05-02-1745) voegt hij hieraan toe:

(!18) 'Op dezelfde manier als ik bewezen heb, dat alle priemdelers van $a^2 + b^2$ bevat zijn in deze uitdrukking: $4n + 1$, kan ik ook bewijzen dat alle delers van $a^4 + b^4$ in deze vorm: $8n + 1$ bevat zijn, en algemeen alle delers van $a^{2^m} + b^{2^m}$ in de volgende vorm: $2^{m+1} \cdot n + 1$.' [EGB: 212]

Delers van $2^{2^5} + 1$ moeten dus van de vorm $2^6 \cdot n + 1 = 64n + 1$ zijn. Voor $n = 2, 5, 8, 11, \dots$ is $64n + 1$ een drievoud, voor $n = 1, 6, 11, \dots$ een vijfvoud, enzovoort. Het aantal te controleren mogelijke priemdelers is zo dus aanzienlijk gereduceerd.

Voor $n = 10$ vindt Euler de deler 641 van $2^{2^5} + 1$.

(24) Naderhand

De met dit probleem samenhangende wiskunde waaiert hierna zo snel uit, dat ik alleen nog een aantal van de belangrijkste feiten wil noemen.

- Behalve de getallen F_0 tot en met F_4 is nog steeds geen enkel priemgetal F_n gevonden. F_n is te ontbinden voor $5 \leq n \leq 16$, $n = 18, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 30$ en verschillende grotere waarden van n . Het is dus in tegenstelling tot (?) zeer wel mogelijk dat F_0 tot en met F_4 de enige priemgetallen F_n zijn.

- Euler bewijst in 1747 zijn vermoeden:

(!15) Elke deler van $a^2 + b^2$ met $(a, b) = 1$ is zelf ook de som van twee kwadraten,

en met behulp daarvan de ook door Fermat genoemde (maar niet bewezen) stelling:

Elk priemgetal van de vorm $4n + 1$ is te schrijven als som van twee kwadraten.

- Een onverwachte meetkundige toepassing komt van Gauss die bewijst dat de regelmatige n -hoek te konstrueren is met behulp van passer en liniaal als $n = 2^m \cdot p_1 \dots p_k$ ($m \in \mathbb{N}$; p_i een priemgetal van Fermat). Voor de regelmatige 17-hoek had hij dat al in 1796 ontdekt; hij was toen 19 jaar oud.

Slotopmerkingen

Hoewel het onjuist zou zijn om aan Eulers onderzoek van de Fermatgetallen te algemene konklusies te verbinden, springen toch een aantal interessante zaken in het oog. Het lijkt me goed om daarmee te besluiten.

In Eulers aanpak vallen verschillende kenmerken op. Hij onderzoekt systematisch de voorwaarden voor stellingen, probeert tegenvoorbeelden te vinden en vraagt zich af of hij andere stellingen kan gebruiken. Hij varieert het probleem door te proberen generalisaties te bewijzen, door bijzondere gevallen te onderzoeken en door verwante problemen te onderzoeken. Bovendien is hij pas met een stelling klaar als hij uitvoerig de gevolgen ervan heeft onderzocht (getuige de vele Corollaria).

De meeste van deze kenmerken zijn in het bovenstaande terug te vinden; er zijn er echter nog veel meer, en het bestuderen van Eulers werk met de vraag naar zijn methode als achtergrond blijft daarom de moeite waard.

In de korrespondentie van Euler en Goldbach (en trouwens ook van Fermat) speelt het formuleren van vermoedens een belangrijke rol. Over de waarde en functie daarvan kan ik me niet beter uitlaten dan Goldbach dat tegenover Euler deed (27-05-1742):

‘Het lijkt me niet onnuttig dat men ook die uitspraken beschouwt, die zeer waarschijnlijk zijn, ongeacht of er een werkelijk bewijs aan ontbreekt, want ook al worden ze achteraf foutief bevonden, dan kunnen ze toch de gelegenheid scheppen voor de ontdekking van een nieuwe waarheid.’
[EGB: 103]

Hij noemt dan Fermats vermoeden over de getallen F_n als voorbeeld, en voegt daaraan toe:

‘Op gelijke wijze wil ik me ook aan een vermoeden wagen.’

Het vermoeden dat hij dan formuleert, is het bekende en nog steeds niet bewezen ‘vermoeden van Goldbach’ dat elk even natuurlijk getal, vanaf 4, de som van twee priemgetallen is. Dit vermoeden heeft geleid tot uitgebreide onderzoekingen en nieuwe technieken (bv. zeefmethoden), en het is verbazend om te zien dat het expliciet met dat doel geformuleerd is.

Het gebeurt mij in de klas regelmatig dat leerlingen mij vragen waarom ze iets moeten bewijzen dat ze toch wel geloven. Het stranden van Fermats ‘stelling’ op Eulers tegenvoorbeeld is een voorval dat ik ze dan graag tot lering (en vermaak!) voorhoud.

Ofwel: de wiskunde is nooit te oud om er iets van te leren.

Verwijzingen

EGB: A. P. Juškevič, E. Winter eds., Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729-1764, *Abh. d. Deutschen Akad. d. Wiss. Berlin*, Klasse für Philosophie, Geschichte ..., 1965 nr. 1. Euler 1732: L. Euler, *Observationes theorematum quodam Fermatiano, aliisque ad numeros primos spectantibus*, *Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.* 6 (1732, 1733; publ. 1738), 103-107 = *Opera Omnia* (1) 2, 1-5.

Euler 1747: L. Euler, *Theoremata circa divisores numerorum*, *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.* 1 (1747, 1748; publ. 1750), 20-48 = *Opera Omnia* (1) 2, 62-85.

FO: P. Tannery, C. Henry eds., *Oeuvres de Fermat*, 3 vols., Parijs, 1891-1896.

Hardy, Wright 1968: G. H. Hardy, E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford, 1968 (4de verbeterde ed.).

Verder heb ik gebruikt:

L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, 3 vols., Washington, 1919.

H. M. Edwards, *Fermat's last theorem*, New York, 1977.

G. Polya, *How to solve it*, Princeton, 1971 (2de aangevulde ed.).

Over de auteur:

Jan van Maanen geeft 13 uur wiskunde aan het Christelijk Gymnasium te Utrecht (meer daarover in Euclides 56 (1980/1981), 41-48) en heeft verder een halve baan als wetenschappelijk assistent aan de Rijksuniversiteit Utrecht om onderzoek te doen op het gebied van de geschiedenis van de wiskunde.

Korrel

Een omstreden eindexamenopgave

Opgave 1c van vwo wiskunde II 1981, tweede tijdvak, heeft nogal wat stof doen opwaaien. Op verzoek van het bestuur van de NVvW volgt hier een analyse van de moeilijkheden.

Eerst de opgave.

In $\mathbb{R}_2$ is ten opzichte van een orthonormale basis voor elke $k \in \mathbb{R}$ gegeven de lijn l_k met vergelijking $kx_1 + x_2 + k^2 = 0$.

V is de verzameling van de lijnen l_k .

Voor elke $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en elke $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ is $A_{a,b}$ een lineaire afbeelding met matrix

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{vmatrix}.$$

c Een afbeelding $A_{a,b}$ beeldt elke l_k waarbij $k \neq 0$, af op zichzelf.

Welke relatie bestaat er tussen a en b ?

1 *Wat wordt met de vraag bedoeld?*

Ik vermoed dat de bedoeling van de vraag als volgt omschreven kan worden.

Vul in:

$A_{a,b}$ beeldt elke l_k met $k \neq 0$ op zichzelf af $\Rightarrow \dots$ (1)

De kandidaat moet nu op de plaats van de stippeltjes iets invullen zo dat er een ware bewering ontstaat.

Links van $\Rightarrow$ staat een uitspraak met vrije variabelen a en b .

Rechts van $\Rightarrow$ zal dan ook een dergelijke uitspraak komen.

Deze uitspraak met vrije variabelen a en b is dan de gevraagde relatie.

2 $\Rightarrow$

De vraag 'Welke relatie bestaat er tussen a en b ?' houdt in, dat men uit de erboven staande premisse een conclusie moet trekken. Het gaat dus om conclusies en niet om ekwivalenties. In de beantwoording van de opgave moet men dus werken met $\Rightarrow$ en niet met $\Leftrightarrow$.

Nu is $P \Rightarrow Q$ waar, als Q waar is. Als we rechts van de pijl een uitspraak met vrije variabelen a en b invullen die voor elke a en b waar is, hebben we dus aan de vraag voldaan.

Het antwoord $a + b = b + a$ is daarom een correct antwoord.

Gelukkig zal geen kandidaat het lef gehad hebben dit op te schrijven. De corrector was dan in een moeilijk parket gekomen. Hij had het maximale aantal punten moeten toekennen.

Misschien zal hij als bezwaar tegen het antwoord hebben, dat de kandidaat slechts één relatie opgeschreven heeft die aan de vraag voldoet, en niet alle relaties. Maar het opschrijven van alle relaties is in het algemeen een onbegonnen werk en dus kunnen we niet aannemen, dat de steller van de opgave dit bedoelt.

3 Hoe zal een kandidaat vermoedelijk te werk gaan?

Het $A_{a,b}$ -beeld van l_k is

$$k \frac{x_2}{b} + \frac{x_1}{a} + k^2 = 0$$

We kunnen dit beeld ook schrijven

$$bx_1 + akx_2 + abk^2 = 0$$

Deze lijn valt samen met

$$kx_1 + x_2 + k^2 = 0$$

Hieruit volgt $\frac{b}{k} = ak = \frac{abk^2}{k^2}$. Hieruit volgt $b = ak^2 \wedge k = b$.

En hieruit weer $ab = 1$.

Dankzij de omstandigheid dat we alleen maar conclusies hoeven te trekken en niet op ekwivalentie hoeven te letten, is deze redenering correct. Elke volgende bewering volgt uit de voorgaande.

4 Slimmerikken

Een slimme kandidaat deed het misschien zo.

Het $A_{a,b}$ -beeld van l_k is

$$bx_1 + akx_2 + abk^2 = 0$$

Voor elke k ($k \neq 0$) valt deze lijn samen met

$$kx_1 + x_2 + k^2 = 0$$

Dus geldt voor elke k ($k \neq 0$)

$$\frac{b}{k} = ak = \frac{abk^2}{k^2}$$

en dus voor elke k ($k \neq 0$)

$$b = ak^2 \wedge k = b$$

Er zijn geen a en b te vinden waarvoor zowel $b = ak^2$ als $k = b$ voor elke k ($k \neq 0$) juist zijn.

Voor geen enkele a en b geldt dus: $A_{a,b}$ beeldt voor elke k ($k \neq 0$) de lijn l_k af op zichzelf.

Omdat $P \Rightarrow Q$ waar is, als P een onware uitspraak is, zal dus (1) overgaan in een ware uitspraak, ongeacht hetgeen men op de plaats van de stippeltjes invult. Elke relatie voldoet dus. (En dus is het antwoord $ab = 1$ goed.)

5 Is de methode sub 3 dan toch fout?

Neen. Men heeft daar, wat men zo vaak doet, de alkwantor eenvoudig weggelaten. Men zegt: wat k ook is

$$\frac{b}{k} = ak = \frac{abk^2}{k^2}$$

Hieruit volgt, wat k ook is,

$$b = ak^2 \wedge k = b$$

en dus

$$ab = 1$$

Het gaat me niet om formele spitsvondigheden, maar om de gedachtengang van de kandidaat. Deze is correct, gezien het feit dat hij alleen maar met enkele pijlen behoeft te werken.

6 *Stijgende woede*

De lezer zal met stijgende woede menen te constateren, dat ik probeer iets dat krom is, recht te praten.

Er staat immers in de opgave: Een $A_{a,b}$ beeldt voor elke $k \neq 0$ l_k af op zichzelf. En dat is niet waar.

Ik zou liever zeggen: de premisse

$A_{a,b}$ beeldt voor elke $k \neq 0$ l_k op zichzelf af
is onvervulbaar.

Als iemand zegt, dat hij het ongewenst vindt onvervulbare premissen in een examenopgave op te nemen, dan kan ik me dat voorstellen. Maar op grond daarvan is de opgave nog niet fout.

Toch zal niemand een gevoel van onbehagen kunnen onderdrukken.

7 *Kritiek*

Heb ik dan geen kritiek? Wel degelijk, maar ik zal proberen die zo zakelijk mogelijk te funderen.

Mijn bezwaar gaat uit tegen de redactie van de vraagstelling.

‘Welke relatie bestaat er tussen a en b ?’ is een ouderwetse en in het huidige bestel ongebruikelijke formulering.

Onder een relatie wordt als regel een verzameling geordende paren verstaan. Doet men dat hier, dan wordt de vraag zinledig.

Sommigen verstaan onder een relatie tussen a en b een uitspraak met vrije variabelen a en b . Ook als men de term ‘relatie’ zo interpreteert, komt men in moeilijkheden. Wat wil het zeggen, dat een dergelijke uitspraak ‘bestaat’?

Hoe zou men tegenwoordig de vraag formuleren?

Voor welke (a, b) geldt, dat voor elke $k \neq 0$ het $A_{a,b}$ -beeld van l_k samenvalt met l_k ? En volgens conventie is met deze vraag bedoeld, dat men de verzameling van de (a, b) moet vinden, waarvoor dit het geval is.

Gezien het feit dat men de verzameling moet opsporen van alle (a, b) die aan de vraag voldoen, zal men nu met ekwivalenties moeten werken en kan men niet meer met enkele pijlen volstaan. Omdat er geen enkele (a, b) bestaat waarvoor het $A_{a,b}$ -beeld van l_k voor elke k ($k \neq 0$) met l_k samenvalt, is het antwoord nu: de lege verzameling.

8 *Subjectief slot*

Ik durf er haast mijn hand voor in het vuur te steken, dat de verscherpte vraagstelling de intentie van de CVO weergeeft. D.w.z. dat de CVO niet bedoeld heeft relaties op te sporen die uit de premisse volgen, maar die er gelijkwaardig mee zijn. Was deze bedoeling in de vraagstelling tot uitdrukking gekomen, dan was het een afgrijselijk moeilijke opgave geweest.

Ten gevolge van de ouderwetse vraagstelling is de oplossingsmethode sub 3 tolerabel geworden. Een geluk bij een ongeluk. Want nu lijkt het mij vrijwel uitgesloten, dat er een kandidaat is die gedupeerd is door het feit dat van een overvulbare premisse moest worden uitgegaan.

Dus wel kritiek. Maar brokken zijn er gelukkig niet gemaakt.

P. G. J. Vredenduin

Het klopt toch!?

*This bird does not sing because
he has an answer
He sings because he has a song.*

HARRIE BROEKMAN

Controleren van resultaten en werkwijzen kan op veel manieren. Het vooronderstelt in alle gevallen bereidheid om een verkregen resultaat kritisch te bezien. Ik zie die bereidheid als een middel (om fouten maken te verminderen) én als doel. Het vervelende is dat we op school vaak denken zó weinig tijd te hebben dat we de eventueel aanwezige bereidheid teniet doen door onze manier van controleren aan de leerlingen op te leggen of alternatieve controle-methoden niet aan bod te laten komen. Daarmee ontnemen we onszelf én de leerlingen een stimulerende mogelijkheid tot leren.

Aan de hand van een drietal voorbeelden wil ik proberen duidelijk te maken dat het bereid zijn tot controle (c.q. het zoeken van controlemogelijkheden) niet alleen mogelijk én nuttig is, maar ook nog motiverend werkt.

1 Roosterpapier en driehoeken

Roosterpapier blijkt door de grote regelmaat (de structuur¹)) een sterke steun bij het onderzoeken van meetkundige eigenschappen. Wat doe je echter met leerlingen die ernstig proberen een gelijkzijdige driehoek te tekenen met ‘gehele’ zijden en roosterpunten als hoekpunten, in de overtuiging dat zoiets mogelijk moet zijn? Tweede en hogere klassers kun je in zo’n geval vragen de hoogte te berekenen als de basishoekpunten roosterpunten zijn en het tophoekpunt ook. Het probleem is echter vaak fundamenteeler. Mensen, en dus ook leerlingen, kunnen in veel gevallen een logische redenering best volgen, maar ze geloven het resultaat toch niet. Ongeloof wortelt in een overtuiging. In dit geval wortelt het ongelooft in de overtuiging dat er sprake is van gezichtsbedrog of in het idee dat een zo regelmatige structuur als die van het vierkantenrooster de zeer regelmatige gelijkzijdige driehoek wel *moet* bevatten. Dit ongelooft komt het duidelijkst naar voren bij brugklassers, die nog niet geleerd hebben een logische redenering ook emotioneel te aanvaarden. Peter Stuit – wiskundeleraar aan de Christelijke Mavo te Ermelo – vertelde mij hoe zijn leerlingen het rooster gingen nameten om te controleren of het wel ‘eerlijk’ was. Toen dat op het papier – en op het rooster op het bord – bleek te kloppen werd er gezamenlijk geprobeerd door steeds grotere driehoeken te nemen tot een oplossing te komen.

En wat er uitkwam? Een geïnteresseerde groep leerlingen, die suggesties deden over allerlei manieren om het probleem systematisch aan te pakken, ideeën over

benaderen en – misschien wat later, of met hulp – een poging om ‘scheefgeplaatste’ driehoeken te vinden. Blijkbaar leidde de gelegenheid die de leraar de leerlingen bood hun eigen resultaten (in dit geval mislukkingen) kritisch te herzien, er toe dat zij een logische redenering ook emotioneel konden aanvaarden. Zij kwamen zelfs met eigen voorstellen.

2 Ontbinden in factoren

Hoe laat u een leerling een ontbinding in factoren controleren? Veel leraren doen dat: óf door stap voor stap nog eens na te lopen of er geen fouten gemaakt zijn, óf door de leerling de factoren te laten vermenigvuldigen om te zien ‘of het klopt’. Bij dat vermenigvuldigen kunnen er natuurlijk ook fouten gemaakt worden. En hoe controleren we dat dan weer?

Door stap voor stap de berekeningen na te lopen. Anders gezegd: door geheel binnen ons systeem te blijven. Dat wil zeggen dat je telkens dezelfde fout zou kunnen maken. Je zou dus een controle-mogelijkheid moeten zoeken die buiten het systeem valt. Een leerling probeerde dat door te suggereren om een berekening te controleren door substitutie van bijv. het getal 1 voor x in het geval $(3x + 2)(4x + 5) = 12x^2 + 23x + 10$.

Ja, zult u misschien zeggen, maar die leerling had $10x^2 + 23x + 12$ kunnen krijgen en dan klopt het ook, maar het is wel fout. Een poging om met die leerling te gaan praten over het onderscheid tussen ‘er is een waarde van x waarvoor’ en ‘voor elke waarde van x ’ zal stuiten op een stuk ongeloof, want ‘het klopt toch!?’ Een tweede leerling kwam te hulp met de suggestie dat je ook nog het getal 0 kon substitueren voor x .

Daarmee viel $10x^2 + 23x + 12$ dus af en kwam er naar voren dat:

in dit geval lijkt je te kunnen controleren door 0 en 1 te substitueren.

Maar: moet het altijd met 0 en 1; is het voldoende om twee getallen te substitueren; is er een noodzakelijk minimum aantal te substitueren getallen; is dat duidelijk te maken m.b.v. berekeningen, grafieken, etc., etc?

Hoor ik iemand zeggen dat het minder tijdrovend is om de leerlingen ‘gewoon’ hun berekening te laten controleren door netjes 4 boogjes te laten zetten (of iets dergelijks)? Twijfelt die iemand wel eens aan dat tijdgebrek, of z’n eigen mogelijkheden om tijdgebrek te voorkomen? Of zijn we een beetje blij met dat tijdgebrek, omdat we – en dat is beslist geen schande – soms moeite hebben met die enkele kritische vraag van een leerling? Maar is dat aan de andere kant voor onszelf niet een geweldige stimulans om te blijven zoeken naar mogelijkheden om juist de eigen inbreng van de leerlingen alle ruimte te geven?

3 Schrappen²⁾

In *Didactiek van de Wiskunde* onderneemt Joop van Dormolen een poging om enige ordening te brengen in de soorten fouten die je als leraar nogal eens tegenkomt bij je leerlingen.

Hij begint de betreffende paragraaf met – wat hij noemt – een bekend grapje. Het schrappen van de 6 in $\frac{16}{64}$, hetgeen het juiste getal $\frac{1}{4}$ oplevert. Ik ben het met hem

eens dat je deze 'fout' minder vaak tegenkomt dan het schrappen van a in $\frac{a+3}{a+2}$ en veel andere fouten. Ik denk alleen dat als het voorkomt dat een leerling de zessen gaat wegstrepen (schrappen), ik het best even moeilijk zal hebben als de motivering is 'het klopt toch!'

Het is heel goed mogelijk dat de leerling oprecht verbaasd is over het gedrag van de leraar: 'wat maakt die man zich druk, terwijl het klopt'.³⁾ Zo'n leerling geeft je een opening voor een (leer)gesprek die je al dan niet kunt benutten.

Anders ligt het bij de leerling die bedoeld te zeggen: 'het gaat om het eindresultaat en dat klopt, want de zessen schrappen levert de goede uitkomst $\frac{1}{4}$ '.

Het eindresultaat (de uitkomst) telt en niet de manier waarop die verkregen wordt. In feite benadrukken we die produktiegerichtheid vaak door in eerste instantie alleen uitkomsten te controleren. Bij een foutief antwoord laten we – vaak terecht, zoals bij de oplossing van een vergelijking – zien dat dit niet klopt. De leerlingen missen in een aantal gevallen dan wel de essentie, de kern waar het om draait. Want waarom mogen we bijv. die zessen niet schrappen in $\frac{16}{64}$? Omdat het niet mag in $\frac{26}{63}$, of in $\frac{96}{95}$? Of, zoals ik het een hospitant hoorde zeggen: 'jongens, het is toeval dat het klopt en schrappen mag dus niet.'

Maar is het wel toeval, of heeft het iets te maken met de speciale keuze van de getallen?

Deze vraag heeft niet zo zeer te maken met het controleren van de uitkomst, als wel met het controleren van een werkwijze. Daarom is het een belangrijke vraag, want het geeft aan dat we niet zo maar bereid zijn alles dat niet precies in ons schone straatje past weg te gooien. Uiteindelijk is $\frac{16}{64}$ wel degelijk gelijk aan $\frac{1}{4}$, of we dat nu prettig vinden of niet!

Voor mij is hier iets aan de hand dat vergelijkbaar is met het tweede voorbeeld, nl. dat over de substitutie van getallen voor x . Daar komt een vraag boven over het aantal te substitueren getallen en of dat verklaarbaar is. Hier komt een vraag boven naar het al dan niet toevallig zijn van het gelijk zijn van $\frac{16}{64}$ en $\frac{1}{4}$. Het onderzoek van deze vraag is aan te pakken door te gaan zoeken naar andere breuken met deze schrap-mogelijkheid. Daarmee komt dan de vraag naar boven naar het aantal en de eventuele verklaring.

Aan die verklaring zullen weinig leerlingen toekomen, maar het zoeken van schrap-getallen levert zeker de getallen $\frac{19}{95}$, $\frac{26}{65}$, $\frac{49}{98}$ en de triviale gevallen $\frac{11}{11}$, $\frac{22}{22}$ etc. op. Als leraar is het best fijn om gewaarschuwd te zijn voor het feit dat de voorgaande getallen voortbrengers zijn van oneindig veel getallen, zoals $\frac{166}{664}$, $\frac{1666}{6664}$ etc.

4 Slotopmerking

Door deze voorbeelden heb ik duidelijk willen maken dat het bereid zijn tot controle (c.q. bereid zijn tot zoeken van controle-mogelijkheden) niet alleen nuttig is, maar ook stimulerend kan werken. Het is daarenboven mogelijk het 'logisch-redeneren' te onderbouwen door bijvoorbeeld de door leerlingen aangedragen controle-suggesties serieus te nemen, te bespreken en – als dat mogelijk is – te benutten voor een samen (wiskundig?) bezig zijn.

Dat leerlingen het daarbij fijn vinden als hun ideeën opgepakt worden weten we allemaal, alleen . . . zouden wij ook het lef hebben om de getallen triples (3,4,5) en

(5,12,13) Marijke-getallen te noemen? En toch was dat niet zo gek van die hospitant⁴⁾, want uiteindelijk formuleerde Marijke de regel door te zeggen $4 + 5 = 9$ en 3^2 is ook 9.

Die regel had ze zelf gevonden en dat kunnen we van Pythagoras niet zeggen!

Noten

- ¹⁾ Met grote bewondering sla ik steeds weer het boek 'Struktuur' van P. van Hiele op. (Uitgeverij Muusses, Purmerend.) Naast een schat aan schitterende foto's en een daar geheel op afgestemde tekst (of toch andersom?) vind ik er veel aanzetten tot doordenken van structuur-problemen.
- ²⁾ Na het op papier zetten van dit voorbeeld ontdekte ik dat in het maart '81-nummer van Pythagoras aandacht aan de schrapgetallen besteed wordt.
- ³⁾ Men zou in dat geval in navolging van L. Festinger e.a. kunnen spreken over cognitieve dissonantie (onverenigbaarheid van cognities, d.w.z. van datgene waar een individu weet van heeft).
- ⁴⁾ Simon Gribling overkwam dit enkele jaren geleden in een Havo-klas te Gorinchem.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en
correspondentie over deze rubriek aan
Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg
148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

459. n personen staan op een rij met het gezicht naar dezelfde kant. Ze krijgen de opdracht op willekeurige wijze een kwartslag te draaien. Sommige komen nu met het gezicht naar elkaar toe te staan, andere met de rug. Nu gaat er een fluitsignaal. Dit is het sein voor elk paar dat met het gezicht naar elkaar toe staat, een halve slag te draaien. Deze operatie wordt herhaald, totdat geen paar meer met het gezicht naar elkaar toe staat. Gevraagd wordt:

- a Wat is het grootste aantal keren dat een persoon een halve slag zal moeten draaien?
- b Wat is het grootste aantal fluitsignalen dat nodig kan zijn?

(Meegedeeld door R. Troelstra; afkomstig uit Kvant)

460. Men wil de ribben van een kubus een rangnummer geven zó, dat de som van de rangnummers van de drie in één hoekpunt samenkomende ribben voor elk hoekpunt hetzelfde is.

- a Laat zien dat dit niet mogelijk is met de rangnummers 1 tot en met 12.
- b Laat zien dat het wel mogelijk is met twaalf van de rangnummers 1, 2, 3, ..., 13 (waarbij dus één van die dertien getallen niet gebruikt wordt). Op welke manieren? (ingezonden door R. Troelstra; afkomstig uit Kvant)

Oplossingen

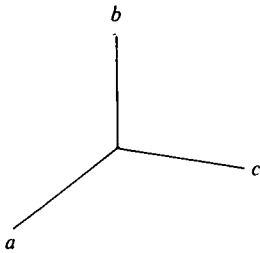
456. Gevraagd een optelling van niet-georiënteerde hoeken te definiëren en de consequenties van de definitie na te gaan.

a

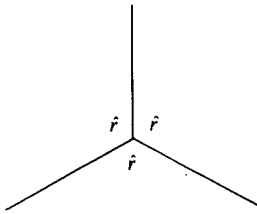
Om twee hoeken op te tellen kiezen we representanten die een been gemeen hebben en waarvan de andere benen niet aan dezelfde kant van de drager van het gemeenschappelijke been liggen. We definiëren dan

$$\widehat{ab} + \widehat{bc} = \widehat{ac}$$

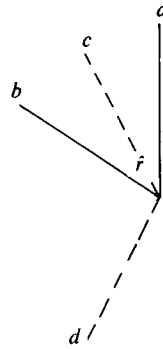
Zie figuur 1.



Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

Een totale orderrelatie die verenigbaar is met de optelling, bestaat niet.

In figuur 2 is $\hat{r} + \hat{r} = \hat{r}$. Nu is $\hat{r} + \hat{r} = \hat{r} + \hat{0}$ onverenigbaar met $\hat{r} > \hat{0}$ en ook met $\hat{r} < \hat{0}$. Waarmee de onverenigbaarheid met de optelling aangetoond is.

De deling door 2 is niet eenduidig. In figuur 3 is $2\hat{ac} = \hat{r}$ en $2\hat{ad} = \hat{r}$ waarin $\hat{ac} + \hat{ad} = \hat{gh}$ ($\hat{gh}$ is de gestrekte hoek).

Het definiëren van een hoekenheid als *het* 180° deel van de gestrekte hoek is dus onmogelijk.

Er zijn meer erge dingen. Zo is

$$\forall \hat{r}: (\hat{gh} + \hat{r}) + \hat{r} = \hat{gh}$$

en dus (behoudens enkele uitzonderingen)

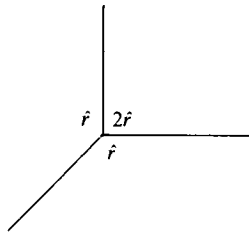
$$(\hat{gh} + \hat{r}) + \hat{r} \neq \hat{gh} + (\hat{r} + \hat{r})$$

zodat de optelling niet associatief blijkt.

Definieer $2\hat{r} = \hat{r} + \hat{r}$, $3\hat{r} = (\hat{r} + \hat{r}) + \hat{r}$ enz., dan geldt niet steeds $2\hat{r} + 2\hat{r} = 4\hat{r}$, zoals we in figuur 4 zien. Daar is

$$4\hat{r} = (2\hat{r} + \hat{r}) + \hat{r} = \hat{r} + \hat{r} = 2\hat{r}$$

$$2\hat{r} + 2\hat{r} = \hat{gh}$$

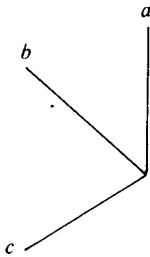


Figuur 4

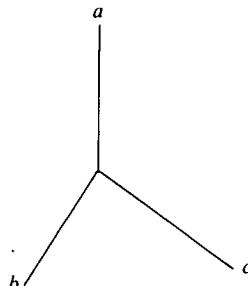
b

Alternatieve methode. Kies twee representanten die een been gemeen hebben en waarvan de andere benen niet aan dezelfde kant van het gemeenschappelijke been liggen. We definiëren $\hat{ab} + \hat{bc} = \hat{ac}$ indien b en c in een zelfde gesloten halfvlak liggen dat begrensd wordt door de drager van a en niet ($\hat{ab} = \hat{gh} \wedge \hat{bc} \neq 0$). Zie figuur 5.

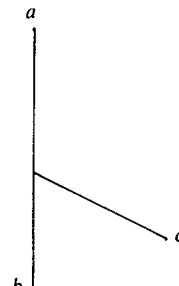
Als niet aan deze voorwaarde voldaan is, heeft $\hat{ab} + \hat{bc}$ geen betekenis. Zie figuur 6a en 6b.



Figuur 5



Figuur 6a



Figuur 6b

Deze optelling gedraagt zich veel fatsoenlijker dan de vorige. Er is bij elke $\hat{r}$ precies één $\hat{x}$ waarvoor $2\hat{x} = \hat{r}$ en meer algemeen $n\hat{x} = \hat{r}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$).

Het is dan ook mogelijk als hoekenheid te definiëren $1^\circ = \frac{1}{180} \hat{g}h$.

We kunnen dan definiëren $p \cdot 1^\circ$ waarin p rationaal is en $0 \leq p \leq 180$. In de verzameling van deze hoeken laat zich een orderrelatie definiëren die verenigbaar is met de optelling, voorzover deze gedefinieerd is, nl. de relatie $p \cdot 1^\circ > q \cdot 1^\circ \text{ def } p > q$.

Om meer algemeen $r \cdot 1^\circ$ te definiëren waarin r reëel is en $0 \leq r \leq 180$, moeten we een topologie invoeren en op de gebruikelijke manier 'de gaten vullen'.

Natuurlijk blijven we last houden van de omstandigheid dat de optelling niet steeds gedefinieerd is. Zo kunnen we niet zeggen dat de som van de hoeken van een vierhoek 360° is. Maar wel: de som van de aantallen graden van de hoeken van een vierhoek is gelijk aan 360.

Hiermee is een wetenschappelijke rechtvaardiging gegeven van hetgeen we plegen te onderwijzen in de onderbouw meetkunde. We moeten er ons echter wel voor hoeden het te hebben over hoeken die groter zijn dan 180° .

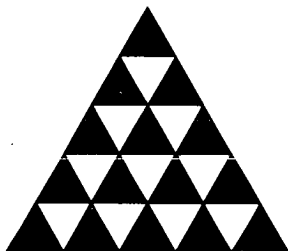
457. De steen in de boot verplaatst evenveel liter water als zijn gewicht kilogrammen bedraagt. De steen in het water evenveel als zijn volume in liters bedraagt. Dus daalt de waterspiegel. Om dezelfde reden blijft de waterspiegel ongewijzigd, als de voetbal overboord gegooit wordt. Hij blijft immers drijven.

458. Gevraagd werd de maximale lengte van een reis door deze driehoekjes, waarbij elk driehoekje ten hoogste eenmaal bezocht wordt.

Breng een zwart-wit kleuring aan, zoals in de figuur staat aangegeven. Aan elkaar grenzende driehoekjes hebben verschillende kleur.

Er zijn $\frac{1}{2}n(n+1)$ zwarte driehoekjes en $\frac{1}{2}n(n-1)$ witte. De reis wordt zo lang mogelijk door in een zwart driehoekje te beginnen en te eindigen. De maximale lengte is: $n(n-1) + 1$.

Daarbij moeten dan alle witte driehoekjes bezocht worden. Dat dit inderdaad mogelijk is, blijkt gemakkelijk. Begin bijvoorbeeld links onder en doorloop de opeenvolgende rijen beurtelings van links naar rechts en van rechts naar links. Bij elke rij op één na wordt er één veld niet bezocht.



Boekbesprekingen

Ann K. Stehney, Tilla K. Milnor, Joseph E. D'Atri, Thomas F. Banchoff, *Selected Papers on geometry*, deel 4 van The Raymond W. Brink Selected Mathematical Papers, The Mathematical Association of America, John Wiley & Sons Ltd. 1979, 338 blz., £11, —.

Ter nagedachtenis aan prof. Raymond W. Brink geeft The Mathematical Association of America de Serie Selected Mathematical Papers uit. Dit is het 4e deel van deze serie. Eerder verschenen *Selected Papers on Precalculus*, *on Calculus*, *on Algebra*. De door een commissie bijeengebrachte artikelen zijn eerder verschenen in *American Mathematical Monthly* en in *Mathematics Magazine*. Het doel dat de commissie bij de samenstelling van dit boek voor ogen stond was om aan studenten en docenten met meetkundige interesse een breed overzicht te geven van ontwikkelingen in de meetkunde: De chronologische rangschikking van de stukken geeft een extra bijdrage aan de verwezenlijking van dit doel.

Vanwege de verscheidenheid van schrijvers en onderwerpen lijkt het het beste te volstaan met een overzicht van de bijdragen.

The First Treatise on Non-Euclidean Geometry	GEORGE BRUCE HALSTED
Geometric Explanation of a Certain Optical Phenomenon	WILLIAM H. ROEVER
History of the Parallel Postulate	FLORENCE P. LEWIS
Some Properties of a Skewsquare	W. H. ECHOLS
The Four-Color Problem	H. R. BRAHANA
Conformal and Equiareal World Maps	B. H. BROWN
Soap Film Experiments with Minimal Surfaces	RICHARD COURANT
On the Densest Packing of Spherical Caps	L. FEJES
Euclidean n -Space Analogue of a Theorem of Galileo	JOSEPH BARNETT, JR
Non-Euclidean Geometry	HERBERT BUSEMANN
Area in Hyperbolic Geometry	KENNETH LEISENRING
An Elementary Analogue to the Gauss-Bonnet Theorem	G. POLYA
On Defining Conic Sections	G. B. HUFF
Combinatorial Topology of Surfaces	ROBERT C. JAMES
Metric Postulates for Plane Geometry	SAUNDERS MAC LANE
The Steiner-Lehmus Theorem	G. GILBERT AND D. MACDONNELL
A Polygon Problem	E. R. BERLEKAMP, E. N. GILBERT, AND F. W. SINDEN
Generalizations of Theorems about Triangles	CARL B. ALLENDOERFER
Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space	HERMAN GLUCK
Lattice Points and Polygonal Area	IVAN NIVEN AND H. S. ZUCKERMAN
A Proof of Minkowski's Inequality for Convex Curves	HARLEY FLANDERS
An Area-Width Inequality for Convex Curves	PAUL R. CHERNOFF
The Early Development of Algebraic Geometry	SOLOMON LEFSCHETZ
The Kiss Precise	W. S. BROWN
A Problem in Cartography	JOHN MILNOR
Critical Points and Curvature for Embedded Polynedral Surfaces	T. F. BANCHOFF
Existence of Four Concurrent Normals to a Smooth Closed Curve	NARSINGH DEO AND M. S. KLAMKIN
After the Deluge	D. A. MORAN
Dynamic Proofs of Euclidean Theorems	ROSS L. FINNEY
On Fenchel's Theorem	R. A. HORN
On a Characterization of the 2-Sphere	KRISHNA AMUR
What is a Convex Set?	VICTOR KLEE
Some Recent Results on Topological Manifolds	REINHARD SCHULTZ
On Involutions of a Circle	W. F. PFEFFER
The Historical Development of Algebraic Geometry	J. DIEUDONNE
An Isoperimetric Inequality for Polyhedra	H. H. JOHNSON AND J. OSAKA
A Characterization of Curves of Constant Width	G. D. CHAKERIAN
SUPPLEMENTARY BIBLIOGRAPHY	
PROBLEMS AND SOLUTIONS	
AUTHOR INDEX	
INDEX OF KEY WORDS	

Al met al een waardevol boek, dat velen regelmatig zullen raadplegen. Aanbevolen.

W. Kleijne.

S. G. Mikhlin, *Approximation on a rectangular grid*, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1979, XI + 224 p.

This monograph of Mikhlin centers around two topics in practical analysis, viz. the variational-difference method (or finite element method) and the constructive theory of functions. (According to the preface of I. P. Natanson's beautiful book 'Konstruktive Funktionentheorie' the name 'constructive theory of functions' goes back to the famous russian mathematician S. N. Bernstein (1880-1968); nowadays this branch of analysis is more commonly called approximation theory.) Mikhlin's book is certainly not an elementary introduction to the subject; one should have a good working knowledge of variational methods, functional analysis (in particular Sobolev spaces) and partial differential equations. The material in the book is mainly an exposition of the author's own results in the field; one is frequently referred to other books and research papers of Mikhlin not all of which have been translated from Russian. This is another reason why the book is not easy to read, although a serious effort has been made to make the monograph self-contained. Although the English is not always smooth, the quality of the translation seems to be reasonably good in general, and is apparently done with care. It is disappointing, however, that there are relatively a large number of (minor) printing errors; by a more careful reading of the galley proofs this might have been avoided. Apart from the 21 references to books and papers by Mikhlin, there is a small bibliography consisting mainly of references to work of russian authors. If available from 'Mathematical Reviews' review numbers are given; this certainly is a nice feature of the bibliography. Moreover, the monograph contains a good index.

The contents of the monograph are roughly as follows. Chapter I is introductory and explains how variational-difference methods can be constructed. This is done by way of an example which stems from R. Courant (1888-1972). The general definition of a primitive function and the associated coordinate functions, which are basic ingredients for the variational-difference method, are introduced and discussed. Chapters II-VI deal with the constructive theory of functions. Specifically, chapter II investigates what additional conditions are necessary to make the coordinate functions, as introduced in chapter I, a complete system. The topic of chapter III is the order of approximation, i.e. how does the quality of the approximation depend on the smoothness properties of the function to be approximated. (In approximation theory results of this type go under the name of 'Jackson theorems'.) Chapter IV examines how the order of approximation can be improved by using more sophisticated primitive systems of functions. Chapter V and VI deal with approximation problems in so-called degenerate norms (weighted Sobolev norms that may tend to zero or infinity). There are applications to ordinary and partial degenerate differential equations. Usually the appropriate energy norm is taken as a measure for the quality of the approximation. The central theme of chapters VII-IX is an investigation of the variational-difference method. In particular, chapter VII deals with the computation of the largest approximate eigenvalue of a self-adjoint positive definite operator having a discrete spectrum. The construction of variational-difference equations is treated in chapter VIII, while chapter IX contains various error estimates. Key concepts from the field of numerical analysis, such as the stability of a numerical process, are formulated. There is also a section on the condition number of the variational-difference matrix. Furthermore, a specific degenerate second order ordinary differential equation is studied; numerical results are given. The last two chapters are concerned with a few applications of the theory of approximation as developed in the former chapters. Chapter X deals with quadrature and cubature formulas, and the approximate solution of Fredholm equations is the subject of chapter XI. There are also some remarks on the extension of the method to certain multi-dimension integral equations with approximately smooth kernels.

Mikhlin's monograph can be recommended to applied mathematicians who are interested in both theory and application of the variational-difference method.

F. Schurer.

Mededelingen

Examenbesprekingen wiskunde vwo, havo, mavo en lbo 1982

Evenals andere jaren organiseert de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren ook dit jaar weer bijeenkomsten waarop de wiskunde-examens besproken zullen worden.

Er zal op deze bijeenkomsten vooral gewerkt worden aan een zekere verfijning van de normen. De normen zelf zijn bindend en mogen niet veranderd worden.

Hieronder volgt een overzicht van de verschillende bijeenkomsten

Examenbesprekingen wiskunde-2 op dinsdag 11 mei 1982 van 19.00 tot 21.00 uur. Let op gewijzigde tijden!

<i>Plaats</i>	<i>Adres van de school</i>	<i>Gespreksleider</i>
Utrecht	Jaarbeurscongrescentrum Croeselaan 8 3503 RM Utrecht 030-91 49 14	Dr. Th. Korthage Torenlaan 12 7231 CB Warnsveld 05750-2 34 17

Examenbesprekingen mavo-4 op woensdag 12 mei 1982 van 16.00 tot 18.00 uur.

<i>Plaats</i>	<i>Adres van de school</i>	<i>Gespreksleider</i>
Alkmaar	Bram Daaldermavo Rubenslaan 14 1816 MB Alkmaar 072-11 34 38	R. Pijning Tesselschadestraat 7 1814 EK Alkmaar 072-11 22 70
Amersfoort	Chr. Andreasmavo Ringweg Koppel 7 3813 BA Amersfoort 033-2 01 03	J. C. Vos Godivastraat 9 3813 WE Amersfoort 033-75 17 19
Amstelveen	Theo Thijssenschool (nabij V en D) Burg. Haspelslaan 6 1181 NB Amstelveen 020-41 21 56	A. P. J. A. Custers Pinksterbloem 59 1689 RC Zwaag 02290-3 62 61
Arnhem	Thorbecke Scholengemeenschap Thorbeckestraat 17 6828 TS Arnhem 085-42 30 28	L. Hoekstra Rondehof 40 6662 ZW Elst 08819-38 60
Eindhoven	Dr. Edith Steinmavo Generaal van Merlenstraat 5 5623 GC Eindhoven 040-43 52 30	J. C. G. W. van den Berg Haakakker 26 5731 EZ Mierlo 04927-17 44
Emmen	Openbare S.G. voor havo en mavo 'De Dissel' Smedingeslag 1 7824 HK Emmen 05910-2 34 56	R. Zwierstra Druwerbrink 23 7812 TA Emmen 05910-1 37 11
's-Gravenhage	Groen van Prinsterercollege Albardastraat 25 2555 XP 's-Gravenhage 070-256260	W. van der Ley Nederpelstraat 254 2552 HH 's-Gravenhage 070-97 37 85
Groningen	Menno van Coehoornschool Goeman Borgesiuslaan 161 9722 RG Groningen 050-25 02 12	L. Wesselink Jan Ensinglaan 7 9744 GP Hoogkerk 050-56 65 09
Haarlem	R.K. Mavoschool 'Jeroen'	P. vander Meijde

	Overtonstraat 42 2024 XK Haarlem 023-25 17 49	Valckenhoeflaan 77 2071 RS Santpoort-N 023-37 57 57
Hengelo	R. K. Mavo 't Lansink' Lansinkweg 80 7553 AK Hengelo 074-91 32 97	C. Th. J. Hoogsteder Prins Mauritshof 4 7061 WR Terborg 08350-24337
's-Hertogenbosch	St. Leonardusmavo Emmaplein 19 5211 VZ 's-Hertogenbosch 073-13 56 74	F. J. Mahieu Dommeldal 12 5282 WC Bostel 04116-7 34 68
Hoogezaand	Dr. A. Jacobs Scholengemeenschap Nieuweweg 67 9603 BH Hoogezaand 05980-9 23 84	W. Visser Amalia van Solmslaan 11 9602 GM Hoogezaand 05980-2 03 03
Leeuwarden	Mavo 'Nylan' Prinsessenweg 4 8931 EG Leeuwarden 05100-2 76 24	A. J. Langelaar Grietmanslaan 92 8431 CV Oosterwolde 05160-25 74
Middelburg	Oranje Nassaschool voor Chr. mavo Oranjelaan 11 4332 VA Middelburg 01180-2 52 74	A. Kammeraat Van Strijenstraat 19 4371 CH Koudekerke 01185-22 31
Roermond	R. K. Mavo Kap. Lindanus Roersingel 28 6041 KX Roermond 04750-1 40 54	W. Crijns Den Roover 17 5953 BM Reuver 04704-19 46
Roosendaal	Mavo 'De Roosenborch' Bovendonk 1 4707 ZH Roosendaal 01650-4 38 71	A. Joossen P. C. Hooftlaan 30 4707 BP Roosendaal 01650-3 56 61
Rotterdam	Chr. Mavoschool 'Het lage land' Kromhoutstraat 3-5 3067 AE Rotterdam 010-20 53 93	L. Bozuwa Abeelstraat 7 3329 AA Dordrecht 078-16 39 46
Schaesberg	Petrus en Paulusmavo Lotersbergweg 2 6372 HR Schaesberg 045-31 37 55	J. P. Habets Kerkstraat 29 6352 GG Bochof 045-44 21 17
Utrecht	R. K. mavo 'Overvecht' Pahud de Mortangesdreef 41 3562 AB Utrecht 030-61 69 46	P. Visser Lekdijk 13 4121 KG Everdingen 03472-15 48
Zwolle	Thorbecke Scholengemeenschap Dr. van Heesweg 1 8025 AB Zwolle 05200-4 66 77	S. R. Zwaan Zwette 28 8032 XM Zwolle 05200-2 46 56

Examenbesprekingen wiskunde Ito-c/mavo-drie woensdag 12 mei 1982 van 16.00 tot 18.00 uur.

<i>Plaats</i>	<i>Adres van de school</i>	<i>Gespreksleiders</i>
Amsterdam	Osdorperschoolgemeenschap Hoekenes 61	E. G. Doevendans Clara Bartonstraat 14 Amsterdam tel. 36 20 49
Arnhem	Technische School De Boulevard Boulevard Heuvelink 48 085-45 34 55	S. Schaafsma Betuwepad 25 Son tel. 38 96

Breda	KTS De Blauwe Kiel Van Riebeecklaan 2 076-13 93 52	J. Vink Dillenburg 132 Lochem tel. 31 14 A. Braat Alblastdijk 48 Roosendaal tel. 3 72 42 R. Jonker Hameie 15 Teteringen tel. 81 22 18 F. de Boer L. Hohmanstraat 24 Franeker tel. 36 10 S. Kooiman Illegaliteitslaan 11 Groningen tel. 25 12 89 W. H. J. Basten Renkenstraat 10 Sevenum tel. 24 16 O. P. D. Bolech B. Schrijenstraat 10 Sittard tel. 1 85 22 W. de Porto Schubertthof 47 Waddinxveen tel. 46 74
Drachten	Christelijke Technische School Splitting 63	
Roermond	LTS Dr. Cuypers St. Odgerusstraat 1 04750-2 29 40	
Rotterdam	Chr. Huygensschool Benthemstraat 15 010-65 60 88	

Examenbesprekingen wiskunde lbo-c donderdag 13 mei 1982 van 16.00 tot 18.00 uur.

<i>Plaats</i>	<i>Adres van de school</i>	<i>Gespreksleiders</i>
Breda	Lhno-school Groene Woud Groene Woud 2 076-65 62 50	A. Dona Prunus 6 Oisterwijk tel. 53 94 W. Ligtenberg Ursa Minor 22 Loon op Zand tel. 22 32 J. J. Acda Flevo 68 Drachten tel. 1 80 38 A. J. Tobi Kamgras 81 Leeuwarden tel. 8 12 19 F. Kunnen Beatrixstraat 11 Sevenum tel. 26 64 H. van der Plaat Nieuwstraat 88 Horst tel. 44 83 H. M. Maes Grachtstraat 33a Oirsbeek tel. 28 72 H. van Mulken D. van Laerstraat 7 Elsloo tel. 37 43 J. G. M. Smeets Twickel 2 Almelo tel. 6 58 29 M. Taal K. Julianastraat 12 Benthuizen tel. 31 35 72
Drachten	Christelijk School voor leao Splitting 17 05120-1 69 05	
Horst	School voor lbo De Reindonk Bemmelstraat 2 04709-49 00	
Sittard	Scholengemeenschap St. Catharina Odasingel 90 04490-1 75 86	
Utrecht	Mavo-/leao-school Lunetten Kampereiland 6 N.S. Lunetten (100 m) N.S. Centraal Station Buslijn 5 tot eindpunt	

Examenbesprekingen wiskunde I op vrijdag 14 mei 1982 van 16.00 tot 18.00 uur.

<i>Plaats</i>	<i>Adres van de school</i>	<i>Gespreksleider</i>
Amsterdam	Montessorilyceum Pieter de Hoochstraat 59 1071 ED Amsterdam 020-76 78 55	K. Bouwmeester Herengracht 14 1441 EW Purmerend 02990-2 37 74
Bergen op Zoom	Mollerlyceum Bolwerk Zuid 68 4611 DW Bergen op Zoom 01640-4 15 50	A. L. D. van Merode Kerkstraat 8 5101 BC Dongen 01623-1 37 46
Deventer	Alexander Hegius S.G. Het Vlier 1 7414 AR Deventer 05700-1 20 64	C. Meyboom Kolkmanweg 17 7433 CK Schalkhaar 05700-2 16 07
Groningen	Heymanscollege Nieuwe St. Jansstraat 11 9712 JM Groningen 050-12 04 30	J. V. Jansen Boterdiepwestzijde 5 9781 EH Bedum 05900-1 30 43
Roermond	Bisschoppelijk College Bob. Boumansstraat 30 6042 EH Roermond 04750-2 12 41	J. E. Mayer Heerbaan 4a 6061 ED Bocholz 04742-19 49
Rotterdam	St. Franciscuscollege Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-77 00 33	B. Hillebrand Paulus Potterstraat 17 2931 CX Krimpen a/d Lek 01807-1 52 10

Examenbesprekingen havo op vrijdag 14 mei 1982 van 19.00 tot 21.00 uur.

<i>Plaats</i>	<i>Adres van de school</i>	<i>Gespreksleider</i>
Amsterdam	Montessorilyceum Pieter de Hoochstraat 59 1071 ED Amsterdam 020-76 78 55	G. Zwaneveld Haringvlietstraat 9 II 1078 JX Amsterdam 020-73 89 12
Bergen op Zoom	Mollerlyceum Bolwerk Zuid 68 4611 DW Bergen op Zoom 01640-4 15 50	B. de Groot Rode Schouw 105 4661 VG Halsteren 01641-36 01
Deventer	Alexander Hegius S.G. Het Vlier 1 7414 AR Deventer 05700-1 20 64	F. W. de Bruyn Van Doetinchemstraat 5 7415 CW Deventer 05700-2 51 61
Groningen	Heymanscollege Nieuwe St. Jansstraat 11 9712 JM Groningen 050-12 04 30	M. van Steenis Kamplaan 8 9301 KK Roden 05908-1 81 21
Roermond	Bisschoppelijk College Bob Boumansstraat 30 6042 EH Roermond 04750-2 12 41	J. van Hulten Schakenberg 6 6041 PN Roermond 04750-1 61 13
Rotterdam	St. Franciscuscollege Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-77 00 33	H. Ekstijn Mathenesserlaan 368 B 3023 HB Rotterdam 010-76 59 26

Mededelingen van het bestuur

Het bestuur heeft op grond van artikel 6c van de statuten besloten vijftien leden, die op 1 januari 1982 hun kontributie over het jaar 1980/1981 nog niet hadden betaald, hun lidmaatschap op te zeggen.

Het bestuur verzoekt leden, die bereid zijn om twee jaar zitting te nemen in de kaskommissie, zich op te geven bij de sekretaris.

Mededelingen van de penningmeester

Leden van de vereniging buiten Europa, die Euclides per luchtpost toegezonden willen krijgen, worden verzocht voor 1 september 1982 f 20,- over te schrijven naar de girorekening van de vereniging.

Leden die vanuit het buitenland hun kontributie of andere betalingen per bank overmaken dienen altijd f 5,75 (transferkosten) extra over te maken.

Internationaal colloquium over meetkunde-onderwijs

Université de Mons, 30 augustus-2 september 1982

Het doel van dit colloquium is een uitwisseling van gedachten en informatie betreffende de huidige toestand van het meetkunde-onderwijs, vanaf de basisschool tot het einde van het middelbaar onderwijs.

Organisatie Het colloquium wordt georganiseerd door de Belgische sub-commissie van de Internationale Commissie voor Wiskunde-Onderwijs.

Algemene secties Vier algemene secties zullen gewijd zijn aan volgende onderwerpen:

- 1) Doelstellingen en methodes van het meetkunde-onderwijs.
- 2) Meetkunde en fysica-wereld.
- 3) Meetkunde en andere schoolonderwerpen.
- 4) Meetkunde en oplossing van problemen.

Werkvergaderingen Zij zullen, naast de voorgaande, gewijd zijn aan volgende onderwerpen:

- 5) Meetkundige transformaties.
- 6) Gebruik van apparatuur (inbegrepen microprocessoren).
- 7) Gebruik van oppervlakken en polyeders.
- 8) Meetkunde in basisscholen.
- 9) Meetkunde in technische en beroepsscholen.

Er zal eveneens aandacht besteed worden aan rapporten over de evolutie van de meetkunde in bepaalde landen.

Affiches Een namiddag zal gewijd zijn aan een 'poster session' teneinde iedereen toe te laten zijn ideeën onder compacte vorm voor te stellen.

Logies Er zal voor logies gezorgd worden in de studentenhuizen in het centrum van Mons.

Inschrijvingen Het tweede (en laatste) rondschrijven zal in april verstuurd worden. Het zal bestaan uit een gedetailleerd programma, het bedrag van de inschrijving en een inschrijvingsformulier. Personen die dit tweede rondschrijven wensen te ontvangen, wordt verzocht hun adres te sturen naar G. Noel, Université de l'Etat à Mons, 15 Avenue Maistriaux, B 7000 Mons, Belgique

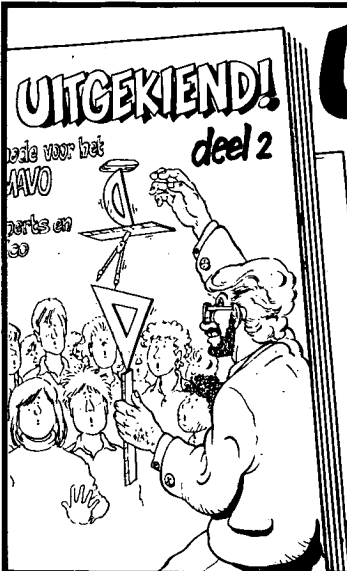
Vakantiecursus voor leraren in de exacte vakken en andere belangstellenden

Er zal tengevolge van de vakantiespreiding slechts één cursus worden gegeven en wel te Amsterdam, in het Mathematisch Centrum, op 27 en 28 augustus 1982 (vrijdag 27/8: 16.00-21.15 uur en zaterdag 28/8: 9.30-15.30 uur). Deze tijden zijn zó gekozen, dat ook leraren uit de regio's A en B, waar het schooljaar 82/83 dan reeds begonnen zal zijn, in de gelegenheid zijn de cursus te volgen.

Als *onderwerp* is gekozen: *Wiskunde in het vrije veld* (golfverschijnselen).

Uitgebreidere informatie over tijd, plaats, maaltijden en kosten, alsmede aanmeldingsformulieren en volledig programma zijn verkrijgbaar bij: Stichting Mathematisch Centrum, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, tel. 020-5924010, 4011 en 4176.

Na aanmelding wordt syllabus van te voren toegezonden.



UITGEKIEND!

Een gedifferentieerd rekenprogramma
in twee delen voor lbo en mavo

nu compleet

incl. handleiding en antwoordenboekjes

Zojust verscheen deel 2 van deze rekenmethode
die o.a. de volgende kenmerken draagt:

- instaptoets - A/B-programma - controlettoets
- laag instapniveau
- gevarieerde opgaven
- motiverende presentatie
- handleiding en antwoordenboekje.

Vraag de voorlichtingsbrochure aan!

Educaboek

Postbus 48, 4100 AA Culemborg. Tel. 03450-71911

INHOUD

N. van 't Riet, B. Zwaneveld: Wiskundige houding 333

J. van Maanen: Euler en Goldbach over de getallen van Fermat: $F_n = 2^{2^n} + 1$ 347

P. G. J. Vredenduin: Korrel 357

H. Broekman: Het klopt toch? 360

Recreatie 363

Boekbesprekingen 365

Mededelingen 368

ADRESSEN VAN AUTEURS

H. Broekman, Ped. Did. Inst., Rijksuniversiteit Utrecht, Heidelberglaan 2, postbus 80.120, 3508 TC Utrecht

J. van Maanen, Pieter de Hooghstraat 15, 3583 RG Utrecht

N. van 't Riet, Achterstekamp 35, 9301 RB Roden

P. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth

B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9'', 1078 JX Amsterdam